

Capitolo 4

Varietà riemanniane

4.1 Metriche riemanniane

Definizione 4.1. Una *metrica riemanniana* su una varietà differenziabile M è un tensore covariante g del secondo ordine, simmetrico e definito positivo, cioè un'applicazione $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ \mathcal{F} -bilineare, che soddisfa

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad g(X, X) \geq 0, \quad g(X, X)(p) = 0 \Rightarrow X_p = 0.$$

Una varietà differenziabile M dotata di una metrica riemanniana g è detta *varietà riemanniana*, e si indica con (M, g) . Una metrica riemanniana g induce un prodotto scalare g_p su ogni spazio tangente:

$$g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p).$$

Viceversa, una metrica riemanniana si può anche definire come una famiglia di prodotti scalari $\{g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in M}$ tali che per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, l'applicazione

$$g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto g(X, Y)(p) := g_p(X_p, Y_p), \quad \text{è differenziabile.}$$

Per assegnare una metrica riemanniana su M basta definire una metrica riemanniana g_α su ogni aperto U_α di un ricoprimento $(U_\alpha)_\alpha$ di M tale che comunque si considerino due aperti U_α, U_β , con $U_\alpha \cap U_\beta$ non vuoto, si abbia:

$$g_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}. \quad (4.1)$$

In tal caso, per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $g(X, Y)$ è la funzione definita da

$$g(X, Y)(p) = g_\alpha(X|_{U_\alpha}, Y|_{U_\alpha})(p) \quad \text{per } p \in U_\alpha.$$

La metrica in coordinate locali

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n . Sia (x_1, \dots, x_n) un sistema di coordinate locali definito in U , allora $\{(\partial/\partial x_j)\}$ è base per

$\mathfrak{X}(U)$, $\{dx_i\}$ è base per $\mathfrak{X}^*(U)$ e quindi gli n^2 prodotti tensoriali $\{dx_i \otimes dx_j\}$ costituiscono una base locale per i tensori covarianti del secondo ordine. Le funzioni $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \in \mathcal{F}(U)$ sono le *componenti* di g rispetto alle coordinate (x_i) :

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

(g_{ij}) è una matrice simmetrica definita positiva che determina univocamente g su U . Se $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, allora

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} X^i Y^j g_{ij}.$$

Sia (y_1, \dots, y_n) un altro sistema di coordinate locali definito in un aperto V , $V \cap U \neq \emptyset$. Posto $g_{\alpha\beta} = g(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta})$, su $V \cap U$ si ha

$$(g_{\alpha\beta}) = \Phi^T (g_{ij}) \Phi, \quad (4.2)$$

dove $\Phi = (\Phi_{i\alpha}) = (\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha})$ è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate, ossia del cambiamento di base $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Quindi, per assegnare una metrica riemanniana g su M basta assegnare, in ogni carta locale di un atlante di M , le $n(n+1)/2$ funzioni $g_{ij} = g_{ji}$ di una matrice simmetrica (g_{ij}) definita positiva che soddisfa la (4.2) (che traduce in coordinate locali la (4.1)).

Osservazione 4.2. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su un aperto U e $\{\vartheta^1, \dots, \vartheta^n\}$ è la corrispondente base duale, allora su U si ha:

$$g = \sum_i \vartheta^i \otimes \vartheta^i.$$

Una base ortonormale locale di campi di vettori si può ottenere applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt a una base locale di campi di vettori coordinati. Tuttavia, non è sempre possibile trovare una carta locale (U, φ) tale che la base coordinata sia ortonormale in U (infatti, ciò è equivalente a richiedere che la metrica riemanniana sia piatta su U).

Osservazione 4.3. Se (M, g) è una varietà riemanniana di dimensione 2, localmente $g = g_{11} dx_1 \otimes dx_1 + g_{12} dx_1 \otimes dx_2 + g_{12} dx_2 \otimes dx_1 + g_{22} dx_2 \otimes dx_2$. Le coordinate locali (x_1, x_2) si dicono isoterme se $g_{11} = g_{22}$ e $g_{12} = 0$. Per ogni varietà riemanniana 2-dimensionale esistono sempre coordinate locali isoterme (x_1, x_2) , cioè localmente $g = e^{2f} (dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$ con f funzione differenziabile.

Esempio 4.4. Lo spazio euclideo (\mathbb{R}^n, g_0) .

La metrica euclidea g_0 è il più semplice esempio di metrica riemanniana, essa è definita da

$$g_0(X, Y) = \sum_{i=1}^n X^i Y^i,$$

dove $X = (X^1, \dots, X^n), Y = (Y^1, \dots, Y^n) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Le funzioni componenti sono $g_{0ij} = \delta_{ij}$, e quindi

$$g_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2.$$

Lo spazio \mathbb{R}^n con questa metrica riemanniana è detto *spazio euclideo* e la corrispondente geometria riemanniana è quella euclidea.

Teorema 4.5. *Il gruppo strutturale del fibrato tangente TM di una varietà riemanniana è riducibile al gruppo ortogonale $O(n)$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $(TM, M, \pi : TM \rightarrow M)$ il fibrato tangente. Sia $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una carta locale di M con funzioni coordinate (x_i) . Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su U_α . Definiamo

$$\tilde{\varphi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n, X_p = \sum_i \eta^i e_{ip} \mapsto (x_i(p), \eta^i).$$

$(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$ è una carta locale per TM e, per ogni fissato $p \in U_\alpha$, l'isomorfismo

$$(\tilde{\varphi}_\alpha)_p : T_p M = \pi^{-1}(p) \rightarrow \varphi_\alpha(p) \times \mathbb{R}^n, X_p = \sum_i \eta^i e_{ip} \mapsto (\eta^1, \dots, \eta^n),$$

definisce una trasformazione ortogonale tra $(T_p M, g_p)$ e lo spazio euclideo (\mathbb{R}^n, g_0) . Applicando questo procedimento ad ogni carta locale di un atlante di M , si ottiene un atlante di TM le cui funzioni di transizione associano ad ogni punto del loro dominio di definizione un elemento del gruppo ortogonale $O(n)$. \square

Teorema 4.6. *Ogni varietà differenziabile paracompatta M ammette una metrica riemanniana.*

Dimostrazione. Poiché M è paracompatta, possiamo considerare una partizione dell'unità $(f_\alpha)_\alpha$ subordinata a un ricoprimento localmente finito $(U_\alpha)_\alpha$ di intorni coordinati (cfr. Teorema 1.32). Ricordiamo che le f_α sono funzioni differenziabili non negative, con supporto compatto K_α contenuto in U_α e tali che $\sum_\alpha f_\alpha = 1$. Sia φ_α l'applicazione coordinata relativa a U_α . La metrica euclidea g_0 sull'aperto $A_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$ di \mathbb{R}^n induce una metrica riemanniana g_α su U_α : $g_\alpha = (\varphi_\alpha)^* g_0$. Poiché $f_\alpha = 0$ su $M \setminus K_\alpha$ (complementare di K_α), $f_\alpha g_\alpha$ è un tensore (differenziabile su M) covariante del secondo ordine, simmetrico, semi-definito positivo, e nullo su $M \setminus K_\alpha$. Il tensore $g := \sum_\alpha f_\alpha g_\alpha$ definisce una metrica riemanniana su M . \square

Esercizio 4.7. Verificare che le funzioni componenti della metrica euclidea g_0 sull'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, rispetto alle coordinate polari $(y_1, y_2) = (\rho, \theta)$, sono date da: $g_{011} = 1, g_{012} = 0, g_{022} = \rho^2$.

Esercizio 4.8. Siano g, g_0, g_1 metriche Riemanniane su M e $\sigma \in \mathcal{F}(M)$. Verificare che $e^\sigma g$ e $g_t = t g_0 + (1-t) g_1$, con $t \in [0, 1]$, sono metriche riemanniane su M .

Osservazione 4.9. (Varietà semi-riemanniane)

Sia g un tensore covariante di ordine 2 su una varietà differenziabile M . Se g è simmetrico, non degenere e di segnatura $(n - \nu, \nu)$, $\nu \geq 0$, costante, allora (M, g) è detta *varietà semi-riemanniana* (cfr. [79]) di indice ν . In particolare, (M, g) è riemanniana se di segnatura $(n, 0)$. (M, g) è detta *varietà lorentziana* se la segnatura di g è $(n, 1)$ con $\dim M = n + 1$. Per una varietà semi-riemanniana, un vettore tangente X_p è detto:

tipo-spazio se $g_p(X_p, X_p) > 0$ oppure $X_p = 0$,

tipo-tempo se $g_p(X_p, X_p) < 0$,

tipo-luce se $g_p(X_p, X_p) = 0$ e $X_p \neq 0$.

L'insieme $\{X_p \in T_p M : g_p(X_p, X_p) = 0, X_p \neq 0\}$ è detto *cono di luce* in p .

Abbiamo provato che ogni varietà differenziabile paracompatta ammette una metrica riemanniana, ciò non accade in generale se richiediamo che la metrica sia semi-riemanniana. D'altronde, è ben noto che una varietà compatta ammette un campo differenziabile di vettori, non nulli, globalmente definito su M , se e solo se la caratteristica di Eulero-Poincaré è nulla. Quindi, una varietà compatta M con caratteristica di Eulero-Poincaré nulla ammette una metrica lorentziana. Infatti, M ammette una metrica riemanniana g e un campo di vettori X_0 non nullo (in ogni punto), quindi possiamo supporre X_0 unitario. Indicata con η la 1-forma duale di X_0 , è facile verificare che il tensore

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y)$$

definisce una metrica lorentziana su M . Rispetto a tale metrica, il campo di vettori X_0 è tipo-tempo. In generale una varietà lorentziana può non avere un campo di vettori tipo-tempo globalmente definito. Una varietà lorentziana con un campo di vettori tipo-tempo globalmente definito è detta varietà lorentziana tempo-orientabile, nota in fisica col nome di varietà spazio-tempo. La relatività generale si basa su una varietà spazio-tempo 4-dimensionale.

Esercizio 4.10. Sia X_0 un campo di vettori unitario definito su una varietà riemanniana (M, g) . Indicata con η la 1-forma g -duale di X_0 , si verifichi che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\tilde{g} = t g(X, Y) + t(t-1) \eta \otimes \eta$ è una metrica riemanniana.

4.2 Immersioni isometriche e la sfera canonica

Siano (\bar{M}, \bar{g}) una varietà riemanniana, M una varietà differenziabile ed $f : M \rightarrow \bar{M}$ un'immersione iniettiva. La metrica \bar{g} induce su M una metrica riemanniana: $g = f^* \bar{g}$, ossia

$$g(X, Y)(p) = \bar{g}_{f(p)}(f_{*p}(X_p), f_{*p}(Y_p)) \quad \forall p \in M \text{ e } \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si vede facilmente che il tensore g definisce una metrica riemanniana su M , in particolare g_p è definito positivo in ogni punto $p \in M$ in quanto f_{*p} è

iniettivo. La varietà riemanniana (M, g) è detta *sottovarietà riemanniana* di (\bar{M}, \bar{g}) ed f è detta *immersione isometrica*. Determiniamo g in coordinate locali. Sia $(U, \varphi, (y_i))$ una carta locale di M e $(V, \psi, (x_i))$ una carta locale di \bar{M} con $f(U) \subset V$. Su V la metrica \bar{g} è data da

$$\bar{g} = \sum_{i,j} \bar{g}_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

e quindi l'espressione di g su U , tenendo conto delle proprietà dell'applicazione duale f^* , è data da :

$$\begin{aligned} g &= f^* \bar{g} = \sum_{i,j} (f^* \bar{g}_{ij}) f^* dx_i \otimes f^* dx_j = \sum_{i,j} (\bar{g}_{ij} \circ f) d(x_i \circ f) \otimes d(x_j \circ f) \\ &= \sum_{i,j} (\bar{g}_{ij} \circ f) \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} dy_\alpha \otimes \frac{\partial f^j}{\partial y_\beta} dy_\beta, \end{aligned}$$

dove le $f^i = x_i \circ f : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}, y = \varphi(p) \mapsto x_i(f(p)) := x_i(\psi(f(p)))$ sono le funzioni componenti di f (rispetto alle fissate coordinate locali). Pertanto,

$$g = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta, \quad \text{dove } g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} (\bar{g}_{ij} \circ f) \frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial f^j}{\partial y_\beta}.$$

Se (M, g) è una sottovarietà riemanniana dello spazio euclideo $(\mathbb{R}^{\bar{n}}, g_0)$, allora $\bar{g}_{ij} = g_{0ij} = \delta_{ij}$ e quindi

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial y_\beta} \quad \text{e} \quad g_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left(\frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} \right)^2. \quad (4.3)$$

In tal caso, la metrica $g = f^* g_0$ è detta la *metrica canonica* di M .

