Introduzione (storica)

Storicamente la geometria riemanniana rappresenta lo sviluppo naturale della geometria differenziale delle superfici dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Il passo cruciale di questo sviluppo è il famoso articolo *"Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas"* (1827) del matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), professore all'Università di Gottinga oltre che direttore dell'osservatorio astronomico della stessa città. Per i suoi contemporanei Gauss era il *princeps mathematicorum.* Le sue ricerche, di fondamentale importanza, spaziarono in diversi campi della matematica: aritmetica, algebra, astronomia, analisi, fisica matematica e geometria differenziale. Gauss, a partire dalle equazioni parametriche di una superficie regolare: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, definì la cosiddetta *prima forma fondamentale* della superficie (come una generalizzazione del concetto di distanza tra due punti infinitamente vicini) mediante la formula

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$

dove $E = g_0(\phi_u, \phi_u)$, $F = g_0(\phi_u, \phi_v)$, $G = g_0(\phi_v, \phi_v)$, g_0 denota il prodotto scalare euclideo, e ϕ_u, ϕ_v sono i vettori tangenti alle linee coordinate $v =$cost. e $u =$cost. rispettivamente. Quindi, dimostrò il "Theorema Egregium": *la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie.* Più precisamente, Gauss dimostrò che la curvatura gaussiana nel generico punto della superficie (definita usando un campo vettoriale normale alla superficie) dipende solo dalle funzioni E, F, G che definiscono la prima forma fondamentale (cfr., ad esempio, [96] p. 191,193). Un altro aspetto particolarmente interessante evidenziato da Gauss è il seguente: se T è un triangolo geodetico su una superficie di curvatura gaussiana $K = k_0$(costante), allora

$$k_0 \ \mathrm{area}(T) = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ denotano le misure (in radianti) degli angoli interni del triangolo T (questo è il Teorema "elegantissimo"di Gauss). D'altronde, uno dei problemi fondamentali, al tempo di Gauss, era la cosiddetta "*questione delle parallele*", iniziata al tempo di Euclide e conclusasi solo con l'avvento delle geometrie non euclidee. Si trattava di decidere se il quinto postulato di Euclide fosse indipendente dagli altri quattro postulati. Ben presto si stabilì che il quinto postulato è equivalente al fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180 gradi (una dimostrazione accurata fu data dal gesuita G. Saccheri (1667-1733)). La scoperta di Gauss faceva intravedere l'esistenza di geometrie diverse da quella euclidea e quindi di una geometria sulle superfici senza riferimento allo spazio ambiente. Dunque, Gauss percepì molto chiaramente le profonde implicazioni della sua scoperta. Tuttavia, egli non aveva strumenti matematici validi per sviluppare le sue idee (non c'era ancora l'idea di varietà differenziabile) e preferì non discutere questo argomento apertamente. In effetti, la comparsa di una geometria non euclidea è dovuta indipendentemente a N. I. Lobacevskij (1829) e J. Bolyai (1831).

Le idee di Gauss furono raccolte dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866). Nella sua tesi di abilitazione per conseguire la libera docenza, presentata nel giugno del 1854 (e pubblicata postuma nel 1868), sviluppando i principi contenuti nell'articolo di Gauss, Riemann introdusse concetti di straordinaria importanza per la geometria differenziale. Sebbene anche lui non avesse una adeguata definizione di varietà, usando un linguaggio intuitivo e senza dimostrazioni rigorose, Riemann introdusse ciò che oggi noi chiamiamo varietà differenziabile n-dimensionale come uno spazio costituito da regioni i cui punti sono rappresentati da n coordinate. Quindi introdusse una "metrica", ossia una regola per misurare la lunghezza di curve della varietà e la distanza tra due punti della stessa varietà. Nel caso di varietà di dimensione $n > 2$, Riemann generalizzò l'idea di curvatura gaussiana in questo modo: se p è un punto di M e P un piano (una sezione) dello spazio tangente T_pM, la curvatura sezionale riemanniana $K(p, P)$ è la curvatura gaussiana in p di una varietà bi-dimensionale S, formata dalle geodetiche di M uscenti da p e tangenti al piano P. Egli non indica un metodo per calcolare la curvatura sezionale in funzione dei coefficienti della metrica, tale metodo fu dato nel 1869 da E. B. Christoffel (1829-1900). Anche se nella sua tesi di abilitazione Riemann non menzionò esplicitamente la geometria non euclidea, il suo lavoro costituì la base su cui quest'ultima avrebbe fatto il proprio ingresso nella matematica ufficiale: la geometria euclidea non gode di particolari privilegi divini. L'opera di Riemann, infatti, tracciò un quadro concettuale in cui la geometria non euclidea sembrava altrettanto naturale di quella euclidea, ed entrambe apparivano come casi particolari di una geometria molto più ampia: *la geometria riemanniana*. Il lavoro di Riemann influenzò radicalmente il modo in cui la geometria e la topologia si sarebbero sviluppate. Per mancanza di adeguati strumenti matematici, la geometria riemanniana si sviluppò molto lentamente (il concetto di varietà differenziabile, necessario per formalizzare tale teoria, è apparso esplicitamente solo nel 1913 in un lavoro di H. Weyl). La questione fondamentale che motivò Riemann, implicita nello sviluppo delle geometrie non euclidee, è il legame tra fisica e geometria. Egli introdusse le varietà anche come un modello matematico per esplorare differenti regioni di spazio.

