

UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
“ENNIO DE GIORGI”

Simona Fornaro
Fabio Paronetto
Vincenzo Vespri

DISUGUGLIANZA DI HARNACK PER
EQUAZIONI PARABOLICHE



Quaderno 2/2008

Università del Salento - Coordinamento SIBA

UNIVERSITÀ DEL SALENTO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
“ENNIO DE GIORGI”

Simona Fornaro
Fabio Paronetto
Vincenzo Vespri

DISUGUGLIANZA DI HARNACK PER
EQUAZIONI PARABOLICHE



Quaderno 2/2008

Università del Salento - Coordinamento SIBA

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

“ENNIO DE GIORGI”

UNIVERSITÀ DEL SALENTO

Comitato di Redazione

Giuseppe De Cecco (Direttore)

Lorenzo Barone

Wenchang Chu (Segretario)

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica dell'Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

- (1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
- (2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
- (3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 2/2008

ISBN 978-88-8305-058-9

Università del Salento - Coordinamento SIBA

Disuguaglianza di Harnack per Equazioni Paraboliche

Simona Fornaro

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. CASORATI"

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

VIA FERRATA, 1 - 27100 PAVIA - ITALIA

e-mail: simona.fornaro@unipv.it

Fabio Paronetto

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "E. DE GIORGI"

UNIVERSITÀ DEL SALENTO

VIA PER ARNESANO - 73100 LECCE - ITALIA

e-mail: fabio.paronetto@unile.it

Vincenzo Vespri

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "U. DINI"

UNIVERSITÀ DI FIRENZE

VIALE MORGAGNI, 67/A - 50134 FIRENZE - ITALIA

e-mail: vespri@math.unifi.it

Prefazione

Il presente quaderno è basato sulle lezioni tenute dal Prof. V. Vespri per un corso di dottorato presso il Dipartimento di Matematica “Ennio De Giorgi” dell’Università del Salento durante l’a.a. 2005/2006.

L’obiettivo del corso è stato quello di ripercorrere in ordine cronologico i risultati più significativi relativi alla disuguaglianza di Harnack (senza la pretesa di dimostrarli tutti). La prima formulazione, quella dovuta appunto ad Harnack, risale al 1887 e riguarda le funzioni armoniche positive. Dopo alcune estensioni parziali, il contributo più importante si deve a J. Moser, che nel 1961 prova la disuguaglianza di Harnack per soluzioni (deboli) positive di equazioni lineari uniformemente ellittiche a coefficienti limitati in forma variazionale. Moser, inoltre, sottolinea l’utilità della disuguaglianza di Harnack per dedurre la locale hölderianità della soluzione. L’ulteriore passaggio verso equazioni ellittiche non lineari con crescita p viene compiuto prima da J. Serrin e poi da N. S. Trudinger pochi anni dopo e riprende lo stesso approccio di Moser.

La prima versione parabolica della disuguaglianza di Harnack viene provata separatamente da Hadamard e Pini nel 1954 per soluzioni positive dell’equazione del calore. Dieci anni dopo, nel 1964, lo stesso Moser dimostra che la disuguaglianza di Harnack continua a valere per equazioni paraboliche più generali, precisamente per equazioni del tipo $u_t = \operatorname{div}(a(x, t)Du)$, con a matrice uniformemente definita positiva e limitata. Da qui l’estensione a equazioni paraboliche quasi lineari con crescita lineare grazie a Aronson–Serrin (1967) e Trudinger (1968). A differenza del caso ellittico però, il caso di coefficienti a crescita non lineare presenta maggiori difficoltà e resta a lungo irrisolto. Nel 1986 E. DiBenedetto dimostra che la disuguaglianza di Harnack non può valere nella versione di Moser per l’equazione $u_t = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$, $p > 2$. Vale invece una disuguaglianza di Harnack *intrinseca*, cioè in una geometria determinata dalla soluzione considerata, non solo per il p -Laplaciano ma per un’ampia classe di equazioni. Questo risultato (il più recente fino a questo momento) è stato provato da DiBenedetto, Gianazza e Vespri nel 2006 e segna il passaggio fondamentale al caso di equazioni con coefficienti a crescita più che lineare.

L'intento principale di questo quaderno è stato quello di spiegare la tecnica di DiBenedetto, Gianazza e Vespi. Tale tecnica si ispira al metodo di E. De Giorgi per mostrare la limitatezza e la regolarità per certe classi di funzioni (le cosiddette *classi di De Giorgi*), che contengono in particolare le soluzioni di alcune equazioni ellittiche. La disuguaglianza di Harnack si ottiene usando solamente stime dell'energia e strumenti di teoria della misura. della positività Il metodo si applica a operatori abbastanza generali del tipo $\partial_t + A$ con A monotono a crescita $p - 1$ nel gradiente, $p \geq 2$ (si pensi al p -laplaciano). Tuttavia, nel presente quaderno lo sforzo è stato rivolto a semplificare tale metodo il più possibile (si veda il paragrafo 2.3), nella speranza di rendere più comprensibili queste nuove tecniche che, come già detto, si adattano a diverse tipologie di equazioni. Per ciò si è deciso di trattare solamente il caso $p = 2$, lasciando brevi cenni ai casi $p > 2$ e $1 < p < 2$.

Per completezza, accanto a queste tecniche nuove sono presentati brevemente anche alcuni risultati più classici, non solo nel caso parabolico, ma anche nel caso ellittico.

Indice

Prefazione	v
Notazioni	1
Capitolo 1. La disuguaglianza di Harnack nel caso ellittico	3
1.1. L'equazione di Laplace	3
1.2. Equazioni più generali	5
Capitolo 2. La disuguaglianza di Harnack nel caso parabolico	9
2.1. La dimostrazione di Pini	10
2.2. Una dimostrazione tramite confronto	13
2.3. Le classi di De Giorgi (caso $p = 2$)	21
2.4. Il caso $p \neq 2$	48
Bibliografia	55
Indice analitico	57

Notazioni

$|E|$:= misura di Lebesgue dell'insieme E

$$\int_E f := \frac{1}{|E|} \int_E f \, dx$$

$$p' := \frac{p}{p-1}$$

frontiera parabolica di $\Omega \times (0, T)$: $(\partial\Omega \times (0, T)) \cup (\Omega \times \{0\})$

G , soluzione fondamentale dell'equazione del calore

Γ_ρ , funzione di Barenblatt

$B_\rho(x_0)$, palla di centro x_0 e raggio ρ

$DG_+(\Omega, T, \gamma)$, $DG_-(\Omega, T, \gamma)$, $DG(\Omega, T, \gamma)$, classi di De Giorgi

$K_\rho(x_0)$, cubo di centro x_0 e lato 2ρ

$$Q_\rho^+(x_0, t_0) := K_\rho(x_0) \times [t_0, t_0 + \rho^2)$$

$$Q_\rho^-(x_0, t_0) := K_\rho(x_0) \times (t_0 - \rho^2, t_0]$$

$$Q_\rho(x_0, t_0) := K_\rho(x_0) \times (t_0 - \rho^2, t_0 + \rho^2)$$

$$Q_{\rho, \theta}^+(x_0, t_0) = K_\rho(x_0) \times [t_0, t_0 + \theta\rho^2)$$

$$Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0) = K_\rho(x_0) \times (t_0 - \theta\rho^2, t_0]$$

$$Q_{\rho, \theta}(x_0, t_0) = K_\rho(x_0) \times (t_0 - \theta\rho^2, t_0 + \theta\rho^2)$$

$Q_\rho^\pm, Q_{\rho, \theta}^\pm$ si riferiscono al centro $(0, 0)$

$$K_\rho := K_\rho(0)$$

La disuguaglianza di Harnack nel caso ellittico

1.1. L'equazione di Laplace

1.1.1. La disuguaglianza di Harnack. Si consideri l'equazione

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

dove Ω è un aperto di \mathbf{R}^n . Allora vale la seguente disuguaglianza, dovuta ad Harnack (1887) nel caso $n = 2$.

LEMMA 1.1.1. *Sia $u \geq 0$ una soluzione di classe $C^2(\Omega)$ dell'equazione $\Delta u = 0$ in Ω . Allora per ogni $x_0 \in \Omega$, per ogni ρ, R con $0 < \rho < R$ e $B_R(x_0) \subset \Omega$ e per ogni $x \in B_\rho(x_0)$ vale la stima*

$$\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^{n-2} \frac{R-\rho}{R+\rho} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-\rho}\right)^{n-2} \frac{R+\rho}{R-\rho} u(x_0).$$

Dimostrazione - Per una generica $\varphi \in C(\partial\Omega)$ la soluzione v del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(0) \\ v = \varphi & \text{in } \partial B_R(0) \end{cases} \quad (1.1)$$

può essere scritta tramite il nucleo di Poisson (si veda, ad esempio, il paragrafo 2.2.4 in [7]) come segue

$$v(x) = \frac{1}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \varphi(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (1.2)$$

Di conseguenza, supponendo per semplicità $x_0 = 0$, si ha

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} u(y) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} d\mathcal{H}^{n-1} \leq \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{(|y|-|x|)^n} d\mathcal{H}^{n-1} \leq \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \frac{n\omega_n R^{n-1}}{(R-|x|)^n} \int_{\partial B_R} u(y) d\mathcal{H}^{n-1} = \\ &= \frac{R+|x|}{R-|x|} \left[\frac{R}{R-|x|} \right]^{n-2} u(0) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'uguaglianza $u(0) = \int_{\partial B_R} u(y) d\mathcal{H}^{n-1}$

valida per funzioni armoniche.

Usando la stima $|x - y|^n \leq (|x| + |y|)^n$ e ragionando analogamente si ottiene la seconda stima. \square

OSSERVAZIONE 1.1.2. - Fissati $0 < \rho < R$ si ottiene dal teorema precedente la seguente stima

$$\sup_{B_\rho(x_0)} u \leq \left(\frac{R + \rho}{R - \rho} \right)^n \inf_{B_\rho(x_0)} u$$

da cui si deduce che

$$\sup_{B_r(x_0)} u \leq \gamma \inf_{B_r(x_0)} u \quad \text{per ogni } r \leq \rho \quad (1.3)$$

con la costante $\gamma = \left(\frac{R + \rho}{R - \rho} \right)^n$. Di fatto la costante γ dipende dalla dimensione e da $(1 - \alpha)^{-1}$ dove $\alpha = \rho/R$ e si può stimare

$$\gamma \leq 2^n / (1 - \alpha)^n.$$

Di conseguenza la costante rimane la stessa in tutte le palle $B_\rho(x_0) \subset B_R(x_0) \subset \Omega$ con ρ/R fissato.

TEOREMA 1.1.3. *Sia $u \geq 0$ una soluzione C^2 di $\Delta u = 0$ in Ω , Ω aperto di \mathbf{R}^n . Allora per ogni aperto connesso $\omega \subset \subset \Omega$ si ha che esiste $\gamma = \gamma(n, \omega)$ tale che*

$$\sup_{\omega} u \leq \gamma \inf_{\omega} u.$$

Dimostrazione - Poiché Ω è aperto, fissati $x, y \in \bar{\omega}$ per cui $u(x) = \sup_{\omega} u$, $u(y) = \inf_{\omega} u$, esiste un cammino $\Gamma \subset \bar{\omega}$ che unisce x e y . Ricoprendo Γ con un numero finito di palle $B_\rho(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, in modo tale che $B_\rho(x_i) \subset B_R(x_i) \subset \Omega$ e $B_\rho(x_i) \cap B_\rho(x_{i+1}) \neq \emptyset$ per ogni $i \in \{1, \dots, N - 1\}$. Per comodità supponiamo che $x \in B_\rho(x_1)$, $y \in B_\rho(x_N)$. Detta γ la costante che appare in (1.3) si ha allora

$$\begin{aligned} \sup_{\omega} u &= \sup_{B_\rho(x_1)} u \leq \gamma \inf_{B_\rho(x_1)} u \leq \gamma \sup_{B_\rho(x_2)} u \leq \\ &\leq \gamma^2 \inf_{B_\rho(x_2)} u \leq \dots \leq \gamma^N \inf_{B_\rho(x_N)} u = \gamma^N \inf_{\omega} u. \quad \square \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.1.4. - Ovviamente dal Teorema 1.1.3 si deduce che

$$\sup_{\omega'} u \leq \sup_{\omega} u \leq \gamma \inf_{\omega} u \leq \gamma \inf_{\omega'} u \quad \text{per ogni } \omega' \subset \omega.$$

1.1.2. Locale hölderianità. Dalla disuguaglianza di Harnack si può dedurre per funzioni armoniche la locale hölderianità. Infatti sia $x_0 \in \Omega$, l'aperto considerato all'inizio e u armonica in Ω . Definiamo

$$M(R) = \sup_{B_R} u, \quad m(R) = \inf_{B_R} u. \quad (1.4)$$

dove per semplicità $B_R = B_R(x_0)$. Allora, per $\epsilon > 0$, le funzioni

$$M(R) - u + \epsilon \quad \text{e} \quad u - m(R) + \epsilon$$

sono positive in $B_{R/2}$ per cui vale la disuguaglianza di Harnack (1.3). Possiamo supporre anche $\epsilon = 0$, dal momento che la costante γ è indipendente da ϵ ed è quindi possibile poi mandare ϵ a zero. Si ottiene applicando (1.3) a tali funzioni

$$M(R) - m(R/2) \leq \gamma[M(R) - M(R/2)],$$

$$M(R/2) - m(R) \leq \gamma[m(R/2) - m(R)].$$

Sommando le due espressioni, e ponendo $\text{osc}(u, r) := M(r) - m(r)$, si ha

$$\text{osc}(u, R) + \text{osc}(u, R/2) \leq \gamma[\text{osc}(u, R) - \text{osc}(u, R/2)] \quad (1.5)$$

da cui

$$\text{osc}(u, R/2) \leq \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \text{osc}(u, R) = \eta \text{osc}(u, R).$$

Reiterando il procedimento si ottiene

$$\text{osc}(u, 2^{-k}R) \leq \eta^k \text{osc}(u, R).$$

Si osservi che $\eta^{-1} = (\gamma + 1)/(\gamma - 1) \in (1, 2)$ (se $\gamma > 3$).

Siano ora $x, y \in \Omega$ tali che

$$\frac{R}{2^{n+1}} \leq |x - y| \leq \frac{R}{2^n}.$$

Dalla stima precedente si ottiene

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \text{osc}(u, 2^{-n}R) \leq \eta^n \text{osc}(u, R) = 2^{-n|\log_2 \eta|} \text{osc}(u, R) \\ &\leq \text{osc}(u, R) \left(\frac{2}{R}\right)^{|\log_2 \eta|} |x - y|^{|\log_2 \eta|} \end{aligned}$$

con $|\log_2 \eta| = \log_2 \eta^{-1} < 1$ se $\gamma > 3$. Poiché $\text{osc}(u, R) < +\infty$ si ha che u risulta hölderiana.

1.2. Equazioni più generali

Per quanto visto nel paragrafo precedente la disuguaglianza di Harnack è utile per mostrare la regolarità.

Dopo la dimostrazione di Harnack vista nel Lemma 1.1.1 una prima estensione di tale risultato per operatori lineari del tipo

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \quad (1.1)$$

è dovuta a L. Lichtenstein nel 1912 (si veda [23]). Tuttavia essa si limita al caso bidimensionale e richiede che i coefficienti siano piuttosto regolari. Nel 1930 Feller (si veda [8]) estende tale risultato al caso multidimensionale. Successivamente, nel 1956, in [19] J. Serrin prova la disuguaglianza di Harnack per soluzioni positive di equazioni della forma $Lu = 0$, dove L è definito da (1.1), in più variabili riducendo la regolarità richiesta ai coefficienti e facendo intravedere la possibilità di studiare il caso non lineare. In effetti, nel 1961, il celebre lavoro di J. Moser [15] segna un passo importante in questa direzione nel quale l'autore dimostra la disuguaglianza di Harnack per soluzioni deboli, positive, di equazioni lineari in forma variazionale

$$\operatorname{div}(a \cdot Du) = 0$$

con a simmetrica e

$$c|\xi|^2 \leq (a \cdot \xi, \xi) \leq C|\xi|^2 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Risultato preliminare alla disuguaglianza è il seguente teorema (si veda il Teorema 2 in [15]).

TEOREMA 1.2.1. *Se u è una soluzione positiva di $\operatorname{div}(a(x) \cdot Du) = 0$ in Ω aperto di \mathbf{R}^n , con a matrice strettamente definita positiva, simmetrica e di coefficienti $L^\infty(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, si ha che per $p > 1$ e per ogni palla $B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ esiste $c > 0$ tale che*

$$\sup_{B_R(x_0)} u \leq c \left(\frac{p}{p-1} \right)^2 \left(\int_{B_{2R}(x_0)} u^p dx \right)^{1/p}$$

dove $Q_h(x_0)$ rappresenta il cubo di lato h e centro x_0 .

OSSERVAZIONE 1.2.2. - Oltre al risultato precedente Moser stima la norma L^p della soluzione (per opportuni p) con l'estremo inferiore della soluzione, da cui ricava la disuguaglianza di Harnack.

Più in generale vale il seguente risultato sulla locale limitatezza delle soluzioni (si veda il capitolo 8 in [11]). Dato Ω aperto di \mathbf{R}^n si consideri un operatore L della forma

$$Lu = -\operatorname{div}(a \cdot Du) + b \cdot Du + cu$$

con coefficienti $L^\infty(\Omega)$ e a matrice strettamente definita positiva.

TEOREMA 1.2.3. *Sia u è una soluzione di $Lu = g + \operatorname{div} f$ con $g \in L^{q/2}(\Omega)$, $f_i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$ per un qualche $q > n$. Allora per ogni palla*

$B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ e $p > 1$ esiste c (dipendente dai coefficienti, n, p, q) tale che

$$\|u\|_{L^\infty(B_R(x_0))} \leq c \left(R^{-n/p} \|u\|_{L^p(B_{2R}(x_0))} + R^{2\delta} \|g\|_{L^{q/2}(\Omega)} + R^\delta \|f\|_{L^q(\Omega)} \right),$$

dove $\delta = 1 - n/q$.

Sebbene Moser in [15] si limiti a considerare equazioni lineari la tecnica dimostrativa è intrinsecamente non lineare. Così nel 1964 Serrin ne riprende l'idea (si veda [20]) per ottenere la disuguaglianza di Harnack anche per equazioni quasi lineari del tipo

$$\operatorname{div}(a(x, u, Du)) + b(x, u, Du) = 0 \quad (1.2)$$

con a, b funzioni misurabili che verificano le seguenti condizioni di crescita

$$\begin{aligned} (a(x, u, \xi), \xi) &\geq a_1^{-1} |\xi|^p - b_1 |u|^p - \gamma \\ |a(x, u, \xi)| &\leq a_1 |\xi|^{p-1} + b_2 |u|^{p-1} + c_2 \\ |b(x, u, \xi)| &\leq a_2 |\xi|^{p-1} + b_1 |u|^{p-1} + c_3 \end{aligned}$$

con a_1 costante positiva e $a_2, b_1, b_2, \gamma, c_2, c_3$ funzioni in opportuni spazi L^q . Un risultato di locale limitatezza preliminare alla disuguaglianza di Harnack e analogo a quelli enunciati precedentemente viene mostrato anche da Serrin.

Analoghi risultati sono ottenuti da Trudinger in [21] con ipotesi di crescita su b leggermente più generali, assumendo però che la u sia limitata.