Esempio 4.11. Sia M una superficie regolare di \mathbb{R}^3 con parametrizzazione locale $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$. Siano ϕ_u e ϕ_v i vettori tangenti alle linee coordinate $v = \text{cost.}$ e $u = \text{cost.}$ rispettivamente. Posto $E = g_0(\phi_u, \phi_u), F = g_0(\phi_u, \phi_v)$ e $G = g_0(\phi_v, \phi_v)$, la metrica riemanniana $g = i^* g_0$ è determinata, rispetto alle coordinate $(x_1, x_2) = (u, v)$, da $g_{11} = E, g_{12} = F, g_{21} = F, g_{22} = G$.

Osservazione 4.12. Sia (M, g) una sottovarietà di (\bar{M}, \bar{g}) con immersione isometrica $i : M \hookrightarrow \bar{M}$. Se $(U, (y_\alpha))$ e $(\bar{U}, (x_i))$ sono carte locali speciali, cioè $y_\alpha = x_\alpha|_U$ e $U = \{p \in \bar{U} : x_i(p) = 0, i = n+1, \dots, \bar{n}\}$, allora $g_{\alpha\beta}|_U = \bar{g}_{\alpha\beta}|_U$ per ogni $\alpha, \beta = 1, \dots, n$. Infatti, per ogni $p \in U$:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(p) &= g_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_\beta} \right)_p \right) := \bar{g}_p \left((i_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_p, (i_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_\beta} \right)_p \right) \\ &= \bar{g}_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)_p \right) = \bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) (p) = \bar{g}_{\alpha\beta}(p). \end{aligned}$$

Osservazione 4.13. Un importante Teorema di John Nash [74] afferma che ogni varietà riemanniana (M^n, g) può essere realizzata come sottovarietà riemanniana embedded dello spazio euclideo (\mathbb{R}^m, g_0) per m abbastanza grande. La dimostrazione di Nash è stata successivamente semplificata da M. Gunther [43]. Quindi, si potrebbero studiare solo sottovarietà embedded di \mathbb{R}^m con la metrica indotta. Tuttavia, se si vogliono capire le proprietà intrinseche di una varietà riemanniana l'introduzione di un embedding crea informazioni estranee e in alcuni casi potrebbe essere difficile distinguere proprietà intrinseche da quelle estrinseche.

La sfera canonica \mathbb{S}^n

Come caso particolare di sottovarietà riemanniana di \mathbb{R}^{n+1} , esaminiamo la *sfera canonica* (\mathbb{S}^n, g) , dove \mathbb{S}^n è la sfera unitaria di \mathbb{R}^{n+1} , $g = i^*g_0$ e $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Consideriamo la carta locale definita dalla proiezione stereografica dal polo sud: $\psi : V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\psi : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

L'applicazione $F = I_d \circ i \circ \psi^{-1}$ è l'inclusione $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ espressa in coordinate locali, quindi

$$F : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\|y\|^2}, \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2} \right).$$

Posto

$$F^i = \frac{2y_i}{1+\|y\|^2} \quad (i = 1, \dots, n), \quad F^{n+1} = \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2},$$

risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= \frac{-4y_i y_\alpha}{(1+\|y\|^2)^2} && \text{se } i \neq \alpha \text{ e } i < n+1, \\ \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} &= \frac{2(1+\|y\|^2) - 4y_\alpha^2}{(1+\|y\|^2)^2} && \text{se } i = \alpha < n+1, \\ \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} &= \frac{-4y_\alpha}{(1+\|y\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Applicando la (4.3), si ottiene

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \right)^2 = \frac{4}{(1+\|y\|^2)^2}, \\ g_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} = 0 \text{ per } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Di conseguenza, la metrica canonica $g = i^*g_0$ è data da

$$g = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} (dy_1^2 + \cdots + dy_n^2).$$

Esercizio 4.14. Sia $\mathbb{S}^2(r)$ la sfera di centro l'origine e raggio r , ottenuta ruotando la curva $\gamma : x = r\cos(\frac{t}{r}), y = r\sin(\frac{t}{r}), z = 0, t \in \mathbb{R}$, intorno all'asse x . Si verifichi che la metrica canonica g di $\mathbb{S}^2(r)$ è data da

$$g = dt \otimes dt + r^2 \sin^2(\frac{t}{r}) d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

Esercizio 4.15. Verificare che la proiezione stereografica trasforma circonferenze della sfera \mathbb{S}^2 in circonferenze o rette del piano equatoriale.

Esercizio 4.16. Si consideri la sfera $\mathbb{S}^2(r)$ di centro l'origine e raggio r , rappresentata con equazioni parametriche $x = r \sin u \cos v, y = r \sin u \sin v, z = r \cos u, 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi$. $x_1 = u$ (colatitudine) e $x_2 = v$ (longitudine) sono coordinate locali per \mathbb{S}^2 . Determinare le funzioni componenti g_{11}, g_{12}, g_{22} della metrica canonica di \mathbb{S}^2 rispetto alle coordinate geografiche (u, v) .

Esercizio 4.17. Si consideri la sfera unitaria \mathbb{S}^3 con equazioni parametriche: $x_1 = \cos(t)\cos\vartheta_1, x_2 = \cos(t)\sin\vartheta_1, x_3 = \sin(t)\cos\vartheta_2, x_4 = \sin(t)\sin\vartheta_2$. Si verifichi che la metrica canonica g di \mathbb{S}^3 è data da

$$g = dt \otimes dt + \cos^2(t)d\vartheta_1 \otimes d\vartheta_1 + \sin^2(t)d\vartheta_2 \otimes d\vartheta_2.$$

Osservazione 4.18. (La metrica lorentziana canonica su \mathbb{S}^{2n+1})

Sia \mathbb{S}^{2n+1} la sfera unitaria di $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$. Indichiamo con J_0 la struttura complessa canonica di \mathbb{C}^{n+1} , quindi per ogni $z \in \mathbb{C}^{n+1}$,

$z = (z_1, \dots, z_{n+1}) = (x_1 + iy_1, \dots, x_{n+1} + iy_{n+1}) \equiv p = (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$,
abbiamo

$$J_0 z = iz, \text{ ossia } J_0 p = (-y_1, x_1, \dots, -y_{n+1}, x_{n+1}).$$

Ora, per ogni $p = (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{S}_{2n+1}$, poniamo

$$\xi_p = J_0 p = (-y_1, x_1, \dots, -y_{n+1}, x_{n+1}).$$

ξ definisce un campo differenziabile di vettori unitari tangenti alla sfera \mathbb{S}^{2n+1} , detto *campo vettoriale di Hopf standard* (cfr. Sez. 9.5). Se g_R è la metrica riemanniana canonica su \mathbb{S}^{2n+1} , ponendo

$$g_L = g_R - 2\eta_0 \otimes \eta_0, \text{ dove } \eta_0 = g_0(\xi, \cdot),$$

si ottiene la *metrica lorentziana canonica* su \mathbb{S}^{2n+1} .

4.3 Sommersioni riemanniane

Mettrica riemanniana prodotto.

Siano (M_1, g_1) , (M_2, g_2) due varietà riemanniane. Con $M_1 \times M_2$ indichiamo la varietà differenziabile prodotto e con π_1, π_2 le proiezioni canoniche su M_1 e M_2 rispettivamente. Poniamo $\dim M_1 = n_1$ e $\dim M_2 = n_2$. Per ogni $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, lo spazio tangente $T_p(M_1 \times M_2)$ può essere identificato con $T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$ mediante l'isomorfismo:

$$X_p \longmapsto X_{p_1} + X_{p_2} = (\pi_1)_{*p}X_p + (\pi_2)_{*p}X_p.$$

Su $M_1 \times M_2$ si può definire una metrica riemanniana g , detta *metrica riemanniana prodotto*, ponendo per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$ e per ogni $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$:

$$\begin{aligned} g(X, Y)(p) &= g_{1p_1}((\pi_1)_{*p}X_p, (\pi_1)_{*p}Y_p) + g_{2p_2}((\pi_2)_{*p}X_p, (\pi_2)_{*p}Y_p) \\ &= g_{1p_1}(X_{p_1}, Y_{p_1}) + g_{2p_2}(X_{p_2}, Y_{p_2}). \end{aligned}$$

La metrica prodotto g si indica con $g_1 \times g_2$. In particolare $T_{p_1}M_1$ e $T_{p_2}M_2$, pensati come sottospazi di $T_p(M_1 \times M_2)$, sono ortogonali:

$$\|X_p\|^2 = \|X_{p_1}\|^2 + \|X_{p_2}\|^2.$$

Se (x_i) e (y_α) sono coordinate locali su M_1 e M_2 rispettivamente, allora (x_i, y_α) sono coordinate locali su $M_1 \times M_2$. Inoltre, se

$$g_1 = \sum_{i,j=1}^{n_1} g_{1ij} dx_i \otimes dx_j \quad \text{e} \quad g_2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_2} g_{2\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta,$$

allora

$$g = \sum_{i,j=1}^{n_1} g_{1ij} dx_i \otimes dx_j + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_2} g_{2\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta.$$

Più in generale, se $f \in \mathcal{F}(M_1)$ è una funzione positiva, la varietà prodotto $M_1 \times M_2$ munita della metrica riemanniana $g = g_1 + f g_2$ si dice *warped product*. In particolare, se g_1 è la metrica canonica della sfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} e dt^2 è la metrica su un intervallo aperto I , la metrica $g = dt^2 + \sin^2 t g_1$ rappresenta (localmente) la metrica canonica della sfera unitaria \mathbb{S}^n ([97], p. 14).

Sommersioni riemanniane

Siano \bar{M}, M varietà differenziabili ed $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ un'applicazione differenziabile. Diremo che π è una *sommersione* se il suo differenziale π_{*p} è suriettivo per ogni $p \in \bar{M}$. In tal caso:

$$\bar{n} = \dim \bar{M} = \dim \ker \pi_{*p} + \text{rango}(\pi_{*p}) = \dim \ker \pi_{*p} + n \geq n = \dim M.$$

Sia ora $\pi : \bar{M} \rightarrow M$ una sommersione suriettiva, allora per il Teorema 2.55 (del rango) le fibre $M_x = \pi^{-1}\{x\}$ sono sottovarietà imbedded di \bar{M} per ogni $x \in M$, $\dim M_x = \bar{n} - n$. Ponendo $\mathcal{V}_p = \ker \pi_{*p}$ per ogni $p \in \bar{M}$, otteniamo una distribuzione integrabile \mathcal{V} (cfr. Sezione 6.8) che corrisponde alla foliazione di \bar{M} determinata da π in quanto $T_p M_x = \ker \pi_{*p}$ per ogni $p \in M_x$. I vettori tangenti alle fibre sono detti *vettori verticali* e \mathcal{V} è detta

distribuzione verticale. Siano ora \bar{g} ed g metriche riemanniane su \bar{M} e M rispettivamente. La metrica riemanniana \bar{g} su \bar{M} determina una distribuzione \mathcal{H} complementare di \mathcal{V} , detta *distribuzione orizzontale*. Per ogni $p \in \bar{M}$, \mathcal{H}_p è il sottospazio di $T_p\bar{M}$ ortogonale a $\ker\pi_{*p} \subset T_p\bar{M}$, e quindi abbiamo la decomposizione ortogonale $T_p\bar{M} = \ker\pi_{*p} \oplus \mathcal{H}_p$, dove $\dim\mathcal{H}_p = n$ e $\pi_{*p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ è un isomorfismo. I vettori del sottospazio \mathcal{H}_p sono detti *vettori orizzontali*. La sommersione $\pi : (\bar{M}, \bar{g}) \rightarrow (M, g)$ si dice *sommersione riemanniana* se l'isomorfismo $\pi_{*p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$ è isometrico, ossia

$$\bar{g}_p(X_p, Y_p) = g_{\pi(p)}(\pi_{*p}X_p, \pi_{*p}Y_p) \quad \forall X_p, Y_p \in \mathcal{H}_p.$$

Si noti che per sommersioni suriettive, per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ esiste un unico $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ (detto *sollevamento orizzontale* di X) π -riferito a X , i.e., $\tilde{X}_p \in \mathcal{H}_p$ e $\pi_{*p}\tilde{X}_p = X_{\pi(p)}$ per ogni $p \in \bar{M}$. Inoltre, $\pi_{*p}[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$.
L'usuale proiezione

$$\pi : (\mathbb{R}^{n+h}, g_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, g_0), (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+h}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

è una sommersione riemanniana. Più in generale, se $M_1 \times M_2$ è una varietà riemanniana prodotto, le proiezioni π_i , $i = 1, 2$, sono esempi di sommersioni riemanniane. Rispetto a π_1 , i vettori di $T_{p_2}M_2$ sono verticali mentre quelli di $T_{p_1}M_1$ sono orizzontali. Se (M_1, g_1) , (M_2, g_2) sono due varietà riemanniane e $M_1 \times M_2$ è la varietà prodotto munita della metrica riemanniana "warped product" $g = g_1 + hg_2$, allora la proiezione $\pi_1 : (M_1 \times M_2, g_1 + hg_2) \rightarrow (M_1, g_1)$ è un altro esempio di sommersione riemanniana. Rivestimenti riemanniani definiscono sommersioni riemanniane con fibre discrete. Un importante esempio di sommersione riemanniana è la *fibratura di Hopf* $\pi : S^3 \rightarrow S^2(\frac{1}{2})$ che verrà discussa nella Sezione 9.3. Se sul fibrato tangente TM di una varietà riemanniana si considera la metrica riemanniana di Sasaki G_s (cfr. Appendice C), allora la proiezione $\pi : (TM, G_s) \rightarrow (M, g)$ è un altro interessante esempio di sommersione riemanniana.

