

Prefazione alla Prima Edizione

La geometria riemanniana, attualmente, costituisce un campo di ricerca particolarmente attivo dell'area matematica. Tuttavia, in un ordinario testo avanzato di geometria riemanniana, gli argomenti e soprattutto le dimostrazioni dei principali risultati sono presentate, a volte, in un modo abbastanza ermetico tale da scoraggiare uno studente alle sue prime esperienze con questo mondo così affascinante ma nello stesso tempo tutt'altro che semplice.

Lo scopo principale di questo volume, che non ha la pretesa di costituire un testo completo di geometria riemanniana, è quello di introdurre lo studente a concetti e metodi della geometria riemanniana in modo graduale, presentandone gli argomenti e le dimostrazioni in modo elementare e comprensibile, evidenziando anche legami e analogie fra argomenti apparentemente distanti tra loro, in modo da stimolare la curiosità del lettore per possibili sviluppi e approfondimenti. Inoltre, particolare attenzione è stata rivolta alla scelta degli esempi e degli esercizi.

Il volume, nato da una esperienza didattica pluriennale dell'autore nel corso di Laurea in Matematica, e nel Dottorato di ricerca in Matematica, dell'Università del Salento, e il cui contenuto è sostanzialmente assente dalla letteratura specialistica in lingua italiana, offre un'introduzione moderna e attuale alla geometria riemanniana, particolarmente adatta per gli studenti di matematica e fisica dei corsi di Laurea Magistrale e del Dottorato. Inoltre, può costituire un volume preliminare o di accompagnamento ai testi avanzati di geometria riemanniana oggi disponibili (in lingua inglese). Lo studio degli argomenti trattati richiede una buona conoscenza dell'algebra lineare, della geometria differenziale di curve e superfici, dell'analisi reale a più variabili, e delle nozioni di base in topologia e teoria dei gruppi.

Il libro si può dividere in due parti. La prima parte, che comprende i primi otto capitoli, si può usare per un corso di geometria differenziale della Laurea Magistrale. In questi capitoli, il cui contenuto si evince chiaramente dall'indice, si introducono e si studiano concetti di base di geometria riemanniana. La seconda parte, che comprende gli ultimi quattro capitoli, è più adatta per un corso di Dottorato.

Nel Capitolo IX si studiano i campi vettoriali di Killing su una varietà riemanniana (la cui esistenza è intimamente legata alla curvatura della varietà), e in particolare quelli di Hopf sulla sfera unitaria di dimensione dispari. Tali campi sono i più importanti campi vettoriali in geometria riemanniana, ad

esempio, essi giocano un ruolo fondamentale in geometria sasakiana e nello studio dell'armonicità e della minimalità dei campi vettoriali.

Nel Capitolo X è data una breve presentazione di due importanti classi di varietà riemanniane: le varietà riemanniane omogenee e le varietà conformemente piatte. Inoltre, si discute il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern per varietà riemanniane compatte orientabili nelle dimensioni 2, 4 e 6.

Nel Capitolo XI si esaminano alcuni problemi variazionali naturali in geometria, come ad esempio le metriche di Einstein come punti critici del funzionale definito dall'integrale della curvatura scalare e le curve geodetiche come punti critici del funzionale energia.

Nell'ultimo Capitolo si vede che lo studio delle curve geodetiche, con l'uso di un principio variazionale, è un caso particolare di uno studio molto più generale, ovvero quello delle applicazioni armoniche. Tali applicazioni, di cui si studiano vari aspetti geometrici, si presentano quindi come soluzioni di un problema variazionale e appaiono in modo naturale in varie questioni di geometria riemanniana. Attualmente, le applicazioni armoniche costituiscono uno dei più importanti settori di ricerca della geometria riemanniana.

Infine, nelle Appendici sono brevemente discussi i seguenti temi: orientabilità e integrazione, l'operatore di Laplace su una varietà riemanniana, la geometria del fibrato tangente e la decomposizione del tensore di curvatura.

Come ulteriore lettura e approfondimento sulla maggior parte degli argomenti trattati in questo volume, si raccomandano in particolare i testi di W.M. Boothby [14], M.P. Do Carmo [32], S. Kobayashi - K. Nomizu [56] vol.I, J.M. Lee [62] e H. Urakawa [112].

Dicembre 2010

Domenico Perrone