Un contributo fondamentale per lo sviluppo della geometria riemanniana fu dato dai matematici italiani. Mainardi (1800-1879) nel 1856 e Codazzi (1824-1875) nel 1858 dimostrarono delle formule relative alla geometria differenziale delle superfici. Tali formule, che coinvolgono la derivata della seconda forma fondamentale, sono state generalizzate nella teoria delle sottovarietà riemanniane, e sono oggi note col nome di equazioni di Codazzi-Mainardi. Eugenio Beltrami (1835-1900) fu il fondatore di quella scuola di geometria differenziale che vedrà tra i suoi più illustri esponenti L. Bianchi, G. Ricci-Curbastro e T. Levi-Civita. Beltrami, le cui ricerche furono ispirate dai lavori di Gauss, pubblicò nel 1868 il "*saggio di interpretazione della geometria non euclidea*" che diede all'autore grande notorietà e reputazione. Beltrami fu il primo a notare che la geometria iperbolica è una geometria a curvatura costante negativa, ben noto è il primo modello di geometria iperbolica da lui realizzato: "*la pseudosfera di Beltrami*". Si tratta di una superficie (non completa) generata dalla rotazione di una trattrice intorno al proprio asintoto. Luigi Cremona (1830-1903), il principale geometra italiano dell'epoca, non mostrò grande interesse nel leggere la bozza del lavoro di Beltrami, e ciò indusse Beltrami a riporre l'articolo nel cassetto. Tuttavia, Beltrami lesse la tesi di abilitazione di Riemann e si rese conto che il suo articolo era particolarmente significativo. Qualche anno dopo, l'articolo di Beltrami avrebbe esercitato una decisiva influenza su H. Poincaré, il quale scoprì poi altri modelli di geometria iperbolica. Luigi Bianchi (1856-1928), allievo di E. Betti e di U. Dini, deve la sua notorietà soprattutto ai suoi trattati, in particolare le sue "*lezioni di geometria differenziale*" del 1894 sono apparse in più edizioni. Ben note sono le celebri identità che oggi portano il suo nome (cfr. [110] per una presentazione storica delle identità di Bianchi).

A Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), le cui prime ricerche furono ispirate dai lavori di Beltrami, si deve l'introduzione del calcolo differenziale assoluto che, già completamente elaborato nel 1895, fu apprezzato solo dopo la pubblicazione dell'articolo, scritto insieme al suo allievo Tullio Levi-Civita (1873-1941), "*Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*" (Math. Ann. 1900). Una straordinaria applicazione del metodo di calcolo introdotto da Ricci-Curbastro (ed esposto nel suddetto articolo) si ebbe, pochi anni dopo, nella teoria della relatività generale (Einstein pubblicò il suo articolo *"I fondamenti della teoria della relatività generale"* all'inizio del 1916). In particolare, il tensore di Ricci appare esplicitamente nell'equazione di campo di Einstein della relatività generale. L'applicazione delle idee di Riemann alla teoria della relatività generale di Einstein diede un forte impulso allo sviluppo della geometria riemanniana.

Con Levi-Civita, il calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro, rapidamente integratosi con il calcolo tensoriale, si dimostrò di fondamentale importanza per lo sviluppo della geometria riemanniana. La nozione di parallelismo, introdotta da Levi-Civita nel suo articolo *"Nozione di parallelismo in una varietà qualunque"* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, 42, 1917, 173-205), diede un significato geometrico all'operazione di derivazione covariante. Si noti che il parallelismo permette di introdurre il concetto di curva geodetica dal punto di vista affine. Il parallelismo di Levi-Civita, inoltre, stimolò anche le ricerche di Élie Cartan, che nel 1923 generalizzò tale nozione sviluppando la teoria degli spazi a connessione affine, proiettiva e conforme, e nel 1926 il concetto di gruppo di olonomia.

Nel 1927, É. Cartan pubblicò un testo sulle varietà riemanniane: "*Lecons sur la gèometrie des espaces de Riemann*"(ristampato in seconda edizione nel 1946). Fino al 1960, il testo di Cartan rimase l'unico testo pubblicato di geometria riemanniana.

Concludiamo questa introduzione osservando che G. Perelman, all'inizio di questo millennio, usando e sviluppando la teoria del flusso di Ricci introdotta da R. S. Hamilton, è riuscito a dimostrare la famosa congettura di Poincaré.