Esercizio 4.19. Determinare la metrica indotta su S^1 dalla metrica euclidea di \mathbb{R}^2 e la metrica riemanniana prodotto sul toro n -dimensionale $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n -volte).

Esercizio 4.20. Sia \mathbb{T}^2 la superficie torica generata dalla rotazione, intorno all'asse z , della circonferenza γ di centro $C(0, a, 0)$ e raggio b , $a > b > 0$. Determinare la metrica g indotta sulla superficie torica \mathbb{T}^2 dalla metrica euclidea di \mathbb{R}^3 . g è una metrica riemanniana prodotto?

Esercizio 4.21. Sia M la superficie ottenuta ruotando la curva $\gamma : x = 0, y = r(u) > 0, z = z(u), u$ ascissa curvilinea, intorno all'asse z , quindi M ha equazioni parametriche

$$x = r(u) \cos \vartheta, \quad y = r(u) \sin \vartheta, \quad z = z(u).$$

Si verifichi che la metrica g indotta su $M = \gamma \times S^1$, dalla metrica euclidea di \mathbb{R}^3 , è data da

$$g = du \otimes du + r^2(u)d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

In tal caso, g è una metrica riemanniana prodotto?

Esercizio 4.22. Si verifichi che l'applicazione seguente :

$$\pi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow \mathbb{S}^2(\frac{1}{2}), (\cos(t)e^{i\vartheta_1}, \sin(t)e^{i\vartheta_2}) \mapsto (\frac{1}{2}\cos(2t), \frac{1}{2}\sin(2t)e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}),$$

è una sommersione riemanniana.

4.4 Lo spazio iperbolico e suoi modelli

Consideriamo su \mathbb{R}^{n+1} la metrica di Minkowski, ossia, la forma bilineare simmetrica $q : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$q(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}.$$

q definisce una metrica semi-riemanniana di segnatura $(n, 1)$. Infatti, se $\{e_i\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^{n+1} , $q(e_i, e_i) = 1$ per $i = 1, \dots, n$ e $q(e_{n+1}, e_{n+1}) = -1$; $i_+ = n$ (indice di positività), $i_- = 1$ (indice di negatività) e $i = i_+ - i_- = n - 1$ (indice della metrica). Lo spazio di Minkowski (\mathbb{R}^{n+1}, q) è il più semplice esempio di varietà lorentziana ed è indicato brevemente con \mathbb{R}_1^{n+1} . Poniamo

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1, \quad x_{n+1} > 0\}.$$

H^n è una ipersuperficie regolare di \mathbb{R}^{n+1} , precisamente è la falda superiore dell'iperboloide di equazione:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,$$

e si può ricoprire con l'unica carta (H^n, φ) :

$$\varphi : H^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

H^n è una sottovarietà regolare di \mathbb{R}^{n+1} con immersione $i : H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Proposizione 4.23. *Il tensore $g = i^*q$ definisce una metrica riemanniana su H^n .*

Dimostrazione. Il tensore g è chiaramente covariante di ordine 2 e simmetrico. Quindi, basta verificare che è definito positivo. Sia $X \in T_a H^n$ e sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile di H^n con $\gamma(0) = a$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Poiché $\gamma(t) \in H^n$ per ogni t , si ha $q(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$, ossia $q(a, X) = 0$ e quindi $T_a H^n \subset a^\perp$. D'altronde $\dim T_a H^n = n = \dim a^\perp$, pertanto

$$T_a H^n = a^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : q(v, a) = 0\}.$$

Poiché $q(a, a) = -1$, esiste una base b_0, b_1, \dots, b_n di \mathbb{R}^{n+1} con $b_0 = a$, che soddisfa $q(b_i, b_i) = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e $q(b_i, b_j) = 0$ per ogni $i \neq j$. Ciò segue dal fatto che l'indice di una forma quadratica non dipende dalla base scelta (Teorema di Sylvester). Quindi, $\{b_1, \dots, b_n\}$ è una base q -ortonormale di $T_a H^n$. Di conseguenza, g_a è definito positivo in quanto $g_a = q|_{T_a H^n}$. \square

Dalla Proposizione 4.23 segue che (H^n, g) è una varietà riemanniana, che viene detta *spazio iperbolico* e la metrica g è detta *metrica riemanniana iperbolica*. Per tale metrica possiamo costruire i modelli di Poincaré nel disco $\Delta^n = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|^2 < 1\}$ e nel semispazio $\mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$.

Il modello di Poincaré nel disco unitario Δ^n

Sia $x_0 = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. L'applicazione

$$f : H^n \rightarrow \Delta^n, x \mapsto f(x) = \text{retta}(xx_0) \cap \mathbb{R}^n,$$

dove \mathbb{R}^n è l'iperpiano $x_{n+1} = 0$ di \mathbb{R}^{n+1} , è detta *proiezione stereografica iperbolica* (cfr. Figura 4.1). Con facili calcoli si trova:

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

Chiaramente $f(x) \in \Delta^n$ in quanto: $\|f(x)\|^2 = \frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1} < 1 \forall x \in H^n$. Inoltre, usando la metrica di Minkowski q , $\forall x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in H^n$:

$$q(x - x_0, x - x_0) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - (x_{n+1} + 1)^2 = -2(1 + x_{n+1})$$

e quindi l'applicazione f si può esprimere anche con la seguente espressione:

$$f(x) = x_0 - \frac{2(x - x_0)}{q(x - x_0, x - x_0)} \quad \forall x \in H^n.$$

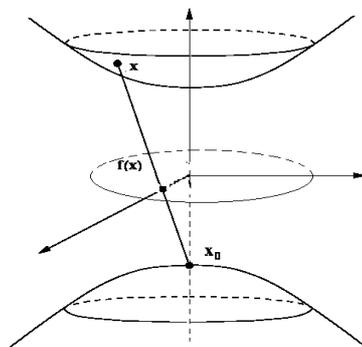


Figura 4.1: La proiezione stereografica iperbolica.

L'applicazione f è invertibile e la sua inversa è l'applicazione

$$f^{-1} : \Delta^n \rightarrow H^n, \quad y \mapsto f^{-1}(y) = \text{retta}(yx_0) \cap H^n,$$

quindi

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \left(\frac{2y_1}{1 - \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 - \|y\|^2}, \frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \right).$$

Pertanto f è un diffeomorfismo e

$$\tilde{g} = (f^{-1})^*g = (i \circ f^{-1})^*q$$

è la metrica iperbolica nel disco unitario Δ^n , dove g è la metrica iperbolica nell'iperboloide H^n e $i : H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Poniamo

$$F = i \circ f^{-1} = (F^1, \dots, F^{n+1}) : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \text{ dove}$$

$$F^j(y_1 \dots y_n) = \frac{2y_j}{1 - \|y\|^2} \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad F^{n+1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2}.$$

Ricordiamo che $q = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n - dx_{n+1} \otimes dx_{n+1}$. Operando come nel caso della metrica indotta su una sottovarietà di una varietà riemanniana, si ha:

$$\tilde{g} := (f^{-1})^*g = (f^{-1})^*i^*q = F^*q = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{g}_{\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta,$$

dove

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= \frac{4y_i y_\alpha}{(1 - \|y\|^2)^2} \quad \text{per } i \neq \alpha \text{ e } i < n+1, \\ \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} &= \frac{2(1 - \|y\|^2) + 4y_\alpha^2}{(1 - \|y\|^2)^2} \quad \text{per } i = \alpha, \quad \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} = \frac{4y_\alpha}{(1 - \|y\|^2)^2}, \end{aligned}$$

si ha

$$\tilde{g}_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1, i \neq \alpha}^n \left(\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \right)^2 = \dots = \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2},$$

e per $\alpha \neq \beta$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i \neq \alpha, \beta} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial F^\beta}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^\beta}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta} = \dots = 0.$$

Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 4.24. *La metrica iperbolica nel disco unitario Δ^n è data da :*

$$\tilde{g} = \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i. \quad (4.4)$$

Nel disco Δ_r^n di raggio r , la metrica iperbolica è data da:

$$\tilde{g} = \frac{4r^4}{(r^2 - \|y\|^2)^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i.$$

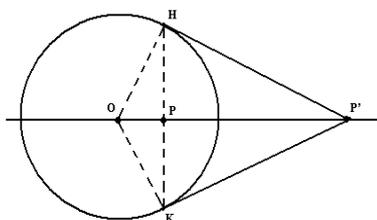
La (4.4) è la rappresentazione della metrica iperbolica nel disco Δ^n , di conseguenza, la *proiezione stereografica iperbolica* $f : (H^n, g) \rightarrow (\Delta^n, \tilde{g})$ è un'isometria. Si noti l'analogia dell'espressione di \tilde{g} con l'espressione della metrica canonica di S^n rispetto alle coordinate definite dalla proiezione stereografica.

Il modello di Poincaré nel semispazio \mathbb{R}_+^n

Al fine di presentare il modello di Poincaré nel semispazio $\mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$ introduciamo la nozione di inversione.

Inversione rispetto a una circonferenza

Sia S^1 la circonferenza del piano di centro O e raggio r . L'inversione rispetto a tale circonferenza è l'applicazione $J : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, $P \mapsto P'$, dove P' è il punto della semiretta OP tale che $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Se P è interno (risp. esterno) a S^1 , allora P' è esterno (risp. interno). Se $P \in S^1$, allora $P' = P$. Quindi J scambia l'interno con l'esterno e mantiene fissi i punti di $S^1(O, r)$. Geometricamente l'inversione si può costruire come segue. Se P interno al cerchio, mandiamo da P la perpendicolare alla retta OP e siano H e K le intersezioni di tale perpendicolare con la circonferenza.