In [20] si mostra una formulazione della disuguaglianza di Harnack leggermente diversa da quella enunciata in Teorema 1.1.3. Precisamente

$$\sup_{B_R} u \leq \gamma \left(\inf_{B_R} u + R^\varepsilon \right) \quad (1.3)$$

con $\gamma > 0$ e $\varepsilon \in (0, 1)$. Anche da questa disuguaglianza è possibile dedurre la locale hölderianità per una soluzione limitata dell'equazione (1.2). Infatti, denotando con M e m le stesse funzioni definite in (1.4) e applicando un analogo ragionamento nelle palle B_R e B_{sR} con $s \in (0, 1)$ si giunge alla stima

$$\operatorname{osc}(u, B_{sR}) \leq \eta \left(\operatorname{osc}(u, B_R) + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} R^\varepsilon \right)$$

dove $\eta = (\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-1}$. Iterando si ottiene

$$\operatorname{osc}(u, B_{s^k R}) \leq \eta^k \left(\operatorname{osc}(u, B_R) + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} [1 + (\eta s^{-\varepsilon})^{-1} + \dots + (\eta s^{-\varepsilon})^{-k+1}] \right).$$

A questo punto scegliendo, ad esempio, $\eta s^{-\varepsilon} = 2$ (per s sufficientemente piccolo è sempre possibile) si ottiene che

$$\operatorname{osc}(u, B_{s^k R}) \leq \eta^k \left(\operatorname{osc}(u, B_R) + 4\gamma(\gamma - 1)^{-1} \right)$$

da cui, se la u risulta limitata in B_R , ragionando come fatto precedentemente si ottiene la locale hölderianità.

Stime del tipo (1.3) si ottengono da stime locali sui coefficienti γ, c_2, c_3 . Si osservi come è necessario che la funzione u sia localmente limitata, cosicché risulta limitata anche la sua oscillazione in B_R , per poter ottenere una stima sulla riduzione dell'oscillazione tipo (1.5). Nel caso in cui u sia una funzione armonica questo è ben noto e si ottiene semplicemente, ad esempio, dal Lemma 1.1.1. Più in generale si dovranno mostrare stime di limitatezza locali prima di poter applicare l'iterazione per stimare la riduzione dell'oscillazione (che nel nostro caso seguono dal Teorema 1.2.1).

CAPITOLO 2

La disuguaglianza di Harnack nel caso parabolico

In questo capitolo considereremo soluzioni non negative dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times I, \quad (2.4)$$

Ω aperto di \mathbf{R}^n e I intervallo, e vedremo la disuguaglianza di Harnack per tali soluzioni. Il primo risultato in questa direzione è ottenuto indipendentemente da Hadamard ([13]) e Pini ([18]). La dimostrazione che facciamo vedere nel primo paragrafo è quella dovuta a Pini. Nel secondo poi presentiamo una dimostrazione contenuta in [3] (Cap. V, paragrafo 13) in cui si segue un'idea di N. V. Krylov e M. V. Safonov (si veda [14]).

Cominciamo con un'osservazione dovuta a J. Moser (si veda [16]) che, se $\Omega \times I = \mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$, fissati $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$ e $\rho > 0$, una stima tipo (1.3) a tempo fissato, cioè

$$\sup_{x \in B_\rho(x_0)} u(x, t_0) \leq \gamma \inf_{x \in B_\rho(x_0)} u(x, t_0), \quad (2.5)$$

non può valere in maniera uniforme per tutte le soluzioni dell'equazione (2.4). Si veda a tal proposito il seguente esempio: definiamo

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4t}\right\}. \quad (2.6)$$

Consideriamo, per $n = 1$ la famiglia di funzioni positive

$$G_\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x + \xi)^2}{4t}\right\}$$

risolve l'equazione del calore (2.4) in $\mathbf{R} \times (0, +\infty)$ per qualunque valore $\xi \in \mathbf{R}$, ma se si fissa un valore per il tempo, per semplicità $t = 1$, si può vedere che

$$\frac{G_\xi(0, 1)}{G_\xi(x, 1)} = \exp\left\{\frac{x^2}{4} + \frac{x\xi}{2}\right\}$$

che per $\xi \rightarrow +\infty$ converge a zero se $x < 0$ e diverge a $+\infty$ se $x > 0$. Di conseguenza, fissato un qualunque intorno di $x_0 = 0$ e congelando tutto al

tempo $t_0 = 1$, non è sperabile controllare (sia dall'alto che dal basso con costanti positive indipendenti da u) il rapporto

$$\frac{\inf_{|x|<\rho} u(x, 1)}{\sup_{|x|<\rho} u(x, 1)}$$

dove u è una generica soluzione non negativa dell'equazione del calore. Come vedremo (si vedano varie formulazioni equivalenti nel Teorema 2.2.3), una stima tipo (2.5) vale a patto di considerare $\sup_{B_\rho(x_0)} u(x, t_1)$ e $\inf_{B_\rho(x_0)} u(x, t_2)$ con $t_1 < t_2$.

2.1. La dimostrazione di Pini

Il risultato che presentiamo è in dimensione uno e basato su calcoli espliciti sulla funzione di Green.

TEOREMA 2.1.1. *Si consideri il rettangolo $R = (0, 1) \times (0, 1/4)$, siano f definita in $[0, 1]$, φ_1, φ_2 definite in $[0, 1/4]$ funzioni continue e reali tali che $f(0) = \varphi_1(0)$, $f(1) = \varphi_2(0)$. Sia u la soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } R \\ u(x, 0) = f(x) & \text{in } [0, 1] \\ u(0, t) = \varphi_1(t) & \text{in } [0, 1/4] \\ u(1, t) = \varphi_2(t) & \text{in } [0, 1/4]. \end{cases}$$

Allora, fissato $\delta \in (0, 1/8)$, esiste una costante $c > 0$ tale che

$$\sup_{(x,t) \in (\delta, 1-\delta) \times (\delta, 1/4-\delta)} u(x, t) \leq c u(1/2, 1/4).$$

Dimostrazione - Si consideri la funzione di Green relativa a tale problema

$$K(x, t; \xi, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (G(x - \xi + 2k, t - \tau) - G(x + \xi + 2k, t - \tau))$$

dove G è la funzione definita in (2.6) per $n = 1$. Per tale rappresentazione e per i dettagli sulla convergenza della serie rimandiamo ai capitoli VI e V in [24]. La funzione K risulta analitica in ognuna delle due variabili (si veda in particolare il paragrafo V.2 in [24]). La funzione $K(\cdot, \cdot; \xi, \tau)$ risolve l'equazione $u_t - u_{xx} = 0$ in $R \setminus \{(\xi, \tau)\}$, per ogni $(\xi, \tau) \in R$ e si annulla sulla

frontiera parabolica di R . La funzione u può essere espressa come segue

$$u(x, t) = \int_0^1 K(x, t; \xi, 0) f(\xi) d\xi + \int_0^t \left[K_\xi(x, t; 0, \tau) \varphi_1(\tau) - K_\xi(x, t; 1, \tau) \varphi_2(\tau) \right] d\tau. \quad (2.1)$$

È immediato verificare che valgono $K(x, t; \xi, 0) \geq 0$, $K_\xi(x, t; 0, \tau) \geq 0$, $K_\xi(x, t; 1, \tau) \leq 0$ e che $K_\xi(x, t; 0, \tau) - K_\xi(x, t; 1, \tau) \geq 0$. Mostriamo, ad esempio, che $K(x, t; \xi, 0) \geq 0$: se così non fosse, scegliendo $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$ sarebbe possibile trovare f in modo tale che u risulti negativa, contraddicendo il principio del massimo. In maniera analoga si mostrano le altre disuguaglianze. Dalla definizione di K si vede che per ogni $\delta \in (0, 1/8)$

$$K(x, t; 0, 0) = K(x, t; 1, 0) = 0. \quad \text{in } R_\delta := (\delta, 1 - \delta) \times (\delta, 1/4 - \delta).$$

Vogliamo ora verificare che $K(1/2, 1/4; \xi, 0) > 0$ per $0 < \xi < 1$. Si osservi prima che

$$K(x, t; \xi, \tau) = K(x, t; 1 - \xi, \tau). \quad (2.2)$$

Di conseguenza sarà sufficiente verificare che $K(1/2, 1/4; \xi, 0) > 0$ per $0 < \xi \leq 1/2$. Si osservi innanzitutto che la funzione

$$g_a(x) = e^{-(x-a)^2} - e^{-(x+a)^2}$$

è strettamente decrescente per $x > 2$ quando $0 < a < 1$. Inoltre è facile vedere che

$$K(1/2, 1/4; \xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[g_\xi \left(\frac{4k+1}{2} \right) - g_\xi \left(\frac{4k+3}{2} \right) \right]$$

da cui segue che i termini della somma con $k > 0$ sono tutti positivi per $0 < \xi \leq 1/2$ e nulli per $\xi = 0$. Rimane da stimare il termine $g_\xi(1/2) - g_\xi(3/2)$ che può essere riscritto come

$$2(\sinh \xi - e^{-2} \sinh 3\xi) \exp[-(\xi^2 + 1/4)].$$

Poiché la funzione $\sinh \xi - e^{-2} \sinh 3\xi$ è crescente e nulla in $\xi = 0$ si deduce che

$$K(1/2, 1/4; \xi, 0) > 0 \quad \text{per } 0 < \xi \leq 1/2 \quad \text{e} \quad K(1/2, 1/4; 0, 0) = 0.$$

Analogamente, grazie a (2.2), si ha

$$K(1/2, 1/4; \xi, 0) > 0 \quad \text{per } 1/2 \leq \xi < 1 \quad \text{e} \quad K(1/2, 1/4; 1, 0) = 0.$$

Inoltre

$$K_\xi(1/2, 1/4; 0, 0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k$$

dove $a_k = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \exp \left\{ - \left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 \right\}$. Si noti che per $k \geq 0$ si ha che

$$a_k > |a_{-k-1}| = -a_{-k-1}$$

per cui

$$K_\xi(1/2, 1/4; 0, 0) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + a_{-k-1}) > 0.$$

Dalla regolarità di K si ottiene, usando la regola di de L'Hôpital, che i seguenti limiti

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{K(x, t; \xi, 0)}{K(1/2, 1/4; \xi, 0)} \quad \text{e} \quad \lim_{\xi \rightarrow 1^-} \frac{K(x, t; \xi, 0)}{K(1/2, 1/4; \xi, 0)}$$

esistono finiti e non negativi, poiché $K_\xi(1/2, 1/4; 0, 0) > 0$ e $K_\xi(x, t; 0, 0) \geq 0$, $K_\xi(1/2, 1/4; 1, 0) < 0$ e $K_\xi(x, t; 1, 0) \leq 0$. Di conseguenza esiste una costante $\gamma > 0$ per cui

$$0 \leq K(x, t; \xi, 0) \leq \gamma K(1/2, 1/4; \xi, 0), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (x, t) \in R_\delta. \quad (2.3)$$

Ora vogliamo dare un'analogia stima sulla derivata rispetto a ξ di K . Si osservi che, poiché

$$K_\xi(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x-\xi+2k}{2(t-\tau)} \exp \left\{ -\frac{(x-\xi+2k)^2}{4(t-\tau)} \right\} + \frac{x+\xi+2k}{2(t-\tau)} \exp \left\{ -\frac{(x+\xi+2k)^2}{4(t-\tau)} \right\} \right],$$

si ha che

$$K_\xi(1-x, t; 0, \tau) = -K_\xi(x, t; 1, \tau). \quad (2.4)$$

Valutando la derivata per $\xi = 0$ si ottiene

$$K_\xi(x, t; 0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x+2k}{t-\tau} \exp \left\{ -\frac{(x+2k)^2}{4(t-\tau)} \right\}$$

che risulta continua e limitata per $\tau \in [0, t]$ e $(x, t) \in R_\delta$. Inoltre

$$\begin{aligned} K_\xi(1/2, 1/4; 0, \tau) &= \frac{2}{\sqrt{\pi(1-4\tau)}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1+4k}{1-4\tau} \exp \left\{ -\frac{(1+4k)^2}{4(1-4\tau)} \right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k. \end{aligned}$$

Poiché per $k \geq 0$

$$b_k > |b_{-k-1}| = -b_{-k-1}$$

per cui $K_\xi(1/2, 1/4; 0, \tau) > 0$ per $\tau \in [0, 1/4 - \delta]$. Di conseguenza esiste una costante $c_2 > 0$

$$0 \leq K_\xi(x, t; 0, \tau) \leq c_2 K_\xi(1/2, 1/4; 0, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad (x, t) \in R_\delta \quad (2.5)$$

e, grazie a (2.4), anche

$$0 \leq -K_\xi(x, t; 1, \tau) \leq -c_2 K_\xi(1/2, 1/4; 1, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq t, \quad (x, t) \in R_\delta. \quad (2.6)$$

Usando (2.3), (2.5), (2.6) in (2.1) si ha

$$0 \leq \sup_{(x,t) \in R_\delta} u(x,t) \leq \max\{\gamma, c_2\} u(1/2, 1/4). \quad \square$$

2.2. Una dimostrazione tramite confronto

Il risultato che segue è basato sul confronto con un'opportuna sottosoluzione nell'intero semispazio.

Fissati Ω aperto di \mathbf{R}^n e $T > 0$, denotiamo con Ω_T il cilindro $\Omega \times (0, T)$, tramite $C^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ si denoterà la classe

$$\{u \in C(\Omega \times (0, T)) \mid u_{x_i x_j}, u_t \in C(\Omega \times (0, T))\}.$$

Tramite Q_ρ , per $\rho > 0$, denoteremo il cilindro centrato in $(0, 0)$

$$K_\rho(0) \times (-\rho^2, \rho^2)$$

dove $K_\rho(x_0)$ denota il cubo di lato 2ρ e centro x_0 e più genericamente

$$Q_\rho(x_0, t_0) = K_\rho(x_0) \times (t_0 - \rho^2, t_0 + \rho^2).$$

Per $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ è possibile scrivere l'equazione del calore (2.4) e ottenere il risultato che segue. La dimostrazione è ottenuta da un confronto tra u e un'opportuna sottosoluzione dell'equazione (2.4) e applicando il principio del massimo (si vedano in particolare il Teorema 13.1 e, per una stima sulle derivate della soluzione, il Teorema 12.1 e il Teorema 12.2 in [3]).

TEOREMA 2.2.1. *Sia u una soluzione non negativa dell'equazione (2.4) in $\mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$. Per ogni $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$ e per ogni $\vartheta, \rho > 0$, con $\rho^2 < t_0$, esiste una costante $\gamma > 1$, dipendente solo dalla dimensione n e da ϑ , tale che risulta*

$$\gamma \inf_{|x-x_0| < \vartheta\rho} u(x, t_0 + \rho^2) \geq u(x_0, t_0). \quad (2.1)$$

OSSERVAZIONE 2.2.2. - La restrizione sulla scelta di ρ posta nell'enunciato del teorema precedente è legata alla tecnica dimostrativa che, come vedremo, richiede che la funzione u sia soluzione dell'equazione del calore anche per tempi sufficientemente minori di t_0 . Precisamente, è necessario che u sia definita anche in $(t_0 - \rho^2, t_0)$. Per avere la stima ad istanti successivi, basta applicare un argomento di tipo induttivo: si considera il punto $(x_0, t_0 + \rho^2)$. Da (2.1) discende che

$$\gamma \inf_{|x-x_0| < \vartheta\rho} u(x, t_0 + 2\rho^2) \geq u(x_0, t_0 + \rho^2).$$

D'altro canto,

$$\gamma u(x_0, t_0 + \rho^2) \geq \gamma \inf_{|x-x_0| < \vartheta\rho} u(x, t_0 + \rho^2) \geq u(x_0, t_0),$$

per cui

$$\gamma^2 \inf_{|x-x_0|<\vartheta\rho} u(x, t_0 + 2\rho^2) \geq u(x_0, t_0)$$

e induttivamente per $k \in \mathbf{N}$ si avrà

$$\gamma^k \inf_{|x-x_0|<\vartheta\rho} u(x, t_0 + k\rho^2) \geq u(x_0, t_0).$$

Si noti anche (a tal proposito si veda la dimostrazione) che nella formulazione (2.1) la costante γ tende all'infinito per $\vartheta \rightarrow +\infty$. Infatti, poiché il parametro ϑ che appare in (2.1) può essere anche "spostato" alla variabile temporale, considerando $r = \vartheta\rho$ possiamo riscrivere (2.1) nel seguente modo

$$\gamma \inf_{|x-x_0|<r} u(x, t_0 + \sigma r^2) \geq u(x_0, t_0),$$

dove $\sigma = \vartheta^{-2}$ e con la medesima costante γ , la quale diverge per $\sigma \rightarrow 0$. Questo fatto è inevitabile in quanto, se così non fosse varrebbe una disuguaglianza allo stesso livello temporale, ma ciò, come mostrato all'inizio del paragrafo, è falso in generale.

Dimostrazione - Dividiamo la dimostrazione in quattro passi.

Passo 1 - Introducendo la funzione

$$\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{1}{u(x_0, t_0)} u(\rho\tilde{x} + x_0, \rho^2\tilde{t} + t_0)$$

la disuguaglianza (2.1) risulta equivalente a

$$\gamma \inf_{|\tilde{x}|<\vartheta} \tilde{u}(\tilde{x}, 1) \geq 1.$$

Si osservi che la nuova funzione \tilde{u} è definita per valori di $\tilde{t} \geq -1$ in virtù delle ipotesi fatte su ρ . Per semplicità continueremo a denotare con u, x, t la nuova funzione e le nuove variabili.

Per $s \in [0, 1)$ consideriamo l'insieme $Q_s := K_s(0) \times (-s^2, 0)$ (che risulta contenuto nel dominio) e definiamo le due funzioni

$$\mathcal{M}(s) := \sup_{Q_s} u, \quad \mathcal{N}(s) = (1-s)^{-\xi}$$

dove ξ è una costante positiva che fissiamo in seguito. Si ha che $\mathcal{M}(0) = 1$, $\mathcal{N}(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow 1} \mathcal{M}(s) < +\infty$ e $\lim_{s \rightarrow 1} \mathcal{N}(s) = +\infty$. Di conseguenza l'equazione $\mathcal{M}(s) = \mathcal{N}(s)$ ammette soluzioni e denotiamo con s_o la maggiore di tali soluzioni (s_o potrebbe essere zero). Dalla continuità di u si ha che esiste $(y_o, \tau_o) \in Q_{s_o}$ tale che

$$u(y_o, \tau_o) = (1-s_o)^{-\xi}.$$

Passo 2 - Mostriamo ora che esiste una palla di centro y_o in cui $u(x, \tau_o) > \frac{1}{2}(1 - s_o)^{-\xi}$. Si consideri

$$(y_o, \tau_o) + Q_{\frac{1-s_o}{2}} := K_{\frac{1-s_o}{2}}(y_o) \times \left(\tau_o - \left(\frac{1-s_o}{2} \right)^2, \tau_o \right).$$

Si ha che

$$(y_o, \tau_o) + Q_{\frac{1-s_o}{2}} \subset Q_{\frac{1+s_o}{2}}$$

per cui si ha che

$$\sup_{(y_o, \tau_o) + Q_{\frac{1-s_o}{2}}} u \leq \mathcal{N}((1 + s_o)/2) = 2^\xi (1 - s_o)^{-\xi}.$$

Dal Teorema 12.1, cap. V, in [3] si ha

$$\sup_{(y_o, \tau_o) + Q_{\frac{1-s_o}{8}}} |Du| \leq \frac{c}{1 - s_o} \sup_{(y_o, \tau_o) + Q_{\frac{1-s_o}{2}}} u$$

con c costante dipendente solo da n . In particolare $|Du|$ risulta limitato. Allora per $x \in K_{(1-s_o)/8}(y_o)$, e usando le due stime precedenti, si ha

$$|u(x, \tau_o) - u(y_o, \tau_o)| \leq |x - y_o| \sup_{(y_o, \tau_o) + Q_{\frac{1-s_o}{8}}} |Du| \leq |x - y_o| \frac{c}{1 - s_o} 2^\xi (1 - s_o)^{-\xi}$$

e in particolare per $|x - y_o| < \epsilon(1 - s_o)/2$ con $\epsilon \in (0, 1/4)$ si ha

$$\begin{aligned} u(x, \tau_o) &\geq u(y_o, \tau_o) - \epsilon \frac{1 - s_o}{2} \sup_{(y_o, \tau_o) + K_{\frac{1-s_o}{8}}} |Du| \\ &\geq (1 - s_o)^{-\xi} (1 - \epsilon c 2^\xi). \end{aligned}$$

Si conclude scegliendo ϵ (che dipende solamente da ξ, n) in modo tale che $1 - \epsilon c 2^\xi \geq 1/2$ e $\epsilon < 1/4$, cioè $\epsilon < \min\{1/4, 1/(c2^\xi)\}$.

