

UNIVERSITÀ DEL SALENTO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA  
“ENNIO DE GIORGI”

Domenico Perrone

UN'INTRODUZIONE  
ALLA  
GEOMETRIA RIEMANNIANA  
Seconda edizione



Quaderno 1/2023  
Università del Salento - Coordinamento SIBA

# QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA “ENNIO DE GIORGI”  
UNIVERSITÀ DEL SALENTO

---

## Comitato di Redazione

Angela Albanese

Francesco Catino

Domenico Perrone

---

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica e Fisica “Ennio De Giorgi” della Università del Salento documentano gli aspetti di rilievo dell’attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

- (1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
- (2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
- (3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all’approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

Quaderno 1/2023:

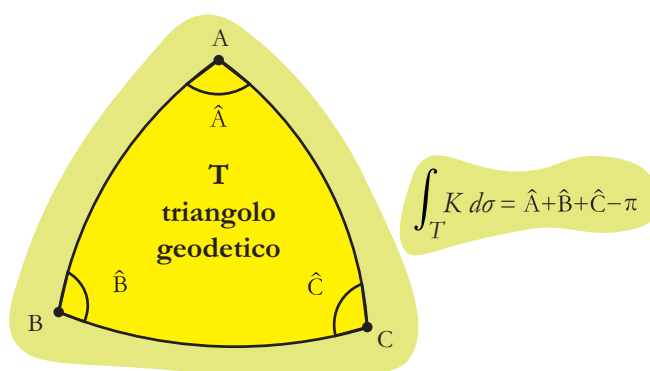
Università del Salento - Coordinamento SIBA

eISBN: 978-88-8305-195-1

Università del Salento  
Dipartimento di Matematica e Fisica “E. De Giorgi”

Domenico Perrone

UN'INTRODUZIONE ALLA  
**GEOMETRIA RIEMANNIANA**  
(Seconda Edizione)



Quaderno 1/2023  
Università del Salento - Coordinamento SIBA

Dedicato  
a  
Davide, Elisa, Antonella e Gianluca.

*La matematica è generalmente considerata proprio agli antipodi della poesia. Eppure la matematica e la poesia sono nella più stretta parentela, perché entrambe sono il frutto dell'immaginazione. La poesia è creazione, finzione: e la matematica è stata detta da un suo ammiratore la più sublime e la più meravigliosa delle finzioni.*

D. E. Smith

*La matematica pura è, a modo suo, la poesia delle idee logiche.*

A. Einstein



# Indice

Prefazione alla Seconda Edizione	xi
Prefazione alla Prima Edizione	xiii
Introduzione (storica)	1
<b>1 Varietà e applicazioni differenziabili</b>	<b>5</b>
1.1 Varietà differenziabili . . . . .	5
1.2 Applicazioni differenziabili . . . . .	14
1.3 Costruzione di applicazioni differenziabili . . . . .	17
<b>2 Nozioni di base sulle varietà differenziabili</b>	<b>23</b>
2.1 Spazio tangente e campi di vettori . . . . .	23
2.2 TM come fibrato vettoriale . . . . .	31
2.3 Il differenziale di funzioni . . . . .	35
2.4 Curve differenziabili . . . . .	41
2.5 Immersioni e sottovarietà . . . . .	44
2.6 Tensori su una varietà differenziabile . . . . .	51
2.7 Differenziale esterno e derivata di Lie . . . . .	59
<b>3 Gruppi di Lie</b>	<b>63</b>
3.1 Esempi di gruppi di Lie . . . . .	63
3.2 Relazioni tra un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie . . . . .	71
3.3 Le costanti di struttura . . . . .	76
3.4 Esempi di algebre di Lie . . . . .	77
3.5 L'applicazione esponenziale . . . . .	82
3.6 Gruppi di Lie $3D$ . . . . .	86
3.6.1 Gruppi di Lie $3D$ unimodulari . . . . .	88
3.6.2 Gruppi di Lie $3D$ non-unimodulari . . . . .	91
<b>4 Varietà riemanniane</b>	<b>95</b>
4.1 Metriche riemanniane . . . . .	95
4.2 Immersioni isometriche e la sfera canonica . . . . .	98
4.3 Sommersioni riemanniane . . . . .	102
4.4 Lo spazio iperbolico e suoi modelli . . . . .	104

4.5	Metriche associate a una struttura simplettica . . . . .	112
4.6	Metriche associate a una struttura di (quasi) contatto . . . . .	115
4.7	Strutture metriche di (quasi) contatto su gruppi di Lie $3D$ . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Struttura di spazio metrico e isometrie</b>	<b>129</b>
5.1	Distanza su una varietà riemanniana . . . . .	129
5.2	Isometrie di una varietà riemanniana . . . . .	135
5.3	Metriche invarianti a sinistra . . . . .	136
5.4	Isometrie dello spazio euclideo e della sfera canonica . . . . .	141
5.5	Isometrie dello spazio iperbolico . . . . .	145
5.6	Trasformazioni di Möbius e isometrie del piano iperbolico . . . . .	150
5.7	Rivestimenti riemanniani . . . . .	153
5.8	Isometrie degli spazi modello della geometria semi-riemanniana (cenni) . . . . .	155
<b>6</b>	<b>Connessioni lineari e connessione di Levi-Civita</b>	<b>159</b>
6.1	Connessioni lineari . . . . .	160
6.2	Il tensore di torsione e l'operatore hessiano . . . . .	162
6.3	Derivata covariante e parallelismo . . . . .	164
6.4	Curve geodetiche . . . . .	171
6.5	La connessione di Levi-Civita . . . . .	172
6.6	Le equazioni di struttura di Cartan . . . . .	183
6.7	La connessione di Levi-Civita di sottovarietà riemanniane . . . . .	186
6.8	Tensori fondamentali su una distribuzione . . . . .	196
6.9	Derivata covariante di tensori . . . . .	199
<b>7</b>	<b>Geodetiche su varietà riemanniane</b>	<b>203</b>
7.1	Esempi di curve geodetiche . . . . .	203
7.2	Esponenziale e geodetiche minimali . . . . .	215
7.3	Varietà riemanniane complete . . . . .	230
<b>8</b>	<b>La curvatura riemanniana</b>	<b>235</b>
8.1	Uno sguardo alla curvatura gaussiana . . . . .	236
8.2	Il tensore di curvatura di Riemann . . . . .	244
8.3	La curvatura sezionale . . . . .	253
8.4	Il tensore di curvatura di sottovarietà riemanniane . . . . .	259
8.5	La curvatura determina la metrica? . . . . .	262
8.6	Spazi a curvatura sezionale costante . . . . .	264
8.7	Tensore di Ricci e curvatura scalare . . . . .	276
8.8	Varietà di Einstein . . . . .	283
8.9	Curvatura di gruppi di Lie $3D$ . . . . .	286
8.10	Solitoni di Ricci . . . . .	292



<b>9</b>	<b>Campi vettoriali di Killing e di Hopf</b>	<b>301</b>
9.1	Campi vettoriali di Killing . . . . .	301
9.2	Campi vettoriali di Killing su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$ . . . . .	311
9.3	La fibrazione di Hopf . . . . .	314
9.4	Le metriche di Berger sulla sfera $\mathbb{S}^3$ . . . . .	317
9.5	Campi vettoriali di Hopf . . . . .	322
9.6	Campi vettoriali di volume minimo . . . . .	326
<b>10</b>	<b>Varietà riemanniane omogenee e varietà conformemente piatte</b>	<b>333</b>
10.1	Varietà riemanniane omogenee . . . . .	333
10.2	Varietà riemanniane omogenee $3D$ . . . . .	335
10.3	Varietà riemanniane simmetriche . . . . .	341
10.4	Varietà conformemente piatte . . . . .	346
10.5	Il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern . . . . .	350
<b>11</b>	<b>Problemi variazionali in geometria</b>	<b>357</b>
11.1	Una caratterizzazione variazionale delle metriche di Einstein . . . . .	358
11.2	Geodetiche come punti critici dell'energia . . . . .	367
<b>12</b>	<b>Applicazioni armoniche</b>	<b>381</b>
12.1	Il fibrato vettoriale $f^{-1}TM'$ . . . . .	381
12.2	Energia di un'applicazione . . . . .	388
12.3	Applicazioni armoniche ed equazioni di Eulero-Lagrange . . . . .	392
12.4	Esempi di applicazioni armoniche . . . . .	395
12.5	Tensione di una composizione . . . . .	399
12.6	La 1 <sup>a</sup> formula variazionale . . . . .	401
12.7	Il rough laplaciano . . . . .	406
12.8	Sezioni armoniche . . . . .	411
12.9	La 2 <sup>a</sup> formula variazionale e stabilità . . . . .	413
12.9.1	Forma hessiana dell'energia e l'operatore di Jacobi . . . . .	413
12.9.2	Il Teorema di Xin . . . . .	419
12.9.3	Stabilità dell'identità e il Teorema di Smith . . . . .	421
12.9.4	Stabilità di applicazioni olomorfe . . . . .	427
<b>A</b>	<b>Orientabilità e integrazione</b>	<b>431</b>
A.1	Varietà orientabili . . . . .	431
A.2	Integrale di una $n$ -forma . . . . .	434
<b>B</b>	<b>Divergenza e laplaciano</b>	<b>441</b>
B.1	L'operatore di Laplace-Beltrami . . . . .	441
B.2	Codifferenziale e operatore di Hodge-de Rham . . . . .	448

<b>C Geometria del fibrato tangente</b>	<b>453</b>
C.1 Vettori orizzontali e verticali . . . . .	453
C.2 L'applicazione di connessione e $\pi_*$ . . . . .	457
C.3 La metrica di Sasaki e il fibrato sferico . . . . .	460
C.4 Il fibrato sferico tangente di una superficie riemanniana . . . .	463
C.5 Metriche riemanniane $g$ -naturali su $TM$ e $T_1M$ . . . . .	466
<b>D Decomposizione del tensore di curvatura</b>	<b>469</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>475</b>
<b>Indice analitico</b>	<b>485</b>

# Prefazione alla Seconda Edizione

In questa seconda Edizione riveduta, corretta e ampliata di “*Un’introduzione alla Geometria Riemanniana - Aracne Editrice - 2011*” si conserva la suddivisione in dodici Capitoli, tuttavia tutti i capitoli sono stati più o meno modificati (così come le quattro Appendici), e in alcuni casi anche con cenni a tematiche di ricerca attuali da sviluppare in un corso di Dottorato. Le principali modifiche, rispetto alla prima edizione, sono le seguenti.

La Sezione 3.6 del Capitolo 3 è stata ampliata con una presentazione dei gruppi di Lie  $3D$  unimodulari e non-unimodulari.

Il Capitolo 4 è stato ampliato con la Sezione 4.6 dedicata a una breve presentazione delle strutture riemanniane di contatto e di speciali strutture riemanniane di quasi contatto. Quindi, viene studiata l’esistenza di queste strutture sui gruppi di Lie  $3D$  unimodulari e non-unimodulari.

Nel Capitolo 5 è stata aggiunta la Sezione 5.8 dedicata a una breve presentazione delle isometrie degli spazi modello della geometria semi-riemanniana.

Il Capitolo 8 è stato ampliato con le Sezioni 8.9 e 8.10. Nella Sezione 8.9 si studia la curvatura dei gruppi di Lie riemanniani  $3D$  unimodulari e non-unimodulari. Nella Sezione 8.10 viene data una breve presentazione dei solitoni di Ricci. I solitoni di Ricci sono stati introdotti da R. S. Hamilton come una naturale generalizzazione delle metriche di Einstein. Inoltre, sono importanti anche per il loro legame con il flusso di Ricci e la comprensione delle sue singolarità.

Il Capitolo 10 è stato ampliato con la Sezione 10.2 dedicata alle varietà riemanniane omogenee  $3D$ . In particolare, viene riportata la classificazione delle varietà riemanniane di contatto omogenee semplicemente connesse  $3D$ .

Infine, nella nuova Sezione C.4 dell’Appendice C, si introduce il fibrato sferico tangente  $T_1M^2$  di una varietà riemanniana  $2D$ . In particolare, si mette in evidenza che  $T_1M^2$  ammette una struttura riemanniana di contatto naturale.

Aprile 2023

*Domenico Perrone*

domenico.perrone@unisalento.it



# Prefazione alla Prima Edizione

La geometria riemanniana, attualmente, costituisce un campo di ricerca particolarmente attivo dell'area matematica. Tuttavia, in un ordinario testo avanzato di geometria riemanniana, gli argomenti e soprattutto le dimostrazioni dei principali risultati sono presentate, a volte, in un modo abbastanza ermetico tale da scoraggiare uno studente alle sue prime esperienze con questo mondo così affascinante ma nello stesso tempo tutt'altro che semplice.

Lo scopo principale di questo volume, che non ha la pretesa di costituire un testo completo di geometria riemanniana, è quello di introdurre lo studente a concetti e metodi della geometria riemanniana in modo graduale, presentandone gli argomenti e le dimostrazioni in modo elementare e comprensibile, evidenziando anche legami e analogie fra argomenti apparentemente distanti tra loro, in modo da stimolare la curiosità del lettore per possibili sviluppi e approfondimenti. Inoltre, particolare attenzione è stata rivolta alla scelta degli esempi e degli esercizi.