Le tangenti alla circonferenza in H e K si incontrano nel punto corrispondente P' (applicando il primo Teorema di Euclide si ha $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OH}^2 = r^2$). Se invece il punto P è esterno, basta condurre da esso le tangenti alla circonferenza e congiungere i loro punti di contatto; tale congiungente incontra OP nel punto corrispondente P' . Usando coordinate cartesiane, se $O(u_0, v_0)$, $P(u, v)$ e $P'(u', v')$, si vede facilmente che l'inversione è rappresentata dalle equazioni:

$$u' = u_0 + \frac{r^2}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}(u - u_0), \quad v' = v_0 + \frac{r^2}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}(v - v_0).$$

Inversione rispetto a una sfera

L'*inversione* rispetto alla sfera $S^{n-1}(x_0, r) : \|x - x_0\|^2 = r^2$ (di centro x_0 e raggio r) di \mathbb{R}^n è la trasformazione

$$J : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\},$$

$$J : x \longmapsto J(x) = x' = x_0 + \frac{r^2}{\|x - x_0\|^2}(x - x_0).$$

$J(x)$ è il punto x' della semiretta x_0x tale che $\|\overrightarrow{x_0x'}\| \cdot \|\overrightarrow{x_0x}\| = r^2$. J lascia fissi i punti di $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$ ed è involutoria: $J^2 = Id$ (e quindi $J^{-1} = J$). Infatti:

$$\begin{aligned} J^2(x) &= J(Jx) = x_0 + \frac{r^2}{\|Jx - x_0\|^2}(Jx - x_0) \\ &= x_0 + \frac{r^2}{\|r^2 \frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2}\|^2} r^2 \frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2} = x. \end{aligned}$$

J scambia l'interno di $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$ con l'esterno di $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$:

$$\|J(x) - x_0\| = \frac{r}{\|x - x_0\|} r < r \iff \frac{r}{\|x - x_0\|} < 1 \iff r < \|x - x_0\|.$$

Siano ora $x_0 = (0, \dots, 0, -1)$ e $r = \sqrt{2}$. Allora,

$$J : x = (x_1 \dots x_n) \mapsto x' = (0, \dots, 0, -1) + \frac{2}{\|x - x_0\|^2}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 1)$$

e poiché $\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 + 2x_n + 1$, si ha

$$J : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x' = \left(\frac{2x_1}{\|x - x_0\|^2}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{\|x - x_0\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - x_0\|^2} \right).$$

Quindi

$$\forall x \in \Delta^n : J(x) \in \mathbb{R}_+^n,$$

dove $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ e $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Inoltre,

$$\begin{aligned} \|J(x)\|^2 &= \frac{4(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) + 1 + \|x\|^4 - 2\|x\|^2}{\|x - x_0\|^4} \\ &= \frac{4(\|x\|^2 - x_n^2) + 1 + \|x\|^4 - 2\|x\|^2}{(1 + \|x\|^2 + 2x_n)^2} = \frac{(1 + \|x\|^2)^2 - 4x_n^2}{(1 + \|x\|^2 + 2x_n)^2} \\ &= \frac{1 + \|x\|^2 - 2x_n}{1 + \|x\|^2 + 2x_n} < 1 \quad \text{se } x_n > 0. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^n : J(x) \in \Delta^n.$$

Di conseguenza, $\tilde{f} = J|_{\mathbb{R}_+^n} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \Delta^n$,

$$\tilde{f} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{\|y - x_0\|^2}, \dots, \frac{2y_{n-1}}{\|y - x_0\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{\|y - x_0\|^2} \right),$$

è un diffeomorfismo con $\tilde{f}^{-1} = J|_{\Delta^n} : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ che ha la stessa espressione analitica di \tilde{f} .

Proposizione 4.25. *Se \tilde{g} è la metrica di Poincaré nel disco Δ^n (risp. Δ_r^n), allora la corrispondente metrica di Poincaré $\tilde{\tilde{g}} = \tilde{f}^* \tilde{g}$ nel semispazio \mathbb{R}_+^n è espressa da*

$$\tilde{\tilde{g}} = \frac{1}{y_n^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i \quad \left(\text{risp.} \quad \tilde{\tilde{g}} = \frac{r^2}{y_n^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i \right).$$

Di conseguenza, l'inversione $J_{|\Delta^n} : (\Delta^n, \tilde{g}) \rightarrow (\mathbb{R}_+^n, \tilde{\tilde{g}})$ è un'isometria.

Dimostrazione.

$$\tilde{\tilde{g}} = \tilde{f}^* \tilde{g} = \tilde{f}^* (f^{-1})^* g = (f^{-1} \circ \tilde{f})^* g = (f^{-1} \circ \tilde{f})^* i^* q = (i \circ f^{-1} \circ \tilde{f})^* q = F^* q,$$

dove $F = i \circ f^{-1} \circ \tilde{f}$. Inoltre, si ha

$$F : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \Delta^n \longrightarrow H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$(y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\tilde{f}} (y'_1, \dots, y'_n) = \left(\frac{2y_h}{1 + \|y\|^2 + 2y_n}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2 + 2y_n} \right)$$

$$\xrightarrow{f^{-1}} \left(\frac{2y'_k}{1 - \|y'\|^2}, \frac{1 + \|y'\|^2}{1 - \|y'\|^2} \right) \xrightarrow{i} \left(\frac{2y'_k}{1 - \|y'\|^2}, \frac{1 + \|y'\|^2}{1 - \|y'\|^2} \right),$$

dove h varia da 1 a $n-1$ e k da 1 a n . Siccome

$$\begin{aligned} \|y'\|^2 &= \frac{1}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)^2} \left(4 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 1 + \|y\|^4 - 2\|y\|^2 \right) \\ &= \frac{4\|y\|^2 - 4y_n^2 + 1 + \|y\|^4 - 2\|y\|^2}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)^2} \\ &= \frac{(1 + \|y\|^2 - 2y_n)(1 + \|y\|^2 + 2y_n)}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)^2}, \quad \text{si ha} \end{aligned}$$

$$1 - \|y'\|^2 = \frac{4y_n}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)} \quad \text{e} \quad 1 + \|y'\|^2 = \frac{2(1 + \|y\|^2)}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)}.$$

Allora,

$$F^i(y) = \frac{2y'_i}{1 - \|y'\|^2} = \frac{y_i}{y_n} \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

$$F^n(y) = \frac{2y'_n}{1 - \|y'\|^2} = \frac{1 - \|y\|^2}{2y_n}, \quad F^{n+1}(y) = \frac{1 + \|y'\|^2}{1 - \|y'\|^2} = \frac{1 + \|y\|^2}{2y_n}.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \forall \alpha \neq i, \quad \alpha \neq n, \\ \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} &= \frac{1}{y_n} \quad \forall \alpha = i = 1, \dots, n-1, \quad \text{e quindi} \\ \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= \frac{\delta_\alpha^i}{y_n} \quad \forall i, \alpha = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^i}{\partial y_n} &= -\frac{y_i}{y_n^2}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial F^n}{\partial y_\alpha} = -\frac{y_\alpha}{y_n}, \quad \forall \alpha = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_n} &= -\frac{2y_n^2 + 1 - \|y\|^2}{2y_n^2}, \quad \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} = \frac{y_\alpha}{y_n} \quad \forall \alpha = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_n} &= \frac{2y_n^2 - 1 - \|y\|^2}{2y_n^2}.\end{aligned}$$

La metrica \tilde{g} è espressa da

$$\begin{aligned}\tilde{g} = F^*q &= \sum_{i=1}^n F^*(dx_i \otimes dx_i) - F^*(dx_{n+1} \otimes dx_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (dF_i \otimes dF_i) - (dF_{n+1} \otimes dF_{n+1}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta} \right) dy_\alpha \otimes dy_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \tilde{g}_{\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta,\end{aligned}$$

dove i coefficienti $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ sono dati da:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial F^n}{\partial y_\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \right)^2 \\ &= \frac{1}{y_n^2} + \frac{y_\alpha^2}{y_n^2} - \frac{y_\alpha^2}{y_n^2} = \frac{1}{y_n^2}, \quad 1 \leq \alpha \leq n-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{nn} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^2}{y_n^4} + \left(\frac{1 + 2y_n^2 - \|y\|^2}{2y_n^2} \right)^2 - \left(\frac{1 - 2y_n^2 + \|y\|^2}{2y_n^2} \right)^2 \\
&= \frac{\|y\|^2 - y_n^2}{y_n^4} + \frac{1 + (2y_n^2 + \|y\|^2)^2 + 2(2y_n^2 - \|y\|^2)}{4y_n^4} \\
&\quad + \frac{-1 - (\|y\|^2 - 2y_n^2)^2 - 2(\|y\|^2 - 2y_n^2)}{4y_n^4} \\
&= \frac{4\|y\|^2 - 4y_n^2 - 4\|y\|^2 + 8y_n^2}{4y_n^4} = \frac{1}{y_n^2}; \\
\tilde{g}_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} + \frac{\partial F^n}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^n}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta},
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\alpha n} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_\alpha^i}{y_n} \left(-\frac{y_i}{y_n^2} \right) + \left(-\frac{y_\alpha}{y_n} \right) \left(-\frac{2y_n^2 + 1 - \|y\|^2}{2y_n^2} \right) \\
&\quad - \frac{y_\alpha}{y_n} \cdot \left(\frac{2y_n^2 - 1 - \|y\|^2}{2y_n^2} \right) = 0, \text{ per } \alpha = 1, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_\alpha^i}{y_n} \cdot \frac{\delta_\beta^i}{y_n} + \frac{y_\alpha y_\beta}{y_n^2} - \frac{y_\alpha y_\beta}{y_n^2} = 0, \text{ per } \alpha, \beta = 1, \dots, n-1.$$

Pertanto, $\tilde{g} = (1/y_n^2) \sum_{i=1}^n dy_i^2$. □

Osservazione 4.26. Nel caso $n = 2$, possiamo definire con notazioni complesse $\Delta^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{R}_+^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$, $z_0 = (0, -1) = -i$. Per cui l'inversione $J(z) = z_0 + \frac{r^2}{\|z - z_0\|^2}(z - z_0)$, con $r = \sqrt{2}$, è data da:

$$\begin{aligned}
J(z) &= z_0 + \frac{r^2}{\|z - z_0\|^2}(z - z_0) = -i + \frac{2(x + iy + i)}{(y + 1)^2 + x^2} \\
&= \frac{2x - i(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + (y + 1)^2} = -i \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i} = -i \bar{C}(z),
\end{aligned}$$

dove $C : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Delta^2$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, è la *trasformazione di Cayley*.

Osservazione 4.27. (Il modello di Klein)

Lo spazio proiettivo reale \mathbb{P}^n si può pensare definito dalla sfera unitaria \mathbb{S}^n , centrata nell'origine, identificando i punti antipodali. $G = \{\pm I_d\}$ è un gruppo di diffeomorfismi di \mathbb{S}^n . Nello spazio di Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} , la sfera di raggio

$i = \sqrt{-1}$ è l'iperboloide a due falde $\bar{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1\}$. $G = \{\pm I_d\}$ è anche un gruppo di diffeomorfismi di \bar{H}^n . Identificando punti antipodali di \bar{H}^n si ottiene un sottoinsieme di \mathbb{P}^n . Poiché punti antipodali stanno in componenti connesse disgiunte di \bar{H}^n , questo sottoinsieme di \mathbb{P}^n può essere modellato da una delle due componenti, ad esempio da $H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}$. Con riferimento alla struttura differenziabile definita su \mathbb{P}^n , consideriamo la carta locale $(U_{n+1} = \{p = [x] \in \mathbb{P}^n : x_{n+1} \neq 0\}, \varphi_{n+1})$, dove

$$\varphi_{n+1} : U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi_{n+1} : p = [(x_1, \dots, x_{n+1})] \mapsto (y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

$H^n \subset U_{n+1}$ e $\varphi_{n+1}(H^n) = \Delta^n$ (disco aperto unitario di \mathbb{R}^n). La presentazione dello spazio iperbolico H^n su Δ^n mediante la φ_{n+1} è detto *modello iperbolico proiettivo o modello di Klein*. La proiezione stereografica ψ su S^n dal polo sud $S(0, \dots, 0, -1)$ applica la semisfera superiore S_+^n nel disco unitario Δ^n . Mediante la proiezione ψ si ottiene il *modello iperbolico di Poincaré nella semisfera S_+^n* .

4.5 Metriche associate a una struttura simplettica

La nozione di gruppo simplettico introdotta nel Capitolo sui gruppi di Lie è legata alla nozione di varietà simplettica che adesso esponiamo brevemente in relazione alle metriche riemanniane associate. Per maggiori dettagli, sviluppi e approfondimenti sulle metriche riemanniane associate a una struttura simplettica si consiglia la monografia di D.E. Blair [11].

Definizione 4.28. Una varietà simplettica è una varietà differenziabile M , $\dim M = 2n$, con una assegnata 2-forma Φ chiusa ($d\Phi = 0$) non degenere ($\Phi^n \neq 0$).