Passo 3 - Consideriamo la funzione

$$\psi(x, t) = M \frac{r^{2b}}{(t + r^2)^b} \left[\left(k - \frac{|x|^2}{t + r^2} \right)_+ \right]^2 \quad (M, b, r, k > 0) \quad (2.2)$$

($s_+ = s$ se $s \geq 0$, 0 altrimenti) e mostriamo che esiste una costante $b > 0$ tale che $\psi_t - \Delta\psi \leq 0$. Derivando si ottiene che

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{Mr^{2b}}{(t + r^2)^{b+1}} \left[\frac{2|x|^2}{t + r^2} \left(k - \frac{|x|^2}{t + r^2} \right)_+ - b \left(k - \frac{|x|^2}{t + r^2} \right)_+^2 \right]$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} = \frac{Mr^{2b}}{(t + r^2)^b} \left[\frac{8x_i^2 \chi_Z}{(t + r^2)^2} - \frac{4}{t + r^2} \left(k - \frac{|x|^2}{t + r^2} \right)_+ \right]$$

dove χ_Z denota la funzione caratteristica dell'insieme $Z = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times (0, +\infty) \mid k(t + r^2) - |x|^2 > 0\}$ e le derivate seconde di ψ sono valutate dove

ψ è C^2 , ovvero in $\mathbf{R}^n \times (0, +\infty) \setminus \partial Z$. Da ciò si ricava che per $(x, t) \in Z$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \Delta \psi &= \frac{Mr^{2b}}{(t+r^2)^{b+1}} \left(k - \frac{|x|^2}{t+r^2} \right)_+ \times \\ &\times \left[\frac{2|x|^2}{t+r^2} - b \left(k - \frac{|x|^2}{t+r^2} \right)_+ - \frac{8|x|^2}{t+r^2} \left(k - \frac{|x|^2}{t+r^2} \right)_+^{-1} + 4n \right] \end{aligned}$$

altrimenti $\psi_t - \Delta \psi$ è nullo. Definendo $|z|^2 := |x|^2/(t+r^2)$ il termine tra parentesi quadre diventa per $|z|^2 < k$

$$\begin{aligned} 2|z|^2 - b(k - |z|^2) - \frac{8|z|^2}{k - |z|^2} + 4n &= \\ &= \frac{-(b+2)|z|^4 + (2bk - 4n + 2k - 8)|z|^2 - bk^2 + 4nk}{k - |z|^2}. \end{aligned}$$

Si può verificare che per i valori di b che soddisfano

$$k^2 + 4n^2 + 16 + 4nk + 16n - 8bk - 8k < 0$$

tale espressione risulta sempre negativa, per cui esiste $b = b(n, k)$, funzione crescente in k per cui ψ risulta essere una sottosoluzione.

Passo 4 - Si consideri ora la traslazione, che risulta ancora una sottosoluzione, della funzione ψ introdotta in (2.2) $\psi_{(y_o, \tau_o)}(x, t) = \psi(x - y_o, t - \tau_o)$ per i valori

$$M = \frac{1}{2k^2}(1 - s_o)^{-\xi}, \quad r = \epsilon \frac{1 - s_o}{2\sqrt{k}}.$$

In tal modo si ottiene che per tutti gli $x \in B(y_o, \sqrt{k}r)$ vale

$$u(x, \tau_o) \geq \frac{1}{2}(1 - s_o)^{-\xi} \geq \psi_{(y_o, \tau_o)}(x, \tau_o)$$

e inoltre si ha che sul bordo di tale palla $\psi_{(y_o, \tau_o)}(x, \tau_o) = 0$ (mentre la u è strettamente positiva). Ciò implica che in particolare $u(\cdot, \tau_o) \geq \psi_{(y_o, \tau_o)}(\cdot, \tau_o)$ su qualunque sottoinsieme di \mathbf{R}^n , dal momento che fuori da $B(y_o, \sqrt{k}r) \times \{\tau_o\}$ $\psi_{(y_o, \tau_o)}$ è nulla e u è non negativa.

Si fissi $\vartheta > 0$ e, per comodità, si consideri l'insieme $B_\vartheta(0) \times \{1\}$ anziché $K_\vartheta(0) \times \{1\}$. Lo scopo è avere una stima dal basso per la funzione u nell'insieme $B_\vartheta(0) \times \{1\}$. Per far ciò è sufficiente ottenere un controllo di u tramite ψ sulla frontiera parabolica di un opportuno cilindro contenente propriamente $B_\vartheta(0) \times \{1\}$. Sceglieremo allora un valore di k sufficientemente grande da far sì che la funzione $\psi_{(y_o, \tau_o)}$ sia strettamente positiva in tutto l'insieme $\overline{B}_\vartheta(0) \times \{1\}$, e un raggio $R > \vartheta$ sufficientemente grande da far sì che sul bordo di $B_R(0) \times \{2\}$ la funzione $\psi_{(y_o, \tau_o)}$ sia nulla.

La scelta dell'insieme $B_R(0) \times \{2\}$ è puramente di comodo; in tal modo il cilindro $B_R(0) \times (\tau_o, 2)$ contiene $B_\vartheta(0) \times \{1\}$. Con una tale scelta di R si avrà che $\psi_{(y_o, \tau_o)}(\cdot, 2)$ è nulla su $\partial B_R(0)$ e di conseguenza anche in $\partial B_R(0) \times (\tau_o, 2]$. Dal principio del confronto (si veda, ad esempio, il Lemma 3.1, cap. VI, in [2]) si potrà concludere che $u \geq \psi_{(y_o, \tau_o)}$ in $B_R(0) \times (\tau_o, 2)$, ed in particolare

su $B_{\vartheta}(0) \times \{1\}$, insieme nel quale $\psi_{(y_o, \tau_o)}$ sarà strettamente positiva.

Per soddisfare la prima delle due richieste è sufficiente che

$$k - \frac{|x - y_o|^2}{1 - \tau_o + \frac{\epsilon^2(1-s_o)^2}{4k}} > 0 \quad \text{per ogni } x \in \partial B_{\vartheta}(0)$$

il che è soddisfatto se, ad esempio,

$$k \geq (\vartheta + 1)^2.$$

Fissiamo per semplicità $k = (\vartheta + 1)^2$. Per quanto riguarda la seconda, si dovrà avere che

$$k - \frac{|x - y_o|^2}{2 - \tau_o + \frac{\epsilon^2(1-s_o)^2}{4k}} \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in \partial B_R(0).$$

Ciò in particolare è vero se, supposto che R sarà maggiore di 1, si ha $(2 - \tau_o)k + \epsilon^2(1 - s_o)^2/4 \leq (R - 1)^2 \leq |x - y_o|^2$ per ogni $x \in \partial B_R(0)$; ciò sarà vero scegliendo $R = R(\vartheta)$ in modo tale che

$$R \geq 1 + \sqrt{1 + 3(\vartheta + 1)^2}.$$

In figura gli archi di parabola delimitano il supporto di $\psi_{(y_o, \tau_o)}$ e il segmento in neretto rappresenta l'insieme $B_{\vartheta}(0) \times \{1\}$. Ricordando che $\tau_o \in (-1, 0]$

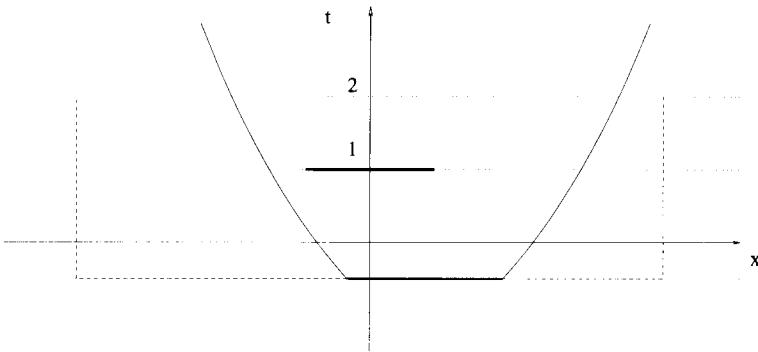


FIGURA 1

e $|y_o| < 1$ si ottiene che

$$\begin{aligned} u(x, 1) &\geq \inf_{x \in B_{\vartheta}(0)} \psi_{(y_o, \tau_o)}(x, 1) \geq \\ &\geq (1 - s_o)^{2b - \xi + 4} \frac{\epsilon^{2b+4}}{2^{4b+1}(\vartheta + 1)^{4+2b}} \frac{1}{12^2}. \end{aligned}$$

Si noti che ϵ dipende da ξ e da n . A questo punto possiamo rendere la stima indipendente da s_o (che è l'unico parametro che dipende da u) scegliendo $\xi = 2b + 4$. Ricordiamo che b è funzione crescente in k , e quindi in ϑ per

la scelta fatta di k . Di conseguenza anche ξ , e quindi ϵ , dipende da ϑ . Si trova quindi all'ultimo membro una costante $\gamma = \gamma(\vartheta) < 1$ della forma

$$\gamma(\vartheta) = c \left(\frac{4(\vartheta + 1)}{\epsilon(\vartheta)} \right)^{4+2b(\vartheta)}$$

con c costante, b funzione crescente e ϵ decrescente in ϑ , tale che

$$\gamma u(x, 1) \geq 1 \quad \text{per ogni } x \in B_\vartheta(0). \quad \square$$

La stima del Teorema 1.1.3 qualitativamente dice che se una soluzione u (limitata dal basso) di un'equazione ellittica assume, ad esempio, il valore 1 in un qualche punto, in tutto un intorno di tale punto vale $u \geq \gamma^{-1}$.

La stima del Teorema 2.2.1 può essere interpretata come segue: se ad un certo istante t_0 e in un certo punto x_0 la temperatura assume, ad esempio, il valore 1 allora, se aspettiamo un tempo sufficiente, la temperatura ha raggiunto almeno il valore γ^{-1} in tutto un intorno del punto x_0 . Questo tempo è "necessario" al calore per diffondersi.

Vediamo ora varie formulazioni equivalenti della disuguaglianza appena provata.

TEOREMA 2.2.3. *Dati Ω aperto di \mathbf{R}^n e $T > 0$, siano u una soluzione non negativa dell'equazione (2.4) in $\Omega \times (0, T)$ e $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$. $\vartheta, \rho_0 > 0$, tali che $B_{2\vartheta\rho_0}(x_0) \times (t_0 - \rho_0^2, t_0 + \rho_0^2) \subset \Omega \times (0, T)$. Sono equivalenti:*

i) *esiste una costante $\gamma > 1$ tale che per ogni $\rho \leq \rho_0$*

$$\gamma \inf_{|x-x_0| < \vartheta\rho} u(x, t_0 + \rho^2) \geq u(x_0, t_0);$$

ii) *detto $P_{\rho, \vartheta}^+(x_0, t_0)$ l'insieme, disegnato in Figura 2.2, $\cup_{0 < t < \rho} B_{\vartheta t}(x_0) \times \{t_0 + t^2\}$ esiste una costante $\gamma > 1$ tale che per ogni $\rho \leq \rho_0$*

$$\gamma \inf_{P_{\rho, \vartheta}^+(x_0, t_0)} u(x, t) \geq u(x_0, t_0);$$

iii) *esiste una costante $\gamma < 1$ tale che per ogni $\rho \leq \rho_0$*

$$\gamma \sup_{|x-x_0| < \vartheta\rho} u(x, t_0 - \rho^2) \leq u(x_0, t_0);$$

iv) *detto $P_{\rho, \vartheta}^-(x_0, t_0)$ l'insieme, disegnato in Figura 2.2, $\cup_{0 < t < \rho} B_{\vartheta t}(x_0) \times \{t_0 - t^2\}$ esiste una costante $\gamma < 1$ tale che per ogni $\rho \leq \rho_0$*

$$\gamma \sup_{P_{\rho, \vartheta}^-(x_0, t_0)} u(x, t) \leq u(x_0, t_0);$$

v) *fissato $\sigma \in (0, 1]$ e detti rispettivamente $C_{\vartheta, \sigma, \rho}^+(x_0, t_0)$ e $C_{\vartheta, \sigma, \rho}^-(x_0, t_0)$ gli insiemi $B_{\vartheta\sqrt{\sigma}\rho}(x_0) \times [t_0 + \sigma\rho^2, t_0 + \rho^2]$, $B_{\vartheta\sqrt{\sigma}\rho}(x_0) \times [t_0 - \rho^2, t_0 - \sigma\rho^2]$*

rappresentati in Figura 2.2 esiste una costante $\gamma > 1$ tale che

$$\sup_{C_{\vartheta, \sigma, \rho}^-(x_0, t_0)} u \leq \gamma \inf_{C_{\vartheta, \sigma, \rho}^+(x_0, t_0)} u.$$

Dimostrazione - È immediato verificare che i) è equivalente a ii) e che iii) è equivalente a iv).

Vediamo ora che da i) segue iii). Si consideri un generico punto $(x, t_0 - \rho^2)$ per x nella palla di centro x_0 e raggio $\vartheta\rho$ con $t_0, \vartheta, \rho > 0$ fissati. Da i) si ha

$$u(x, t_0 - \rho^2) \leq \gamma \inf_{|y-x| < \vartheta\rho} u(y, t_0) \leq \gamma u(x_0, t_0).$$

Poiché questo vale per ogni $x \in B_{\vartheta\rho}(x_0)$ si ha in realtà

$$\sup_{|x-x_0| < \vartheta\rho} u(x, t_0 - \rho^2) \leq \gamma u(x_0, t_0).$$

Analogamente da iii) segue i).

Vediamo ora che v) è equivalente ai punti precedenti. Da ii) si ha che esiste $\gamma > 1$ tale che per ogni $(x, t) \in C_{\vartheta, \sigma, \rho}^-(x_0, t_0)$ si ha

$$u(x, t) \leq \gamma \inf_{P_{\rho, \vartheta}^+(x, t)} u(y, s).$$

Poiché $(x_0, t_0) \in P_{\rho, \vartheta}^+(x, t)$ si ha

$$\inf_{P_{\rho, \vartheta}^+(x, t)} u(y, s) \leq u(x_0, t_0) \leq \gamma \inf_{P_{\rho, \vartheta}^+(x_0, t_0)} u(y, s)$$

da cui

$$\begin{aligned} \sup_{(x, t) \in C_{\vartheta, \sigma, \rho}^-(x_0, t_0)} u(x, t) &\leq \gamma^2 \inf_{(y, s) \in P_{\rho, \vartheta}^+(x_0, t_0)} u(y, s) \\ &\leq \gamma^2 \inf_{(x, t) \in C_{\vartheta, \sigma, \rho}^+(x_0, t_0)} u(x, t). \end{aligned}$$

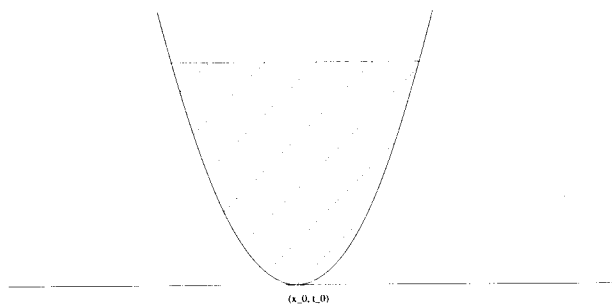
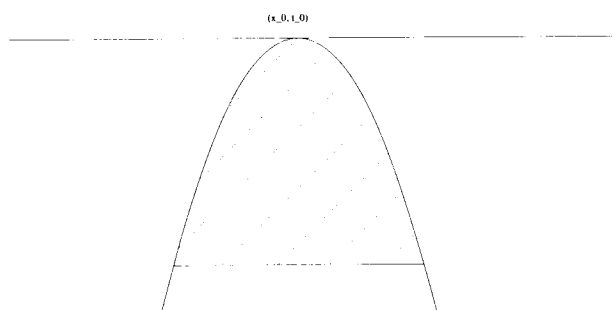
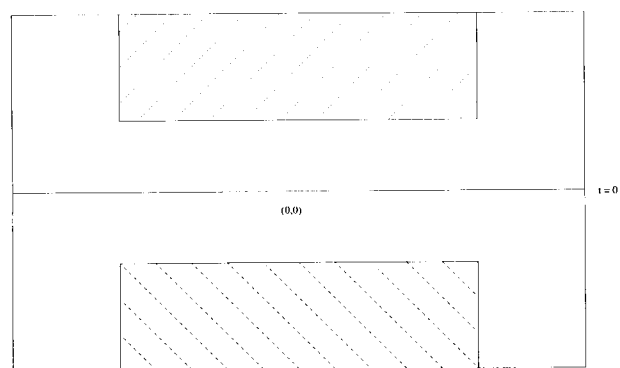
Viceversa, da v) si ha che

$$\sup_{C_{\vartheta, \sigma, \rho}^-(x_0, \tau_0)} u \leq \gamma \inf_{C_{\vartheta, \sigma, \rho}^+(x_0, \tau_0)} u$$

con $\tau_0 > t_0 + \sigma\rho^2$. In particolare, scegliendo $\sigma \in (0, 1/2)$, si ha

$$u(x_0, t_0) \leq \gamma \inf_{|x-x_0| < \vartheta\rho} u(x, t_0 + \rho^2).$$

□

FIGURA 2. L'insieme $P_{\rho, \vartheta}^+$ FIGURA 3. L'insieme $P_{\rho, \vartheta}^-$ FIGURA 4. Gli insiemi $C_{\sigma\rho}^+(x_0, t_0)$ e $C_{\sigma\rho}^-(x_0, t_0)$

2.3. Le classi di De Giorgi (caso $p = 2$)

Le classi di funzioni per la quali De Giorgi mostra la regolarità hölderiana, classi che contengono i minimi di certi funzionali (ma anche i quasi-minimi, si veda ad esempio [12]), e di conseguenza le soluzioni di certe equazioni ellittiche, possono essere estese in modo naturale al caso parabolico. Chiameremo tali classi *classi di De Giorgi*.

Data una funzione u , con u_+ e u_- denoteremo rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di u , cioè

$$u_+(y) := \max\{u(y), 0\}, \quad u_-(y) := \max\{-u(y), 0\}.$$

Spesso in maniera ambigua scriveremo u_+^2 o u_-^2 per denotare

$$u_+^2(y) := (u_+(y))^2, \quad u_-^2(y) := (u_-(y))^2.$$

DEFINIZIONE 2.3.1. Diremo che una funzione $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$ appartiene alla classe di De Giorgi $DG_+(\Omega, T, \gamma)$ se

$$u \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap C([0, T]; L_{\text{loc}}^2(\Omega)) \cap L_{\text{loc}}^2(0, T; W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega))$$

ed esiste $\gamma > 0$ tale che

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 - \theta\rho^2 < t < t_0} \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_+^2(\cdot, t) \zeta^2(\cdot, t) dx + \\ & \quad + \iint_{Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma \iint_{Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)} (u - k)_+^2 (|D\zeta|^2 + \zeta \zeta_t) dx dt + \\ & \quad + \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_+^2(\cdot, t_0 - \theta\rho^2) \zeta^2(\cdot, t_0 - \theta\rho^2) dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 < t < t_0 + \theta\rho^2} \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_+^2(\cdot, t) \zeta^2(\cdot, t) dx + \\ & \quad + \iint_{Q_{\rho, \theta}^+(x_0, t_0)} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt \leq \\ & \leq \gamma \iint_{Q_{\rho, \theta}^+(x_0, t_0)} (u - k)_+^2 (|D\zeta|^2 + \zeta \zeta_t) dx dt + \\ & \quad + \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_+^2(\cdot, t_0) \zeta^2(\cdot, t_0) dx \end{aligned}$$

per ogni $k \in \mathbf{R}$, per ogni $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$, per ogni $\rho > 0$ e $\theta > 0$ per cui $Q_{\rho, \theta}(x_0, t_0) = K_\rho(x_0) \times (t_0 - \theta\rho^2, t_0 + \theta\rho^2)$ risulta contenuto in $\Omega \times (0, T)$, per ogni funzione test ζ tale che $\zeta(\cdot, t) \in W_0^{1, \infty}(K_\rho(x_0))$, $|D\zeta|^2 + \zeta \zeta_t \in L^\infty$, $\zeta_t \geq 0$.