Il volume, nato da una esperienza didattica pluriennale dell'autore nel corso di Laurea in Matematica, e nel Dottorato di ricerca in Matematica, dell'Università del Salento, e il cui contenuto è sostanzialmente assente dalla letteratura specialistica in lingua italiana, offre un'introduzione moderna e attuale alla geometria riemanniana, particolarmente adatta per gli studenti di matematica e fisica dei corsi di Laurea Magistrale e del Dottorato. Inoltre, può costituire un volume preliminare o di accompagnamento ai testi avanzati di geometria riemanniana oggi disponibili (in lingua inglese). Lo studio degli argomenti trattati richiede una buona conoscenza dell'algebra lineare, della geometria differenziale di curve e superfici, dell'analisi reale a più variabili, e delle nozioni di base in topologia e teoria dei gruppi.

Il libro si può dividere in due parti. La prima parte, che comprende i primi otto capitoli, si può usare per un corso di geometria differenziale della Laurea Magistrale. In questi capitoli, il cui contenuto si evince chiaramente dall'indice, si introducono e si studiano concetti di base di geometria riemanniana. La seconda parte, che comprende gli ultimi quattro capitoli, è più adatta per un corso di Dottorato.

Nel Capitolo IX si studiano i campi vettoriali di Killing su una varietà riemanniana (la cui esistenza è intimamente legata alla curvatura della varietà), e in particolare quelli di Hopf sulla sfera unitaria di dimensione dispari. Tali campi sono i più importanti campi vettoriali in geometria riemanniana, ad

esempio, essi giocano un ruolo fondamentale in geometria sasakiana e nello studio dell'armonicità e della minimalità dei campi vettoriali.

Nel Capitolo X è data una breve presentazione di due importanti classi di varietà riemanniane: le varietà riemanniane omogenee e le varietà conformemente piatte. Inoltre, si discute il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern per varietà riemanniane compatte orientabili nelle dimensioni 2, 4 e 6.

Nel Capitolo XI si esaminano alcuni problemi variazionali naturali in geometria, come ad esempio le metriche di Einstein come punti critici del funzionale definito dall'integrale della curvatura scalare e le curve geodetiche come punti critici del funzionale energia.

Nell'ultimo Capitolo si vede che lo studio delle curve geodetiche, con l'uso di un principio variazionale, è un caso particolare di uno studio molto più generale, ovvero quello delle applicazioni armoniche. Tali applicazioni, di cui si studiano vari aspetti geometrici, si presentano quindi come soluzioni di un problema variazionale e appaiono in modo naturale in varie questioni di geometria riemanniana. Attualmente, le applicazioni armoniche costituiscono uno dei più importanti settori di ricerca della geometria riemanniana.

Infine, nelle Appendici sono brevemente discussi i seguenti temi: orientabilità e integrazione, l'operatore di Laplace su una varietà riemanniana, la geometria del fibrato tangente e la decomposizione del tensore di curvatura.

Come ulteriore lettura e approfondimento sulla maggior parte degli argomenti trattati in questo volume, si raccomandano in particolare i testi di W.M. Boothby [14], M.P. Do Carmo [32], S. Kobayashi - K. Nomizu [56] vol.I, J.M. Lee [62] e H. Urakawa [112].

Dicembre 2010

Domenico Perrone

# Introduzione (storica)

Storicamente la geometria riemanniana rappresenta lo sviluppo naturale della geometria differenziale delle superfici dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ . Il passo cruciale di questo sviluppo è il famoso articolo “*Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*” (1827) del matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), professore all’Università di Gottinga oltre che direttore dell’osservatorio astronomico della stessa città. Per i suoi contemporanei Gauss era il *princeps mathematicorum*. Le sue ricerche, di fondamentale importanza, spaziavano in diversi campi della matematica: aritmetica, algebra, astronomia, analisi, fisica matematica e geometria differenziale. Gauss, a partire dalle equazioni parametriche di una superficie regolare:  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , definì la cosiddetta *prima forma fondamentale* della superficie (come una generalizzazione del concetto di distanza tra due punti infinitamente vicini) mediante la formula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

dove  $E = g_0(\phi_u, \phi_u)$ ,  $F = g_0(\phi_u, \phi_v)$ ,  $G = g_0(\phi_v, \phi_v)$ ,  $g_0$  denota il prodotto scalare euclideo, e  $\phi_u, \phi_v$  sono i vettori tangenti alle linee coordinate  $v = \text{cost.}$  e  $u = \text{cost.}$  rispettivamente. Quindi, dimostrò il “Theorema Egregium”: *la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie*. Più precisamente, Gauss dimostrò che la curvatura gaussiana nel generico punto della superficie (definita usando un campo vettoriale normale alla superficie) dipende solo dalle funzioni  $E, F, G$  che definiscono la prima forma fondamentale (cfr., ad esempio, [96] p. 191,193). Un altro aspetto particolarmente interessante evidenziato da Gauss è il seguente: se  $T$  è un triangolo geodetico su una superficie di curvatura gaussiana  $K = k_0$  (costante), allora

$$k_0 \text{ area}(T) = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  denotano le misure (in radianti) degli angoli interni del triangolo  $T$  (questo è il Teorema “elegantissimo” di Gauss). D’altronde, uno dei problemi fondamentali, al tempo di Gauss, era la cosiddetta “*questione delle parallele*”, iniziata al tempo di Euclide e conclusasi solo con l’avvento delle geometrie non euclidee. Si trattava di decidere se il quinto postulato di Euclide fosse indipendente dagli altri quattro postulati. Ben presto si stabilì che il quinto postulato è equivalente al fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180 gradi (una dimostrazione accurata fu data dal

gesuita G. Saccheri (1667-1733)). La scoperta di Gauss faceva intravedere l'esistenza di geometrie diverse da quella euclidea e quindi di una geometria sulle superfici senza riferimento allo spazio ambiente. Dunque, Gauss percepì molto chiaramente le profonde implicazioni della sua scoperta. Tuttavia, egli non aveva strumenti matematici validi per sviluppare le sue idee (non c'era ancora l'idea di varietà differenziabile) e preferì non discutere questo argomento apertamente. In effetti, la comparsa di una geometria non euclidea è dovuta indipendentemente a N. I. Lobacevskij (1829) e J. Bolyai (1831).

Le idee di Gauss furono raccolte dal matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866). Nella sua tesi di abilitazione per conseguire la libera docenza, presentata nel giugno del 1854 (e pubblicata postuma nel 1868), sviluppando i principi contenuti nell'articolo di Gauss, Riemann introdusse concetti di straordinaria importanza per la geometria differenziale. Sebbene anche lui non avesse una adeguata definizione di varietà, usando un linguaggio intuitivo e senza dimostrazioni rigorose, Riemann introdusse ciò che oggi noi chiamiamo varietà differenziabile  $n$ -dimensionale come uno spazio costituito da regioni i cui punti sono rappresentati da  $n$  coordinate. Quindi introdusse una "metrica", ossia una regola per misurare la lunghezza di curve della varietà e la distanza tra due punti della stessa varietà. Nel caso di varietà di dimensione  $n > 2$ , Riemann generalizzò l'idea di curvatura gaussiana in questo modo: se  $p$  è un punto di  $M$  e  $P$  un piano (una sezione) dello spazio tangente  $T_p M$ , la curvatura sezionale riemanniana  $K(p, P)$  è la curvatura gaussiana in  $p$  di una varietà bi-dimensionale  $S$ , formata dalle geodetiche di  $M$  uscenti da  $p$  e tangenti al piano  $P$ . Egli non indica un metodo per calcolare la curvatura sezionale in funzione dei coefficienti della metrica, tale metodo fu dato nel 1869 da E. B. Christoffel (1829-1900). Anche se nella sua tesi di abilitazione Riemann non menzionò esplicitamente la geometria non euclidea, il suo lavoro costituì la base su cui quest'ultima avrebbe fatto il proprio ingresso nella matematica ufficiale: la geometria euclidea non gode di particolari privilegi divini. L'opera di Riemann, infatti, tracciò un quadro concettuale in cui la geometria non euclidea sembrava altrettanto naturale di quella euclidea, ed entrambe apparivano come casi particolari di una geometria molto più ampia: *la geometria riemanniana*. Il lavoro di Riemann influenzò radicalmente il modo in cui la geometria e la topologia si sarebbero sviluppate. Per mancanza di adeguati strumenti matematici, la geometria riemanniana si sviluppò molto lentamente (il concetto di varietà differenziabile, necessario per formalizzare tale teoria, è apparso esplicitamente solo nel 1913 in un lavoro di H. Weyl). La questione fondamentale che motivò Riemann, implicita nello sviluppo delle geometrie non euclidee, è il legame tra fisica e geometria. Egli introdusse le varietà anche come un modello matematico per esplorare differenti regioni di spazio.

Un contributo fondamentale per lo sviluppo della geometria riemanniana fu dato dai matematici italiani. Mainardi (1800-1879) nel 1856 e Codazzi (1824-1875) nel 1858 dimostrarono delle formule relative alla geometria differenziale delle superfici. Tali formule, che coinvolgono la derivata del-



la seconda forma fondamentale, sono state generalizzate nella teoria delle sottovarietà riemanniane, e sono oggi note col nome di equazioni di Codazzi-Mainardi. Eugenio Beltrami (1835-1900) fu il fondatore di quella scuola di geometria differenziale che vedrà tra i suoi più illustri esponenti L. Bianchi, G. Ricci-Curbastro e T. Levi-Civita. Beltrami, le cui ricerche furono ispirate dai lavori di Gauss, pubblicò nel 1868 il “*saggio di interpretazione della geometria non euclidea*” che diede all’autore grande notorietà e reputazione. Beltrami fu il primo a notare che la geometria iperbolica è una geometria a curvatura costante negativa, ben noto è il primo modello di geometria iperbolica da lui realizzato: “*la pseudosfera di Beltrami*”. Si tratta di una superficie (non completa) generata dalla rotazione di una trattrice intorno al proprio asintoto. Luigi Cremona (1830-1903), il principale geometra italiano dell’epoca, non mostrò grande interesse nel leggere la bozza del lavoro di Beltrami, e ciò indusse Beltrami a riporre l’articolo nel cassetto. Tuttavia, Beltrami lesse la tesi di abilitazione di Riemann e si rese conto che il suo articolo era particolarmente significativo. Qualche anno dopo, l’articolo di Beltrami avrebbe esercitato una decisiva influenza su H. Poincaré, il quale scoprì poi altri modelli di geometria iperbolica. Luigi Bianchi (1856-1928), allievo di E. Betti e di U. Dini, deve la sua notorietà soprattutto ai suoi trattati, in particolare le sue “*lezioni di geometria differenziale*” del 1894 sono apparse in più edizioni. Ben note sono le celebri identità che oggi portano il suo nome (cfr. [110] per una presentazione storica delle identità di Bianchi).

A Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), le cui prime ricerche furono ispirate dai lavori di Beltrami, si deve l’introduzione del calcolo differenziale assoluto che, già completamente elaborato nel 1895, fu apprezzato solo dopo la pubblicazione dell’articolo, scritto insieme al suo allievo Tullio Levi-Civita (1873-1941), “*Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*” (Math. Ann. 1900). Una straordinaria applicazione del metodo di calcolo introdotto da Ricci-Curbastro (ed esposto nel suddetto articolo) si ebbe, pochi anni dopo, nella teoria della relatività generale (Einstein pubblicò il suo articolo “*I fondamenti della teoria della relatività generale*” all’inizio del 1916). In particolare, il tensore di Ricci appare esplicitamente nell’equazione di campo di Einstein della relatività generale. L’applicazione delle idee di Riemann alla teoria della relatività generale di Einstein diede un forte impulso allo sviluppo della geometria riemanniana.

Con Levi-Civita, il calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro, rapidamente integratosi con il calcolo tensoriale, si dimostrò di fondamentale importanza per lo sviluppo della geometria riemanniana. La nozione di parallelismo, introdotta da Levi-Civita nel suo articolo “*Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*” (Rend. Circ. Mat. di Palermo, 42, 1917, 173-205), diede un significato geometrico all’operazione di derivazione covariante. Si noti che il parallelismo permette di introdurre il concetto di curva geodetica dal punto di vista affine. Il parallelismo di Levi-Civita, inoltre, stimolò anche le ricerche di Élie Cartan, che nel 1923 generalizzò tale nozione sviluppando la teoria degli spazi a connessione affine, proiettiva e conforme, e nel 1926 il

concetto di gruppo di olonomia.

Nel 1927, É. Cartan pubblicò un testo sulle varietà riemanniane: “*Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*” (ristampato in seconda edizione nel 1946). Fino al 1960, il testo di Cartan rimase l’unico testo pubblicato di geometria riemanniana.

Concludiamo questa introduzione osservando che G. Perelman, all’inizio di questo millennio, usando e sviluppando la teoria del flusso di Ricci introdotta da R. S. Hamilton, è riuscito a dimostrare la famosa congettura di Poincaré.