Localmente la 2-forma Φ si può esprimere nella forma normale

$$\Phi = \theta^1 \wedge \eta^1 + \dots + \theta^n \wedge \eta^n,$$

dove $\{\theta^1, \eta^1, \dots, \theta^n, \eta^n\}$ è una base locale di 1-forme. Un cambiamento di base che lascia invariata la forma normale $\Phi = \sum_{i=1}^n \theta^i \wedge \eta^i$ è dato da una matrice simplettica. In particolare il gruppo strutturale del fibrato tangente di una varietà simplettica è riducibile a $Sp(2n, \mathbb{R})$. Il classico esempio di varietà simplettica è \mathbb{R}^{2n} con la 2-forma $\Phi = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$, un altro esempio (usato in meccanica classica) è il fibrato cotangente T^*M di una varietà differenziabile.

Sia (M, Φ) una varietà simplettica $2n$ -dimensionale. Sia h una arbitraria metrica riemanniana su M e sia $\{E_1, E_2, \dots, E_{2n}\}$ una base h -ortonormale locale di campi vettoriali. Sia $\Phi_{ij} = \Phi(E_i, E_j)$. $A = (\Phi_{ij})$ è una matrice

antisimmetrica non degenera di ordine $2n$. Per il teorema di decomposizione polare, esiste una matrice ortogonale F di ordine $2n$ ed esiste una matrice simmetrica definita positiva G di ordine $2n$ che soddisfano:

$$A = F G \quad (\text{decomposizione polare destra}).$$

Definiamo i tensori g e J ponendo:

$$g(E_i, E_j) = G_{ij} \quad e \quad J E_j = \sum F_{ij} E_i.$$

La definizione di g è indipendente dalla scelta della base $\{E_i\}$. Se $\{V_1, \dots, V_{2n}\}$ è un'altra base h -ortonormale locale di campi vettoriali, indicata con P la matrice ortogonale del cambiamento di base, si ha

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \Phi(V_i, V_j) = \Phi\left(\sum_k P_{ki} E_k, \sum_r P_{rj} E_r\right) = \sum_{k,r} P_{ki} A_{kr} P_{rj} \\ &= (P^T A P)_{ij}. \end{aligned}$$

Quindi, se $B = F' G'$ è la decomposizione polare destra di B , $F' G' = B = P^T A P = P^T F G P = P^T F P P^T G P$ e per l'unicità della decomposizione polare si ha $F' = P^T F P$ e $G' = P^T G P$. In particolare g e J sono globalmente definiti su M . Inoltre, essendo Φ antisimmetrica, risulta $F^2 = -I$. Infatti, $\Phi = F G$ e $\Phi^T = -\Phi$ implicano $G^T F^T = -F G$ dove $G^T = G$, per cui $G F^T F = -F G F$, e quindi $G = -F G F = -F F^T G F$ dove $F^T G F$ è simmetrica ed è definita positiva; siccome $G = I G$, per l'unicità della decomposizione polare destra si ha $F^2 = -I$ ed F è anche antisimmetrica (essendo F ortogonale, $F = -F^{-1} = -F^T$). Infine, per come definiti i tensori g e J , si ha $g(X, JY) = \Phi(X, Y)$ e quindi

$$g(JX, JY) = \Phi(JX, Y) = -\Phi(Y, JX) = -g(Y, J^2 X) = g(X, Y).$$

Pertanto, abbiamo il seguente

Teorema 4.29. *Sia (M, Φ) una varietà simplettica di dimensione $2n$. Allora esistono una metrica riemanniana g e una struttura quasi complessa J (un tensore di tipo $(1, 1)$ con $J^2 = -I$) tali che*

$$g(X, JY) = \Phi(X, Y) \quad e \quad g(JX, JY) = g(X, Y).$$

Una varietà differenziabile $2n$ -dimensionale munita di una struttura quasi complessa J è detta *varietà quasi complessa*. Una varietà complessa ammette una struttura quasi complessa naturale J . Se $z_j = x_j + iy_j$, $i = \sqrt{-1}$, $j = 1, \dots, n = \dim_{\mathbb{C}} M$, sono coordinate complesse, J è definita da

$$J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j \quad e \quad J(\partial/\partial y_j) = -\partial/\partial x_j.$$

In tal caso J è detta *struttura complessa*. Se J è una struttura quasi complessa, il tensore di torsione di J è il tensore N di tipo $(1, 2)$ definito da

$$N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Si dimostra (cfr. [56] vol.II, p.124) che: *il tensore di torsione N di J è nullo se, e solo se, J è una struttura complessa.*

Ogni struttura quasi complessa J su una varietà 2-dimensionale ha tensore di torsione $N = 0$. Infatti,

$$N(X, JX) = [JX, J^2X] - [X, JX] - J[JX, JX] - J[X, J^2X] = 0.$$

D'altronde, $N(X, X) = 0$ e, nell'intorno di un punto dove $X \neq 0$, ogni campo vettoriale Y è combinazione lineare di X e JX . Pertanto, $N = 0$.

Una metrica riemanniana g su una varietà quasi complessa (M, J) è detta *metrica hermitiana* se

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

in tal caso la coppia (J, g) è detta *struttura quasi hermitiana*. Si noti che ogni varietà quasi complessa (paracompatta) M ammette una metrica hermitiana. Infatti, siccome M è paracompatta, esiste una metrica riemanniana \bar{g} e quindi ponendo

$$g(X, Y) = \bar{g}(X, Y) + \bar{g}(JX, JY)$$

si ottiene una metrica hermitiana su M . La 2-forma

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY),$$

è detta *2-forma fondamentale* della struttura quasi hermitiana. Se (J, g) è una struttura quasi hermitiana, le seguenti proprietà sono equivalenti:

$$(a) \nabla J = 0, \quad (b) \nabla \Phi = 0, \quad (c) d\Phi = 0 \quad \text{e} \quad N = 0,$$

dove ∇ è la connessione di Levi-Civita associata alla metrica g . Una struttura quasi hermitiana (J, g) è detta: di *Kähler* (o *kähleriana*) se il tensore J (equivalentemente Φ) è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita di g ; *almost Kähler* se $d\Phi = 0$. Quindi, le metriche riemanniane definite dal Teorema 4.29 si possono pensare come metriche di strutture almost Kähler la cui 2-forma fondamentale è la data forma simplettica. Inoltre, le varietà kähleriane sono particolari varietà simplettiche.

Ogni metrica riemanniana g su una varietà 2-dimensionale orientata M definisce una struttura quasi complessa (una rotazione) J in modo naturale. Infatti, se E_1, E_2 è una base ortonormale locale positiva, basta definire

$$JE_1 = E_2 \quad \text{e} \quad JE_2 = -E_1. \quad (4.5)$$

Inoltre, g è hermitiana rispetto a tale J . In particolare, se M è una superficie di \mathbb{R}^3 orientata da ξ (campo unitario normale alla superficie), la struttura quasi complessa naturale J è definita da

$$JX = \xi \wedge X.$$

Esercizio 4.30. Si verifichi che la struttura quasi complessa J definita dalla (4.5) non dipende dalla particolare base ortonormale positiva considerata.

Per uno studio sulle varietà quasi-complesse, complesse, hermitiane e kähleriane si consigliano i testi [10] e [56] vol.II.

4.6 Metriche associate a una struttura di (quasi) contatto

L'analogo in dimensione dispari delle varietà quasi complesse sono le varietà di quasi contatto. In questa sezione diamo una rapida presentazione delle varietà riemanniane di (quasi) contatto. Per maggiori dettagli, approfondimenti e motivazioni si consigliano le monografie [11] e [16].

Strutture riemanniane di (quasi) contatto

Una varietà differenziabile $(2n + 1)$ -dimensionale M si dice **varietà di contatto** se ammette una 1-forma di contatto η , ossia la $(2n + 1)$ -forma $\eta \wedge (d\eta)^n$ è diversa da zero in ogni punto. In particolare, una varietà di contatto è orientabile (cfr. Appendice A). Il classico Teorema di Darboux afferma che per ogni punto di una varietà di contatto esiste un intorno con coordinate locali (x_i, y_i, z) , $i = 1, \dots, n$, rispetto alle quali

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

Dalla condizione di contatto $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ segue che la distribuzione di contatto $2n$ -dimensionale $\mathcal{D} = \ker \eta$ non è integrabile. Data η forma di contatto, esiste ed è unico un campo vettoriale ξ , detto **campo vettoriale di Reeb**, o *campo vettoriale caratteristico*, determinato dalle condizioni

$$\eta(\xi) = 1 \text{ e } d\eta(\xi, \cdot) = 0.$$

Inoltre, vale il seguente

Teorema 4.31. ([11]) *Sia (M, η) una varietà di contatto con campo vettoriale di Reeb ξ . Allora, esiste una metrica riemanniana g , detta **metrica associata**, e un tensore φ di tipo $(1, 1)$ tali che*

$$\eta = g(\xi, \cdot), \quad d\eta = g(\cdot, \varphi), \quad \varphi^2 = -Id + \eta \otimes \xi.$$

In tal caso (η, ξ, φ, g) , o (η, g) , si dice **struttura riemanniana di contatto** (oppure *struttura metrica di contatto*). Una metrica associata soddisfa

$$g(\varphi X, \varphi Y) = (d\eta)(\varphi X, Y) = -(d\eta)(Y, \varphi X) = -g(Y, \varphi^2 X),$$

e quindi

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \quad (4.6)$$

In particolare, $g|_{\mathcal{D}}$ è hermitiana. Si noti che per una struttura riemanniana di contatto le curve integrali del campo vettoriale di Reeb sono curve geodetiche. Inoltre, lo spazio $\mathcal{A}(\eta)$ di tutte le metriche associate a una fissata forma di contatto è infinito-dimensionale, e si possono studiare problemi variazionali per funzionali della curvatura definiti su $\mathcal{A}(\eta)$ ([11], Capitolo 10).

Osserviamo che data una varietà riemanniana di contatto $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$ e un diffeomorfismo $f : M \rightarrow M$ con $f^*\eta = \eta$, allora f^*g è una metrica associata a η . Più precisamente vale la seguente

Proposizione 4.32. *Sia $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$ una varietà riemanniana di contatto ed $f : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo con $f^*\eta = \eta$. Allora: $(\eta, \xi, \tilde{\varphi} = f_*^{-1} \circ \varphi \circ f_*, f^*g)$ è una struttura riemanniana di contatto su M .*

Dimostrazione. Intanto $f_*\xi = \xi$ in quanto

$$\eta(f_*\xi) = (f^*\eta)(\xi) = \eta(\xi) = 1$$

e

$$(d\eta)(f_*\xi, f_*X) = (f^*d\eta)(\xi, X) = (df^*\eta)(\xi, X) = (d\eta)(\xi, X) = 0.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} (f^*g)(X, \tilde{\varphi}Y) &= g(f_*X, f_*\tilde{\varphi}Y) = g(f_*X, \varphi f_*Y) = (d\eta)(f_*X, f_*Y) \\ &= (f^*d\eta)(X, Y) = (df^*\eta)(X, Y) = (d\eta)(X, Y) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^2 &= f_*^{-1} \circ \varphi \circ f_* \circ f_*^{-1} \circ \varphi \circ f_* = f_*^{-1} \circ \varphi^2 \circ f_* \\ &= f_*^{-1}(-f_* + (\eta \circ f_*) \otimes \xi) = -I + (f^*\eta) \otimes f_*^{-1}\xi \\ &= -I + \eta \otimes \xi. \end{aligned}$$

Pertanto, $(\eta, \xi, \tilde{\varphi}, f^*g)$ è una struttura riemanniana di contatto. \square

Più in generale, si può definire una **struttura di quasi contatto** come una terna di tensori (η, ξ, φ) su M dove η è una 1-forma, ξ un campo di vettori e φ è un tensore di tipo $(1, 1)$, che soddisfano

$$\eta(\xi) = 1 \quad e \quad \varphi^2 = -Id + \eta \otimes \xi.$$

Notiamo che se (η, ξ, φ) è una struttura di quasi contatto, allora anche $(\eta, \xi, -\varphi)$, $(-\eta, -\xi, \varphi)$, $(-\eta, -\xi, -\varphi)$ sono strutture di quasi contatto.