Analogamente si definisce $DG_-(\Omega, T, \gamma)$ sostituendo alla parte positiva di $u - k$ la sua parte negativa.

Infine definiamo $DG(\Omega, T, \gamma) := DG_-(\Omega, T, \gamma) \cap DG_+(\Omega, T, \gamma)$.

Per semplicità scriveremo solamente DG, DG_+, DG_- se non ci sarà ambiguità.

Le stime della definizione precedente sono anche note come *stime dell'energia* o *stime di Caccioppoli*.

Supponiamo che u sia soluzione dell'equazione $u_t - \Delta u = 0$ in $\mathbf{R}^n \times (0, +\infty)$. Ci proponiamo di mostrare che u appartiene alle classi di De Giorgi. Fissiamo a tal proposito un cilindro $K_\rho \times (-\rho^2, 0)$, che è lecito prendere centrato nell'origine dopo aver effettuato una traslazione. Scegliamo anche una funzione test ζ con le proprietà elencate nella Definizione 2.3.1. Moltiplicando l'equazione per $(u - k)_+ \zeta^2$, $k \in \mathbf{R}$ e integrando in $K_\rho \times (-\rho^2, s) \subset K_\rho \times (-\rho^2, 0)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} u_t (u - k)_+ \zeta^2 dx dt &= \frac{1}{2} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} \left(\frac{d}{dt} (u - k)_+^2 \right) \zeta^2 dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\rho^2}^s \frac{d}{dt} \int_{K_\rho} (u - k)_+^2 \zeta^2 dx dt - \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} (u - k)_+^2 \zeta \zeta_t dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{K_\rho} (u - k)_+^2(x, s) \zeta^2(x, s) dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{K_\rho} (u - k)_+^2(x, -\rho^2) \zeta^2(x, -\rho^2) dx - \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} (u - k)_+^2 \zeta \zeta_t dx dt. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il termine contenente Δu , integrando per parti e usando la disuguaglianza algebrica $-2ab \leq a^2/2 + 2b^2$ troviamo

$$\begin{aligned} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} \Delta u (u - k)_+ \zeta^2 dx dt &= \\ &= - \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt + \\ &\quad - 2 \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} (\zeta D u, (u - k)_+ D \zeta) dx dt \leq \\ &\leq - \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt + \\ &\quad + 2 \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} (u - k)_+^2 |D \zeta|^2 dx dt = \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt + 2 \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} (u - k)_+^2 |D \zeta|^2 dx dt \end{aligned}$$

Eguagliando i due termini, e poiché $\zeta_t \geq 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \sup_{s \in (-\rho^2, 0)} \frac{1}{2} \int_{K_\rho} (u - k)_+^2(x, s) \zeta^2(x, s) dx + \frac{1}{2} \iint_{Q_\rho^-} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{K_\rho} (u - k)_+^2(x, -\rho^2) \zeta^2(x, -\rho^2) dx + \\ &+ 2 \iint_{Q_\rho^-} (u - k)_+^2 (|D\zeta|^2 + \zeta \zeta_t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.1)$$

La stessa stima si ottiene per $(u - k)_-$, moltiplicando l'equazione per $-(u - k)_- \zeta^2$. Di conseguenza la soluzione appartiene alle classi di De Giorgi.

Facilmente si ottiene anche che una soluzione u di

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x, t, u, Du)) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

con Ω aperto di \mathbf{R}^n e $T > 0$ e $a : \Omega \times (0, T) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ funzione misurabile soddisfacente

$$\begin{aligned} (a(x, t, u, q), q) &\geq \lambda |q|^2 \\ |a(x, t, u, q)| &\leq \Lambda |q| \end{aligned}$$

per ogni $q \in \mathbf{R}^n$, per quasi ogni $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, λ e Λ costanti positive, appartiene alla classe di De Giorgi sopra definita supposto che $\lambda \geq 1$ (si può definire un'analogha classe DG per ogni $\lambda > 0$ leggermente diversa da quella sopra definita e ripetere i ragionamenti che seguono per tale classe).

Infatti si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} \operatorname{div}(a(x, t, u, Du))(u - k)_+ \zeta^2 dx dt &= \\ = -\frac{\lambda}{2} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt + \frac{2\Lambda}{\lambda} \int_{-\rho^2}^s \int_{K_\rho} (u - k)_+^2 |D\zeta|^2 dx dt \end{aligned}$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned}
& \sup_{t_0 - \theta\rho^2 < t < t_0} \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_+^2(\cdot, t) \zeta^2(\cdot, t) dx + \\
& \quad + \iint_{Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt \leq \\
& \leq \sup_{t_0 - \theta\rho^2 < t < t_0} \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_+^2(\cdot, t) \zeta^2(\cdot, t) dx + \\
& \quad + \lambda \iint_{Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)} |D(u - k)_+|^2 \zeta^2 dx dt \leq \\
& \leq 4 \frac{\Lambda}{\lambda} \iint_{Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)} (u - k)_+^2 (|D\zeta|^2 + \zeta \zeta_t) dx dt + \\
& \quad + \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_+^2(\cdot, t_0 - \theta\rho^2) \zeta^2(\cdot, t_0 - \theta\rho^2) dx
\end{aligned}$$

Alla classe di De Giorgi non appartengono solamente “soluzioni”. Si consideri una funzione di Carathéodory $F = F(x, t, u, q)$,

$$F : \Omega \times (0, T) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R},$$

dove Ω è un aperto di \mathbf{R}^n e $T > 0$, la quale soddisfi le ipotesi di crescita

$$\lambda |q|^2 \leq F(x, t, u, q) \leq \Lambda |q|^2$$

con λ, Λ costanti positive. Si può verificare che se u è un Q -minimo parabolico, cioè $u \in L_{\text{loc}}^2(0, T; W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega))$ e soddisfa

$$- \int_K u \frac{\partial \phi}{\partial t} dx d\tau + E(u, \text{supp}(\phi)) \leq Q E(u - \phi, \text{supp}(\phi)) \quad (2.2)$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega \times (0, T))$ dove $E(w, K) = \int_K F(x, t, w, Dw) dx dt$ e $Q \in \mathbf{R}$, $Q \geq 1$, allora u appartiene alla classe di De Giorgi sopra definita. Si può mostrare che per $Q = 1$ e F indipendente dal tempo (2.2) si riduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{q_i}(x, u, Du) + F_u(x, u, Du) = 0.$$

Se l'operatore $Au = -\text{div}(a(x, u, Du))$ è il differenziale di Gâteaux di F si ritrova l'esempio precedente e si ha che la soluzione è un Q -minimo parabolico (con $Q = 1$).

Tale discorso può essere fatto anche per funzioni u vettoriali con

$$F : \Omega \times (0, T) \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{nm} \rightarrow \mathbf{R},$$

(per tutti questi risultati rimandiamo a [10]).

Vedremo (Teorema 2.3.16) che sarà sufficiente appartenere alla classe di De Giorgi per soddisfare la disuguaglianza di Harnack.

Richiamiamo di seguito una versione parabolica della cosiddetta disuguaglianza moltiplicativa dovuta, nella sua forma piú generale, a Gagliardo ([9]) e a Nirenberg ([17]).

Per la dimostrazione si veda, ad esempio, la Proposizione 3.1, cap. I, in [2].

PROPOSIZIONE 2.3.2. *Esiste una costante positiva $\gamma_1 = \gamma_1(n)$ tale che per ogni $v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W_0^{1,2}(\Omega))$, risulta*

$$\iint_{\Omega \times (0, T)} |v(x, t)|^q dx dt \leq \gamma_1^q \left(\iint_{\Omega \times (0, T)} |Dv(x, t)|^2 dx dt \right) \left(\sup_{0 < t < T} \int_{\Omega} |v(x, t)|^2 dx \right)^{\frac{2}{n}}$$

dove $q = 2(n + 2)/n$.

Anche il prossimo lemma rappresenta uno strumento utile per il seguito.

LEMMA 2.3.3. *Sia $(y_h)_h$ una successione di numeri reali positivi tali che*

$$y_{h+1} \leq c b^h y_h^{1+\alpha}$$

con $c > 0$, $b > 1$, $\alpha > 0$. Se $y_0 \leq c^{-1/\alpha} b^{-1/\alpha^2}$ allora

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} y_h = 0.$$

Dimostrazione - Si può dimostrare facilmente per induzione la stima (si veda anche il Lemma 7.1 in [12])

$$y_h \leq b^{-\frac{h}{\alpha}} y_0$$

dalla quale si deduce che $\lim_h y_h = 0$.

In alternativa, una maniera diretta (suggerita da G. E. G. L. Metafuné) di

provare la tesi è la seguente. Definiamo $x_h = \log y_h$ e $\gamma = 1 + \alpha$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
 x_{h+1} &\leq \log c + h \log b + \gamma x_h \leq \\
 &\leq \log c + h \log b + \gamma [\log c + (h-1) \log b + \gamma x_{h-1}] = \\
 &= (1 + \gamma) \log c + [h + (h-1)\gamma] \log b + \gamma^2 x_{h-1} \leq \\
 &\leq \dots \\
 &\leq \log c \sum_{k=0}^h \gamma^k + \log b \sum_{k=1}^h k \gamma^{h-k} + \gamma^{h+1} x_0 \leq \\
 &\leq \frac{1}{1-\gamma} \log c - \frac{\gamma^{h+1}}{1-\gamma} \log c + \\
 &\quad + \log b \sum_{k=1}^h k \gamma^{h-k} + \gamma^{h+1} \left(-\frac{1}{\alpha} \log c - \frac{1}{\alpha^2} \log b\right) x_0 = \\
 &= \frac{1}{1-\gamma} \log c + \log b \sum_{k=1}^h k \gamma^{h-k} - \gamma^{h+1} \frac{\log b}{\alpha^2}.
 \end{aligned}$$

Calcolando $\sum_{k=1}^h k \gamma^{h-k}$ si ottiene $[h - (h+1)\gamma + \gamma^{h+1}] / (\gamma-1)^2$. Poiché $\alpha^2 = (\gamma-1)^2$, da cui $\log b \sum_{k=1}^h k \gamma^{h-k} - \gamma^{h+1} \alpha^{-2} \log b = \log b [h - (h+1)\gamma] / (\gamma-1)^2$, si ottiene che il termine a destra e, di conseguenza, $x_h = \log y_h$ divergono a $-\infty$. \square

PROPOSIZIONE 2.3.4. *Si considerino $\theta > 0$ e $\rho > 0$ in modo tale che il cilindro $Q_{\rho, 4\theta}^-(y, s)$ sia contenuto in $\Omega \times (0, T)$. Allora per ogni scelta di $a, \sigma \in (0, 1)$ e $\tilde{\theta} \in (0, \frac{1}{4}\theta)$ esiste ν_+ , dipendente solo da $n, \gamma, a, \tilde{\theta}$, tale che per ogni $u \in DG_+(\Omega, T, \gamma)$ e fissati μ^+, ω soddisfacenti*

$$\mu_+ \geq \sup_{Q_{\rho, \theta}^-(y, s)} u, \quad \omega \geq \operatorname{osc}_{Q_{\rho, \theta}^-(y, s)} u.$$

si ha che se

$$|\{(x, t) \in Q_{\rho, \theta}^-(y, s) \mid u(x, t) > \mu_+ - \sigma\omega\}| \leq \nu_+ |Q_{\rho, \theta}^-(y, s)|$$

allora

$$u(x, t) \leq \mu_+ - a\sigma\omega \quad \text{per q.o. } (x, t) \in K_{\rho/2}(y) \times (s - \tilde{\theta}\rho^2, s).$$

OSSERVAZIONE 2.3.5. - Dalla dimostrazione si ricava che ν_+ è proporzionale a $\tilde{\theta}^{n/2}$.

Dimostrazione - Supponiamo per semplicità $(y, s) = (0, 0)$ (ciò è sempre

possibile tramite una traslazione). Definiamo, per $h \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\rho_h &= \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2^{h+1}}, & \theta_h &= \frac{\theta}{2^h} + 4\tilde{\theta} \left(1 - \frac{1}{2^h}\right), \\ K_h &= K_{\rho_h}(0), & Q_h^- &:= K_h \times (-\theta_h \rho_h^2, 0], \\ \sigma_h &= a\sigma + \frac{1-a}{2^h}\sigma, & k_h &= \mu_+ - \sigma_h \omega.\end{aligned}$$

Consideriamo una successione di funzioni test $\zeta_h(x, t) = \zeta_{1,h}(x)\zeta_{2,h}(t)$, tali che $0 \leq \zeta_{1,h}(x), \zeta_{2,h}(t) \leq 1$ e

$$\begin{aligned}\zeta_{1,h}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K_{h+1} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R}^n \setminus K_h \end{cases} & \zeta_{2,h}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq -\theta_{h+1}\rho_{h+1}^2 \\ 0 & \text{se } t \leq -\theta_h\rho_h^2 \end{cases} \\ |D\zeta_{1,h}(x)| &\leq \frac{2}{\rho_h - \rho_{h+1}} = \frac{2^{h+3}}{\rho}, & 0 \leq (\zeta_{2,h})_t(t) &\leq \frac{2^{h+1}}{\tilde{\theta}\rho^2}.\end{aligned}$$

Applicando le stime dell'energia in Q_h^- alla funzione $(u - k_h)_+ \zeta_h$ troviamo

$$\begin{aligned}\sup_{-\theta_h\rho_h^2 < t < 0} \int_{K_h} (u - k_h)_+^2(x, t) \zeta_h^2(x, t) dx + \iint_{Q_h^-} |D(u - k_h)_+|^2 \zeta_h^2 dx dt &\leq \\ &\leq \gamma \iint_{Q_h^-} (u - k_h)_+^2 (|D\zeta_h|^2 + \zeta_h(\zeta_h)_t) dx dt \\ &\quad + \int_{K_h} (u - k_h)_+^2(x, -\theta_h\rho_h^2) \zeta_h^2(x, -\theta_h\rho_h^2) dx \\ &\leq \gamma \frac{2^{2h+6}}{\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\tilde{\theta}}\right) \iint_{Q_h^-} (u - k_h)_+^2 dx dt.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Definiti $A_h = \{(x, t) \in Q_h^- \mid u(x, t) > k_h\}$ si ha

$$\begin{aligned}\iint_{Q_h^-} (u - k_h)_+^2 \zeta_h^2 dx dt &\geq \iint_{Q_{h+1}^-} (u - k_h)_+^2 dx dt \geq \iint_{A_{h+1}} (u - k_h)_+^2 dx dt \geq \\ &\geq (k_{h+1} - k_h)^2 |A_{h+1}| = \frac{((1-a)\sigma\omega)^2}{2^{2h+2}} |A_{h+1}|.\end{aligned}\tag{2.4}$$

D'altra parte, applicando prima la disuguaglianza di Hölder e quindi la Proposizione 2.3.2, abbiamo

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_h^-} (u - k_h)_+^2 \zeta_h^2 dx dt \leq |A_h|^{\frac{2}{2+n}} \left(\iint_{Q_h^-} ((u - k_h)_+ \zeta_h)^{\frac{2(n+2)}{n}} dx dt \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
& \leq \gamma_1^2 |A_h|^{\frac{2}{2+n}} \left(\sup_{-\theta_n \rho_h^2 < t < 0} \int_{K_h} (u - k_h)_+^2 \zeta_h^2 dx \right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\
& \quad \times \left(\iint_{Q_h^-} |D[(u - k_h)_+ \zeta_h]|^2 dx dt \right)^{\frac{n}{n+2}} \leq \\
& \leq 2^{\frac{n}{n+2}} \gamma_1^2 |A_h|^{\frac{2}{2+n}} \left(\sup_{-\theta_n \rho_h^2 < t < 0} \int_{K_h} (u - k_h)_+^2 \zeta_h^2 dx \right)^{\frac{2}{n+2}} \times \\
& \quad \times \left(\iint_{Q_h^-} |D(u - k_h)_+|^2 \zeta_h^2 dx dt + \frac{2^{2h+6}}{\rho^2} \iint_{Q_h^-} (u - k_h)_+^2 dx dt \right)^{\frac{n}{n+2}}.
\end{aligned}$$

Continuiamo utilizzando (2.3) e la stima $\iint_{Q_h^-} (u - k_h)_+^2 dx dt \leq |A_h| (\sigma_h \omega)^2 \leq |A_h| (\sigma \omega)^2$. Si ottiene

$$\iint_{Q_h^-} (u - k_h)_+^2 \zeta_h^2 dx dt \leq c' \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \frac{2^{2h+6}}{\rho^2} (\sigma \omega)^2 |A_h|^{1 + \frac{2}{n+2}} \quad (2.5)$$

dove $c' = 4^{\frac{n}{n+2}} \gamma_1^2 \max\{1, \gamma\}$. Pertanto, dal confronto di (2.4) e (2.5) ricaviamo

$$|A_{h+1}| \leq c' \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \frac{2^{4h+8}}{(1-a)^2 \rho^2} |A_h|^{1 + \frac{2}{2+n}}.$$

Ponendo $y_h = |A_h|/|Q_h^-|$ e tenendo conto del fatto che $|Q_h^-| = 2^{n+2} \rho_h^{n+2} \tilde{\theta}$, abbiamo

$$y_{h+1} \leq \underbrace{c'' \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \frac{\tilde{\theta}^{\frac{2}{n+2}}}{(1-a)^2}}_c \underbrace{2^{4h}}_{b^h} y_h^{1 + \frac{2}{2+n}} \quad (2.6)$$

con $c'' > c'$ dipendente solo da γ, n e quindi $c = c(\gamma, n, a, \tilde{\theta})$. Siamo quindi nelle ipotesi del Lemma 2.3.3 con c e b definiti in (2.6) e $\alpha = 2/(n+2)$. Pertanto se

$$y_0 \leq c^{-\frac{1}{\alpha}} b^{-\frac{1}{\alpha^2}}$$

si ottiene che $\lim_{h \rightarrow +\infty} y_h = 0$. Ricordando che

$$\begin{aligned}
Q_0 &= K_\rho(0) \times (-\theta \rho^2, 0], & y_0 &= \frac{|A_0|}{|Q_0|}, \\
A_0 &= \{(x, t) \in Q_0 \mid u(x, t) > \mu_+ - \sigma \omega\},
\end{aligned}$$

si ha che scegliendo

$$\nu_+ = c''' \frac{(1-a)^{n+2} \tilde{\theta}^{\frac{n}{2}}}{(1+\tilde{\theta})^{\frac{n+2}{2}}},$$

con c''' dipendente solo da γ, n ($\nu_+ = \nu_+(\gamma, n, a, \theta)$), se

$$|A_0| \leq \nu_+ |Q_0|,$$

si deduce che $\lim_{h \rightarrow \infty} y_h = 0$. Per la definizione di y_h e A_h si conclude che

$$u \leq \mu_+ - a\sigma\omega \quad \text{q.o. in } K_{\rho/2}(0) \times (-\tilde{\theta}\rho^2, 0]. \quad \square$$

Analogamente vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.3.6. *Si considerino $\theta > 0$ e $\rho > 0$ in modo tale che il cilindro $Q_{\rho, 4\theta}^-(y, s)$ sia contenuto in $\Omega \times (0, T)$. Allora per ogni scelta di $a, \sigma \in (0, 1)$ e $\tilde{\theta} \in (0, \frac{1}{4}\theta)$ esiste ν_- , dipendente solo da $n, \gamma, a, \tilde{\theta}$, tale che per ogni $u \in DG_-(\Omega, T, \gamma)$ e fissati μ^-, ω soddisfacenti*

$$\mu_- \leq \inf_{Q_{\rho, \theta}^-(y, s)} u, \quad \omega \geq \operatorname{osc}_{Q_{\rho, \theta}^-(y, s)} u.$$

si ha che se

$$|\{(x, t) \in Q_{\rho, \theta}^-(y, s) \mid u(x, t) < \mu_- + \sigma\omega\}| \leq \nu_- |Q_{\rho, \theta}^-(y, s)|$$

allora

$$u(x, t) \geq \mu_- + a\sigma\omega \quad \text{per q.o. } (x, t) \in K_{\rho/2}(y) \times (s - \tilde{\theta}\rho^2, s).$$

Dimostrazione - È sufficiente procedere come nella dimostrazione della Proposizione 2.3.4, considerando $(u - \tilde{k}_h)_-$ al posto di $(u - k_h)_+$, dove $\tilde{k}_h = \mu_- + \sigma_h\omega$.

