APPENDICE A

Semigruppi C_0

In questa sezione presentiamo alcuni risultati relativi al problema di Cauchy astratto per un operatore lineare illimitato in uno spazio di Banach e la relazione che intercorre con la teoria dei semigruppi C_0. Per ulteriori dettagli rimandiamo ai testi [**14**], [**2**] e [**31**].

Consideriamo il problema di Cauchy astratto

$$(PCA) \qquad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \geq 0, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

dove A è un operatore lineare, possibilmente illimitato, con dominio $D(A)$ in uno spazio di Banach X e $x \in X$. Una *soluzione classica* di (PCA) è una funzione $u \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ tale che $u(t) \in D(A)$ per ogni $t \geq 0$ e u soddisfa (PCA).

Ora introduciamo i semigruppi C_0.

Definizione A.1. *Una famiglia di operatori lineari e limitati in X $(T(t))_{t\geq 0}$ è detta un semigruppo C_0 se*

(i) $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X,$
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ *per ogni* $t, s \geq 0$ *e* $T(0) = Id.$

Il generatore di $(T(t))$ è l'operatore lineare A definito da

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ esiste } \}, \\ Ax &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

Si può provare che il generatore è sempre un operatore chiuso e densamente definito. Il dominio $D(A)$ soddisfa

$$T(t)D(A) \subseteq D(A) \text{ and } AT(t)x = T(t)Ax, \quad \forall t \geq 0,\ x \in D(A).$$

Inoltre, se $x \in D(A)$,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x, \quad t \geq 0.$$

Ciò prova che se $x \in D(A)$, il problema (PCA) ha una soluzione classica $u(\cdot) := T(\cdot)x$. Diciamo che (PCA) è *ben posto* se per ogni dato iniziale $x \in D(A)$ esiste una soluzione classica $u(\cdot, x)$ e inoltre

> per ogni successione $(x_n) \subset D(A)$ con $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ e $x \in D(A)$, le corrispondenti soluzioni classiche $u(\cdot, x_n)$ convergono a $u(\cdot, x)$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}_+$.

Il seguente teorema mostra che la buona positura è equivalente alla generazione di semigruppi C_0.

Teorema A.2. *Sia A un operatore lineare con dominio $D(A)$ in uno spazio di Banach X. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(a) *$(A, D(A))$ è il generatore di un semigruppo C_0 in X.*
(b) *Il problema di Cauchy astratto (PCA) associato ad A è ben posto.*

D'altra parte, per un semigruppo C_0 $(T(t))$, si ha

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0,$$

per opportune costanti $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$. Se denotiamo con

$$\omega_0(A) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \text{ esiste } M_\omega \geq 1 \text{ tale che } \|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \forall t \geq 0\}$$

il growth bound di $(T(t))$ con generatore A, allora $(\omega_0(A), \infty) \subset \rho(A)$, dove $\rho(A)$ è l'insieme risolvente di A, e l'operatore risolvente $R(\lambda, A)$ di A è dato da

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad x \in X, \, \lambda > \omega_0(A).$$

La proposizione seguente contiene una serie di proprietà dei semigruppi C_0 e dei loro generatori.

Proposizione A.3. *Sia $(T(t))$ un semigruppo C_0 in uno spazio di Banach X con generatore $(A, D(A))$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

(i) $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ *e* $A\int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x$ *per ogni* $x \in X$ *e* $t \geq 0$.
(ii) $A\int_0^t T(s)x \, ds = \int_0^t T(s)Ax \, ds = T(t)x - x$ *per ogni* $x \in D(A)$ *e* $t \geq 0$.
(iii) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x$ *per ogni* $x \in X$.
(iv) $R(\lambda, A)T(t) = T(t)R(\lambda, A)$ *per ogni* $\lambda \in \rho(A)$ *e* $t \geq 0$.

In molte applicazioni è piuttosto complicato identificare il dominio del generatore di un semigruppo. Per questo conviene cercare un sottospazio di $D(A)$ "grande" abbastanza, nel senso precisato di seguito.

Definizione A.4. *Un sottospazio D di $D(A)$, dominio di un operatore lineare A in uno spazio di Banach X è chiamato* **core** *per A se D è denso in $D(A)$ per la norma del grafico*

$$\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in D(A).$$

Un utile criterio affinchè un sottospazio risulti un core per il generatore di un semigruppo C_0 è dato dalla proposizione seguente.

Proposizione A.5. *Sia $(A, D(A))$ il generatore di un semigruppo C_0 $(T(t))_{t\geq 0}$ in uno spazio di Banach X e sia D un sottospazio di $D(A)$. Se D è denso in X e invariante per $(T(t))_{t\geq 0}$, allora D è un core per A.*

Ricordiamo la formula integrale di rappresentazione delle potenze frazionarie di un operatore settoriale A in termini del semigruppo generato $(T(t))$ (si veda per esempio [**2**, Pag. 170]).

Proposizione A.6. *Sia A il generatore di un semigruppo C_0 $(T(t))$ limitato in uno spazio di Banach X. Se $0 \in \rho(A)$, allora*

$$(-A)^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} T(t)\, dt$$

per $0 < \Re z < 1$.

Ci proponiamo ora di introdurre una classe importante di semigruppi. Nel seguito, denotiamo il settore di $\mathbb{C}$ di angolo δ mediante

$$\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \delta\} \setminus \{0\}.$$

Definizione A.7. *Una famiglia $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta\cup\{0\}} \subset \mathcal{L}(X)$, X spazio di Banach, è detta un semigruppo analitico (di angolo $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$) se*

(a1) *$T(0) = Id$ e $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$.*
(a2) *La funzione $z \mapsto T(z)$ è analitica in Σ_θ.*
(a3) *$\lim_{\Sigma_{\theta'} \ni z \to 0} T(z)x = x$ per ogni $x \in X$ e $0 < \theta' < \theta$.*

Se, in aggiunta

(a4) *$\|T(z)\|$ è limitato in $\Sigma_{\theta'}$ per ogni $0 < \theta' < \theta$,*

chiamiamo $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta\cup\{0\}}$ semigruppo analitico limitato.

Il teorema che segue fornisce una caratterizzazione molto utile dei generatori di semigruppi analitici limitati.

Teorema A.8. *Sia $(A, D(A)$ un operatore in uno spazio di Banach X. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) *A genera un semigruppo analitico limitato $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta\cup\{0\}}$ in X;*

(ii) *A genera un semigruppo C_0 limitato $(T(t))$ in X con $\mathrm{rg}(T(t)) \subset D(A)$ per ogni $t > 0$, e*
$$\|AT(t)\| \leq \frac{M}{t}$$
per qualche costante $M > 0$;

(iii) *esiste $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tale che $e^{\pm i\delta}A$ generano semigruppi C_0 limitati in X;*

(iv) *$\Sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}} \subset \rho(A)$ e per ogni $\varepsilon \in (0, \theta)$ esiste $M_\varepsilon \geq 1$ tale che*
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \qquad \textit{per ogni } 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta+\frac{\pi}{2}-\varepsilon}.$$