Si può dimostrare la seguente

Proposizione 4.33. ([11]) *Se (η, ξ, φ) è una struttura di quasi contatto su M , allora $\varphi\xi = 0$, $\eta \circ \varphi = 0$ e l'endomorfismo φ ha rango $2n$.*

Una metrica riemanniana g su M si dice **metrica compatibile** con una fissata struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) se è soddisfatta la (4.6). In questo caso, (η, ξ, φ, g) è detta *struttura riemanniana di quasi contatto* (oppure *struttura metrica di quasi contatto*). Posto $Y = \xi$, la (4.6) implica che la 1-forma $\eta = g(\xi, \cdot)$, quindi il fibrato tangente di una varietà riemanniana di quasi contatto si può decomporre come somma ortogonale della distribuzione $2n$ -dimensionale $\mathcal{D} = \ker \eta$ e della distribuzione 1-dimensionale definita da ξ . Dalla (4.6), tenendo anche conto che $\eta \circ \varphi = 0$, si ottiene

$$g(\varphi X, Y) = g(\varphi^2 X, \varphi Y) + \eta(\varphi X)\eta(Y) = -g(X, \varphi Y).$$

La 2-forma Φ definita da

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

è la *2-forma fondamentale* della struttura riemanniana di quasi contatto (η, ξ, φ, g) . In particolare, $\eta \wedge \Phi^n$ è una forma di volume su M , e quindi M è orientabile. If $\Phi = d\eta$, allora η è chiaramente una *forma di contatto* e in tal caso (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di contatto.

Esercizio 4.34. (Esistenza di metriche compatibili)

Sia (η, ξ, φ) una struttura di quasi contatto su M e sia \tilde{g} una arbitraria metrica riemanniana su M . Si verifichi che il tensore

$$g = \frac{1}{2}(\tilde{g}(\varphi^2 \cdot, \varphi^2 \cdot) + \tilde{g}(\varphi \cdot, \varphi \cdot)) + \eta \otimes \eta$$

definisce una metrica riemanniana su M compatibile con la struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) . Quindi, data una struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) , esiste sempre una metrica riemanniana g su M compatibile con tale struttura

Esercizio 4.35. Sia (η, ξ, φ) una struttura di quasi contatto su M . Si verifichi che

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0 \Leftrightarrow d\eta(\xi, \cdot) = 0,$$

dove \mathcal{L}_ξ è la derivata di Lie. Se g è una metrica compatibile con (η, ξ, φ) , usando proprietà della connessione di Levi-Civita ∇ (cfr. Capitolo 6), si può vedere che le precedenti condizioni sono equivalenti alla condizione $\nabla_\xi \xi = 0$ (le curve integrali di ξ sono curve geodetiche).

Per una struttura riemanniana di contatto (η, ξ, φ, g) , il **tensore h** definito da

$$h = (1/2)\mathcal{L}_\xi \varphi,$$

è simmetrico e soddisfa $h\xi = 0$, $\varphi h = -h\varphi$. Esso gioca un ruolo fondamentale nello studio della geometria di una varietà riemanniana di contatto. In particolare, si può vedere che il tensore h e la torsione scalare $\|\tau\|$, $\tau = \mathcal{L}_\xi g$, introdotta in [26], soddisfano:

$$\tau = 2g(\cdot, h\varphi) \quad \text{e} \quad \|\tau\|^2 = 4\text{tr}h^2.$$

e quindi $h = 0$ se e solo se $\tau = 0$, ovvero il campo vettoriale di Reeb ξ è di Killing (cfr. Capitolo 9).

Strutture riemanniane di contatto speciali

Una struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) si dice *normale* se la struttura quasi complessa J on $M \times \mathbb{R}$, definita da $J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$, è integrabile. Equivalentemente, una struttura di quasi contatto è normale se, e solo se, vale la condizione $[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$, dove $[\varphi, \varphi]$ è il tensore di tipo (1, 2) definito da

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y].$$

Una struttura riemanniana di contatto si dice **struttura sasakiana** se la struttura di quasi contatto associata è normale. Caratterizzazioni delle varietà sasakiane, usando la connessione di Levi-Civita ∇ (che studieremo nel Capitolo 6) e il tensore di curvatura di tipo (1, 3) R (che studieremo nel Capitolo 8), sono date dalla seguente proposizione.

Proposizione 4.36. ([11], p. 86, 114)

• Una struttura riemanniana di quasi contatto (η, ξ, φ, g) è sasakiana se, e solo se,

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X.$$

- Una struttura riemanniana di contatto (η, ξ, φ, g) è *sasakiana* se, e solo se,

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X.$$

- Una varietà riemanniana di contatto $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$ si dice:
 - **varietà di K -contatto** se il campo vettoriale di Reeb ξ è di Killing;
 - **varietà di H -contatto** se il campo vettoriale di Reeb ξ è un campo vettoriale armonico ([33], Cap. IV), in modo equivalente M è di H -contatto se ξ è un autovettore dell'operatore di Ricci.

Una varietà sasakiana è di K -contatto, il viceversa vale solo in dimensione tre. Una varietà di K -contatto è di H -contatto, in generale non vale il viceversa. Maggiori informazioni su queste speciali classi di varietà riemanniane di contatto si possono trovare in [11].

Il cono metrico

Le varietà sasakiane sono l'analogo in dimensione dispari delle varietà kähleriane. In effetti, una diversa presentazione delle strutture metriche di (quasi) contatto è la seguente. Ricordiamo che il *cono metrico* (detto anche *cono riemanniano*) su una varietà riemanniana (M, g) è la varietà riemanniana $C(M) = (\mathbb{R}_+ \times M, G = dt^2 + t^2g)$, i.e., la varietà *warped product* $\mathbb{R}_+ \times_{t^2} M$. Il campo vettoriale ζ su $C(M)$ definito da

$$\zeta = t \frac{\partial}{\partial t}$$

è detto *campo vettoriale di Liouville (o di Eulero)*. Geometria di $C(M)$ che corrisponde a una struttura riemanniana di quasi contatto è considerata, ad esempio, in [16] Section 6.5. Se (M, η, ξ, φ) è una varietà di quasi contatto, possiamo definire un tensore J di tipo $(1, 1)$ su $C(M)$ ponendo

$$JX = \varphi X \quad \text{per } X \in \ker \eta, \quad J\xi = \zeta, \quad J\zeta = -\xi.$$

J è una struttura quasi complessa. Inoltre, se g è una metrica riemanniana su M compatibile con la struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) , allora la metrica riemanniana $G = dt^2 + t^2g$ definita sul cono è hermitiana rispetto a J . In questa corrispondenza ([16], p.202-206):

- (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di quasi contatto su M se, e solo se, (J, G) è una struttura quasi hermitiana su $C(M)$;
- η è una forma di contatto su M se, e solo se, la 2-form $\Omega = d(t^2\eta)$ è una forma simplettica su $C(M)$;
- (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di contatto su M se, e solo se, (J, G, Ω) è una struttura almost Kähler su $C(M)$;
- (η, ξ, φ, g) è una struttura sasakiana su M se, e solo se, (J, G, Ω) è una struttura di Kähler su $C(M)$.

Deformazioni di metriche compatibili/associate

Se g è una metrica compatibile con (η, ξ, φ) , mediante una *deformazione \mathcal{D} -conforme*:

$\tilde{g} = e^\sigma g + (1 - e^\sigma)\eta \otimes \eta$, dove σ è una funzione positiva differenziabile, otteniamo una nuova metrica compatibile con la stessa struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) . Infatti,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\varphi X, \varphi Y) &= e^\sigma g(\varphi X, \varphi Y) = e^\sigma (g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) \\ &= \tilde{g}(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).\end{aligned}$$

Se g è una metrica riemanniana associata a una forma di contatto: $d\eta = g(\cdot, \varphi\cdot)$, la nuova metrica riemanniana \tilde{g} ottenuta da g con una deformazione \mathcal{D} -conforme non è una metrica associata a η :

$$\tilde{g}(\cdot, \varphi\cdot) = e^\sigma g(\cdot, \varphi\cdot) = e^\sigma d\eta.$$

Quindi, è possibile avere strutture riemanniane di contatto (η, ξ, φ, g) e strutture riemanniane di quasi contatto $(\eta, \xi, \varphi, \tilde{g})$, con la stessa struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) , ma con \tilde{g} metrica compatibile e non associata. Tuttavia, se (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di contatto (risp. di quasi contatto), mediante la seguente deformazione, detta *deformazione \mathcal{D} -omotetica*,

$$(\tilde{\eta} = a\eta, \tilde{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \tilde{\varphi} = \varphi, \tilde{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta), \quad a = \text{cost.} > 0,$$

si ottiene una nuova struttura riemanniana di contatto (risp. di quasi contatto). Strutture sasakiane, di K -contatto e di H -contatto sono invarianti per deformazioni \mathcal{D} -omotetiche.

Esempi

Nel seguito diamo alcuni esempi di varietà riemanniane di contatto.

Esempio 4.37. La sfera canonica \mathbb{S}^{2n+1} è un esempio classico di varietà con struttura sasakiana costruita come ipersuperficie dello spazio euclideo \mathbb{R}^{2n+2} . Più in generale consideriamo M ipersuperficie orientabile di una varietà quasi hermitiana (\bar{M}, \bar{g}, J) di dimensione $2n+2$. Poiché M è orientabile, esiste N campo vettoriale unitario ortogonale all'ipersuperficie M . Il campo vettoriale

$$\xi = JN,$$

detto *campo vettoriale di Hopf* di M , è tangente ad M in quanto $\bar{g}(\xi, N) = \bar{g}(JN, N) = 0$. Indichiamo con g la metrica riemanniana indotta da \bar{g} su M , e con η la 1-forma duale:

$$\eta(X) = g(\xi, X) \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che $\bar{g}(JX, N) = -\bar{g}(X, JN) = -g(X, \xi) = -\eta(X)$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$. Quindi, indichiamo con φ il tensore di tipo $(1, 1)$ su M definito da:

$$-\varphi X = JX - \bar{g}(JX, N)N = JX + \eta(X)N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

ovvero $-\varphi X$ è la componente tangente di JX . Siccome $\bar{g}(X, N) = \bar{g}(\xi, N) = 0$ per $X \in \mathfrak{X}(M)$, il tensore φ soddisfa:

$$\begin{aligned}\varphi^2 X &= (-\varphi)^2 X = -\varphi(JX - \bar{g}(JX, N)N) \\ &= \dots = J^2 X - \bar{g}(JX, N)JN \\ &= -X + \eta(X)\xi.\end{aligned}$$

Inoltre,

$$g(\varphi X, \varphi X) = \bar{g}(JX + \eta(X)N, JY + \eta(Y)N) = \dots = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Pertanto, (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di quasi contatto sull'ipersuperficie M . In particolare, se consideriamo la sfera \mathbb{S}^{2n+1} come ipersuperficie dello spazio euclideo \mathbb{R}^{2n+2} , (η, ξ, φ, g) è una struttura sasakiana (cfr. Osservazione 9.25).

Un altro esempio classico di varietà con struttura sasakiana è il seguente

Esempio 4.38. Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^{2n+1}(x_i, y_i, z)$, $i = 1, \dots, n$, con forma di contatto di Darboux (con coefficiente $1/2$)

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i).$$

Il campo vettoriale di Reeb è $\xi = 2\partial_z$ e la distribuzione di contatto $\mathcal{D} = \ker \eta$ è generata dai campi vettoriali $E_i = 2\partial_{y_i}$, $E_{n+i} = 2(\partial_{x_i} + y_i\partial_z)$. Se consideriamo la metrica riemanniana (non euclidea)

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^n (dx_i)^2 + (dy_i)^2),$$

e il tensore φ definito da

$$\varphi\xi = 0, \quad \varphi E_i = E_{n+i} \quad \text{e} \quad \varphi E_{n+i} = -E_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

allora (η, ξ, φ, g) definisce una struttura sasakiana sullo spazio \mathbb{R}^{2n+1} . Si noti che per $n = 1$, questo esempio è spesso identificato con il gruppo di Heisenberg Nil^3 munito di una struttura sasakiana invariante a sinistra (cfr. Osservazione 4.47).

Esempio 4.39. Data una varietà riemanniana (M, g) , sul fibrato tangente TM si può considerare la metrica di Sasaki G_s (da non confondere con la metrica sasakiana delle strutture di contatto). Il fibrato sferico tangente T_1M definito come ipersuperficie del fibrato tangente TM , ammette una struttura riemanniana di contatto naturale, dove il campo vettoriale di Reeb è il flusso geodetico (normalizzato) e la metrica riemanniana di contatto è la metrica di Sasaki (normalizzata) indotta dalla metrica di Sasaki G_s di TM (cfr. Osservazione C.4). Tale struttura, in generale, non è sasakiana. In effetti, un classico risultato di Y. Tashiro [107] afferma che la struttura riemanniana di contatto naturale di T_1M è di K -contatto se, e solo se, la varietà (M, g) ha curvatura sezionale costante $+1$, e in tal caso la struttura è sasakiana.