# Capitolo 1

## Varietà e applicazioni differenziabili

### 1.1 Varietà differenziabili

Il concetto di varietà differenziabile viene introdotto come una naturale generalizzazione del concetto di superficie regolare. Quindi, iniziamo ricordando la definizione di *superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$* .

Sia  $M$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  con la topologia indotta. Questo sotto-spazio  $M$  è detto superficie regolare se ha una parametrizzazione regolare nell'intorno di ogni suo punto, ossia:

$\forall p_0 \in M \exists V$  intorno aperto di  $p_0$  in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\exists D$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ , tali che

$$a) M \cap V : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D,$$

con  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  funzioni differenziabili;

$$b) \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \quad \text{ha rango 2 in ogni punto di } D;$$

c)  $\varphi : U = V \cap M \rightarrow D$ ,  $p = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mapsto (u, v)$ , è un omeomorfismo.

L'aperto  $U = V \cap M$  è detto dominio (o intorno) parametrizzato e  $(u, v)$  parametri. Un aspetto importante della definizione di superficie regolare è che se consideriamo due parametrizzazioni regolari  $((u, v), \varphi)$  e  $((u', v'), \varphi')$  con domini a intersezione non vuota, allora il cambio di parametrizzazione

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \varphi'(U \cap U') \subset \mathbb{R}^2$$

è differenziabile (cfr. [30], p.70). Analogamente per l'inversa. Altro aspetto importante di questa nozione, che però è un difetto, è la dipendenza dallo

spazio  $\mathbb{R}^3$  in cui è immersa la superficie. In altre parole, la definizione di superficie regolare non ha carattere intrinseco.

Come detto all'inizio, il concetto di varietà differenziabile è una naturale astrazione e generalizzazione del concetto di superficie regolare, e quindi viene introdotto in modo che sia possibile l'*impiego intrinseco* degli strumenti dell'analisi ordinaria. Questo concetto è stato introdotto per la prima volta da B. Riemann nel 1854 senza una precisa definizione. Hermann Weyl nel 1913 fu il primo a introdurre il concetto in termini più precisi. Il concetto di varietà differenziabile divenne completamente chiaro nel famoso articolo di Hassler Whitney [119].

**Definizione 1.1.** Una varietà topologica è uno spazio topologico di Hausdorff  $M$  che soddisfa la seguente proprietà: per ogni punto  $p_0 \in M$  esiste un intorno aperto  $U$  omeomorfo a un aperto  $D$  di  $\mathbb{R}^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ . L'omeomorfismo  $\phi : U \rightarrow D = \phi(U), p \mapsto \phi(p) = (x_1, \dots, x_n)$ , si dice *applicazione coordinata*, la coppia  $(U, \phi)$  si dice carta locale e  $(x_1, \dots, x_n)$  si dicono *coordinate locali* del punto  $p$ .

Dalla definizione segue che i domini di tutte le carte ricoprono lo spazio  $M$ . L'intero  $n = n(p_0)$  si dice dimensione della varietà  $M$  in  $p_0$ . La dimensione  $n = n(p)$  è costante sulle componenti connesse di  $M$ . In particolare, se  $M$  è connessa, l'intero  $n$  è detto *dimensione* della varietà. Nel seguito, le varietà che si considerano si assumeranno sempre connesse. Inoltre, col termine differenziabile intenderemo sempre di classe  $C^\infty$ .

**Osservazione 1.2.** Ricordiamo alcune nozioni dalla topologia generale. Uno spazio topologico  $X$  si dice *localmente connesso per archi* se ogni punto  $x \in X$  possiede un sistema fondamentale di intorni aperti connessi per archi.  $X$  si dice *localmente semplicemente connesso* se ogni punto  $x \in X$  è contenuto in un aperto  $U$  tale che  $\pi_1(U, x) = 0$ . Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso, allora  $X$  possiede un (unico) rivestimento universale  $\tilde{X}$ . L'unicità del rivestimento significa che se  $p_1 : (Y_1, y_1) \rightarrow (X, x_0)$  e  $p_2 : (Y_2, y_2) \rightarrow (X, x_0)$  sono due rivestimenti universali, quindi due rivestimenti con  $Y_1, Y_2$  semplicemente connessi, allora esiste un omeomorfismo  $\phi : (Y_1, y_1) \rightarrow (Y_2, y_2)$  tale che  $p_2 \circ \phi = p_1$ . In particolare, ogni varietà topologica (connessa) possiede un (unico) rivestimento universale  $\tilde{M}$ .

**Definizione 1.3.** Un atlante differenziabile su una varietà topologica  $M$ ,  $\dim M = n$ , è una famiglia di carte locali  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  che verifica le seguenti proprietà:

- 1) i domini delle carte ricoprono  $M$ , cioè  $M = \cup_i U_i$ ;
- 2) per ogni  $i, j \in I$ , con  $U_i \cap U_j$  non vuoto, le applicazioni

$$\begin{aligned} \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j), \\ (x_1, \dots, x_n) = \phi_i(p) &\mapsto (y_1, \dots, y_n) = \phi_j(p), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) &\rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j), \\ (y_1, \dots, y_n) = \phi_j(p) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) = \phi_i(p), \end{aligned}$$

sono applicazioni differenziabili tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  (cfr. Figura 1.1). In altre parole, la proprietà 2) ci dice che il cambiamento di coordinate avviene con applicazioni differenziabili.

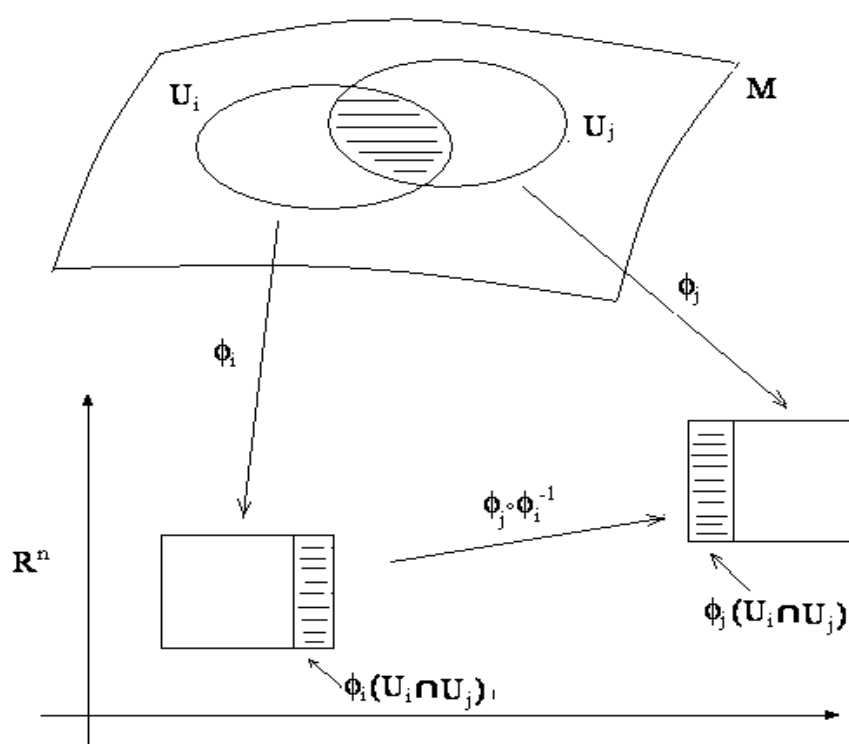


Figura 1.1: Cambiamento di coordinate.

Due atlanti differenziabili  $\mathbb{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  e  $\mathbb{A}' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  su una varietà topologica  $M$  si dicono compatibili se  $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$  è ancora un atlante differenziabile di  $M$ . La relazione di compatibilità tra atlanti differenziabili è una relazione di equivalenza, e una *struttura differenziabile* su  $M$  è una classe di equivalenza di atlanti differenziabili compatibili.

**Definizione 1.4.** Una varietà differenziabile è una varietà topologica  $M$  munita di una struttura differenziabile.

Naturalmente per avere una varietà differenziabile basta assegnare su una varietà topologica un atlante differenziabile. Di conseguenza, una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  è chiaramente un esempio di varietà differenziabile di dimensione 2.

**Osservazione 1.5.** Se nelle definizioni precedenti invece di considerare funzioni di classe  $C^\infty$  si considerano funzioni di classe  $C^\omega$  si ha la nozione di *varietà analitica*. Inoltre, sempre con riferimento alle definizioni precedenti, se si sostituisce  $\mathbb{R}^n$  con  $\mathbb{C}^n$  e funzioni di classe  $C^\infty$  con funzioni olomorfe, si ha la nozione di *varietà complessa* di dimensione complessa  $n$ . Naturalmente una varietà complessa di dimensione complessa  $n$  è una varietà differenziabile di dimensione reale  $2n$ . Per la nozione di varietà differenziabile con bordo si rinvia, ad esempio, a [14] e [28].

Se  $M$  è una varietà differenziabile,  $\mathbb{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  un suo atlante differenziabile e  $A$  un aperto di  $M$ , allora  $A$  è una varietà differenziabile con la struttura differenziabile definita dall'atlante  $\mathbb{A}' = \{(U'_i, \phi'_i)\}_{i \in I}$ , dove  $U'_i = U_i \cap A$  e  $\phi'_i = \phi_i|_{U'_i}$ . L'aperto  $A$  munito di questa struttura differenziabile è detto *sottovarietà aperta* di  $M$ ,  $\dim A = \dim M$ .

Nel seguito, quando considereremo una carta locale, questa sarà sempre una carta ammissibile, ossia appartenente a qualche atlante della struttura differenziabile di  $M$ . Si noti che se  $(U, \phi)$  è una carta locale ammissibile di  $M$  ed  $f : \phi(U) \rightarrow D$  (aperto di  $\mathbb{R}^n$ ) è un diffeomorfismo, allora  $(U, f \circ \phi)$  è ancora una carta ammissibile.

**Proposizione 1.6.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile,  $\dim M = n$ . Allora, per ogni fissato punto  $p_0 \in M$  esiste sempre una carta locale  $(U, \varphi)$  con  $p_0 \in U$ ,  $\varphi(p_0) = (0, \dots, 0)$  e  $\varphi(U) = B(0, r)$  (palla aperta di centro l'origine e raggio  $r$  di  $\mathbb{R}^n$ ).*

*Dimostrazione.* Sia  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  una carta locale con  $p_0 \in \tilde{U}$  e  $x_0 = \tilde{\varphi}(p_0) \in \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ . Siccome  $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , esiste  $r > 0$  tale che  $B(x_0, r) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ . La traslazione  $T(x) = x - x_0$  trasforma  $B(x_0, r)$  in  $B(0, r)$ . Posto  $U = \tilde{\varphi}^{-1}(B(x_0, r))$  e  $\varphi = T \circ \tilde{\varphi}|_U$ ,  $(U, \varphi)$  è una carta locale che soddisfa le proprietà richieste.  $\square$

**Esempio 1.7.  $\mathbb{R}^n$**

$\mathbb{R}^n$  è un esempio banale di varietà differenziabile  $n$ -dimensionale. Un atlante differenziabile per  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $\mathbb{A} = \{(\mathbb{R}^n, I_{\mathbb{R}^n})\}$ .

**Esempio 1.8.  $GL(n, \mathbb{R})$**

Il gruppo lineare  $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \det A \neq 0\}$  è una varietà differenziabile (non connessa) di dimensione  $n^2$ . Basta osservare che  $GL(n, \mathbb{R})$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}$  (in quanto immagine inversa, mediante l'applicazione continua  $\det: \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ , dell'aperto  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  di  $\mathbb{R}$ ).

**Esempio 1.9. La circonferenza  $\mathbb{S}^1$** 

$\mathbb{S}^1$  si può pensare definita dalle equazioni  $x = \cos 2\pi t$ ,  $y = \sin 2\pi t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Poniamo

$$U = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{S}^1 : t \in ]0, 1[ \},$$

$$V = \{(\cos 2\pi t', \sin 2\pi t') \in \mathbb{S}^1 : t' \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \},$$

e consideriamo gli omeomorfismi

$$\varphi : U \rightarrow ]0, 1[, (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \mapsto t,$$

$$\psi : V \rightarrow ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, (\cos 2\pi t', \sin 2\pi t') \mapsto t'.$$

Allora,  $U \cup V = \mathbb{S}^1$  e, su  $U \cap V$ , il cambiamento di coordinata è del tipo  $t' = t$  oppure  $t' = t - 1$ . Quindi,  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  definisce un atlante differenziabile su  $\mathbb{S}^1$ . Un altro atlante differenziabile su  $\mathbb{S}^1$ , equivalente al primo, è costruito nel modo seguente. Consideriamo  $\mathbb{S}^1$  definita dall'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  e poniamo

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x > 0\}, \quad \varphi_1 : U_1 \rightarrow ]-1, 1[, (x, y) \mapsto y,$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y > 0\}, \quad \varphi_2 : U_2 \rightarrow ]-1, 1[, (x, y) \mapsto x,$$

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x < 0\}, \quad \psi_1 : V_1 \rightarrow ]-1, 1[, (x, y) \mapsto y,$$

$$V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y < 0\}, \quad \psi_2 : V_2 \rightarrow ]-1, 1[, (x, y) \mapsto x.$$

$\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), (V_1, \psi_1), (V_2, \psi_2)\}$  è un insieme di carte locali i cui domini ricoprono  $\mathbb{S}^1$ . Inoltre, nell'intersezione di due domini il cambiamento di coordinata è dato da applicazioni differenziabili, ad esempio su  $U_1 \cap U_2$  il cambiamento di coordinata  $y \mapsto x$  è dato da  $x = \sqrt{1 - y^2}$ . Più in generale, ogni curva differenziabile regolare di  $\mathbb{R}^3$  (o di  $\mathbb{R}^n$ ) è una varietà differenziabile di dimensione 1. Inoltre, si può dimostrare che ogni varietà (connessa) compatta di dimensione 1 è omeomorfa a  $\mathbb{S}^1$  (cfr. [28], p.25).