Ci occupiamo ora di dimostrare un altro risultato preliminare. L'enunciato che segue vale solo per $p > 1$, ma un risultato analogo può essere provato anche per $p = 1$. Per tale dimostrazione rimandiamo a [4].

LEMMA 2.3.7. *Sia $v \in W^{1,p}(K_\rho)$, $p > 1$, tale che*

$$\int_{K_\rho} |Dv|^p dx \leq \beta^p \rho^{n-p} \quad \text{e} \quad |\{x \in K_\rho \mid v(x) > 1\}| > \alpha |K_\rho|$$

per $\beta > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. Allora per ogni $\eta, \lambda \in (0, 1)$ esistono $x^* \in K_\rho$, $\delta > 0$, dipendenti da $n, \beta, \alpha, \lambda, \eta$ tali che

$$|\{x \in K_{\delta\rho}(x^*) \mid v(x) > \lambda\}| > (1 - \eta) |K_{\delta\rho}(x^*)|.$$

OSSERVAZIONE 2.3.8. - Ovviamente ci si riduce facilmente al caso più generale in cui v è come nel lemma precedente, ma soddisfa $|\{x \in K_\rho \mid v(x) > a\}| > \alpha |K_\rho|$ ($a > 0$) e $\lambda \in (0, a)$ considerando $w = v/a$.

Analogamente si può mostrare che, se v è come nel lemma precedente, ma soddisfa $|\{x \in K_\rho \mid v(x) < a\}| > \alpha|K_\rho|$ allora per ogni $\eta \in (0, 1)$ e $\lambda > a$ esistono $x^* \in K_\rho$, $\delta > 0$, dipendenti da $n, \beta, \alpha, \lambda, \eta$ tali che

$$|\{x \in K_{\delta\rho}(x^*) \mid v(x) < \lambda\}| > (1 - \eta)|K_{\delta\rho}(x^*)|.$$

OSSERVAZIONE 2.3.9. - Si noti che se $v \in W^{1,p}(K_\rho)$, definita $\tilde{v}(y) := v(\rho y)$ per $y \in K_1(0)$, si ha che

$$\int_{K_\rho} |D_x v(x)|^p dx = \rho^{n-p} \int_{K_1} |D_y \tilde{v}(y)|^p dy$$

Dimostrazione - Ci limitiamo a fornire la dimostrazione nel caso $n = 2$, dato che il caso generale può essere mostrato per induzione. Supponiamo dapprima che $v \in C^1(K_\rho) \cap W^{1,p}(K_\rho)$. Indichiamo con x, y le coordinate in \mathbf{R}^2 . Poniamo

$$Y(x) = \{y \in (-\rho, \rho) \mid v(x, y) > 1\}.$$

Poiché

$$\int_{-\rho}^{\rho} |Y(x)| dx = |K_\rho \cap \{v > 1\}|$$

e, per ipotesi, $|K_\rho \cap \{v > 1\}| > \alpha|K_\rho| = 4\alpha\rho^2$ esisterà $x_0 \in (-\rho, \rho)$ tale che

$$|Y(x_0)| \geq 2\alpha\rho. \quad (2.7)$$

Per ogni $y \in Y(x_0)$ e $\delta_1 > 0$ definiamo

$$I_{\delta_1\rho}(y) = [x_0 - \delta_1\rho, x_0 + \delta_1\rho] \times \{y\}.$$

Si fissi λ in $(0, 1)$. Definiamo

$$Y_{\delta_1,\lambda}(x_0) = \left\{ y \in Y(x_0) \mid v(x, y) > \frac{1}{2}(\lambda + 1), \text{ per ogni } x \in I_{\delta_1\rho}(y) \right\}.$$

1° passo - Mostriamo che per ogni $\eta_1 < 1$ esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$|Y_{\delta_1,\lambda}(x_0)| \geq (1 - \eta_1)|Y(x_0)|. \quad (2.8)$$

Sia $Y_{\delta_1,\lambda}^c(x_0) := Y(x_0) \setminus Y_{\delta_1,\lambda}(x_0)$. Se esiste $\delta_1 > 0$ per cui $Y_{\delta_1,\lambda}^c(x_0) = \emptyset$ abbiamo finito. Altrimenti esiste $y \in Y_{\delta_1,\lambda}^c(x_0)$ e \bar{x} tali che $(\bar{x}, y) \in I_{\delta_1\rho}(y)$ e $v(\bar{x}, y) \leq (\lambda + 1)/2$. Poiché $v(x_0, y) > 1$ si ha

$$\frac{1 - \lambda}{2} < v(x_0, y) - v(\bar{x}, y) = \int_{\bar{x}}^{x_0} v_x(s, y) ds.$$

Integrando in $y \in Y_{\delta_1,\lambda}^c(x_0)$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1 - \lambda}{2} |Y_{\delta_1,\lambda}^c(x_0)| &\leq \\ &\leq \int_{Y_{\delta_1,\lambda}^c(x_0)} dy \int_{-\delta_1\rho}^{\delta_1\rho} |Dv(s, y)| ds \leq (|Y_{\delta_1,\lambda}^c(x_0)| 2\delta_1\rho)^{1-1/p} \|Dv\|_{L^p(K_\rho)} \end{aligned}$$

da cui si deduce, grazie alle ipotesi (si ricordi che $n = 2$),

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^p |Y_{\delta_1, \lambda}^c(x_0)| &\leq (2\delta_1\rho)^{p-1} \leq \\ &\leq \|Dv\|_{L^p(K_\rho)}^p \leq (2\delta_1\rho)^{p-1} \beta^p \rho^{2-p} \leq \frac{(2\delta_1)^{p-1} \beta^p}{2\alpha} |Y(x_0)|. \end{aligned}$$

Pertanto, per ogni $\eta_1 \in (0, 1)$ esiste δ_1 per il quale vale (2.8).

2° passo - Ora fissiamo $y_0 \in Y_{\delta_1, \lambda}(x_0)$ cosicch  $v(x_0, y_0) > 1$ e $v(x, y_0) > (\lambda + 1)/2$ per ogni $x \in I_{\delta_1, \rho}(y_0)$. Per $\delta_2 > 0$ poniamo

$$J_{\delta_2, \rho}(x) = \{x\} \times [y_0 - \delta_2\rho, y_0 + \delta_2\rho].$$

Sia

$$X_{\delta_2, \lambda}(y_0) = \left\{x \in I_{\delta_1, \rho}(y_0) \mid v(x, y) > \lambda \text{ per ogni } y \in J_{\delta_2, \rho}(x)\right\}.$$

Mostriamo che per ogni $\eta_2 \in (0, 1)$ esiste $\delta_2 > 0$ tale che

$$|X_{\delta_2, \lambda}(y_0)| \geq (1 - \eta_2) |I_{\delta_1, \rho}(y_0)|. \quad (2.9)$$

Se esiste $\delta_2 > 0$ per il quale $X_{\delta_2, \lambda}(y_0) = I_{\delta_1, \rho}(y_0)$ abbiamo finito. Altrimenti, definito $X_{\delta_2, \lambda}^c(y_0) := I_{\delta_1, \rho}(y_0) \setminus X_{\delta_2, \lambda}(y_0)$, esiste $x \in X_{\delta_2, \lambda}^c(y_0)$ e \bar{y} tali che $(x, \bar{y}) \in J_{\delta_2, \rho}(x)$ tale che $v(x, \bar{y}) \leq \lambda$. Ne segue che

$$\frac{1-\lambda}{2} \leq v(x, y_0) - v(x, \bar{y}) = \int_{\bar{y}}^{y_0} v_y(x, s) ds$$

per cui integrando in $X_{\delta_2, \lambda}^c(y_0)$

$$\begin{aligned} \frac{1-\lambda}{2} |X_{\delta_2, \lambda}^c(y_0)| &\leq \int_{X_{\delta_2, \lambda}^c(y_0)} dx \int_{-\delta_2\rho}^{\delta_2\rho} |Dv(x, y)| dy \leq \\ &\leq (|X_{\delta_2, \lambda}^c(y_0)| 2\delta_2\rho)^{1-1/p} \|Dv\|_{L^p(K_\rho)} \end{aligned}$$

il che implica

$$\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^p |X_{\delta_2, \lambda}^c(y_0)|^p \leq (4\delta_1\delta_2\rho^2)^{p-1} \beta^p \rho^{2-p} \leq \frac{(2\delta_1)^{p-1} \beta^p}{2\alpha} |Y(x_0)|$$

da cui

$$|X_{\delta_2, \lambda}(y_0)| \geq (1 - \eta_2) |I_{\delta_1, \rho}(y_0)| \quad (2.10)$$

se δ_2   sufficientemente piccolo.

A questo punto, scegliendo eventualmente δ_2 minore, possiamo assumere che δ_1/δ_2 sia un intero. Consideriamo l'intervallo $I_{\delta_1, \rho}(y_0)$ ed una sua partizione in δ_1/δ_2 sottointervalli di ampiezza $2\delta_2\rho$. Siano (x_i, y_0) i centri di tali sottointervalli. In virt  di (2.10)   possibile trovare $x^* \in \{x_1, \dots, x_{\delta_1/\delta_2}\}$ in modo tale che

$$|(x^* - \delta_2\rho, x^* + \delta_2\rho) \cap X_{\delta_2, \lambda}(y_0)| > 2\delta_2\rho(1 - \eta_2) |I_{\delta_1, \rho}(y_0)| = 4\delta_1\delta_2\rho^2(1 - \eta_2).$$

Scegliendo $y^* = y_0$, considerando il cubo $K_{\delta\rho}(x^*, y^*)$ dove $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, il cui volume è $4\delta^2\rho^2$, ponendo $\eta = \eta_2$, dalla definizione di $X_{\delta_2, \lambda}(y_0)$ segue che

$$|\{(x, y) \in K_{\delta\rho}(x^*, y^*) \mid v(x, y) > \lambda\}| > (1 - \eta)|K_{\delta\rho}(x^*, y^*)|.$$

Sia ora $v \in W^{1,p}(K_\rho)$. Possiamo allora trovare una successione $(v_h)_h \subset C^1(K_\rho) \cap W^{1,p}(K_\rho)$ e una successioni di insiemi $(A_h)_h$, $A_h \subset K_\rho$, tali che

$$|A_h| + \|v_h - v^{(h)}\|_{L^\infty(K_\rho \setminus A_h)} + \|v_h - v^{(h)}\|_{W^{1,p}(K_\rho)} < \frac{1}{h}$$

dove

$$v^{(h)} = v + \frac{2}{h}.$$

Supponiamo che v soddisfi le ipotesi del lemma, cioè esistano $\beta > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$ tali che

$$\int_{K_\rho} |Dv|^p dx \leq \beta^p \rho^{n-p} \quad \text{e} \quad |\{x \in K_\rho \mid v(x) > 1\}| > \alpha|K_\rho|.$$

Si osservi che, per come sono state scelte le funzioni v_h , si ha che

$$i) \quad \{x \in K_\rho \setminus A_h \mid v_h(x) > 1\} \supseteq \{x \in K_\rho \setminus A_h \mid v(x) > 1\}.$$

In particolare dalla scelta degli A_h e da $i)$ si ottiene che

$$\int_{K_\rho} |Dv_h|^p dx \leq \beta^p \rho^{n-p} + \frac{1}{h} \quad \text{e} \quad |\{x \in K_\rho \mid v_h(x) < 1\}| > \alpha|K_\rho| - \frac{1}{h}.$$

Allora, fissati $\eta, \lambda \in (0, 1)$, esistono $x_h^* \in K_\rho$, $\delta_h > 0$ tali che

$$|\{x \in K_{\delta_h\rho}(x_h^*) \mid v_h(x) > \lambda\}| > (1 - \eta)|K_{\delta_h\rho}(x_h^*)|.$$

Inoltre possiamo supporre, poiché δ_h non dipende da v_h , $\inf_h \delta_h > 0$. Di conseguenza esisterà $\delta > 0$ tale che, a meno di estrarre una sottosuccessione,

$$\delta_h \rightarrow \delta > 0.$$

Analogamente, a meno di sottosuccessioni,

$$x_h^* \rightarrow x^* \in K_\rho.$$

Ancora per la scelta delle funzioni v_h si ha che

$$ii) \quad \{x \in K_{\delta_h\rho}(x_h^*) \setminus A_h \mid v_h(x) > \lambda\} \subseteq \{x \in K_{\delta_h\rho}(x_h^*) \setminus A_h \mid v(x) + \frac{3}{h} > \lambda\}$$

Poiché $K_{\delta_h\rho}(x_h^*) \subset K_\rho(0)$ si ottiene che x^* è il centro di un cubo di raggio $\delta\rho$ contenuto in K_ρ . Si ottiene allora usando $ii)$, che

$$\begin{aligned} |\{x \in K_{\delta_h\rho}(x_h^*) \mid v(x) + \frac{3}{h} > \lambda\}| &\geq |\{x \in K_{\delta_h\rho}(x_h^*) \setminus A_h \mid v(x) + \frac{3}{h} > \lambda\}| \\ &\geq |\{x \in K_{\delta_h\rho}(x_h^*) \setminus A_h \mid v_h(x) > \lambda\}| \\ &\geq (1 - \eta)|K_{\delta_h\rho}(x_h^*)| \end{aligned}$$

e passando al limite si ottiene la tesi. \square

Il risultato enunciato di seguito riguarda la cosiddetta *espansione della positività*.

PROPOSIZIONE 2.3.10. *Esiste $\theta \in (0, 1)$ (dipendente da γ) tale che per ogni $\tilde{\theta} \in (0, \theta)$ esiste $\lambda \in (0, 1)$ (dipendente da $\tilde{\theta}$ e θ) in corrispondenza del quale si ha che per ogni $(x^*, t^*) \in \Omega \times (0, T)$, $\rho > 0$ con $K_{5\rho}(x^*) \times (t^* - \rho^2, t^* + \rho^2) \subset \Omega \times (0, T)$, per ogni $u \in DG(\Omega, T, \gamma)$, per ogni $h > 0$, se*

$$u(x, t^*) \geq h \quad \text{q.o. in } K_\rho(x^*)$$

allora

$$u(x, t) \geq \lambda h \quad \text{q.o. in } K_{2\rho}(x^*), \text{ per ogni } t \in [t^* + \tilde{\theta}\rho^2, t^* + \theta\rho^2].$$

OSSERVAZIONE 2.3.11. - Fissato $(x^*, t^*) \in \Omega \times (0, T)$, fissato $h > 0$ e posto

$$A_{h,\rho}(x^*, t^*) = \{x \in K_\rho(x^*) \mid u(x, t^*) < h\}, \quad (2.11)$$

si osservi che la condizione $u(x, t^*) \geq h$ per ogni $x \in K_\rho(x^*)$ implica $A_{h,4\rho}(x^*, t^*) \subset K_{4\rho}(x^*) \setminus K_\rho(x^*)$ e quindi

$$|A_{h,4\rho}(x^*, t^*)| \leq (1 - 4^{-n})|K_{4\rho}(x^*)|.$$

La dimostrazione della Proposizione 2.3.10 richiede dei lemmi preliminari.

LEMMA 2.3.12. *Esistono $\theta, \eta \in (0, 1)$ tali che, dati $h > 0$ e $u \geq 0$ in $DG(\Omega, T, \gamma)$ per cui valga*

$$u(x, t^*) \geq h \quad \text{q.o. in } K_\rho(x^*).$$

si ha che

$$|A_{\eta h, 4\rho}(x^*, t)| < \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) |K_{4\rho}| \quad \text{per ogni } t \in (t^*, t^* + \theta\rho^2).$$

OSSERVAZIONE 2.3.13. - Analogamente si può mostrare che esistono $\theta, \eta \in (0, 1)$ per i quali, data $u \geq 0$ in $DG(\Omega, T, \gamma)$ e dati $h > 0$ e $\alpha > 1$ tali che $u(x, t^*) \geq h$ per ogni $x \in K_\rho(x^*)$, si ha

$$|A_{\eta h, \alpha\rho}(x^*, t)| < \left(1 - \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right) |K_{\alpha\rho}| \quad \text{per ogni } t \in (t^*, t^* + \theta\rho^2).$$

La scelta di $\alpha = 4$ nell'enunciato del lemma precedente è solamente una scelta di comodo funzionale all'uso poi della Proposizione 2.3.6 (usata nell'insieme $Q_{4\rho, \theta}^-(y, s)$) per mostrare la Proposizione 2.3.10.

Dimostrazione - Assumiamo per semplicità che $(x^*, t^*) = (0, 0)$. Supponiamo anche $h = 1$, altrimenti è sufficiente considerare la funzione u/h . Infine con il cambio di variabile $\xi = x/4\rho$, $\tau = t/\rho^2$ possiamo assumere $K_{4\rho} \times (0, \theta\rho^2) = K_1 \times (0, \theta)$.

Applichiamo le stime dell'energia (2.1) con $\zeta = \zeta(x)$, $\zeta \in W_0^{1,\infty}(K_1(0))$, $\zeta = 1$ in $K_{1-\sigma}(0)$ e $0 \leq \zeta \leq 1$, $|D\zeta| \leq 2/\sigma$, con $\sigma \in (0, 1)$. Si ha

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < \theta} \int_{K_1(0)} (u-1)_-^2(x, t) \zeta^2(x) dx + \int_0^\theta \int_{K_1(0)} |D(u-1)_-|^2 \zeta^2 dx dt &\leq \\ &\leq \int_{K_1(0)} (u-1)_-^2(x, 0) \zeta^2(x) dx + \gamma \int_0^\theta \int_{K_1(0)} (u-1)_-^2 |D\zeta|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Siccome $u \geq 1$ in $K_{1/4}(0)$ dall'Osservazione 2.3.11 si deduce che

$$|\{x \in K_1(0) \mid u(x, 0) < 1\}| < (1 - 4^{-n}) |K_1(0)|.$$

Si osservi che, poiché $u \geq 0$, $(u-1)_- \leq 1$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < \theta} \int_{K_{1-\sigma}(0)} (u-1)_-^2(x, t) \zeta^2(x) dx &\leq \\ &\leq \int_{K_1(0)} (u-1)_-^2(x, 0) \zeta^2(x) dx + \gamma \int_0^\theta \int_{K_1(0)} (u-1)_-^2 |D\zeta|^2 dx dt \leq \\ &\leq (1 - 4^{-n}) 2^n + \frac{4\gamma\theta 2^n}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Scrivendo semplicemente $A_{h,\rho}(t)$ in vece di $A_{h,\rho}(0, t)$ e con la decomposizione

$$A_{\eta,1}(\tau) = A_{\eta,1-\sigma}(\tau) \cup \{x \in K_1(0) \setminus K_{1-\sigma}(0) \mid u(x, \tau) < \eta\}$$

si ottiene

$$|A_{\eta,1}(\tau)| \leq |A_{\eta,1-\sigma}(\tau)| + |K_1(0) \setminus K_{1-\sigma}(0)| \leq |A_{\eta,1-\sigma}(\tau)| + 2^n (1 - (1-\sigma)^n).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{K_{1-\sigma}(0)} (u-1)_-^2(x, \tau) dx &\geq \\ &\geq \int_{A_{\eta,1-\sigma}(\tau)} (u-1)_-^2(x, \tau) dx \geq (1-\eta)^2 |A_{\eta,1-\sigma}(\tau)|. \end{aligned}$$

Infine, poiché $1 - (1-\sigma)^n \leq n\sigma$ e $\zeta \equiv 1$ in $K_{1-\sigma}(0)$,

$$\begin{aligned} |A_{\eta,1}(\tau)| &\leq |A_{\eta,1-\sigma}(\tau)| + \omega_n (1 - (1-\sigma)^n) \leq \\ &\leq (1-\eta)^{-2} \int_{K_{1-\sigma}(0)} (u-1)_-^2(x, \tau) dx + \omega_n (1 - (1-\sigma)^n) \leq \\ &\leq (1-\eta)^{-2} \left(\frac{4\gamma\theta}{\sigma^2} + 1 - 4^{-n} + n\sigma \right) 2^n. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ora, se per assurdo la tesi non fosse vera, per ogni $\theta, \eta \in (0, 1)$ esisterebbe un $\bar{t} \in (0, \theta)$ tale che

$$|A_{\eta,1}(\bar{t})| \geq (1 - 4^{-n-1}) |K_1|.$$

Applicando la stima (2.12) per $\tau = \bar{t}$ avremmo

$$(1 - 4^{-n-1}) 2^n \leq |A_{\eta,1}(\bar{t})| \leq (1-\eta)^{-2} (\gamma\theta\sigma^{-2} + 1 - 4^{-n} + n\sigma) 2^n.$$

Poiché ciò è indipendente da \bar{t} , scegliendo, ad esempio, $\theta = \sigma^3$ e mandando η e σ a zero si avrebbe $1 - 4^{-n-1} \leq 1 - 4^{-n}$. □

Ricordiamo un fatto preliminare utile per dimostrare il lemma che segue. (si vedano, ad esempio, il Lemma 2.2, l'Osservazione 2.3 e l'Osservazione 2.4 della prefazione in [2]).