Osservazione 4.40. Anche nel caso semi-riemanniano, si possono definire strutture semi-riemanniane di (quasi) contatto (cfr., ad esempio, [94]).

Osservazioni in dimensione 3

Ogni varietà differenziabile M orientabile di dimensione tre è parallelizzabile (cfr. Osservazione A.1), quindi esistono tre campi vettoriali linearmente indipendenti X_1, X_2, X_3 globalmente definiti su M . Possiamo quindi definire una metrica riemanniana g ponendo $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$, cioè in modo che $(\xi = X_1, E_1 = X_2, E_2 = X_3)$ sia una base ortonormale. Se g è una fissata metrica riemanniana su M , possiamo ortonormalizzare la base (X_1, X_2, X_3) in modo da avere una base g -ortonormale che indichiamo con ξ, E_1, E_2 . In ogni caso, ponendo

$$\eta = g(\xi, \cdot), \quad \varphi\xi = 0, \quad \varphi E_1 = E_2 \quad \text{e} \quad \varphi E_2 = -E_1,$$

otteniamo una 1-forma η e un tensore φ di tipo $(1, 1)$ che insieme a ξ e alla metrica g definiscono una struttura riemanniana di quasi contatto. D'altronde, una varietà che ammette una struttura riemanniana di quasi contatto è orientabile. Pertanto, vale la seguente

Proposizione 4.41. *Una varietà differenziabile M di dimensione tre è orientabile se, e solo se, ammette una struttura riemanniana di quasi contatto. Se (M, g) è una varietà riemanniana orientabile di dimensione tre, allora M ammette una struttura riemanniana di quasi contatto avente la metrica g come metrica compatibile.*

Si noti che se una varietà differenziabile orientabile M di dimensione tre è anche compatta, allora M è parallelizzabile con tre forme di contatto (cfr. [42]). Inoltre, in dimensione tre, vale anche la seguente proposizione.

Proposizione 4.42. ([18]) *In dimensione tre, una struttura di quasi contatto (η, ξ, φ) è normale se, e solo se, il tensore $h = 0$.*

Strutture (quasi) cosimpletliche

Concludiamo questa sezione osservando che esistono speciali classi di strutture riemanniane di quasi contatto (η, φ, ξ, g) , con η non di contatto. Una *struttura quasi cosimpletliche* su una varietà M di dimensione $2n + 1$ è una coppia (η, ω) , dove η è una 1-forma e ω è una 2-forma, tale che $\eta \wedge \omega^n$ sia una forma di volume su M . Chiaramente se $\omega = d\eta$, allora η è una forma di contatto. Se

$$d\eta = 0 \quad \text{e} \quad d\omega = 0,$$

la struttura è detta *cosimpletliche*. Se

$$d\eta = 0 \quad \text{e} \quad d\omega = 2\alpha \eta \wedge \omega \quad \text{per qualche } \alpha \in \mathbb{R},$$

la struttura è detta α -*cosimpletliche*. Una struttura α -cosimpletliche con $\alpha = 0$ è cosimpletliche. Anche una struttura quasi cosimpletliche (η, ω) determina univocamente un campo vettoriale ξ su M , detto campo vettoriale di Reeb, completamente caratterizzato dalle condizioni

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{e} \quad i_\xi \omega = 0.$$

Se (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di quasi contatto con 2-forma fondamentale $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$, allora $\eta \wedge \Phi^n$ è una forma di volume su M , e quindi (η, Φ) è una struttura quasi cosimplettica. Viceversa, per ogni struttura quasi cosimplettica (η, ω) su M , con campo vettoriale di Reeb ξ , esiste una struttura riemanniana di quasi contatto (φ, ξ, η, g) tale che $\omega = \Phi$. Infatti, mediante polarizzazione si può costruire una struttura quasi hermitiana $(J, g|_{\mathcal{D}})$ con 2-forma di Kähler ω su $\mathcal{D} = \ker \eta$, cioè:

$$J^2 = -I|_{\mathcal{D}}, \quad g|_{\mathcal{D}}(J\cdot, J\cdot) = g|_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot), \quad \omega(\cdot, \cdot) = g|_{\mathcal{D}}(\cdot, J\cdot).$$

Quindi, se poniamo $g = g|_{\mathcal{D}} + \eta \otimes \eta$ e definiamo φ con $\varphi|_{\mathcal{D}} = J$ e $\varphi\xi = 0$, otteniamo che (η, φ, ξ, g) è una struttura riemanniana di quasi contatto, con 2-forma fondamentale $\Phi = \omega$.

Definizione 4.43. Se (η, ω) è una struttura cosimplettica su M e (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di quasi contatto associata, allora $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$ si dice *varietà almost coKähler* (o *almost cokähleriana*). Se inoltre la struttura di quasi contatto è normale, allora $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$ è detta *varietà di coKähler* (o *cokähleriana*).

Analogamente, se partiamo da una struttura α -cosimplettica, abbiamo le corrispondenti strutture *almost α -coKähler* e *α -coKähler*.

Riassumendo, data una struttura riemanniana di quasi contatto (η, ξ, φ, g) con forma fondamentale Φ , si ha:

- a) se $d\eta = \Phi$, allora (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di contatto;
- b) se $d\eta = 0$ e $d\Phi = 0$, allora (η, ξ, φ, g) è una struttura almost cokähleriana;
- c) se $d\eta = 0$ e $d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$, allora (η, ξ, φ, g) è una struttura almost α -cokähleriana.

Inoltre, se la struttura di quasi contatto è normale, allora nel caso a) la struttura è sasakiana, nel caso b) la struttura è cokähleriana e nel caso c) la struttura è α -cokähleriana.

Esempio 4.44. Se (N, G, J) è una varietà almost Kähler (risp. Kähler), allora la varietà prodotto $M = N \times \mathbb{R}$, oppure $M = N \times \mathbb{S}^1$, con i tensori (η, ξ, φ, g) definiti da

$$\eta = dt, \quad \xi = d/dt, \quad \varphi(X, f(d/dt)) = (JX, 0), \quad X \in \mathfrak{X}(N), \quad g = G + dt^2,$$

è una varietà almost coKähler (risp. coKähler).

Osservazione 4.45. Se $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$ è una varietà almost coKähler, la distribuzione $\mathcal{D} = \ker \eta$ è integrabile e quindi definisce una foliazione \mathcal{F} su M , detta *foliazione canonica*. Inoltre, la struttura almost coKähler di M induce una struttura almost Kähler sulle foglie. Se M ha dimensione tre, oppure M è coKähler, allora le foglie della foliazione canonica sono varietà di Kähler.

Per maggiori dettagli e approfondimenti su queste speciali strutture metriche di quasi contatto si consiglia, ad esempio, [19], [64] e [92].

4.7 Strutture metriche di (quasi) contatto su gruppi di Lie 3D

In dimensione $2n + 1$, non è difficile vedere che ogni gruppo di Lie G ammette una struttura riemanniana di quasi contatto (invariante a sinistra). Esaminiamo il caso speciale della dimensione tre.

Caso unimodulare

Facciamo vedere che in dimensione tre, ogni gruppo di Lie G unimodulare non abeliano ammette una struttura di contatto. Tale struttura è invariante a sinistra nel senso che i tensori coinvolti sono invarianti per traslazioni sinistre (cfr. Sezione 5.3 per le metriche invarianti a sinistra). Usando le notazioni della Sezione 3.6.1, se G è un gruppo di Lie unimodulare di dimensione tre, esiste una base di campi vettoriali $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{g}$ i quali soddisfano

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3. \quad (4.7)$$

Siccome G è non abeliano, necessariamente qualche $\lambda_i \neq 0$, quindi possiamo assumere, ad esempio, $\lambda_1 \neq 0$. Sia η la 1-forma duale di e_1 :

$$\eta(e_i) = \delta_{1i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Usando la (4.7), e la definizione di $d\eta$ data dalla (2.10), si ha

$$2d\eta(e_2, e_3) = -\eta([e_2, e_3]) = -\lambda_1, \quad d\eta(e_i, e_j) = 0 \quad \text{per } (i, j) \neq (2, 3), (3, 2);$$

ciò implica che $\eta \wedge d\eta$ è un forma volume e quindi η è una forma di contatto con campo di Reeb $\xi = e_1$. Inoltre, se prendiamo $\lambda_1 = 2$ e definiamo la metrica g e il tensore φ con

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \varphi\xi = 0, \quad \varphi e_2 = e_3, \quad \varphi e_3 = -e_2$$

allora (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di contatto (invariante a sinistra). Inoltre, usando la (4.7), il tensore h soddisfa:

$$2he_2 = [\xi, \varphi e_2] - \varphi[\xi, e_2] = [e_1, e_3] - \varphi[e_1, e_2] = (\lambda_3 - \lambda_2)e_2,$$

$$2he_3 = [\xi, \varphi e_3] - \varphi[\xi, e_3] = [e_1, -e_2] - \varphi[e_1, e_3] = (\lambda_2 - \lambda_3)e_3.$$

Poiché siamo in dimensione tre, la struttura è saskiana se e solo se $h = 0$, ovvero se e solo se $\lambda_2 = \lambda_3$. Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 4.46. *Ogni gruppo di Lie G unimodulare, non abeliano e di dimensione tre, ammette una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra. In particolare, un gruppo di Lie G unimodulare semplicemente connesso di dimensione tre, ammette una struttura saskiana invariante a sinistra solo nei seguenti casi:*

- $G = SU(2) \cong \mathbb{S}^3$ ($\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 > 0$);
- $G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ ($\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 < 0$);
- $G = Nil^3$ ($\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$).

Osservazione 4.47. Per $n = 1$, la struttura sasakiana definita nell'Esempio 4.38, è spesso identificata con la struttura sasakiana invariante a sinistra definita sul gruppo di Heisenberg Nil^3 . Infatti, per $n = 1$, i campi vettoriali $e_1 = \xi = 2\partial_z$, $e_2 = E_1 = 2\partial_y$, $e_3 = E_2 = 2(\partial_x + y\partial_z)$ definiti nell'Esempio 4.38, soddisfano

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 4[\partial_z, \partial_y] = 0, & [e_1, e_3] &= 4[\partial_z, \partial_x + y\partial_z] = 0, \\ [e_2, e_3] &= 4[\partial_y, \partial_x + y\partial_z] = 2e_1, \end{aligned}$$

e la metrica riemanniana g dello stesso Esempio soddisfa $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Esercizio 4.48. Determinare sul gruppo di Heisenberg Nil^3 una struttura riemanniana di quasi contatto (invariante a sinistra) (η, ξ, φ, g) dove η non è di contatto.

Caso non-unimodulare

Sia \mathcal{G} un gruppo di Lie semplicemente connesso non-unimodulare di dimensione tre. Usando le notazioni della Sezione 3.6.2, \mathcal{G} si può presentare come un gruppo di Lie prodotto semidiretto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a + d \neq 0$. Quindi, esiste una base di campi vettoriali invarianti a sinistra (e_1, e_2, e_3) tale che

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = ae_1 + ce_2, \quad [e_3, e_2] = be_1 + de_2. \quad (4.8)$$

Definiamo i tensori (invarianti a sinistra) η, ξ, φ e g ponendo:

$$\xi = e_2, \quad g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \eta = g(\xi, \cdot), \quad \varphi\xi = 0, \quad \varphi e_3 = e_1, \quad \varphi e_1 = -e_3.$$

Usando la (4.8) e la definizione di $d\eta$ data dalla (2.10), si ha

$$2d\eta(e_1, e_3) = -\eta([e_1, e_3]) = c, \quad d\eta(e_2, e_1) = 0, \quad 2d\eta(e_2, e_3) = d.$$

Quindi, prendendo $c = 2$ e $d = 0$, si ha che (η, ξ, φ, g) è una struttura riemanniana di contatto su \mathcal{G} . Inoltre,

$$\begin{aligned} 2he_3 &= [\xi, \varphi e_3] - \varphi[\xi, e_3] = [e_2, e_1] - \varphi[e_2, e_3] = -be_3, \\ 2he_1 &= [\xi, \varphi e_1] - \varphi[\xi, e_1] = [e_2, -e_3] - \varphi[e_2, e_1] = be_1. \end{aligned}$$

Quindi la struttura è sasakiana, cioè $h = 0$, se e solo se la costante $b = 0$. Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 4.49. *Ogni gruppo di Lie semplicemente connesso \mathcal{G} non-unimodulare di dimensione tre, definito dal prodotto semidiretto $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ dove $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, ammette una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra. In particolare, tale struttura è sasakiana se, e solo se, $b = 0$.*

I risultati riportati nelle Proposizioni 4.46 e 4.49 sono in accordo con il Teorema di classificazione delle varietà riemanniane di contatto omogenee di

dimensione tre dato in [88] (cfr. anche Teorema 10.5). Inoltre, uno studio sulla curvatura dei gruppi di Lie di questi Esempi si può trovare nella Sezione 8.9 (cfr. Osservazioni 8.69, 8.74).