**Esempio 1.10. Varietà differenziabile prodotto**

Siano  $M_1$  ed  $M_2$  varietà differenziabili con  $\dim M_1 = n$  e  $\dim M_2 = m$ . Inoltre, siano  $\mathbb{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  e  $\mathbb{A}' = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$  atlanti differenziabili di  $M_1$  ed  $M_2$  rispettivamente.

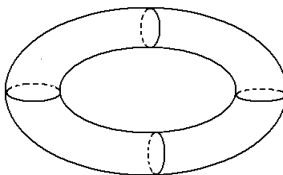


Figura 1.2:  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Consideriamo lo spazio topologico prodotto  $M_1 \times M_2$ .  $\{(U_i \times V_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$  è un ricoprimento aperto di  $M_1 \times M_2$ , le applicazioni

$$\phi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \rightarrow \phi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \subset \mathbb{R}^{n+m}, (p, q) \mapsto (\phi_i(p), \psi_j(q))$$

sono omeomorfismi e  $(\phi_i \times \psi_j) \circ (\phi_h \times \psi_k)^{-1} = (\phi_i \circ \phi_h^{-1}) \times (\psi_j \circ \psi_k^{-1})$ . Pertanto,  $M_1 \times M_2$  è una varietà differenziabile  $(n + m)$ -dimensionale, che viene detta *varietà prodotto*.

In modo analogo, si può definire la varietà prodotto  $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$  di  $k$  varietà differenziabili. In particolare, il *toro  $n$ -dimensionale*  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$  ( $n$ -volte) è una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale.

### Esempio 1.11. La sfera $\mathbb{S}^n$

Allo stesso modo in cui si è costruito il secondo atlante su  $\mathbb{S}^1$ , si può costruire su  $\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$  un atlante differenziabile formato da  $2(n + 1)$  carte locali  $\{(U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$ , dove

$$U_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i > 0\}, V_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n : x_i < 0\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\rightarrow B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 < 1\}, \\ \varphi_i : (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), \\ \psi_i : V_i &\rightarrow B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 < 1\}, \\ \psi_i : (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Quindi,  $\mathbb{S}^n$  è una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale. Un altro atlante differenziabile su  $\mathbb{S}^n$  si può costruire nel modo seguente.

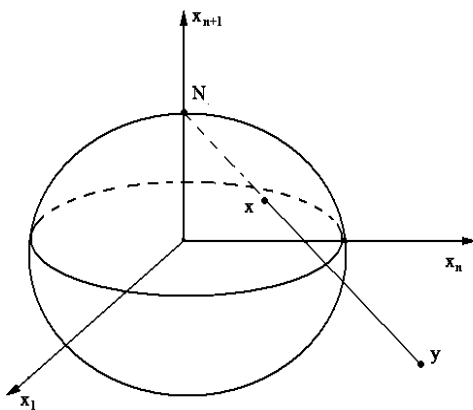


Figura 1.3: La proiezione stereografica dal polo nord.

Poniamo  $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  e  $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ , dove  $N$  è il polo nord  $(0, \dots, 0, 1)$  ed  $S$  è il polo sud  $(0, \dots, 0, -1)$ . Consideriamo la *proiezione stereografica*  $\varphi$  dal



polo nord, la quale ad ogni  $x \in U$  associa il punto di intersezione della retta  $[x, N]$  con l'iperpiano  $x_{n+1} = 0$ . Quindi,

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

è un omeomorfismo con inverso

$$\varphi^{-1} : y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \varphi^{-1}(y) = \left( \frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2}, -\frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \right).$$

Analogamente, possiamo definire la proiezione stereografica dal polo sud

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (z_1, \dots, z_n) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right),$$

con omeomorfismo inverso

$$\psi^{-1} : z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto \psi^{-1}(z) = \left( \frac{2z_1}{1 + \|z\|^2}, \dots, \frac{2z_n}{1 + \|z\|^2}, \frac{1 - \|z\|^2}{1 + \|z\|^2} \right).$$

Le applicazioni

$$\varphi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{z}{\|z\|^2} \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|^2}$$

sono diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (che rappresentano l'inversione rispetto alla sfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$  di  $\mathbb{R}^n$ ). Quindi  $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  è un atlante differenziabile su  $\mathbb{S}^n$  (equivalente al precedente). Si noti che, identificato  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , gli omeomorfismi  $\varphi : p = (x, y, u) \rightarrow z = \varphi(p) = \frac{x+iy}{1-u}$  e  $\bar{\psi} : p = (x, y, u) \rightarrow z' = \bar{\psi}(p) = \frac{x-iy}{1+u}$  definiscono su  $\mathbb{S}^2$  una struttura di varietà complessa 1-dimensionale (infatti:  $z \cdot z' = 1$  su  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ ).  $\mathbb{S}^2$  con tale struttura complessa è detta *sfera di Riemann*. L'applicazione  $\varphi^{-1}$ , facendo corrispondere per estensione il polo nord  $N$  al punto all'infinito  $\infty$  del piano complesso, permette di identificare  $\mathbb{S}^2$  con  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  piano complesso compattificato.

**Esercizio 1.12.** Si verifichi che i due atlanti definiti su  $\mathbb{S}^n$  sono equivalenti.

**Esempio 1.13. Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$**

In  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  definiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad y \varphi x \Leftrightarrow y = tx \text{ per qualche } t \neq 0.$$

Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , che indicheremo più brevemente con  $\mathbb{P}^n$ , è l'insieme quoziente  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \varphi$  munito della topologia quoziente, dove su  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  si considera la topologia indotta dalla topologia naturale di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n, x \mapsto \pi(x) = [x]$ , è la proiezione quoziente,

allora un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{P}^n$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n$  se e solo se  $\pi^{-1}(A)$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . I punti di  $\mathbb{P}^n$  si possono pensare come rette per l'origine, private della stessa origine, di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Di conseguenza, i coni aperti di rette per l'origine sono aperti nella topologia di  $\mathbb{P}^n$ . In particolare,  $\mathbb{P}^n$  è uno spazio topologico separato (di Hausdorff). Costruiamo su  $\mathbb{P}^n$  un atlante differenziabile nel modo seguente. Per ogni  $i = 1, \dots, n+1$ ,  $U_i = \{p = [x] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$  è un aperto di  $\mathbb{P}^n$ . La corrispondenza

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$p = [(x_1, \dots, x_{n+1})] \mapsto (y_1, \dots, y_n) = \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right),$$

è un omeomorfismo con inverso

$$\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i, (y_1, \dots, y_n) \mapsto [(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n)].$$

D'altronde gli  $U_i$  ricoprono  $\mathbb{P}^n$ , quindi  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  è un atlante di  $\mathbb{P}^n$ . Infine, se  $U_i, U_j$  sono due domini a intersezione non vuota, allora  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  è del tipo (assumendo  $j < i$ ):

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n) = \left( \frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)$$

e quindi è un'applicazione differenziabile. Pertanto,  $\mathbb{P}^n$  è una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale.

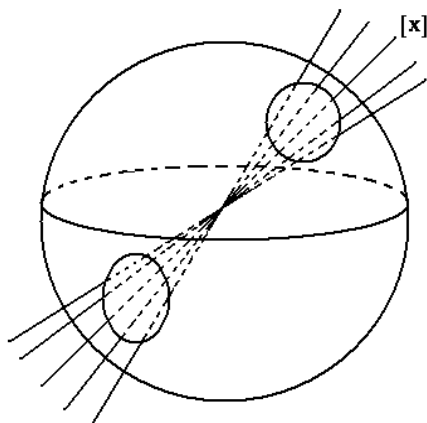


Figura 1.4: Il piano proiettivo.

**Esercizio 1.14.** Verificare che lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n$  è omeomorfo allo spazio topologico quoziente  $\mathbb{S}^n / \{\pm I_d\}$ . In particolare,  $\mathbb{P}^n$  è compatto e connesso per archi.

**Teorema 1.15.** Sia  $F : \mathbb{R}^{n+h} \rightarrow \mathbb{R}^h, x \mapsto (F_1(x), \dots, F_h(x))$ , una funzione differenziabile. Poniamo  $M = F^{-1}(c)$ , con  $c = (c_1, \dots, c_h)$  elemento di  $\mathbb{R}^h$ . Se per ogni  $p \in M$  la matrice jacobiana

$$J(F)_p = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) (p) = ((\nabla F_i)_p) \in \mathbb{R}^{h, n+h}$$

ha rango costante  $h$ , allora  $M$ , detta  $n$ -superficie regolare, ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $n$ .

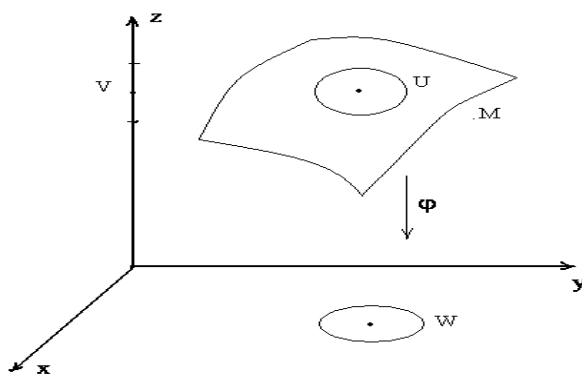
*Dimostrazione.* Sia  $p_0$  un fissato punto di  $M$ . Siccome la matrice jacobiana  $J(F)_{p_0}$  ha rango  $h$ , cambiando eventualmente ordine alle coordinate, possiamo assumere che

$$\det J_h(F)_{p_0} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_h} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_h} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_h}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_h}{\partial x_h} \end{pmatrix}_{p_0} \neq 0.$$

Poniamo  $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^h$ . Applicando il Teorema del Dini per funzioni a valori vettoriali, esiste un intorno aperto  $W$  di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^n$  e un intorno aperto  $V$  di  $y_0$  in  $\mathbb{R}^h$  ed un'unica funzione differenziabile  $G : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^h$ , tali che

$$y_0 = G(x_0) \quad \text{e} \quad F(x, G(x)) = c \quad \forall x \in W.$$

$\tilde{U} = W \times V$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n+h}$  intorno di  $p_0$ . L'insieme  $U = \tilde{U} \cap M$  è un intorno aperto di  $p_0$  in  $M$  rispetto alla topologia indotta. Inoltre, la proiezione ortogonale sul sottospazio  $\mathbb{R}^n$  ristretta ad  $U$  definisce un omeomorfismo



$$\varphi : U \rightarrow W, (x_1, \dots, x_{n+h}) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n), \text{ con inverso}$$

$$\varphi^{-1} : W \rightarrow U, (y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+h}) = (y_1, \dots, y_n, G(y_1, \dots, y_n)).$$

In questo modo si ottiene una famiglia di carte locali  $(U, \varphi)$ , i cui domini ricoprono  $M$ . Se  $(U, \varphi)$  e  $(U', \varphi')$  sono due carte locali di questo tipo i cui domini hanno intersezione non vuota, il cambiamento di coordinate  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  è differenziabile in quanto le sue funzioni componenti sono date da funzioni banali oppure da funzioni componenti di  $G$ .  $\square$

Con riferimento alla dimostrazione del Teorema 1.15, notiamo che se sull'aperto  $\tilde{U}$  di  $\mathbb{R}^{n+h}$ , intorno di  $p_0$ , consideriamo le coordinate  $(z_1, \dots, z_{n+h})$  definite da

$$z_i = x_i \text{ per } i = 1, \dots, n \text{ e } z_i = x_i - G_i(x_1, \dots, x_n) \text{ per } i = n+1, \dots, n+h,$$

allora la carta  $(U, \varphi, (y_i))$  di  $M$  risulta definita da

$$U = \left\{ p \in \tilde{U} : z_i(p) = 0 \forall i = n+1, \dots, n+h \right\} \quad \text{e} \quad y_i = z_i|_U.$$

Per  $h = 1$ ,  $M = F^{-1}(c)$  è un'ipersuperficie regolare di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Per  $h > 1$ ,  $M = F^{-1}(c)$  è l'intersezione di  $h$  ipersuperfici regolari  $M_1 = F_1^{-1}(c_1), \dots, M_h = F_h^{-1}(c_h)$  indipendenti (nel senso che i vettori  $(\nabla F_1)_p, \dots, (\nabla F_h)_p$  sono linearmente indipendenti per ogni  $p \in M$ ).