LEMMA 2.3.14. *Siano $v \in W^{1,1}(B_\rho(x_o))$ per qualche $\rho > 0$ e $x_o \in \mathbf{R}^n$, $k, l \in \mathbf{R}$ con $k < l$. Esiste una costante c , dipendente solo da n , tale che*

$$(l - k)|\{v > l\}| \leq c \frac{\rho^{n+1}}{|\{v < k\}|} \int_{\{k < v < l\}} |Dv| dx.$$

LEMMA 2.3.15. *Si consideri θ determinato dal Lemma 2.3.12. Siano $u \geq 0$ in $DG(\Omega, T, \gamma)$, $h > 0$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\eta_1 = \eta_1(\epsilon, n, \gamma, \theta) \in (0, 1)$ tale che*

$$|\{u < \eta_1 h\} \cap K_{4\rho}(x^*) \times (t^*, t^* + \theta\rho^2)| < \epsilon |K_{4\rho}(x^*) \times (t^*, t^* + \theta\rho^2)|.$$

Dimostrazione - Supponiamo per semplicità che $(x^*, t^* + \theta\rho^2) = (0, 0)$. Scriviamo le stime dell'energia su $K_{5\rho} \times (-2\theta\rho^2, 0)$ con ζ tale che $\zeta \equiv 1$ su $K_{4\rho} \times (-\theta\rho^2, 0)$, $\zeta \equiv 0$ fuori da $K_{5\rho} \times (-2\theta\rho^2, 0)$, $0 \leq \zeta \leq 1$ e

$$|D\zeta| \leq \frac{2}{\rho}, \quad 0 \leq \zeta_t \leq \frac{4}{\theta\rho^2},$$

con livello $k = \eta h 2^{-m}$, dove $\eta > 0$ e $m \in \mathbf{N}$. Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\theta\rho^2}^0 \int_{K_{4\rho}} \left| D\left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_- \right|^2(x, t) dx dt &\leq \\ &\leq \gamma \int_{-2\theta\rho^2}^0 \int_{K_{5\rho}} \left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_-^2 (|D\zeta|^2 + \zeta_t) dx dt \leq \\ &\leq \gamma \frac{4}{\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \int_{-2\theta\rho^2}^0 \int_{K_{5\rho}} \left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_-^2 dx dt \leq \tag{2.13} \\ &\leq \frac{4\gamma}{\rho^2} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \frac{\eta^2 h^2}{2^{2m}} 2\theta\rho^2 |K_{5\rho}| = 4\gamma(1 + \theta) \frac{\eta^2 h^2}{2^{2m}} 10^n \rho^n. \end{aligned}$$

Scrivendo semplicemente $A_{h,\rho}(t)$ in vece di $A_{h,\rho}(0, t)$, dal Lemma 2.3.14 (scegliendo $k = \eta h / 2^m$ e $l = \eta h / 2^{m-1}$) si ha

$$\begin{aligned} \int_{K_{4\rho}} \left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_-(x, \tau) dx &\leq \frac{\eta h}{2^m} |A_{\eta h 2^{-m}, 4\rho}(\tau)| \leq \\ &\leq \frac{c \rho^{n+1}}{|K_{4\rho} \setminus A_{\eta h 2^{-m+1}, 4\rho}(\tau)|} \int_{A_{\eta h 2^{-m+1}, 4\rho}(\tau) \setminus A_{\eta h 2^{-m}, 4\rho}(\tau)} |Du(x, \tau)| dx, \tag{2.14} \end{aligned}$$

per ogni $\tau \in (-\theta\rho^2, 0)$. Siccome $K_{4\rho} \setminus A_{\eta h, 2^{-m+1}, 4\rho}(\tau) \supseteq K_{4\rho} \setminus A_{\eta h, 4\rho}(\tau)$, scegliendo η che soddisfi la tesi del Lemma 2.3.12 e scrivendo $|K_{4\rho} \setminus A_{\eta h, 4\rho}(\tau)| + |K_{4\rho}| = (1 - 4^{-n-1} + 4^{-n-1})|K_{4\rho}|$ dal Lemma 2.3.12 si deduce che per ogni $\tau \in (-\theta\rho^2, 0)$

$$|K_{4\rho} \setminus A_{\eta h, 4\rho}(\tau)| > 4^{-n-1}|K_{4\rho}| = 2^{n-2}\rho^n.$$

Troviamo allora

$$\int_{K_{4\rho}} \left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_-(x, \tau) dx \leq \frac{c}{2^{n-2}} \rho \int_{A_{\eta h, 2^{-m+1}, 4\rho}(\tau) \setminus A_{\eta h, 4\rho}(\tau)} |Du(x, \tau)| dx.$$

Integrando in τ la stima precedente e definendo la successione decrescente

$$\begin{aligned} a_m &:= \int_{-\theta\rho^2}^0 |A_{\eta h, 2^{-m}, 4\rho}(\tau)| d\tau = \\ &= \left| \left\{ (x, t) \in K_{4\rho} \times (-\theta\rho^2, 0) \mid u(x, t) < \frac{\eta h}{2^m} \right\} \right|, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_{-\theta\rho^2}^0 \int_{K_{4\rho}} \left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_-(x, \tau) dx d\tau \leq \\ &\leq \frac{c}{2^{n-2}} \rho \int_{-\theta\rho^2}^0 \int_{A_{\eta h, 2^{-m+1}, 4\rho}(\tau) \setminus A_{\eta h, 4\rho}(\tau)} |Du(x, \tau)| dx d\tau \\ &\leq \frac{c}{2^{n-2}} \rho \left(\int_{-\theta\rho^2}^0 \int_{K_{4\rho}} \left| D \left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_- \right|^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} (a_{m-1} - a_m)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

D'altra parte

$$\int_{-\theta\rho^2}^0 \int_{K_{4\rho}} \left(u - \frac{\eta h}{2^m}\right)_-(x, \tau) dx d\tau \geq \frac{\eta h}{2^{m+1}} a_{m+1}.$$

Da quest'ultima stima, usando prima (2.15) e poi (2.13), si ottiene

$$a_{m+1}^2 \leq \gamma (a_{m-1} - a_m) |K_{4\rho} \times (-\theta\rho^2, 0)|,$$

con $\gamma = \gamma(c, n, \theta, \gamma)$, per cui per ogni $m_* \in \mathbf{N}$ si ha

$$\sum_{m=1}^{m_*} a_{m+1}^2 \leq \gamma (a_0 - a_{m_*}) |K_{4\rho} \times (-\theta\rho^2, 0)|.$$

Dalla decrescenza di $\{a_m\}_m$ si ricava che la serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_{m+1}^2$ converge, $\lim_m a_m = 0$, e quindi la tesi. \square

Dimostrazione della Proposizione 2.3.10 - Ragionando come nella Proposizione 2.3.6, si può provare che per ogni $a \in (0, 1)$ e $\tilde{\theta} \in (0, \theta)$ esiste $\bar{v} \in (0, 1)$, dipendente solo da γ, n, a e da $\tilde{\theta}$, tale che se $K_{4\rho}(y) \times (s - \theta\rho^2, s) \subset \Omega \times (0, T)$ e $|\{u < k\} \cap K_{4\rho}(y) \times (s - \theta\rho^2, s)| \leq \bar{v} |K_{4\rho}(y) \times (s - \theta\rho^2, s)|$ allora $u \geq ak$

quasi ovunque in $K_{2\rho}(y) \times (s - (\theta - \tilde{\theta})\rho^2, s)$. Per concludere, basta allora considerare $y = x^*$, $s = t^* + \theta\rho^2$, prendere nel Lemma 2.3.15 $\varepsilon = \bar{v}$, dove \bar{v} è determinato, per esempio, in corrispondenza della scelta $a = \frac{1}{2}$ e $k = \eta_1 h$. In questo modo ricaviamo che $u \geq \frac{1}{2}\eta_1 h$ quasi ovunque in $K_{2\rho}(x^*) \times [t^* + \tilde{\theta}\rho^2, t^* + \theta\rho^2]$. Denotando $\lambda = \frac{1}{2}\eta_1$ si ha la tesi. \square

TEOREMA 2.3.16. *Per ogni costante $c_2 \in (0, 1]$ esiste $\gamma > 0$, γ dipendente solo da n, γ , tale che per ogni $u \in DG(\Omega, T, \gamma)$, $u \geq 0$, per ogni $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ e $\rho > 0$ con $K_{5\rho}(x_0) \times (t_0 - \rho^2, t_0 + \rho^2) \subset \Omega \times (0, T)$, risulta*

$$u(x_0, t_0) \leq \gamma \inf_{K_\rho(x_0)} u(x, t_0 + c_2\rho^2).$$

OSSERVAZIONE 2.3.17. - La limitazione su c_2 serve solamente a garantire che i punti $(x, t_0 + c_2\rho^2)$, con $x \in K_\rho(x_0)$, stiano in $\Omega \times (0, T)$.

Dimostrazione - Considereremo u continua per semplicità, ma il risultato vale per una qualunque u nella classe DG .

Come al solito, per semplicità, supporremo $(x_0, t_0) = (0, 0)$, $\rho = 1$, $u(0, 0) = 1$. L'insieme di definizione della funzione u sarà allora $\Omega - \{x_0\} \times (-t_0, T - t_0)$ e mostreremo che esistono γ e c_2 tali che

$$u(0, 0) \leq \gamma \inf_{K_1(0)} u(x, c_2).$$

Definiamo le due funzioni

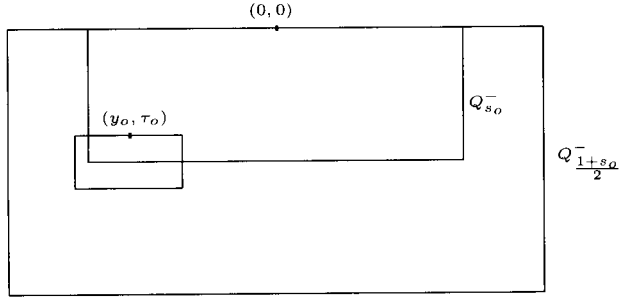
$$\mathcal{M}(s) := \sup_{Q_s^-(0,0)} u, \quad \mathcal{N}(s) = (1 - s)^{-\xi}$$

dove ξ è una costante positiva che determineremo in seguito. Denotiamo con s_o la soluzione più grande dell'equazione $\mathcal{M}(s) = \mathcal{N}(s)$ ($s_o \in [0, 1)$).

Dalla continuità di u si ha che esiste (y_o, τ_o) nella chiusura di $Q_{s_o}^-(0, 0)$ tale che

$$u(y_o, \tau_o) = (1 - s_o)^{-\xi} := M. \quad (2.16)$$

Consideriamo il cilindro $Q_{\rho_o}^-(y_o, \tau_o)$, con vertice in (y_o, τ_o) dove $\rho_o = \frac{1-s_o}{2}$.



Siccome

$Q_{\rho_o}^-(y_o, \tau_o) \subset Q_{\frac{1+s_o}{2}}^-(0, 0)$, allora, per come è stato scelto s_o , risulta

$$\sup_{Q_{\rho_o}^-(y_o, \tau_o)} u \leq \sup_{Q_{\frac{1+s_o}{2}}^-(0, 0)} u < \mathcal{N}\left(\frac{1+s_o}{2}\right) = 2^\xi M. \quad (2.17)$$

Il nostro obiettivo ora è quello di individuare un istante temporale in corrispondenza del quale u resta strettamente positiva in tutto un cubo. Questo è il punto di partenza per poter applicare l'espansione della positività (si veda Proposizione 2.3.10). Nella dimostrazione già vista (quella del Teorema 2.2.1), per ottenere quest'informazione, si era fatto ricorso alla continuità hölderiana di u . Vedremo ora un altro approccio basato solo sulle stime dell'energia e su alcuni risultati di teoria della misura dovuti a De Giorgi.

1° *passo* - Il primo passo è mostrare che vale (2.19) per un qualche ν . Applicando dunque le stime della Definizione 2.3.1 alla funzione $(u - k)_-$ con

$$k = 2^\xi M$$

nel cilindro $Q_{\rho_o}^-(y_o, \tau_o)$, scegliendo una funzione test ζ tale che $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ in $Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)$ e 0 su $\partial K_{\rho_o}(y_o) \times (\tau_o - \rho_o^2, \tau_o) \cup K_{\rho_o}(y_o) \times \{\tau_o - \rho_o^2\}$ e tale che $|D\zeta| \leq 4/\rho_o$ e $|\zeta_t| \leq 8/(3\rho_o^2)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)} |D(u - k)_-|^2 dx dt &\leq \gamma \iint_{Q_{\rho_o}^-(y_o, \tau_o)} (u - k)_-^2 (|D\zeta|^2 + \zeta \zeta_t) dx dt \\ &\leq \gamma \frac{56}{3} \frac{k^2}{\rho_o^2} |Q_{\rho_o}^-(y_o, \tau_o)|, \end{aligned}$$

e quindi

$$\iint_{Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)} |Du|^2 dxdt \leq \gamma 2^n \frac{56}{3} k^2 \rho_o^n. \quad (2.18)$$

Grazie alla Proposizione 2.3.4 si può mostrare che

$$\left| \left\{ (x, t) \in Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o) \mid u(x, t) > \frac{M}{2} \right\} \right| > \nu |Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)|, \quad (2.19)$$

dove ν è determinata in corrispondenza delle scelte $\mu_+ = \omega = k$, $\theta = 1$, $\rho = \rho_o/2$, $\sigma = 1 - 2^{-\xi-1}$, $a = \sigma^{-1}(1 - 3 \cdot 2^{-\xi-2})$. Infatti, se (2.19) non fosse vera si avrebbe

$$u \leq \frac{3}{4} M, \quad \text{in } Q_{\rho_o/4}^-(y_o, \tau_o).$$

In particolare, $u(y_o, \tau_o) \leq \frac{3}{4} M$, che però contraddice (2.16).

Si noti che per le scelte fatte il valore di ν in (2.19) dipende (solo) da n, γ, ξ .

2° passo - Ci proponiamo ora di far vedere che è possibile individuare un istante \bar{t} tale che le stime (2.18) e (2.19) valgono a livello spaziale, con il tempo congelato a \bar{t} . Precisamente mostriamo che esiste $\bar{t} \in (-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, -\frac{\nu}{8} \frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o]$ tale che

$$\left| \left\{ x \in K_{\rho_o/2}(y_o) : u(x, \bar{t}) \geq \frac{M}{2} \right\} \right| > \frac{\nu}{2} |K_{\rho_o/2}(y_o)|$$

e

$$\int_{K_{\rho_o/2}(y_o)} |Du(x, \bar{t})|^2 dx \leq \alpha \left(\frac{\rho_o}{2} \right)^{n-2} k^2,$$

per un qualche $\alpha > 0$ (che risulterà essere $\gamma 4^{n+1} 56 / (3\nu)$) sufficientemente grande.

Definiamo i seguenti insiemi

$$\begin{aligned} A(t) &= \left\{ x \in K_{\rho_o/2}(y_o) \mid u(x, t) \geq \frac{M}{2} \right\} \\ I &= \left\{ t \in \left(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, \tau_o \right] \mid |A(t)| > \frac{\nu}{2} |K_{\rho_o/2}(y_o)| \right\}, \\ J_\alpha &= \left\{ t \in \left(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, \tau_o \right] \mid \int_{K_{\rho_o/2}(y_o)} |Du(x, t)|^2 dx \leq \alpha \left(\frac{\rho_o}{2} \right)^{n-2} k^2 \right\}, \end{aligned}$$

con $\alpha > 0$. Grazie a (2.19), abbiamo

$$\int_{-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o}^{\tau_o} |A(t)| dt > \nu |Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)|.$$

Pertanto, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 \nu |Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)| &< \int_{-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o}^{\tau_o} |A(t)| dt = \int_I |A(t)| dt + \int_{(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, \tau_o] \setminus I} |A(t)| dt \\
 &\leq |K_{\rho_o/2}(y_o)| |I| + \frac{\nu}{2} |K_{\rho_o/2}(y_o)| \frac{\rho_o^2}{4} \\
 &= |Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)| |I| \left(\frac{\rho_o^2}{4}\right)^{-1} + \frac{\nu}{2} |Q_{\rho_o/2}^-(y_o, \tau_o)|,
 \end{aligned}$$

da cui segue che

$$|I| \geq \frac{\nu}{2} \frac{\rho_o^2}{4}. \quad (2.20)$$

D'altra parte, tenendo conto di (2.18) troviamo

$$\int_{(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, \tau_o] \setminus J_\alpha} \int_{K_{\rho_o/2}(y_o)} |Du(x, t)|^2 dx dt \leq \gamma 2^n k^2 \rho_o^n$$

e, per come è definito J_α

$$\begin{aligned}
 \int_{(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, \tau_o] \setminus J_\alpha} \int_{K_{\rho_o/2}(y_o)} |Du(x, t)|^2 dx dt \\
 \geq \alpha \left(\frac{\rho_o}{2}\right)^{n-2} k^2 \left| \left(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, \tau_o\right] \setminus J_\alpha \right|.
 \end{aligned}$$

Pertanto, dal confronto delle ultime due stime abbiamo

$$\left| \left(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, \tau_o\right] \setminus J_\alpha \right| \leq \gamma \frac{4^{n-1} \rho_o^2 56}{\alpha 3}$$

da cui

$$|J_\alpha| \geq \frac{\rho_o^2}{4} \left(1 - \gamma \frac{4^n 56}{\alpha 3}\right)$$

A questo punto, a patto di scegliere $\alpha = \gamma \frac{4^{n+1} 56}{3\nu}$, si ha

$$\begin{aligned}
 |I \cap J_\alpha| &= |I| + |J_\alpha| - |I \cup J_\alpha| \geq \frac{\nu}{2} \frac{\rho_o^2}{4} + \frac{\rho_o^2}{4} \left(1 - \gamma \frac{4^n 56}{\alpha 3}\right) - \frac{\rho_o^2}{4} \\
 &= \frac{\rho_o^2}{4} \left(\frac{\nu}{2} - \gamma \frac{4^n 56}{\alpha 3}\right) = \frac{\rho_o^2 \nu}{4 4}.
 \end{aligned}$$

Scegliendo ora T , ad esempio, l'intervallo $\left(-\frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o, -\frac{\nu}{8} \frac{\rho_o^2}{4} + \tau_o\right]$ si ha che

$$|I \cap J_\alpha \cap T| = |I \cap J_\alpha| + |T| - |(I \cap J_\alpha) \cup T| \geq \frac{\rho_o^2}{4} \left[\frac{\nu}{4} + \left(1 - \frac{\nu}{8}\right) - 1\right] = \frac{\rho_o^2 \nu}{4 8}$$

per cui $I \cap J_\alpha \cap T \neq \emptyset$.