Strutture metriche di bi-contatto su gruppi di Lie 3D

Sia M una varietà 3-dimensionale. Ricordiamo che una *struttura riemanniana di bi-contatto* (detta anche *struttura metrica di bi-contatto*) su M è definita da una terna (η_1, η_2, g) , dove (η_1, η_2) è una coppia di forme di contatto e g è una metrica riemanniana associata a entrambe le forme di contatto con i corrispondenti campi vettoriali di Reeb ξ_1, ξ_2 ortogonali rispetto a g . Questo concetto introdotto in [92] è legato al concetto di *taut contact circle* introdotto da H. Geiges e J. Gonzalo [39] che ora richiamiamo brevemente.

Una coppia di forme di contatto (η_1, η_2) su M è detta *contact circle* se per ogni $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, la 1-forma $\eta_a = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$ è una forma di contatto. Se inoltre le forme di volume $\eta_a \wedge (d\eta_a)$ sono uguali per ogni $a \in \mathbb{S}^1$, allora la coppia (η_1, η_2) è detta *taut contact circle*. Siccome

$$\eta_a \wedge d\eta_a = a_1^2\eta_1 \wedge d\eta_1 + a_2^2\eta_2 \wedge d\eta_2 + a_1a_2(\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_2 \wedge d\eta_1),$$

allora una coppia di forme di contatto (η_1, η_2) è una *taut contact circle* se, e solo se,

$$\eta_1 \wedge d\eta_1 = \eta_2 \wedge d\eta_2 \quad \text{and} \quad \eta_1 \wedge d\eta_2 = -\eta_2 \wedge d\eta_1.$$

In particolare, una *taut contact circle* (η_1, η_2) è detta *struttura di Cartan* if

$$\eta_1 \wedge d\eta_2 = -\eta_2 \wedge d\eta_1 = 0.$$

Una varietà differenziabile compatta M di dimensione tre ammette una *taut contact circle* se, e solo se, M è un quoziente compatto (mediante l'azione di un sottogruppo discreto) di uno dei seguenti gruppi di Lie : $SU(2)$, $\tilde{E}(2)$ e $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$ (cfr. [39]).

Ora facciamo vedere che i gruppi di Lie $SU(2)$, $\tilde{E}(2)$ e $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$ ammettono una struttura riemanniana di bi-contatto invariante a sinistra. Sia G un gruppo di Lie 3D unimodulare semplicemente connesso con algebra di Lie definita da

$$[e_2, e_3] = 2 e_1, \quad [e_3, e_1] = 2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad (4.9)$$

e sia g la metrica invariante a sinistra definita da $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Naturalmente, $G = SU(2)$ se $\lambda_3 > 0$, $G = \tilde{SL}(2, \mathbb{R})$ se $\lambda_3 < 0$ e $G = \tilde{E}(2)$ se $\lambda_3 = 0$.

Consideriamo le 1-forme invarianti a sinistra

$$\eta_1 = g(e_1, \cdot) \quad \text{e} \quad \eta_2 = g(e_2, \cdot).$$

Allora, dalla (4.9) si ottiene

$$(d\eta_1)(e_2, e_3) = -1, \quad (d\eta_2)(e_1, e_3) = 1, \quad (d\eta_1)(e_1, \cdot) = 0, \quad (d\eta_2)(e_2, \cdot) = 0.$$

Di conseguenza, con un semplice calcolo si ha

$$\eta_1 \wedge d\eta_1 = \eta_2 \wedge d\eta_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \eta_1 \wedge d\eta_2 = \eta_2 \wedge d\eta_1 = 0.$$

Pertanto, le 1-forme (η_1, η_2) definiscono una struttura di Cartan su G . Inoltre, le condizioni

$$\eta_1(e_1) = 1, \quad (d\eta_1)(e_1, \cdot) = 0 \quad \text{e} \quad \eta_2(e_2) = 1, \quad (d\eta_2)(e_2, \cdot) = 0,$$

ci dicono che $\xi_1 = e_1$ e $\xi_2 = e_2$ sono i campi vettoriali di Reeb delle 1-forme di contatto η_1 e η_2 rispettivamente. Ora, se definiamo i tensori φ_1 e φ_2 ponendo

$$\varphi_1 \xi_1 = 0, \quad \varphi_1 \xi_2 = e_3, \quad \varphi_1 e_3 = -\xi_2 \quad \text{e} \quad \varphi_2 \xi_2 = 0, \quad \varphi_2 e_3 = \xi_1, \quad \varphi_2 \xi_1 = -e_3,$$

si ottiene facilmente che

$$(d\eta_1)(\cdot, \cdot) = \tilde{g}(\cdot, \varphi_1 \cdot) \quad \text{e} \quad (d\eta_2)(\cdot, \cdot) = \tilde{g}(\cdot, \varphi_2 \cdot).$$

Pertanto, $(\eta_i, \xi_i, \varphi_i, \tilde{g})$, $i = 1, 2$, sono strutture riemanniane di contatto invarianti a sinistra su G con $\tilde{g}(\xi_1, \xi_2) = 0$. Di conseguenza, (η_1, η_2, g) definisce una struttura riemanniana di bi-contatto invariante a sinistra su G . Dunque, vale la seguente

Proposizione 4.50. *I gruppi di Lie $SU(2)$, $\tilde{E}(2)$ e $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$ ammettono una struttura riemanniana di bi-contatto (η_1, η_2, g) invariante a sinistra con (η_1, η_2) che definisce una struttura di Cartan.*

Osservazione 4.51. Si noti che i gruppi di Lie $E(1, 1)$ e $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$ ammettono una struttura riemanniana di bi-contatto (η_1, η_2, g) invariante a sinistra con (η_1, η_2) che definisce una taut contact hyperbola (cfr. [93], [95]). Una *taut contact hyperbola* si definisce come nel caso di una taut contact circle sostituendo la circonferenza \mathbb{S}^1 con $\mathbb{H}_r^1 : x^2 - y^2 = r, r = \pm 1$ (quattro rami delle iperboli equilateri). Tale struttura si può caratterizzare come una coppia (η_1, η_2) di 1-forme di contatto che soddisfano le condizioni (cfr. [95])

$$\eta_2 \wedge d\eta_2 = -\eta_1 \wedge d\eta_1 \quad \text{and} \quad \eta_1 \wedge d\eta_2 = -\eta_2 \wedge d\eta_1.$$

Esempi di strutture α -cokähleriane

Infine, riportiamo un esempio di struttura cokähleriana invariante a sinistra e un esempio di struttura α -cokähleriana invariante a sinistra, rispettivamente sui gruppi di Lie non-unimodulari $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$ e $H^3(-k^2)$.

Esempio 4.52. **La struttura cokähleriana standard su $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$.**

Consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$, dove $H^2(-k^2)$ è il piano iperbolico dato dal modello semipiano superiore $\mathbb{R}_+^2(\cdot)$ con la metrica iperbolica di curvatura sezionale costante $-k^2 < 0$, e con l'usuale struttura di gruppo di Lie. Tale gruppo si indica anche con $\mathbb{R}_+^2(\cdot) \times \mathbb{R}$. Siano (x_1, x_2) le coordinate su \mathbb{R}_+^2 e t la coordinata su \mathbb{R} . Allora, i campi vettoriali

$$V_1 = k x_2 \partial_1, \quad V_2 = k x_2 \partial_2, \quad V_3 = \partial_t$$

sono invarianti a sinistra e soddisfano

$$[V_2, V_1] = k V_1, \quad [V_3, V_1] = [V_3, V_2] = 0.$$

Inoltre, V_1, V_2 sono ortonormali rispetto alla metrica iperbolica di \mathbb{R}_+^2 , e quindi V_1, V_2, V_3 sono ortonormali rispetto alla metrica riemanniana prodotto g (che è invariante a sinistra). Sia (η_1, η_2, η_3) la base duale di (V_1, V_2, V_3) : $\eta_i(V_j) = \delta_{ij}$. Definiamo i tensori ξ, η, φ ponendo:

$$\xi = V_3, \quad \eta = \eta_3 = g(\xi, \cdot), \quad \varphi \xi = 0, \quad \varphi V_1 = V_2, \quad \varphi V_2 = -V_1.$$

È facile verificare che (η, ξ, φ) è una struttura di quasi contatto e g è una metrica compatibile. La 2-forma fondamentale $\Phi = g(\cdot, \varphi \cdot)$ e le 1-forme η_i soddisfano

$$\Phi = \eta_2 \wedge \eta_1, \quad d\eta_1 = k \eta_1 \wedge \eta_2 \quad \text{e} \quad d\eta_2 = d\eta_3 = 0.$$

Di conseguenza η e Φ sono chiuse, e quindi (η, Φ) è una struttura cosymplettica. Inoltre, il tensore h soddisfa

$$2hV_1 = [V_3, \varphi V_1] - \varphi[V_3, V_1] = 0, \quad 2hV_2 = [V_3, \varphi V_2] - \varphi[V_3, V_2] = 0.$$

Siccome il tensore $h = 0$, applicando la Proposizione 4.42, abbiamo che (η, ξ, φ) è una struttura di quasi contatto normale. Pertanto, (η, ξ, φ, g) definisce una struttura cokähleriana su $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$ dove g è la metrica riemanniana prodotto.

Esempio 4.53. La struttura α -cokähleriana standard su $H^3(-k^2)$.

Sia $H^3(-k^2)$ lo spazio iperbolico di dimensione tre con la metrica iperbolica g di curvatura sezionale costante $-k^2 < 0$. Consideriamo per $H^3(-k^2)$ il modello del semispazio $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$ con la struttura standard di gruppo di Lie. I campi vettoriali

$$E_1 = kt\partial_1, \quad E_2 = kt\partial_2, \quad E_3 = kt\partial_t,$$

definiscono una base ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra e

$$[E_3, E_1] = kE_1, \quad [E_3, E_2] = kE_2, \quad [E_1, E_2] = 0. \quad (4.10)$$

Se poniamo $\xi = -E_3$ e definiamo φ e η ponendo

$$\varphi \xi = 0, \quad \varphi E_1 = E_2, \quad \varphi E_2 = -E_1, \quad \eta = g(\xi, \cdot),$$

allora (η, ξ, φ, g) è una struttura di quasi contatto invariante a sinistra su $H^3(-k^2)$. Usando la (4.10), la 1-forma η e la 2-forma fondamentale Φ soddisfano

$$d\eta = 0 \quad \text{e} \quad d\Phi = 2k \eta \wedge \Phi.$$

Inoltre, sempre facendo uso della (4.10), otteniamo $2h = \mathcal{L}_\xi \varphi = 0$. Pertanto, tenendo anche conto della Proposizione 4.42, si ha che (ξ, φ, η, g) è una struttura α -cokähleriana, con $\alpha = k$, su $H^3(-k^2)$.

Osservazione 4.54. Anche la varietà prodotto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ (che non è un gruppo di Lie, ed è una delle varietà modello delle otto geometrie di Thurston) ammette una struttura cokähleriana (η, ξ, φ, g) , dove g è la metrica riemanniana prodotto (cfr. Esempio 4.44 e, in forma più esplicita, l'Esempio 10.7).

Osservazione 4.55. In generale una varietà riemanniana (M, g) orientabile di dimensione tre ammette una struttura α -cokähleriana, che ha la metrica g come metrica compatibile, se e solo se M ammette una foliazione, definita da una 1-forma η chiusa, unitaria e con curvatura media costante (cfr. [92]). Si noti che, come conseguenza della (6.21), la curvatura media della foliazione definita da $\ker \eta$, $\eta = g(\xi, \cdot)$, è data da $-(1/2)\operatorname{div}\xi$.