**Esercizio 1.16.** Si verifichi che, per ogni funzione differenziabile  $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , il grafico di  $f$ , ossia  $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ , è un'ipersuperficie regolare di  $\mathbb{R}^n$ .

### Esempio 1.17. Superfici connesse compatte

Le superfici connesse compatte  $M_p = \mathbb{S}^2 \sharp p \mathbb{T}^2$ ,  $p \geq 0$ , e  $M_q = \mathbb{S}^2 \sharp q \mathbb{P}^2$ ,  $q \geq 1$ , sono varietà differenziabili di dimensione 2. Infatti, la sfera  $\mathbb{S}^2$ , la superficie torica  $\mathbb{T}^2$  e il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  sono varietà differenziabili e la somma connessa  $\sharp$  di varietà differenziabili è ancora una varietà differenziabile (Boothby [14], pag. 258). Si noti che  $M_p$  è una superficie orientabile di genere  $p$  e  $M_q$  è una superficie non orientabile di genere  $q$ .

## 1.2 Applicazioni differenziabili

In questa sezione, la nozione di applicazione differenziabile definita su un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e a valori in  $\mathbb{R}^m$  (in particolare per  $m = 1$ ) viene estesa al caso delle varietà differenziabili.

**Definizione 1.18.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Diremo che un'applicazione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in un punto  $p_0 \in M$  se esiste una carta locale  $(U, \phi)$ , con  $p_0 \in U$ , tale che

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sia differenziabile.}$$

Diremo che  $f$  è differenziabile su un aperto  $A$  di  $M$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in A$ . La definizione data non dipende dalla particolare carta considerata. Infatti, se  $(V, \psi)$  è un'altra carta locale con  $p_o \in U \cap V$ , si ha

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \psi^{-1}.$$

Se  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sono le coordinate locali definite dalla carta  $(U, \phi)$ , si pone

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) \quad \forall p \in U.$$

Se  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  sono le coordinate locali definite nel dominio di un'altra carta  $(V, \psi)$ , con  $U \cap V \neq \emptyset$ , risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\phi(p)) \quad \forall p \in U \cap V.$$

Indichiamo con  $\mathcal{F}(A)$  l'insieme di tutte le funzioni reali differenziabili definite su  $A$  aperto di  $M$ . Rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto per un numero reale,  $\mathcal{F}(A)$  ha una struttura di spazio vettoriale reale. Inoltre, considerando anche il prodotto interno  $\cdot : \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$ ,  $(f_1, f_2) \mapsto f_1 \cdot f_2$ ,  $\mathcal{F}(A)$  ha una struttura di algebra reale commutativa unitaria. Analogamente per  $\mathcal{F}(p)$ , l'algebra delle funzioni reali differenziabili definite in un intorno del punto  $p$ .

**Definizione 1.19.** Siano  $M$  e  $M'$  due varietà differenziabili ed  $F : M \rightarrow M'$  una applicazione da  $M$  in  $M'$ . Assumiamo  $\dim M = n$  e  $\dim M' = m$ . Diremo che  $F$  è differenziabile in un punto  $p_o \in M$  se esistono una carta locale  $(U, \phi)$  di  $M$  con  $p_o \in U$ , una carta locale  $(V, \psi)$  di  $M'$  con  $F(U) \subset V$ , tali che

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(F(U)) \subset \psi(V) \subset \mathbb{R}^m \quad \text{sia differenziabile.}$$

Diremo che  $F$  è differenziabile su un aperto  $A$  di  $M$  se è differenziabile in  $p$  per ogni  $p \in A$ . La definizione data non dipende dalle particolari carte locali scelte. In termini di coordinate locali, se  $\phi(p) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\psi(F(p)) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , la differenziabilità di  $F$  è data dalla differenziabilità delle  $m$  funzioni reali  $y_j = y_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definite sull'aperto  $\phi(U)$  di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $F : M \rightarrow M'$  è un omeomorfismo con  $F$  e  $F^{-1}$  applicazioni differenziabili,  $F$  viene detto *diffeomorfismo* ed  $M, M'$  si dicono *diffeomorfe*. L'applicazione  $F : M \rightarrow M'$  è un *diffeomorfismo locale* se per ogni  $p \in M$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $p$  e un intorno aperto  $U'$  di  $F(p)$  tali che  $F|_U : U \rightarrow U'$  è un diffeomorfismo. Se  $F : M \rightarrow M'$  è bigettiva, allora  $F$  è un diffeomorfismo se e solo se è un diffeomorfismo locale.

### Varietà differenziabile quoziente

Esponiamo ora un metodo che permette di costruire varietà differenziabili mediante l'azione di gruppi di diffeomorfismi. Consideriamo una varietà

differenziabile  $\tilde{M}$  e un gruppo  $G$  di diffeomorfismi di  $\tilde{M}$  che opera in modo propriamente discontinuo, cioè, per ogni  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ , esiste un intorno aperto  $\tilde{U}$  di  $\tilde{x}$  tale che :

$$g\tilde{U} \cap \tilde{U} = \emptyset, \quad \forall g \in G, g \neq I_d. \quad (*)$$

Denotiamo con  $M$  lo spazio topologico quoziente  $\tilde{M}/G$ . Proviamo che  $\tilde{M}$  induce su  $M$  una struttura differenziabile. Dalla teoria degli spazi di rivestimento, è noto che la proiezione quoziente  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M = \tilde{M}/G, \tilde{x} \mapsto \pi(\tilde{x}) = G\tilde{x}$  (orbita di  $\tilde{x}$ ), è un'applicazione di rivestimento. Dato  $x \in M$ , consideriamo  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ , con  $\pi(\tilde{x}) = x$ , e una carta locale  $(\tilde{U}, \tilde{\phi}), \tilde{x} \in \tilde{U}$ , di  $\tilde{M}$  con  $\tilde{U}$  che verifica la proprietà (\*). Allora, l'applicazione  $\pi_1 = \pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U = \pi(\tilde{U})$  è un omeomorfismo e quindi  $\phi = \tilde{\phi} \circ \pi_1^{-1} : U \rightarrow \tilde{\phi}(\tilde{U})$  è un omeomorfismo. In questo modo si costruisce un atlante  $\mathbb{A}$  di carte locali per  $M$ . Resta da vedere che tale atlante è differenziabile. Consideriamo due carte locali  $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$  di  $\mathbb{A}$  con  $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Siano  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$  gli aperti di  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{U}_2$  rispettivamente con  $\pi_1(\tilde{V}_1) = U = \pi_2(\tilde{V}_2)$ . Allora,

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1} = \tilde{\phi}_1 \circ \pi_1^{-1} \circ \pi_2 \circ \tilde{\phi}_2^{-1} : \phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2),$$

dove  $\phi_2(U_1 \cap U_2) = \tilde{\phi}_2(\tilde{V}_2)$  e  $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \tilde{\phi}_1(\tilde{V}_1)$ . Inoltre, l'applicazione

$$\pi_1^{-1} \circ \pi_2 : \tilde{x} \mapsto \pi(\tilde{x}) = G\tilde{x} \mapsto \tilde{y} = g\tilde{x},$$

dove  $g \in G$  è differenziabile. Pertanto,  $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$  è differenziabile in quanto composizione di applicazioni differenziabili. Infine, dalla costruzione di  $\mathbb{A}$  segue che  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  è un'applicazione (di rivestimento) differenziabile e in particolare un diffeomorfismo locale. Ritroviamo che lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \{\pm I_d\}$  e il toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  sono varietà differenziabili.

**Osservazione 1.20.** Ricordiamo che due strutture differenziabili sulla stessa varietà  $M$ , definite dagli atlanti  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{A}'$ , sono equivalenti se  $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$  è ancora un atlante differenziabile, in altre parole se l'applicazione identità  $I_d : (M, \mathbb{A}) \rightarrow (M, \mathbb{A}')$  è un diffeomorfismo. Quindi, strutture differenziabili equivalenti sono sicuramente diffeomorfe. Non vale però il viceversa, come risulta dall'esempio seguente. Consideriamo su  $\mathbb{R}$  le strutture differenziabili definite dagli atlanti

$$\mathbb{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \phi = I_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})\} \text{ e } \mathbb{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^{\frac{1}{3}})\}.$$

Indichiamo con  $\mathbb{R}_1$  e  $\mathbb{R}_2$  le corrispondenti varietà differenziabili ottenute. Le due strutture differenziabili definite su  $\mathbb{R}$  non sono equivalenti, in quanto l'applicazione

$$\psi \circ I_d \circ \phi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^{\frac{1}{3}},$$

non è differenziabile per  $t = 0$ . Tuttavia, le due strutture differenziabili sono diffeomorfe perché l'applicazione

$$F : \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2, t \mapsto t^3,$$

è un omeomorfismo con  $F$  e  $F^{-1}$  differenziabili.

**Osservazione 1.21.** (Conlon [28], p. 93-94)

a) Siano  $M_1$  e  $M_2$  due varietà differenziabili di dimensione  $n$ . Se  $M_1$  e  $M_2$  sono omeomorfe ed  $n \leq 3$ , allora  $M_1$  e  $M_2$  sono diffeomorfe.

b) Per  $n \neq 4$ , due strutture differenziabili su  $\mathbb{R}^n$  sono sempre diffeomorfe.

c)  $\mathbb{S}^n$ , per  $n \leq 6, n \neq 4$ , ammette (a meno di diffeomorfismi) un'unica struttura differenziabile.

**Osservazione 1.22.** La sfera  $\mathbb{S}^7$  ha esattamente 28 strutture differenziabili non equivalenti (cfr. J. Milnor [68]).

**Esercizio 1.23.** Verificare che le applicazioni

$$f_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, z, 0), \quad f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n, x \mapsto x/\|x\|,$$

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n, x \mapsto \pi(x) = [x], \quad \text{e l'inclusione } i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

sono differenziabili.

**Esercizio 1.24.** Si verifichi (con un calcolo diretto) che le applicazioni di rivestimento

$$p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi it}, \quad \text{e} \quad p_2 : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, x \mapsto p(x) = [x],$$

sono diffeomorfismi locali.

**Esercizio 1.25.** Si verifichi che ogni trasformazione proiettiva di  $\mathbb{P}^n$  è un diffeomorfismo. Si noti che una trasformazione proiettiva è definita da una trasformazione lineare omogenea invertibile di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

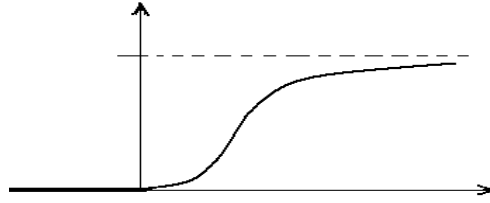
**Esercizio 1.26.** Sia  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione differenziabile. Assumiamo che  $M = F^{-1}(c)$  sia una  $n$ -superficie di  $\mathbb{R}^{n+m}$  (cfr. Teorema 1.15). Si verifichi che l'inclusione  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  è differenziabile.

## 1.3 Costruzione di applicazioni differenziabili

Scopo principale di questa sezione è costruire una partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento localmente finito di intorni coordinati di una varietà differenziabile  $M$ . La partizione dell'unità è uno strumento essenziale per incollare oggetti definiti solo localmente in modo da ottenere un singolo oggetto globalmente ben definito su tutta la varietà. Ad esempio, è utile per dimostrare l'esistenza di una metrica riemanniana su  $M$  e per estendere la teoria dell'integrazione su  $M$ .

**Lemma 1.27.** Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \beta$ , esiste una funzione differenziabile non negativa  $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\mu(x) = 1$  se  $\|x\| \leq \alpha$ ;  $0 < \mu(x) < 1$  se  $\alpha < \|x\| < \beta$ ;  $\mu(x) = 0$  se  $\|x\| \geq \beta$ .

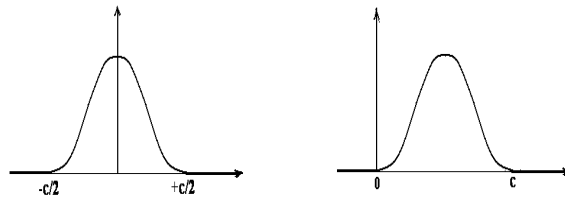
*Dimostrazione.* Dati  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \beta$ , poniamo  $a = \alpha^2, b = \beta^2$  e  $c = b - a > 0$ . Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione differenziabile definita da  $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$  e il cui grafico è dato dalla Figura 1.5.

Figura 1.5: Il grafico della funzione  $g$ .

La funzione  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin ]-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}[ \\ e^{\frac{-1}{(x-\frac{c}{2})^2}} e^{\frac{-1}{(x+\frac{c}{2})^2}} & \text{se } x \in ]-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}[ \end{cases}$$

è differenziabile in quanto prodotto di funzioni del tipo  $g$ . Quindi anche la funzione  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $k(x) = h(x - \frac{c}{2})$ , non negativa e nulla all'esterno dell'intervallo  $]0, c[$ , è differenziabile. I grafici delle funzioni  $h$  e  $k$  sono riportati nella Figura 1.6.

