Prefazione

Il presente quaderno è basato su alcune lezioni tenute da V.B. Moscatelli nel corso di *Teoria delle Funzioni* per il Corso di Laurea in Matematica durante l'anno accademico 1990-91 e sulle lezioni tenute da A. Albanese ed E. Mangino nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Matematica, Università del Salento, durante l'anno accademico 2005-06.
Lo scopo del quaderno è fornire un'introduzione, per quanto possibile autosufficiente, alla teoria spettrale ed ai teoremi di rappresentazione spettrale per operatori lineari (limitati e non) definiti su spazi di Hilbert. Tali teoremi possono essere considerati come una generalizzazione per operatori in spazi infinito-dimensionali del classico risultato di algebra lineare che afferma che ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile.
L'approccio adottato evita l'uso delle risoluzioni spettrali dell'identità (didatticamente più impegnativo e meno intuitivo), preferendo invece la forma moltiplicativa dei teoremi di rappresentazione spettrale. I prerequisiti necessari sono la teoria elementare degli spazi di Banach e di Hilbert e la teoria della misura, in particolare il teorema della rappresentazione di Riesz.
Passiamo ora ad illustrare i contenuti dei vari capitoli. Nel Capitolo I, dopo aver richiamato delle nozioni sulla dualità in spazi di Banach e sugli operatori lineari chiusi, si dimostrano i primi risultati di teoria spettrale su spettro, risolvente, raggio spettrale di un operatore e si migliorano tali risultati nel caso di operatori autoaggiunti e normali su uno spazio di Hilbert.
Nel Capitolo II, con un approccio (dovuto a V.B. Moscatelli) differente rispetto a quello usuale, viene esposta la teoria di Riesz-Schauder per operatori compatti in spazi di Banach, evidenziando come tali operatori abbiano comportamenti simili a quelli con immagine finito-dimensionale riguardo la dimensioni del nucleo e la codimensione dell'immagine. Viene inoltre dimostrato il teorema di rappresentazione spettrale per operatori compatti autoaggiunti su uno spazio di Hilbert separabile, che afferma che ogni operatore di questo tipo è simile ad un operatore diagonale sullo spazio ℓ^2 delle successioni a quadrato sommabile.
Nella prima parte del Capitolo III, dopo aver costruito un opportuno calcolo funzionale, si dimostra che ogni operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert è unitariamente equivalente ad un operatore di moltiplicazione definito su un opportuno spazio di tipo $L^2(\Omega, \mu)$. Analogo risultato viene

anche provato per gli operatori normali, utilizzando la dimostrazione alternativa proposta in [**16**] che, come accennato, evita il ricorso alle risoluzioni spettrali dell'identità.
Infine il Capitolo IV è dedicato agli operatori illimitati definiti su spazi di Hilbert. Anche in questo caso si può dimostrare un teorema di rappresentazione spettrale per operatori autoaggiunti. Come conseguenza, si dimostrano le formule di minimax per gli autovalori di un operatore autoaggiunto positivo con risolvente compatto.
Le due appendici sono dedicate rispettivamente ad una introduzione alle funzioni olomorfe a valori in uno spazio di Banach ed al Teorema di Stone-Weierstrass.

Nota. Durante la stesura del quaderno è venuto a mancare Bruno Moscatelli. Nostro relatore di tesi di laurea, ci introdusse alla bellezza dell'Analisi Funzionale. La sua intelligenza, la sua cultura e la sua ironia ci sono rimaste nel cuore e ci mancano molto.

Angela Albanese
Elisabetta Mangino

Lecce, maggio 2009