3° passo - Applichiamo ora, grazie al passo precedente, il Lemma 2.3.7 (si veda anche l'Osservazione 2.3.8) all'insieme $K_{\rho_o/2}(y_o) \times \{\bar{t}\}$ con $\lambda = \frac{M}{4}$.

Ricaviamo che per ogni $\eta \in (0, 1)$ esistono $x^* \in K_{\rho_o/2}(y_o)$, $\delta \in (0, 1)$ tali che $K_{\delta\rho_o/2}(x^*) \subset K_{\rho_o/2}(y_o)$ e

$$\left| \left\{ u(\cdot, \bar{t}) > \frac{M}{4} \right\} \cap K_{\delta\rho_o/2}(x^*) \right| > (1 - \eta) |K_{\delta\rho_o/2}(x^*)|. \quad (2.21)$$

Si noti che x^* e δ , grazie al Lemma 2.3.7, dipendono dalle quantità $n, \nu, \alpha k^2, M, \eta$ e dalla dipendenza di ν (si veda la fine del 1° *passo*) e dalle scelte di α e k si conclude che x^* e δ dipenderebbero (solo) da e da n, γ, ξ, M, η . Di fatto però, si veda il 2° passo, poiché $\{u \geq M/2\} = \{2u/M \geq 1\}$ e $k = 2^\xi M$ si ottiene che, chiamando \tilde{u} la funzione $2u/M$, in \bar{t} valgono

$$|\{\tilde{u}(\cdot, \bar{t}) \geq 1\}| \cap K_{\rho_o/2}(y_o) > \frac{\nu}{2} |K_{\rho_o/2}(y_o)|$$

e

$$\int_{K_{\rho_o/2}(y_o)} |D\tilde{u}(x, \bar{t})|^2 dx \leq \alpha \left(\frac{\rho_o}{2}\right)^{n-2} 4^{\xi+1}.$$

Di conseguenza, applicando il Lemma 2.3.7 alla funzione \tilde{u} , si ha che x^* e δ sono indipendenti da k e quindi da M e dipendono (solo) da e da n, γ, ξ, η .

4° *passo* - Il passo successivo consiste nel ripristinare la geometria parabolica del problema ed estendere la stima precedente ad un cilindro. Consideriamo l'insieme

$$K_{\delta\rho_o/2}(x^*) \times (\bar{t}, \bar{t} + t_0], \quad t_0 = \varepsilon^2 (\delta\rho_o/4)^2$$

con $\varepsilon > 0$ da determinare. Scriviamo le stime dell'energia per $(u - M/4)_-$, nel cilindro sopra definito, con una funzione test ζ indipendente da t e tale che $\zeta = 1$ in $K_{\delta\rho_o/4}(x^*)$, $\zeta = 0$ su $\partial K_{\delta\rho_o/2}(x^*)$, $0 \leq \zeta \leq 1$ e $|D\zeta| \leq 8/\delta\rho_o$. Per ogni $s \in (\bar{t}, \bar{t} + t_0]$, abbiamo allora, usando (2.21),

$$\begin{aligned} & \int_{K_{\delta\rho_o/4}(x^*)} \left(u - \frac{M}{4}\right)_-^2(x, s) dx \leq \\ & \leq \gamma \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+t_0} \int_{K_{\delta\rho_o/2}(x^*)} \left(u - \frac{M}{4}\right)_-^2(x, t) |D\zeta|^2(x) dx dt + \\ & \quad + \int_{K_{\delta\rho_o/2}(x^*)} \left(u - \frac{M}{4}\right)_-^2(x, \bar{t}) \zeta^2(x) dx \\ & \leq \frac{M^2}{16} \left[4\gamma \varepsilon^2 (\delta\rho_o)^n + \left| \left\{ u(\cdot, \bar{t}) \leq \frac{M}{4} \right\} \cap K_{\frac{\delta\rho_o}{2}}(x^*) \right| \right] \\ & \leq \frac{M^2}{16} (4\gamma \varepsilon^2 + \eta) (\delta\rho_o)^n. \end{aligned}$$

Poniamo

$$B(t) = \left\{ x \in K_{\delta\rho_o/4}(x^*) \mid u(x, t) \leq \frac{M}{8} \right\}.$$

Risulta facilmente

$$\int_{K_{\delta\rho_o/4}(x^*)} \left(u - \frac{M}{4}\right)_-^2(x, s) dx \geq \int_{B(s)} \left(u - \frac{M}{4}\right)_-^2(x, s) dx \geq \frac{M^2}{64} |B(s)|.$$

Quindi, confrontando le stime appena fatte, otteniamo

$$|B(s)| \leq 4(4\gamma\varepsilon^2 + \eta) (\delta\rho_o)^n = 2^{n+2} (4\gamma\varepsilon^2 + \eta) |K_{\delta\rho_o/4}(x^*)|,$$

per ogni $s \in (\bar{t}, \bar{t} + t_0]$. Integrando in s abbiamo infine

$$\left| \left\{ u \leq \frac{M}{8} \right\} \cap Q_{\frac{\delta\rho_o}{4}, \varepsilon^2}^+(x^*, \bar{t}) \right| \leq 2^{n+2} (4\gamma\varepsilon^2 + \eta) \left| Q_{\frac{\delta\rho_o}{4}, \varepsilon^2}^+(x^*, \bar{t}) \right|. \quad (2.22)$$

Per procedere abbiamo bisogno di applicare la Proposizione 2.3.6, in modo tale che ν_- (della Proposizione 2.3.6) sia indipendente dalla scelta di ε, η . Pertanto, è necessario che la stima precedente valga in un cilindro leggermente diverso da quello ottenuto. Supponiamo che ε^{-1} sia intero. Consideriamo quindi una partizione di $K_{\frac{\delta\rho_o}{4}}(x^*)$ in ε^{-n} cubi a due a due disgiunti e congruenti a $K_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}(0)$. Siano $x_j, j = 1, \dots, \varepsilon^{-n}$ i centri di tali cubi. I cilindri $\{Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^+(x_j, \bar{t})\}$ costituiscono, a meno di un insieme di misura nulla, una partizione di $Q_{\frac{\delta\rho_o}{4}, \varepsilon^2}^+(x^*, \bar{t})$ in sottocilindri congruenti. Dalla stima (2.22) segue che esiste necessariamente un indice j_o tale che

$$\left| \left\{ u \leq \frac{M}{8} \right\} \cap Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^+(x_{j_o}, \bar{t}) \right| \leq 2^{n+2} (4\gamma\varepsilon^2 + \eta) \left| Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^+(x_{j_o}, \bar{t}) \right|, \quad (2.23)$$

(altrimenti si giungerebbe a contraddire (2.22)). Osserviamo che, per costruzione, $Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^+(x_{j_o}, \bar{t}) \subset Q_{\rho_o}^-(y_o, \tau_o)$ e quindi possiamo stimare

$$\text{osc}_{Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^+(x_{j_o}, \bar{t})} u \leq k,$$

grazie a (2.17) e alla scelta di k . Facciamo anche notare che

$$Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^+(x_{j_o}, \bar{t}) = Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^-(x_{j_o}, \bar{s}),$$

dove $\bar{s} = \bar{t} + (\varepsilon\delta\rho_o/4)^2$. A questo punto, in corrispondenza delle seguenti scelte

$$\rho = \frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}, \quad \theta = 1, \quad \mu_- = 0, \quad \omega = k, \quad a = \frac{1}{2}, \quad \sigma = 2^{-\xi-3},$$

dalla Proposizione 2.3.6 otteniamo che esiste $\nu_- = \nu_-(n, \gamma) > 0$ tale che se

$$\left| \left\{ u \leq \frac{M}{8} \right\} \cap Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^-(x_{j_o}, \bar{s}) \right| \leq \nu_- \left| Q_{\frac{\varepsilon\delta\rho_o}{4}}^-(x_{j_o}, \bar{s}) \right|, \quad (2.24)$$

allora

$$u(x, t) \geq \frac{M}{16} \quad \text{q.o. in } Q_r^-(x_{j_o}, \bar{s}).$$

dove

$$r = \frac{\varepsilon\delta\rho_o}{8}.$$

Fissiamo ora ε e η . Infatti, scegliendo ε e η (in funzione di n, γ) opportunamente piccoli in (2.23), la condizione (2.24) è chiaramente soddisfatta. Si noti che, poiché abbiamo scelto η ,

$$\delta = \delta(n, \gamma, \xi)$$

e di conseguenza r dipende dalle stesse quantità. Applicando ora la Proposizione 2.3.10 troviamo

$$u(x, t) \geq \lambda \frac{M}{16} \quad \text{per ogni } x \in K_{2r}(x_{j_o}),$$

$$\text{per ogni } t \in [t^* + \tilde{\theta}r^2, t^* + \theta r^2]$$

con θ che dipende solo da γ , λ che dipende solo da γ e $\tilde{\theta}, \tilde{\theta} \in (0, \theta)$ che fisseremo. Ripetendo il ragionamento si ottiene che $u(x, t) \geq \lambda^2 \frac{M}{16}$ per ogni $x \in K_{4r}(x_{j_o})$, per ogni $t \in [t^* + \tilde{\theta}r^2 + \tilde{\theta}(2r)^2, t^* + \theta r^2 + \theta(2r)^2]$, cioè

$$u(x, t) \geq \lambda^2 \frac{M}{16} \quad \text{per ogni } x \in K_{4r}(x_{j_o}),$$

$$\text{per ogni } t \in [t^* + 5\tilde{\theta}r^2, t^* + 5\theta r^2]$$

Iterando si ottiene che

$$u(x, t) \geq \lambda^m \frac{M}{16} \quad \text{per ogni } x \in K_{2^m r}(x_{j_o}),$$

$$\text{per ogni } t \in \left[t^* + \frac{\theta}{2} r^2 \frac{4^m - 1}{3}, t^* + \theta r^2 \frac{4^m - 1}{3} \right]$$

dove $\frac{4^m - 1}{3} = \sum_{j=0}^{m-1} 4^j$. Definendo le quantità (dove $m \in \mathbf{N}$ è da fissare)

$$\begin{cases} s_m := t^* + \tilde{\theta} r^2 \frac{4^m - 1}{3}, \\ t_m := t^* + \theta r^2 \frac{4^m - 1}{3}, \end{cases}$$

ricordando (2.16) possiamo riscrivere che

$$u(x, t) \geq \lambda^m \frac{(1-s_o)^{-\xi}}{16} \quad \text{per ogni } x \in K_{2^m r}(x_{j_o}),$$

$$\text{per ogni } t \in [s_m, t_m], \quad (2.25)$$

Sceglieremo m e r in modo tale che

$$2 \leq 2^m r \leq 4, \quad (2.26)$$

Ciò assicurerà che, siccome $x_{j_o} \in K_1(0)$, si abbia

$$K_{2^m r}(x_{j_o}) \supset K_1(0). \quad (2.27)$$

Ricordando che $r = \varepsilon \delta (1 - s_o) / 16$ e che $r \leq 2^{-m+2}$ ricaviamo

$$(1 - s_o)^{-\xi} = (\varepsilon \delta)^\xi 2^{-4\xi} \frac{1}{r^\xi} \geq (\varepsilon \delta)^\xi 2^{-4\xi} 2^{(m-2)\xi} = (\varepsilon \delta)^\xi 2^{(m-6)\xi}.$$

Dalla stima (2.25) e da (2.27) segue allora la stima

$$u(x, t) \geq (2^\xi \lambda)^m (\varepsilon \delta)^\xi 2^{-6\xi - 4} \quad \text{per ogni } x \in K_1(0), \quad t \in [s_m, t_m].$$

Fissato ora un istante $c_2 > 0$, scegliamo $\tilde{\theta}$ in modo tale che

$$\frac{16}{3} \tilde{\theta} < c_2.$$

In tal modo si ha che

$$s_m = t^* + \tilde{\theta} r^2 \frac{4^m - 1}{3} < \tilde{\theta} r^2 \frac{4^m}{3} \leq \frac{\tilde{\theta}}{3} 16 < c_2. \quad (2.28)$$

Si noti che a questo punto, fissato $\tilde{\theta}$, si determina anche il valore di λ . Scegliendo ξ in modo tale che (λ che ora dipende solo da γ)

$$2^\xi \lambda = 1$$

ci svincoliamo dalla dipendenza da m , e qualunque scelta di m faremo andrà bene. Si noti che ora, fissato ξ , è determinato anche il valore di r . Possiamo allora scegliere m . Il valore per m sarà scelto in modo tale che

$$\log_2 \frac{2}{r} \leq m \leq 1 + \log_2 \frac{2}{r},$$

cioè in modo tale che valga (2.26). Per la scelta fatta in (2.28) si conclude che

$$u(x, t) \geq c_o := (\varepsilon \delta)^\xi 2^{-6\xi-4} \quad \text{per ogni } x \in K_1(0), \\ \text{per ogni } t \in [s_m, t_m].$$

Per la scelta fatta di $\tilde{\theta}$, e quindi per (2.28), si ha che

$$c_2 \in [s_m, t_m] \quad \text{oppure} \quad c_2 > t_m.$$

Nel primo caso avremmo terminato e definendo $\gamma := c_o$ si conlude.

Nel secondo caso possiamo scegliere $\tilde{t} \in [s_m, t_m]$ tale che

$$u(x, \tilde{t}) \geq c_o \quad \text{per ogni } x \in K_1(0).$$

A patto di scegliere $\tilde{\theta}$ più piccolo si può supporre che

$$\tilde{t} + \tilde{\theta} < c_2.$$

Infatti $s_m \leq \tilde{t}$ e $s_m < 16\tilde{\theta}/3 < c_2$. Basta allora scegliere $\tilde{\theta}$ in modo tale che

$$\frac{19}{3} \tilde{\theta} = \frac{16}{3} \tilde{\theta} + \tilde{\theta} < c_2.$$

A questo punto reiteriamo la procedura applicando ora la Proposizione 2.3.10 (con $\tilde{\theta}$ e di conseguenza λ , che ora sono fissati) troviamo

$$u(x, t) \geq \lambda c_o \quad \text{per ogni } x \in K_2(0), \\ \text{per ogni } t \in [\tilde{t} + \tilde{\theta}, \tilde{t} + \theta].$$

con $\tilde{t} + \tilde{\theta} < c_2$. Se $c_2 \leq \tilde{t} + \theta$ si conclude, altrimenti la disuguaglianza di sopra vale in particolare in $K_1(0)$, cioè

$$u(x, t) \geq \lambda c_o \quad \text{per ogni } x \in K_1(0), \\ \text{per ogni } t \in [\tilde{t} + \tilde{\theta}, \tilde{t} + \theta].$$

e reiterando si ottiene

$$u(x, t) \geq \lambda^2 c_0 \quad \text{per ogni } x \in K_1(0), \\ \text{per ogni } t \in [\tilde{t} + 2\tilde{\theta}, \tilde{t} + 2\theta].$$

Con l'ulteriore vincolo che

$$2\tilde{\theta} \leq \theta$$

si ha che non si perdono istanti temporali e si noti che in particolare

$$u(x, t) \geq \lambda^2 c_0 \quad \text{per ogni } x \in K_1(0), \\ \text{per ogni } t \in [\tilde{t} + \tilde{\theta}, \tilde{t} + 2\theta].$$

Iterando k volte questa procedura si arriva a

$$u(x, t) \geq \lambda^k c_0 \quad \text{per ogni } x \in K_1(0), \\ \text{per ogni } t \in [\tilde{t} + \tilde{\theta}, \tilde{t} + k\theta].$$

dove k è un intero per cui

$$\tilde{t} + k\theta \geq c_2.$$

Poiché $-1 \leq \tilde{t} \leq c_2$ si ha che k dovrà essere scelto in modo tale che

$$1 + c_2 \leq k\theta$$

ma anche in modo tale che $\tilde{t} + k\theta$ non esca dal dominio. Si noti che

$$1 + c_2 \leq \alpha(c_2) := \begin{cases} 2 & c_2 \in (0, 1] \\ 2c_2 & c_2 \geq 1 \end{cases}$$

Di conseguenza definendo

$$\beta(c_2) := \begin{cases} 3 & c_2 \in (0, 1] \\ 3c_2 & c_2 \geq 1 \end{cases}$$

si hanno garantiti l'esistenza di un naturale k tale che

$$\alpha(c_2) \leq k\theta \leq \beta(c_2)$$

e il fatto che il numero di passi necessari dipende (solo!) da c_2 e, tramite θ , da γ e anche da n . \square

Locale hölderianità - Ricordiamo un risultato di locale limitatezza (si veda [16]) per le soluzioni di particolari equazioni di tipo parabolico.

TEOREMA 2.3.18. *Dati $\rho, \tau > 0$, u soluzione positiva di $u_t - \operatorname{div}(a(x, t)Du) = 0$ in $R = (-\rho, \rho)^n \times (-\tau, 0)$ con a matrice strettamente definita positiva, simmetrica e di coefficienti L^∞ . Dati $\rho' \in (0, \rho)$, $\tau' \in (0, \tau)$, $p' > 1$ e definito $R' = (-\rho', \rho')^n \times (-\tau', 0)$ si ha che per ogni $p \geq p'$ esiste $c > 0$ tale che*

$$\sup_{R'} u \leq c \left(\iint_R u^p dx dt \right)^{1/p}.$$

Un risultato più generale per soluzioni non negative dell'equazione del calore (2.4) è la seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\gamma = \gamma(n, \varepsilon)$ tale che per ogni $\sigma \in (0, 1)$

$$\sup_{Q_{\sigma\rho}(x_0, t_0)} u \leq \frac{\gamma}{(1-\sigma)^{\frac{n+2}{2\varepsilon}}} \left(\int_{Q_{\rho}(x_0, t_0)} |u|^\varepsilon dx dt \right)^{1/\varepsilon}. \quad (2.29)$$

Siano $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$, u nella classe $DG(\Omega, T, \gamma)$ e ρ tale che $K_{5\rho}(x_0) \times (t_0 - \rho^2, t_0 + \rho^2) \subset \Omega \times (0, T)$. Allora anche le funzioni $v_\varepsilon = v + \varepsilon = M(\rho) - u + \varepsilon$ e $w_\varepsilon = w + \varepsilon = u - m(\rho) + \varepsilon$, dove $\varepsilon > 0$ e

$$M(\rho) = \sup_{(x_0, t_0) + Q_\rho^-} u, \quad m(\rho) = \inf_{(x_0, t_0) + Q_\rho^-} u$$

sono positive in $Q_\rho^-(x_0, t_0)$ e appartengono alla classe DG^γ relativa a tale cilindro. In realtà è possibile prendere $\varepsilon = 0$ perché la costante γ del Teorema 2.3.16 non dipende da ε , per cui una volta mostrata l'hölderianità per v_ε e w_ε passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si otterrebbe lo stesso risultato per v e w . Consideriamo ora il baricentro di $Q_\rho^-(x_0, t_0)$ ossia il punto $P_0 = (x_0, t_0 - \rho^2/2)$ e applichiamo la disuguaglianza di Harnack nella versione v) del Teorema 2.2.3 ottenendo

$$\begin{aligned} M(\rho) - u(P_0) &\leq \gamma \inf_{Q_{\rho/2}^-(x_0, t_0)} [M(\rho) - u] \\ u(P_0) - m(\rho) &\leq \gamma \inf_{Q_{\rho/2}^-(x_0, t_0)} [u - m(\rho)] \end{aligned}$$

che sono equivalenti a

$$\begin{aligned} M(\rho) - u(P_0) &\leq \gamma [M(\rho) - \sup_{Q_{\rho/2}^-(x_0, t_0)} u] \\ u(P_0) - m(\rho) &\leq \gamma [\inf_{Q_{\rho/2}^-(x_0, t_0)} u - m(\rho)], \end{aligned}$$

rispettivamente. Sommando, si ottiene

$$\text{osc}_{Q_{\rho/2}^-(x_0, t_0)} u \leq \frac{\gamma - 1}{\gamma} \text{osc}_{Q_\rho^-(x_0, t_0)} u.$$

La quantità $\eta := (\gamma - 1)/\gamma$ è minore di 1. A meno di scegliere γ più grande si può supporre anche $\eta > 1/2$. A questo punto, iterando il ragionamento di prima sui cilindri $Q_{\rho_k}^-(x_0, t_0)$ con $\rho_k = \rho/2^k$, si perviene a

$$\omega_k := \text{osc}_{Q_{\rho_k}^-(x_0, t_0)} u \leq \eta^k \text{osc}_{Q_\rho^-(x_0, t_0)} u.$$

Posto $\alpha = -\log_2 \eta$, risulta quindi

$$\omega_k \leq 2^{-k\alpha} \text{osc}_{Q_\rho^-(x_0, t_0)} u = \left(\frac{\rho_k}{\rho} \right)^\alpha \text{osc}_{Q_\rho^-(x_0, t_0)} u.$$

Sia ora $0 < r < \rho$. Allora esiste \bar{k} tale che $\rho_{\bar{k}} \leq r < \rho_{\bar{k}-1}$ e dunque

$$\begin{aligned} \text{osc}_{Q_r^-(x_0, t_0)} u &\leq \text{osc}_{Q_{\rho_{\bar{k}-1}}^-(x_0, t_0)} u \leq \\ &\leq \left(\frac{\rho_{\bar{k}-1}}{\rho} \right)^\alpha \text{osc}_{Q_\rho^-(x_0, t_0)} u \leq \left(\frac{2r}{\rho} \right)^\alpha \text{osc}_{Q_\rho^-(x_0, t_0)} u. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Usiamo la stima precedente per provare ora la locale hölderianità di u . Fissiamo un cilindro $K = K_1 \times [t_1, t_2]$ in Ω_T e siano $(x, t), (y, s) \in K$. Supponiamo, per fissare le idee, che $t > s$. Sia $\rho > 0$ tale che $Q_\rho^-(x, t) \subset \Omega_T$. Naturalmente la scelta di ρ dipende dalla distanza di K da Ω_T . Se $t - s < \rho^2$ allora, applicando la stima (2.30) con $r = \sqrt{t - s}$, otteniamo

$$|u(x, t) - u(x, s)| \leq \text{osc}_{Q_r^-(x, t)} u \leq \left(\frac{2r}{\rho}\right)^\alpha \text{osc}_{Q_\rho^-(x, t)} u.$$

Supponiamo che $u \in L^\infty(\Omega_T)$ e poniamo $M = \sup_{\Omega_T} u$ (sarebbe sufficiente avere $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega_T)$). Abbiamo allora

$$|u(x, t) - u(x, s)| \leq 2M \left(\frac{2\sqrt{t - s}}{\rho}\right)^\alpha. \quad (2.31)$$

Se invece $t - s \geq \rho^2$, allora (2.31) è ovvia. Lo stesso argomento si può ripetere rispetto alle variabili spaziali ottenendo

$$|u(x, s) - u(y, s)| \leq 2M \left(\frac{2|x - y|}{\rho}\right)^\alpha. \quad (2.32)$$

Da (2.31) e (2.32) otteniamo la tesi.