Figura 1.6: I grafici delle funzioni  $h$  e  $k$ .

Di conseguenza, la funzione  $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\ell(x) = \frac{\int_0^x k(t) dt}{\int_0^c k(t) dt},$$

è differenziabile, non negativa, crescente in  $]0, c[$  e verifica :

$$\ell(x) = 0 \text{ se } x \leq 0, \quad 0 < \ell(x) < 1 \text{ se } 0 < x < c, \quad \ell(x) = 1 \text{ se } x \geq c.$$

La funzione  $\lambda(x) = \ell(x - a)$  è differenziabile e verifica

$$\lambda(x) = 0 \text{ se } x \leq a, \quad 0 < \lambda(x) < 1 \text{ se } a < x < b, \quad \lambda(x) = 1 \text{ se } x \geq b.$$

Infine, la funzione  $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\mu(x) = 1 - \lambda(\|x\|^2)$  è differenziabile e verifica le proprietà del lemma.  $\square$



**Proposizione 1.28.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Per ogni aperto  $A$  di  $M$  e per ogni punto  $p_0 \in A$ , esistono  $V, V', U$  intorno aperti coordinati di  $p_0$  con  $\bar{V}, \bar{V}'$  compatti,  $\bar{V} \subset V' \subset U \subset A$ , ed esiste  $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$  funzione differenziabile, tali che*

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi|_{\bar{V}} = 1, \quad \xi|_{M \setminus V'} = 0, \quad \xi|_{V'} > 0.$$

e

$$\text{supp}\xi := \overline{\{p \in M : \xi(p) \neq 0\}} = \bar{V}'.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo una carta locale  $(U, \phi)$  con  $p_0 \in U \subset A$  e  $\phi(p_0) = (0, \dots, 0)$ . Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha < \beta$ , tale che  $\bar{B}(0, \beta) \subset \phi(U)$ , dove  $\bar{B}(0, \beta)$  denota la palla chiusa di centro l'origine e raggio  $\beta$  di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile non negativa come costruita nel Lemma 1.27 relativamente ai numeri  $\alpha$  e  $\beta$ . Poniamo  $V = \phi^{-1}(B(0, \alpha))$  e  $V' = \phi^{-1}(B(0, \beta))$ , allora  $\bar{V} \subset V' \subset U \subset A$ . La funzione  $\bar{\mu} = \mu \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile e verifica:  $0 \leq \bar{\mu} \leq 1$ ,  $\bar{\mu} = 1$  su  $\bar{V}$ ,  $0 < \bar{\mu} < 1$  su  $V' \setminus \bar{V}$ ,  $\bar{\mu} = 0$  su  $U \setminus V'$ ,  $\text{supp}\bar{\mu} = \bar{V}'$ . Siccome  $\bar{\mu}|_{U \setminus V'} = 0$ , definendo

$$\xi : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \xi(p) = \begin{cases} \bar{\mu}(p) & \text{se } p \in U, \\ 0 & \text{se } p \notin U, \end{cases}$$

si ottiene una funzione differenziabile su  $M$  che verifica le proprietà richieste.  $\square$

**Proposizione 1.29.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile. Per ogni aperto  $A$  di  $M$  e per ogni compatto  $K \subset A$ , esistono  $V, V'$  aperti di  $M$ ,  $K \subset V \subset V' \subset A$  e  $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$  applicazione differenziabile tali che*

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi|_{\bar{V}} = 1, \quad \xi|_{V'} > 0, \quad \xi|_{M \setminus V'} = 0.$$

*Dimostrazione.* Per  $x \in K$ , indichiamo con  $V_x, V'_x$  intorno aperti di  $x$ ,  $\bar{V}_x \subset V'_x \subset A$  come nella Proposizione 1.28. Sia  $\xi_x$  la corrispondente funzione differenziabile non negativa tale che  $\xi_x|_{V'_x} > 0$ ,  $\xi_x|_{\bar{V}_x} = 1$ ,  $\xi_x|_{M \setminus V'_x} = 0$  e  $\text{supp}\xi_x = \bar{V}'_x$ . Siccome  $K$  è un compatto, lo si può ricoprire con un numero finito di aperti  $V_{x_1}, \dots, V_{x_r}$ . La funzione  $g = (\xi_{x_1} + \dots + \xi_{x_r})$  è differenziabile, è positiva sull'aperto  $V' = V'_{x_1} \cup \dots \cup V'_{x_r} \supset \bar{V} = \bar{V}_{x_1} \cup \dots \cup \bar{V}_{x_r} \supset K$  e  $g|_{M \setminus V'} = 0$ . Siccome  $\bar{V}$  è compatto, poniamo  $c = \min g|_{\bar{V}} > 0$ . Ora, sia  $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione differenziabile costruita nel Lemma 1.27 e che soddisfa  $\ell(t) = 0$  se  $t \leq c$ ,  $\ell(t) = 1$  se  $t \geq c$  e  $0 < \ell(t) < 1$  se  $0 < t < c$ . Allora, la funzione  $\xi = \ell \circ g$  è differenziabile e soddisfa  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\xi|_{\bar{V}} = 1$ ,  $\xi|_{V'} > 0$ ,  $\xi|_{M \setminus V'} = 0$ .  $\square$

**Proposizione 1.30.** *Siano  $M$  una varietà differenziabile,  $A$  un aperto di  $M$  ed  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile. Per ogni compatto  $K \subset A$ , esiste  $V$  aperto di  $M$ ,  $K \subset V \subset A$ , ed esiste un'applicazione differenziabile  $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\bar{f}|_V = f|_V$ .*

*Dimostrazione.* Applicando la Proposizione 1.29, esistono  $V, V'$  aperti,  $K \subset \bar{V} \subset V' \subset A$ , ed esiste  $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$  funzione differenziabile tali che  $\xi|_{\bar{V}} = 1$  e  $\xi|_{M \setminus V'} = 0$ . Siccome  $(\xi \cdot f)|_{A \setminus V'} = 0$ , definendo

$$\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \bar{f}(p) = \begin{cases} (\xi \cdot f)(p) & \text{se } p \in A, \\ 0 & \text{se } p \notin A, \end{cases}$$

si ottiene una funzione differenziabile su  $M$ . Inoltre,  $\bar{f}(p) = f(p)$  per ogni  $p \in V$ .  $\square$

Ricordiamo le seguenti definizioni di natura topologica. Un ricoprimento  $(U_i)_{i \in I}$  di uno spazio topologico  $M$  si dice *localmente finito* se per ogni punto  $p \in M$  esiste un intorno aperto di  $p$  che ha intersezione non vuota solo con un numero finito di elementi del ricoprimento  $(U_i)_{i \in I}$ ; in particolare ogni punto  $p$  di  $M$  appartiene solo a un numero finito di aperti  $U_i$ . Siano  $(U_i)_{i \in I}$  e  $(V_j)_{j \in J}$  due ricoprimenti di uno spazio topologico  $M$ ;  $(V_j)_{j \in J}$  si dice che è un raffinamento di  $(U_i)_{i \in I}$  se per ogni  $j$  esiste  $i$  tale che  $V_j \subset U_i$ . Uno spazio topologico  $M$  si dice *paracompatto* se è separato (di Hausdorff) e ogni ricoprimento aperto  $(U_i)_{i \in I}$  di  $M$  ammette un raffinamento aperto localmente finito  $(V_j)_{j \in J}$ . Ogni spazio compatto di Hausdorff è paracompatto. Si noti che per una varietà differenziabile  $M$  (quindi connessa e di Hausdorff) le seguenti proprietà sono equivalenti ([56] vol.I, p.271; [22] p.171): (1)  $M$  è paracompatta; (2)  $M$  soddisfa il secondo assioma di numerabilità, cioè  $M$  ammette una base numerabile di aperti; (3)  $M$  è metrizzabile; (4)  $M$  ammette una metrica riemanniana.

**Definizione 1.31.** ([56] vol.I, p.272) Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *partizione dell'unità* di  $M$  subordinata a un ricoprimento aperto localmente finito  $(U_i)_{i \in I}$  della stessa varietà  $M$ , è una famiglia  $\{g_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$  di funzioni differenziabili tale che:

- (1)  $g_i \geq 0$ ;
- (2)  $\text{supp} g_i := \overline{\{p \in M : g_i(p) \neq 0\}} \subset U_i$ ;
- (3)  $\sum_{i \in I} g_i = 1$ .

**Teorema 1.32.** *Ogni varietà differenziabile paracompatta  $M$  ammette una partizione dell'unità  $\{g_i\}$  subordinata a un ricoprimento aperto localmente finito di intorni coordinati di  $M$  con  $\text{supp} g_i$  compatto. In particolare, ogni ricoprimento aperto localmente finito  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  ammette una partizione dell'unità ad esso subordinata.*

*Dimostrazione.* Sia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  un ricoprimento aperto localmente finito (tale ricoprimento esiste in quanto  $M$  è paracompatta). Fissati  $\alpha \in \Lambda$  e  $p \in A_\alpha$ , applicando la Proposizione 1.28, esistono  $V'_{p,\alpha}, U_{p,\alpha}$  intorni (coordinati) aperti di  $p$  con  $\bar{V}'_{p,\alpha}$  compatto contenuto in  $U_{p,\alpha} \subset A_\alpha$ , ed esiste  $\xi_{p,\alpha} : M \rightarrow \mathbb{R}$  applicazione differenziabile tale che  $\xi_{p,\alpha} \geq 0$ ,  $\xi_{p,\alpha}|_{V'_{p,\alpha}} > 0$ ,  $\text{supp} \xi_{p,\alpha} = \bar{V}'_{p,\alpha} \subset$

$U_{p,\alpha} \subset A_\alpha$  e  $\xi_{p,\alpha}|_{M \setminus V'_{p,\alpha}} = 0$ .  $\{V'_{p,\alpha}\}_{p \in U_\alpha, \alpha \in \Lambda}$  è ancora un ricoprimento aperto di  $M$ . Poiché  $M$  è paracompatta, esiste un ricoprimento aperto localmente finito  $\{V_i\}$  con, fissato  $i$ ,  $V_i \subset V'_{p,\alpha_i}$  per qualche  $\alpha_i \in \Lambda$  e per qualche  $p \in M$ . Quindi  $V_i \subset V'_{p,\alpha_i} \subset U_{p,\alpha_i} \subset A_{\alpha_i}$ . Si noti che  $i \neq j$  non implica  $\alpha_i \neq \alpha_j$ . Poniamo  $V'_i = V'_{p,\alpha_i}$  e  $U_i = U_{p,\alpha_i}$ .  $\{U_i\}$  e  $\{A_{\alpha_i}\}$  sono ricoprimenti in quanto  $V_i \subset U_i \subset A_{\alpha_i}$ , inoltre sono localmente finiti in quanto sottoricoprimenti di  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  che è localmente finito. Indichiamo con  $\xi_i$  la funzione definita sopra e corrispondente all'aperto  $V'_i$  (che contiene  $V_i$  ed è contenuto in  $U_i \subset A_{\alpha_i}$ ). In particolare le funzioni  $\xi_i$  sono non negative,  $\xi_i|_{V_i} > 0$  e  $\text{supp } \xi_i = \text{compatto} \subset U_i$ . La funzione  $\sum_i \xi_i$  è ben definita in quanto  $\text{supp } \xi_i \subset U_i$  e  $\{U_i\}$  è localmente finito. Inoltre,  $\sum_i \xi_i(p) > 0$  per ogni  $p \in M$  in quanto  $\{V_i\}$  è un ricoprimento e  $\xi_i|_{V_i} > 0$ . Posto  $g_i = \frac{\xi_i}{\sum_i \xi_i}$ , si ha che  $\{g_i\}$  è una famiglia di funzioni differenziabili non negative,  $\sum_i g_i = 1$ ,  $\text{supp } g_i = \text{compatto} \subset U_i$  e con  $\{U_i\}$  ricoprimento aperto localmente finito di interni coordinati. In particolare, esiste una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ .  $\square$



# Capitolo 2

## Nozioni di base sulle varietà differenziabili

### 2.1 Spazio tangente e campi di vettori

Ricordiamo brevemente la nozione di spazio tangente in un punto  $p$  di  $\mathbb{R}^n$ . Un vettore tangente in  $p$  a  $\mathbb{R}^n$  è definito da  $v_p = (p, v)$  con  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $p$  è la parte puntuale e  $v$  è la parte vettoriale del vettore tangente  $v_p$ . Lo spazio tangente

$$T_p\mathbb{R}^n = \{v_p = (p, v) : v \in \mathbb{R}^n\} = \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale. Un vettore tangente  $v_p$  lo possiamo presentare come un operatore differenziale del primo ordine nullo sulle costanti. Tale presentazione si presta, come vedremo, ad essere generalizzata al caso delle varietà differenziabili. Sia  $\mathcal{F}(p)$  l'algebra delle applicazioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabili in un intorno di  $p$ . Per ogni  $f \in \mathcal{F}(p)$  e per ogni  $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ , la *derivata direzionale* di  $f$  in  $p$  e nella direzione di  $v$  è definita da:

$$v_p(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \dots = g_0((\nabla f)_p, v),$$

dove  $\nabla f$  denota il gradiente di  $f$  e  $g_0$  è il prodotto scalare euclideo. La derivata direzionale verifica le seguenti proprietà:

- (i)  $v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$ ,
- (j)  $v_p(f \cdot g) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f)$ ,

per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(p)$  e per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ . Poniamo

$$\mathcal{D}(p) = \{V_p : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}, V_p \text{ verifica le proprietà (i) e (j)}\}.$$

Chiaramente  $\mathcal{D}(p)$  è uno spazio vettoriale reale e, per ogni  $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$ ,

$$v_p^* : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto v_p(f),$$

è un elemento di  $\mathcal{D}(p)$ . La corrispondenza

$$T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}(p), \quad v_p \mapsto v_p^*,$$

è un isomorfismo tra spazi vettoriali che permette di identificare  $T_p\mathbb{R}^n$  con  $\mathcal{D}(p)$ . In questa identificazione, i vettori della base canonica

$$e_{1_p} = (1, 0, \dots, 0)_p, \quad e_{2_p} = (0, 1, 0, \dots, 0)_p, \dots, \quad e_{n_p} = (0, \dots, 0, 1)_p$$

di  $T_p\mathbb{R}^n$  si identificano con le derivate direzionali

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \quad \dots, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p.$$

Di conseguenza, ogni vettore  $v_p \in T_p\mathbb{R}^n$  si può esprimere con la scrittura

$$v_p = \sum_{i=1}^n v^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Inoltre,  $T_p\mathbb{R}^n$  si può identificare con  $\mathbb{R}^n$  mediante l'isomorfismo

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \Phi(v) = v_p.$$

Sia ora  $M$  una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale. Ricordiamo che  $\mathcal{F}(M)$  è l'algebra delle funzioni reali differenziabili su  $M$  e, per  $p \in M$ ,  $\mathcal{F}(p)$  è l'algebra delle funzioni reali differenziabili in un intorno di  $p$ .

**Definizione 2.1.** Un vettore tangente in  $p$  alla varietà  $M$  è un'applicazione  $X_p : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}$  che verifica, per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$  e per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(p)$ , le seguenti proprietà :

- (i)  $X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$ ,
- (j)  $X_p(f \cdot g) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$ .

Il vettore  $X_p$  si dice anche derivazione di  $\mathcal{F}(p)$ . L'insieme  $T_pM$  di tutti i vettori tangenti in  $p$  ad  $M$  si dice *spazio tangente* in  $p$  ad  $M$ .  $T_pM$  ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale rispetto alle seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} (X_p + Y_p)(f) &= X_p(f) + Y_p(f), \\ (aX_p)(f) &= aX_p(f), \end{aligned}$$

per ogni  $X_p, Y_p \in T_pM$ , per ogni  $a \in \mathbb{R}$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}(p)$ .

**Proposizione 2.2.** Se  $c \in \mathcal{F}(p)$  è una funzione costante, allora per ogni  $X_p \in T_pM$  si ha  $X_p(c) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per esercizio. □

La seguente proposizione mette in evidenza il carattere locale della nozione di vettore tangente.

**Proposizione 2.3.** *Siano  $f, g \in \mathcal{F}(p)$  e  $U$  un intorno aperto di  $p$ . Se  $f|_U = g|_U$ , allora per ogni  $X_p \in T_p M$  si ha  $X_p(f) = X_p(g)$ .*

*Dimostrazione.* Basta verificare che, per ogni  $h \in \mathcal{F}(p)$  con  $h|_U = 0$ , si ha  $X_p(h) = 0$ . Sia  $\kappa \in \mathcal{F}(p)$  tale che  $\kappa(p) = 0$  e  $\kappa|_{M \setminus U} = 1$  ( $\kappa = 1 - \xi$ , dove  $\xi$  è la funzione della Proposizione 1.28). Allora  $h = h \cdot \kappa$  e quindi

$$X_p(h) = X_p(h \cdot \kappa) = \kappa(p)X_p(h) + h(p)X_p(\kappa) = 0.$$

□

### Vettori tangenti coordinati

Sia  $(U, \varphi, (x_i))$  una carta locale con  $U$  intorno di  $p$ . Le applicazioni

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (p) := \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p)),$$

sono vettori tangenti in  $p$  che vengono detti *vettori tangenti coordinati* in  $p$  rispetto alla carta  $(U, \varphi)$ .

**Lemma 2.4.** *Dato  $p_o \in M$ , siano  $(x_1, \dots, x_n)$  coordinate locali definite in  $U$  intorno di  $p_o$  con  $x_i(p_o) = 0$  per ogni  $i$ . Allora, per ogni  $f \in \mathcal{F}(p_o)$  esistono  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}(p_o)$  ed esiste  $V$  intorno di  $p_o$ ,  $V \subset U$ , tali che*

$$f_i(p_o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o) \quad \text{e} \quad f(p) = f(p_o) + \sum_{i=1}^n x_i(p) f_i(p) \quad \forall p \in V.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  l'applicazione coordinata che definisce le coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$ . Poniamo  $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ . Poiché  $\varphi(p_o) = 0$ , esiste  $r > 0$  tale che  $B(0, r) \subset \varphi(U)$ . Per ogni  $(x_1, \dots, x_n) \in B(0, r)$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) - \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \\ &\quad - \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-2}, 0, 0) + \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-2}, 0, 0) + \dots \\ &\quad - \tilde{f}(x_1, 0, \dots, 0) + \tilde{f}(x_1, 0, \dots, 0) \\ &\quad - \tilde{f}(0, 0, \dots, 0) + \tilde{f}(0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

La relazione precedente si può anche scrivere nella forma seguente:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) &= \tilde{f}(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \left[ \tilde{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, tx_i, 0, \dots, 0) \right]_0^1 \\
&= \tilde{f}(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{f}(x_1, \dots, x_{i-1}, tx_i, 0, \dots, 0) dt \\
&= \tilde{f}(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, tx_i, 0, \dots, 0) dt \\
&= \tilde{f}(0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i \tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, tx_i, 0, \dots, 0) dt.$$

Le  $\tilde{f}_i : B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  sono differenziabili e quindi le  $f_i = \tilde{f}_i \circ \varphi|_V$  sono elementi di  $\mathcal{F}(p_o)$ , dove  $V = \varphi^{-1}(B(0, r))$ . Inoltre,

$$f_i(p_o) = \tilde{f}_i(0, \dots, 0) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0, \dots, 0) dt = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o),$$

e per ogni  $p \in V$ :

$$\begin{aligned}
f(p) &= \tilde{f}(\varphi(p)) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{i=1}^n x_i(p) \tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n) \\
&= \tilde{f}(\varphi(p_o)) + \sum_{i=1}^n x_i(p) \tilde{f}_i(\varphi(p)) = f(p_o) + \sum_{i=1}^n x_i(p) f_i(p).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.5.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale. Se  $p_o \in M$  e  $(U, (x_i))$  è carta locale con  $p_o \in U$ , allora i vettori tangenti coordinati  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{p_o}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) costituiscono una base per  $T_{p_o}M$ . Inoltre, per ogni  $X_{p_o} \in T_{p_o}M$  si ha:*

$$X_{p_o} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{p_o}, \quad \text{dove } \lambda^i = X_{p_o}(x_i).$$

In particolare,  $\dim T_{p_o}M = n = \dim M$ .



*Dimostrazione.* Per ogni  $p \in U$ , poniamo  $y_i(p) = x_i(p) - x_i(p_o)$ .  $(y_1, \dots, y_n)$  sono coordinate locali definite in  $U$  con  $y_i(p_o) = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Applicando il Lemma 2.4, relativamente alle coordinate  $(y_1, \dots, y_n)$ , per ogni  $f \in \mathcal{F}(p_o)$  esistono  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{F}(p_o)$ , con  $f_i(p_o) = \frac{\partial f}{\partial y_i}(p_o) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o)$ , tali che

$$f(p) = f(p_o) + \sum_{i=1}^n y_i(p) f_i(p) \quad \forall p \in V \text{ (intorno di } p_o), V \subset U.$$

Quindi, per ogni  $X_{p_o} \in T_{p_o}M$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}(p_o)$  si ha:

$$\begin{aligned} X_{p_o}(f) &= X_{p_o}(f(p_o)) + \sum_{i=1}^n X_{p_o}(y_i \cdot f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \{y_i(p_o) X_{p_o}(f_i) + f_i(p_o) X_{p_o}(y_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_o) X_{p_o}(x_i) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o} \right) (f), \end{aligned}$$

dove si è posto  $\lambda^i = X_{p_o}(x_i)$ . Resta da verificare che i vettori  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o}$  sono linearmente indipendenti:

$$\sum_{i=1}^n a^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o} = 0, \quad a^i \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n a^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o} (x_h) = 0, \quad \forall h \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n a^i \left( \frac{\partial x_h}{\partial x_i} \right)_{p_o} = 0, \quad \forall h \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n a^i \delta_i^h = 0 \quad \forall h \quad \Rightarrow \quad a^h = 0 \quad \forall h.$$

□

**Esercizio 2.6.** Siano  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  due sistemi di coordinate locali definiti in un intorno di un fissato punto  $p$ . Siano  $(\lambda^i)$  e  $(\eta^j)$  le componenti di un vettore tangente  $X_p$  rispetto alle basi  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$  e  $\left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p$  rispettivamente. Osservare che la matrice del cambiamento di base è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate. Quindi, determinare le formule che esprimono le  $\lambda^i$  in funzione delle  $\eta^j$  e viceversa.

### Campi di vettori

Sia  $A$  un aperto della varietà differenziabile  $n$ -dimensionale  $M$ . Poniamo  $TA = \dot{\cup}_{p \in A} T_p M$ .

**Definizione 2.7.** Un *campo di vettori* su  $A$  è una corrispondenza

$$X : A \rightarrow TA, \quad p \mapsto X(p) = X_p \in T_p M.$$

Se  $X, Y$  sono campi di vettori definiti su  $A$ ,  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si possono definire in modo naturale i campi di vettori  $X + Y$ ,  $hX$ ,  $\lambda X$ :

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p, \quad (hX)_p = h(p)X_p, \quad (\lambda X)_p = \lambda X_p.$$

Se  $X$  è un campo di vettori su  $A$  ed  $f \in \mathcal{F}(A)$ , possiamo definire la funzione  $X(f) : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto X(f)(p) := X_p(f)$ .

Diremo che un campo di vettori  $X$  (definito su  $A$ ) è differenziabile se

$$\forall f \in \mathcal{F}(A) : X(f) \in \mathcal{F}(A).$$

Denotiamo con  $\mathfrak{X}(A)$  l'insieme di tutti i campi di vettori differenziabili definiti su  $A$ .  $\mathfrak{X}(A)$  ha una struttura naturale di spazio vettoriale reale rispetto alle operazioni:

$$\begin{aligned} + : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) &\rightarrow \mathfrak{X}(A), & (X, Y) &\mapsto X + Y, \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{X}(A) &\rightarrow \mathfrak{X}(A), & (\lambda, X) &\mapsto \lambda X. \end{aligned}$$

Inoltre, il prodotto

$$\mathcal{F}(A) \times \mathfrak{X}(A) \rightarrow \mathfrak{X}(A), \quad (f, X) \mapsto fX,$$

soddisfa le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} f(\lambda X) &= (\lambda f)X = \lambda(fX), & f(X + Y) &= fX + fY, \\ (f + g)X &= fX + gX, & f(gX) &= (fg)X, & 1X &= X, \end{aligned}$$

per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(A)$  e per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ . Quindi,  $\mathfrak{X}(A)$  è un  $\mathcal{F}(A)$ -modulo. Anche per gli  $\mathcal{F}$ -moduli possiamo parlare di lineare indipendenza e di base, dove gli scalari sono gli elementi di  $\mathcal{F}$ .

Siano  $(x_1, \dots, x_n)$  coordinate locali definite in  $U$ ,  $U \subset A$ . I campi di vettori

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \rightarrow TU, \quad p \mapsto \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p,$$

sono chiaramente differenziabili e sono detti *campi di vettori coordinati*. Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(A)$  e per ogni  $p \in U$ , si ha:

$$\begin{aligned} X(p) &= X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x_i) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{i=1}^n X(x_i)(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \\ &= \left( \sum_{i=1}^n X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)(p). \end{aligned}$$

Quindi, per ogni  $X \in \mathfrak{X}(A)$  si ha

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{dove } \xi^i = X(x_i) \in \mathcal{F}(U). \quad (2.1)$$

I campi di vettori coordinati  $(\partial/\partial x_i)_i$  costituiscono una *base locale* per  $\mathfrak{X}(A)$ , tuttavia  $\mathfrak{X}(A)$  come spazio vettoriale reale non ha dimensione finita. Le  $\xi^i$  si dicono *funzioni componenti* di  $X$  rispetto alle coordinate  $(x_i)$ . La rappresentazione (2.1) vale anche per campi di vettori, in generale, non differenziabili con le  $\xi^i$  funzioni, in generale, non differenziabili. Siano  $(y_1, \dots, y_n)$  altre coordinate definite in  $U$ . Se  $X$  è un campo di vettori definito su  $A$ , localmente si ha

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad X = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y_j},$$

dove  $\xi^i, \eta^j$  sono funzioni definite su  $U$ . Inoltre, siccome

$$\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad e \quad \xi^j = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial x_j}{\partial y_i},$$

le  $\xi^i$  sono differenziabili  $\Leftrightarrow$  le  $\eta^i$  sono differenziabili.