2.4. Il caso $p \neq 2$

Dopo la prima formulazione dovuta ad Hadamard e Pini il contributo più significativo è quello di Moser ([16]), il quale dimostra che la disuguaglianza di Harnack continua a valere anche per soluzioni deboli positive di equazioni lineari paraboliche in forma di divergenza

$$u_t = \operatorname{div}(A(x, t)Du),$$

con coefficienti misurabili, limitati e tali da soddisfare una condizione di ellipticità uniforme. L'approccio usato da Moser non è strettamente legato alla linearità dell'equazione. Infatti, seguendo le linee guida di [16], un ulteriore sviluppo viene dato da Aronson-Serrin e Trudinger ([1, 22]), che estendono la disuguaglianza di Harnack a soluzioni deboli positive di equazioni paraboliche quasi-lineari

$$u_t - \operatorname{div}A(x, t, u, Du) = B(x, t, u, Du) \quad (2.1)$$

con coefficienti misurabili, limitati e soddisfacenti le condizioni

$$\begin{cases} A(x, t, u, \eta) \cdot \eta \geq C_0|\eta|^2 - C, \\ |A(x, t, u, \eta)| \leq \gamma|\eta| + C \\ |B(x, t, u, \eta)| \leq C_2|\eta| + C. \end{cases}$$

Il caso $p \neq 2$ rimase a lungo irrisolto, non per questioni di natura puramente tecnica. Infatti, la formulazione della disuguaglianza di Harnack nella versione *classica* di Pini e Hadamard è falsa se $p \neq 2$. Consideriamo a questo proposito l'equazione parabolica con il p -Laplaciano

$$u_t - \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0. \quad (2.2)$$

Per $p > 2$ la funzione (di Barenblatt)

$$\Gamma_p(x, t) = \frac{1}{t^{n/\lambda}} \left\{ \left[1 - \gamma_p \left(\frac{|x|}{t^{1/\lambda}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right]_+^{\frac{p-1}{p-2}} \right\} \quad t > 0, \quad (2.3)$$

con $\lambda = n(p-2) + p$ e $\gamma_p = \lambda^{-1/(p-1)}(p-2)/p$, è soluzione dell'equazione (2.2), come si può facilmente verificare. Osserviamo che

$$\lim_{p \rightarrow 2^+} \Gamma_p(x, t) = G(x, t)$$

dove G è la funzione definita in (2.6). Per questa ragione, spesso ci si riferisce alla funzione Γ_p come *soluzione fondamentale* dell'equazione (2.2).

Vediamo ora come una stima analoga a (2.1) non può valere poichè Γ_p è a supporto compatto nella variabile spaziale. Consideriamo un punto (x_0, t_0) sulla frontiera del supporto di Γ_p , cioè tale che

$$1 = \gamma_p \left(\frac{|x_0|}{t_0^{1/\lambda}} \right)^{\frac{p}{p-1}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{|x_0|}{t_0^{1/\lambda}} = \left[\frac{1}{\gamma_p} \right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Al tempo $t_0 - \rho^p$ la funzione Γ_p è positiva se

$$1 > \gamma_p \left(\frac{|x|}{(t_0 - \rho^p)^{1/\lambda}} \right)^{\frac{p}{p-1}},$$

cioè se

$$\frac{|x|}{|x_0|} < \left[\frac{t_0 - \rho^p}{t_0} \right]^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Ora, per $x \in B_\rho(x_0)$ è possibile trovare (x_0, t_0) e ρ per cui tale disuguaglianza è verificata, e ciò implica

$$\sup_{B_\rho(x_0)} \Gamma_p(x, t_0 - \rho^p) > 0, \quad \text{mentre} \quad \Gamma_p(x_0, t_0) = 0.$$

La difficoltà nel trattare equazioni del tipo (2.2) scaturisce dal fatto che si presenta una disomogeneità tra spazio e tempo. Di fatto, per le classi di funzioni ($p > 1$)

$$u \in L_{\text{loc}}^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap C([0, T]; L_{\text{loc}}^p(\Omega)) \cap L_{\text{loc}}^p(0, T; W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega))$$

per le quali esiste $\gamma > 0$ tale che

$$\begin{aligned} & \sup_{t_0 - \theta\rho^p < t < t_0} \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_\pm^p(\cdot, t) \zeta^p(\cdot, t) dx + \\ & \quad + \iint_{Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)} |D(u - k)_\pm|^p \zeta^p dx dt \leq \\ & \leq \gamma \iint_{Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)} (u - k)_\pm^p (|D\zeta|^p + \zeta \zeta_t) dx dt + \\ & \quad + \int_{K_\rho(x_0)} (u - k)_\pm^p(\cdot, t_0 - \theta\rho^p) \zeta^p(\cdot, t_0 - \theta\rho^p) dx \end{aligned}$$

vale il seguente teorema (si veda [10]).

TEOREMA 2.4.1. *Per ogni costante $c_2 \in (0, 1]$ esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni u nella classe sopra definita, $u > 0$, per ogni $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ e $\rho > 0$ con $K_{5\rho}(x_0) \times (t_0 - \rho^p, t_0 + \rho^p) \subset \Omega \times (0, T)$, risulta*

$$u(x_0, t_0) \leq \gamma \inf_{K_\rho(x_0)} u(x, t_0 + c_2\rho^p).$$

Alla classe sopra definita appartengono le soluzioni dell'equazione

$$(u^{p-1})_t - \operatorname{div} (|Du|^{p-2} Du) = 0. \quad (2.4)$$

L'idea per poter considerare le soluzioni di (2.2) è quindi trasformare l'equazione (2.2) in (2.4) tramite il cambiamento di variabili *intrinseco* alla soluzione

$$t \mapsto t u(x, t)^{2-p}.$$

Ciò suggerisce pertanto di studiare l'equazione (2.2) non nella geometria parabolica classica, bensì in una geometria intrinseca alla soluzione u . In effetti, vale il seguente risultato (si veda [2], capitolo VI).

TEOREMA 2.4.2. *Sia $p \geq 2$. Sia u una soluzione debole positiva di (2.2) in $\Omega \times (0, T)$ e supponiamo che $u(x_0, t_0) > 0$, $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$. Allora esistono $\gamma, c > 1$ (dipendenti solo da n, p) per cui, se $Q_{4\rho}(x_0, t_0) \subset \Omega \times (0, T)$, si ha*

$$u(x_0, t_0) \leq \gamma \inf_{B_\rho(x_0)} u(\cdot, t_0 + \theta\rho^p)$$

dove

$$\theta = \frac{c}{[u(x_0, t_0)]^{p-2}}.$$

In [2], si trova la prima dimostrazione di questo Teorema, che usa la regolarità hölderiana delle soluzioni deboli di (2.2), un principio del massimo e soluzioni esplicite modellate a partire da (2.3). Il limite di questo approccio, naturalmente, è quello di non poter essere esteso a equazioni più generali, per le quali non si conoscono soluzioni esplicite. Recentemente, in [6] anche questo ulteriore ostacolo è stato superato con il risultato di un'estensione della disuguaglianza di Harnack intrinseca per soluzioni deboli positive di equazioni del tipo (2.1) soggette alle condizioni

$$\begin{cases} A(x, t, u, \eta) \cdot \eta \geq C_0 |\eta|^p - C^p, \\ |A(x, t, u, \eta)| \leq \gamma |\eta|^{p-1} + C^{p-1} \\ |B(x, t, u, \eta)| \leq C |\eta|^{p-1} + C^{p-1}, \end{cases}$$

con $p \geq 2$ e costanti $C_0, \gamma > 0$, $C \geq 0$. Lo strumento principale per la dimostrazione è dato dalle stime dell'energia, simili a quelle che definiscono le classi di De Giorgi già viste, opportunamente combinate con risultati raffinati di teoria della misura. La novità più importante riguardo alla tecnica utilizzata è che non si fa uso, *a priori*, della regolarità hölderiana di una soluzione debole. Al contrario, riprendendo l'idea originaria di Moser, si dimostra che dalla disuguaglianza di Harnack intrinseca discende che ogni soluzione debole dell'equazione è localmente hölderiana.

Per dare l'idea, ci limitiamo a ricavare le stime dell'energia per le soluzioni dell'equazione (2.2) (senza tuttavia formalizzare il tipo di soluzione considerata).

Moltiplichiamo l'equazione (2.2) per $-(u - k)_- \zeta^p$, dove ζ è una funzione test come nelle classi di De Giorgi, e integriamo su $K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]$, con

$-\theta\rho^p < \tau \leq 0$. Integrando per parti il termine con la divergenza otteniamo

$$\begin{aligned} & - \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} u_t(u-k)_- \zeta^p dx dt \\ & = - \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} |Du|^{p-2} Du \cdot Du \chi_{\{(u-k)_- > 0\}} \zeta^p dx dt \\ & \quad + p \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} |Du|^{p-2} Du \cdot D\zeta (u-k)_- \zeta^{p-1} dx dt. \end{aligned}$$

Riguardo al primo membro abbiamo

$$\begin{aligned} & - \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} u_t(u-k)_- \zeta^p dx dt = \frac{1}{2} \int_{K_\rho} \int_{-\theta\rho^p}^\tau [(u-k)_-^2]_t \zeta^p dt dx \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \int_{K_\rho} (u-k)_-^2 \zeta^p(x, \tau) dx - \frac{1}{2} \int_{K_\rho} (u-k)_-^2 \zeta^p(x, -\theta\rho^p) dx + \\ & \quad - \frac{p}{2} \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, 0]} (u-k)_-^2 \zeta^{p-1} \zeta_t dx dt. \end{aligned}$$

Dall'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned} & - \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} |Du|^{p-2} Du \cdot Du \chi_{\{(u-k)_- > 0\}} \zeta^p dx dt \\ & = - \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} |D(u-k)_-|^p \zeta^p dx dt \end{aligned}$$

e tramite le disuguaglianze di Hölder e di Young

$$\begin{aligned} & \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} |Du|^{p-1} |D\zeta| (u-k)_- \zeta^{p-1} dx dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} |D(u-k)_-|^p \zeta^p dx dt + \\ & \quad + C_p \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, \tau]} |D\zeta|^p (u-k)_-^p dx dt, \end{aligned}$$

con $C_p = \left(\frac{p}{2(p-1)}\right)^{p-1}$. Raccogliendo le stime fatte e prendendo l'estremo superiore su τ , otteniamo

$$\begin{aligned} & \sup_{-\theta\rho^p < \tau \leq s} \int_{K_\rho} (u-k)_-^2 \zeta^p(x, \tau) dx + \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, 0]} |D(u-k)_-|^p \zeta^p dx dt \leq \\ & \leq \int_{K_\rho} (u-k)_-^2 \zeta^p(x, -\theta\rho^p) dx + p \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, 0]} (u-k)_-^2 \zeta^{p-1} \zeta_t dx dt + \\ & \quad + 2C_p \iint_{K_\rho \times (-\theta\rho^p, 0]} (u-k)_-^p |D\zeta|^p dx dt. \end{aligned}$$

Una stima del tutto analoga può essere ricavata anche con $(u-k)_+$ al posto di $(u-k)_-$.

Nel caso in cui $1 < p < 2$ le soluzioni di (2.2) possono avere comportamenti molto diversi rispetto al caso $p \geq 2$. Innanzitutto possono non essere localmente limitate. Per un controesempio esplicito, con $p = 2n/(n+1)$, rimandiamo al paragrafo 13, capitolo XII di [2].

Inoltre può anche accadere che una soluzione diventi identicamente nulla da un certo istante in poi, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 2.4.3. - Si consideri $u_o = u_o(x) > 0$ definita in Ω limitato e sia u la soluzione dell'equazione (2.2) con dato iniziale u_o e condizioni di Dirichlet nulle al bordo di Ω .

Detta $z(t)$ la funzione $\int_{\Omega} u^2(x, t) dx$, si ha che

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2(x, t) dx = 2 \int_{\Omega} u \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) dx = -2 \int_{\Omega} |Du|^p dx.$$

Se $p > 2n/(n+2)$ si ha che $p^* > 2$ (dove p^* è l'esponente di Sobolev). Usando la disuguaglianza di Sobolev si ha

$$-2 \int_{\Omega} |Du|^p dx \leq -c_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u^{p^*} dx \right)^{p/p^*},$$

usando la disuguaglianza di Hölder si ha infine che

$$-c_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u^{p^*} dx \right)^{p/p^*} \leq -c'_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{p/2}$$

e di conseguenza

$$z'(t) \leq -c'_{\Omega} z(t)^{p/2}.$$

Integrando si ottiene, se $p < 2$,

$$z(t)^{1-p/2} \leq z(0)^{1-p/2} - c'(1-p/2)t.$$

Per cui definitivamente $z(t) \equiv 0$ e quindi u diventa nulla in un tempo finito.

Alla luce di questo esempio è chiaro il fatto che, ammesso che valga una disuguaglianza di Harnack, questa non può valere in un intervallo temporale che sia indipendente dalla soluzione.

Vale il seguente risultato contenuto in [5].

TEOREMA 2.4.4. *Sia u una soluzione non negativa di (2.2) in $\Omega \times (0, T)$ con*

$$\frac{2n}{n+1} < p < 2.$$

Allora esistono delle costanti positive δ, c tali che per ogni $(x_o, t_o) \in \Omega \times (0, T)$ e per ogni cilindro $Q_{\delta\rho}(x_o, t_o) \subset \Omega \times (0, T)$, dove

$$Q_{\rho}(x_o, t_o) \times K_{\rho}(x_o) \times \left(t_o - \left[\frac{u(x_o, t_o)}{c^4} \right]^{2-p}, t_o + \left[\frac{u(x_o, t_o)}{c^4} \right]^{2-p} \right),$$

si ha che

$$cu(x_o, t_o) \leq \inf_{x \in K_\rho(x_o)} u(x, t)$$

per ogni $t \in (t_o - \delta(u(x_o, t_o))^{2-p}\rho^p, t_o + \delta(u(x_o, t_o))^{2-p}\rho^p)$. Le costanti c e δ tendono a zero se $p \rightarrow 2$ o $p \rightarrow 2n/(n+1)$.

Bibliografia

- [1] D. G. ARONSON - J. SERRIN, *Local behaviour of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., 25 (1967), pp. 81–123.
- [2] E. DiBENEDETTO, *Degenerate Parabolic Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] E. DiBENEDETTO, *Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1995.
- [4] E. DiBENEDETTO - U. GIANAZZA - V. VESPRI, *Local clustering of the non-zero set of functions in $W^{1,1}(E)$* , Rendiconti dei Lincei, 17 (2006), pp. 223–225.
- [5] E. DiBENEDETTO - U. GIANAZZA - V. VESPRI, *Forward, backward and elliptic harnack inequalities for non-negative solutions to certain singular parabolic partial differential equations*, preprint IMATI-CNR 12PV07/12/9, (2007).
- [6] E. DiBENEDETTO - U. GIANAZZA - V. VESPRI, *Harnack estimates for quasi-linear degenerate parabolic differential equations*, Acta Math., 200 (2008), pp. 181–209.
- [7] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, U. S. A., 1998.
- [8] W. FELLER, *Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Math. Ann., 102 (1930), pp. 633–649.
- [9] E. GAGLIARDO, *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche Mat., 8 (1959), pp. 24–51.
- [10] U. GIANAZZA - V. VESPRI, *Parabolic De Giorgi classes of order p and the harnack inequality*, Calc. Var., 26(3) (2006), pp. 379–399.
- [11] D. GILBARG - N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer - Verlag, Berlin, 1977.
- [12] E. GIUSTI, *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.
- [13] J. HADAMARD, *Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 3 (1954), pp. 337–346 (1955).
- [14] N. V. KRYLOV - M. V. SAFONOV, *A property of the solutions of parabolic equations with measurable coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 44 (1980), pp. 161–175, 239.
- [15] J. MOSER, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), pp. 577–591.
- [16] J. MOSER, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), pp. 101–134.
- [17] L. NIRENBERG, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), 13 (1959), pp. 115–162.
- [18] B. PINI, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 23 (1954), pp. 422–434.
- [19] J. SERRIN, *On the Harnack inequality for linear elliptic equations*, J. Analyse Math., 4 (1955–56), pp. 292–308.
- [20] J. SERRIN, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*, Acta Math., 111 (1964), pp. 247–302.

- [21] N. S. TRUDINGER, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations.*, Commun. Pure Appl. Math., 20 (1967), pp. 721–747.
- [22] N. S. TRUDINGER, *Pointwise estimates and quasi-linear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., 21 (1968), pp. 205–226.
- [23] L. VON LICHTENSTEIN, *Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen*, Palermo Rend., 33 (1912), pp. 201–211.
- [24] D. V. WIDDER, *The heat equation*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 67.

Indice analitico

Barenblatt, 48
 $DG(\Omega, T, \gamma)$, $DG_+(\Omega, T, \gamma)$,
 $DG_-(\Omega, T, \gamma)$ classi di De Giorgi,
21
disuguaglianza di Harnack,
ellittica, 3, 4, 7
parabolica, 10, 13, 18, 37, 49, 50, 53
espansione della positività, 33
Q-minimi parabolici, 24

torgraf

Finito di stampare nel mese di febbraio 2009
presso lo stabilimento tipografico della TorGraf
S.P. 362 km. 15,300 - Zona Industriale - 73013 **GALATINA** (Lecce)
Telefono +39 0836.561417 - Fax +39 0836.569901
e-mail: stampa@torgraf.it