Quindi, la proprietà che  $X$  abbia funzioni componenti differenziabili non dipende dal particolare sistema di coordinate scelto, e di conseguenza vale la seguente proposizione.

**Proposizione 2.8.** *Sia  $X$  un campo di vettori definito su  $A$ . Allora,  $X$  è differenziabile se e solo se le sue funzioni componenti, in un fissato sistema di coordinate, sono differenziabili.*

Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(A)$  si può presentare anche come una derivazione dell'algebra  $\mathcal{F}(A)$

**Proposizione 2.9.** *Sia  $A$  un aperto di  $M$ . Allora,  $X \in \mathfrak{X}(A)$  se e solo se  $X$  è una trasformazione  $\mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$  che soddisfa le seguenti proprietà:*

- (i)  $X(af + bg) = aX(f) + bX(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(A), \forall a, b \in \mathbb{R},$
- (ii)  $X(fg) = fX(g) + gX(f), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(A).$

*Dimostrazione.* Sia  $X \in \mathfrak{X}(A)$ . Allora, per ogni  $f \in \mathcal{F}(A) : X(f) \in \mathcal{F}(A)$ . Inoltre, per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(A)$ , le proprietà  $X(af + bg)(p) = X_p(af + bg)$  e  $X(f \cdot g)(p) = X_p(f \cdot g)$  implicano (i) e (ii). Viceversa, se  $X : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$  soddisfa (i) e (ii), la corrispondenza  $p \mapsto X_p$ , dove  $X_p(f) := X(f)(p)$ , definisce un campo di vettori differenziabile su  $A$ .  $\square$

**Definizione 2.10.** Sia  $\mathcal{L}$  uno spazio vettoriale reale.  $\mathcal{L}$  si dice *algebra di Lie* (reale) se è definito un prodotto  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ ,  $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ , detto *parentesi di Lie*, tale che

- (1)  $[\cdot, \cdot]$  è bilineare,
- (2)  $[\cdot, \cdot]$  è antisimmetrica :  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (3)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (identità di Jacobi).

$\mathbb{R}^3$  con l'usuale prodotto vettoriale e lo spazio vettoriale delle matrici quadrate  $\mathbb{R}^{n,n}$  con  $[A, B] := AB - BA$ , dove  $AB$  denota l'usuale prodotto tra matrici, sono esempi di algebre di Lie. Se  $\mathcal{L}$  è un'algebra di Lie abeliana, cioè  $[X, Y] = [Y, X]$ , allora la parentesi di Lie  $[\cdot, \cdot] = 0$ . Nello spazio vettoriale  $\mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $M$ , definiamo

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(A) \times \mathfrak{X}(A) \rightarrow \mathfrak{X}(A), (X, Y) \mapsto [X, Y], \text{ dove}$$

$$[X, Y](f) := XY(f) - YX(f).$$

È facile verificare che

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(A) : [X, Y] \in \mathfrak{X}(A).$$

Inoltre, valgono le seguenti proprietà :

- (1)  $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$ ,
- (2)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (3)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ ,
- (4)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ ,

per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(A)$  e per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(A)$ . In particolare, se  $a, b \in \mathbb{R}$  si ha  $[aX, bY] = ab[X, Y]$ , e quindi  $\mathfrak{X}(A)$  è un'algebra di Lie.

**Esercizio 2.11.** Siano  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ , localmente  $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Verificare che:

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n (X(\eta^j) - Y(\xi^j)) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

**Esercizio 2.12.** Considerati i seguenti campi di vettori (come elementi di  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ ):  $X = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $Y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $Z = -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}$ , verificare che

$$[X, Y] = Z, [Y, Z] = X, [Z, X] = Y.$$

## 2.2 TM come fibrato vettoriale

Sia  $M$  una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale. Poniamo

$$TM := \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p M \quad (\text{unione disgiunta}).$$

Consideriamo l'applicazione  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $X_p \mapsto p$ , tale applicazione è suriettiva e  $\pi^{-1}\{p\} = T_p M$ . Quindi un campo di vettori su  $M$  si può pensare come un'applicazione  $X : M \rightarrow TM$  tale che  $\pi \circ X = I_M$ .

**Teorema 2.13.** *L'insieme  $TM$ , detto varietà tangente (o fibrato tangente), ha una struttura di varietà differenziabile  $2n$ -dimensionale rispetto alla quale l'applicazione  $\pi$  è differenziabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  un atlante differenziabile di  $M$ . Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di  $TM$ :

$$\pi^{-1}(U_i) = \{X_p \in TM : \pi(X_p) = p \in U_i\} = TU_i.$$

$\{\pi^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$  è un ricoprimento di  $TM$  in quanto  $\{U_i\}_{i \in I}$  è un ricoprimento di  $M$ . L'applicazione

$$\tilde{\varphi}_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n, \quad X_p \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p), \xi^1(p), \dots, \xi^n(p)),$$

dove  $\varphi_i(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$  e  $X_p = \sum_{i=1}^n \xi^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ , è una corrispondenza biunivoca. Si noti che, per ogni  $p \in U_i$ ,

$$\tilde{\varphi}_{ip} := \tilde{\varphi}_i|_{T_p M} : T_p M = \pi^{-1}\{p\} \rightarrow \{\varphi_i(p)\} \times \mathbb{R}^n = T_{\varphi_i(p)} \mathbb{R}^n$$

è un isomorfismo (tra spazi vettoriali). Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di  $TM$ :

$$\mathcal{F}_T = \{ \tilde{\varphi}^{-1}(W) : W \text{ aperto di } \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}, (U, \varphi) \in \mathcal{A} \}.$$

Tale famiglia soddisfa le seguenti proprietà:

- a) per ogni  $X_p \in TM$ , esiste un elemento  $B$  di  $\mathcal{F}_T$  tale che  $X_p \in B$ ;
- b) se  $B_1$  e  $B_2$  sono due elementi di  $\mathcal{F}_T$  con  $B_1 \cap B_2$  non vuoto, e  $X_p \in B_1 \cap B_2$ , allora esiste un elemento  $B \in \mathcal{F}_T$  tale che  $X_p \in B \subset B_1 \cap B_2$ .

Pertanto esiste un'unica topologia su  $TM$  avente  $\mathcal{F}_T$  come base, questa è la topologia che si considera su  $TM$ . Rispetto a tale topologia, i sottoinsiemi  $\pi^{-1}(U_i)$  sono aperti di  $TM$  e le  $\tilde{\varphi}_i$  sono omeomorfismi. Inoltre,  $TM$  è uno spazio topologico separato. Quindi  $TM$  è una varietà topologica  $2n$ -dimensionale. Verifichiamo che l'atlante  $\{(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\varphi}_i)\}_i$  è differenziabile: siano  $(\pi^{-1}(U_i), \tilde{\varphi}_i)$  e  $(\pi^{-1}(U_j), \tilde{\varphi}_j)$  due carte con  $\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j) \neq \emptyset$  (e quindi  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ), allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} : \tilde{\varphi}_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) &= \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n, \\ (x_1(p), \dots, x_n(p), \xi^1(p), \dots, \xi^n(p)) &\mapsto (y_1(p), \dots, y_n(p), \eta^1(p), \dots, \eta^n(p)), \end{aligned}$$

è differenziabile (insieme alla sua inversa) in quanto  $y_j = y_j(x_1, \dots, x_n)$  è il cambio di coordinate su  $U_i \cap U_j$  e  $\eta^j = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ . Quindi  $TM$  è una varietà differenziabile di dimensione  $2n$ . Infine, la proiezione  $\pi$  è differenziabile in quanto in coordinate locali è espressa dall'usuale proiezione  $(x_i, \xi^i) \mapsto (x_i)$ .  $\square$

Il fibrato tangente è solo un esempio della seguente nozione.

**Definizione 2.14.** Siano date due varietà differenziabili  $E, M$  e un'applicazione differenziabile  $\pi : E \rightarrow M$ . Diremo che  $E$ , o più precisamente la terna  $(E, M, \pi)$ , è un *fibrato vettoriale* su  $M$  di rango  $k$  se:

- (1)  $\forall p \in M$ , la fibra  $E_p = \pi^{-1}(p)$  ha una struttura di spazio vettoriale reale  $k$ -dimensionale;
- (2)  $\forall p \in M$ ,  $\exists U$  (intorno aperto di  $p$ ) e un diffeomorfismo  $\tilde{\psi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  che conserva le fibre, cioè  $\pi_1 \circ \tilde{\psi} = \pi$  dove  $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$  è la proiezione sul primo fattore;
- (3)  $\forall q \in U$ , la restrizione di  $\tilde{\psi}$  alla fibra  $\tilde{\psi}_q := \tilde{\psi}|_{E_q} : E_q \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^k$  è un isomorfismo (tra spazi vettoriali).

La coppia  $(U, \tilde{\psi})$  si dice carta locale del fibrato  $(E, M, \pi)$ . Siano  $(U_i, \tilde{\psi}_i)$  e  $(U_j, \tilde{\psi}_j)$  due carte locali del fibrato  $(E, M, \pi)$  con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Le funzioni

$$\tilde{\psi}_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(k, \mathbb{R}), \quad p \mapsto \tilde{\psi}_{jp} \circ \tilde{\psi}_{ip}^{-1} \in GL(k, \mathbb{R}),$$

si dicono *funzioni di transizione*. Sia  $G$  un sottogruppo di  $GL(k, \mathbb{R})$ , ad esempio  $GL^+(k, \mathbb{R})$ ,  $O(k)$  o  $SO(k)$ . Si dice che il fibrato vettoriale  $(E, M, \pi)$  ha *gruppo strutturale riducibile* a  $G$  se esiste un atlante  $\{(U_\alpha, \tilde{\psi}_\alpha)\}$  di carte locali del fibrato, quindi  $\cup U_\alpha = M$ , le cui funzioni di transizione hanno i loro valori in  $G$ , cioè

$$\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset : \tilde{\psi}_{\beta p} \circ \tilde{\psi}_{\alpha p}^{-1} \in G.$$

Un fibrato vettoriale di rango  $k$  si dice *orientabile* se il gruppo strutturale  $GL(k, \mathbb{R})$  è riducibile al sottogruppo  $GL^+(k, \mathbb{R})$ .

Il più semplice esempio di fibrato vettoriale di rango  $k$  è la varietà prodotto  $E_0 = M \times \mathbb{R}^k$  con  $\pi = \pi_1 : E_0 \rightarrow M$  (proiezione sul primo fattore). La varietà tangente  $TM$  è un fibrato vettoriale di rango  $n = \dim M$  con gruppo strutturale  $GL(n, \mathbb{R})$ , se  $M$  ha una struttura riemanniana allora il suo gruppo strutturale è riducibile a  $O(n)$  (cf. Teorema 4.5). Siano  $(E_1, M, \pi_1)$  e  $(E_2, M, \pi_2)$  due fibrati vettoriali sulla stessa varietà base  $M$ . Un'applicazione differenziabile (risp. un diffeomorfismo)  $f : E_1 \rightarrow E_2$  che conserva le fibre, cioè con  $\pi_2 \circ f = \pi_1$ , e con  $f_p : E_{1p} \rightarrow E_{2p}$  applicazione lineare (risp. isomorfismo), è detta *omomorfismo* (risp. *isomorfismo*) *tra fibrati*. Un **fibrato vettoriale**  $(E, M, \pi)$  è detto **banale** se è isomorfo a  $E_0 = M \times \mathbb{R}^k$ . Un fibrato vettoriale  $\pi : E \rightarrow M$  di rango  $k$  è localmente una varietà prodotto  $U \times \mathbb{R}^k$  con  $U$  aperto di  $M$ , quindi si può pensare come una famiglia di spazi vettoriali  $\{E_p\}_{p \in M}$ , isomorfi a  $\mathbb{R}^k$ , parametrizzata (in modo localmente

banale) da  $M$ . Sia  $(E, M, \pi)$  un fibrato vettoriale di rango  $k$ . Sia  $E'$  una sottovarietà immersa in  $E$ , poniamo  $\pi' = \pi|_{E'}$ , e supponiamo che per ogni  $p \in M$  esista una carta locale  $(U, \tilde{\psi})$  del fibrato, con  $p \in U$ , tale che

$$\tilde{\psi}(\pi^{-1}(U) \cap E') = U \times \mathbb{R}^h (\subset U \times \mathbb{R}^k, h \leq k).$$

Il fibrato vettoriale ottenuto  $(E', M, \pi')$  è detto *sottofibrato* di  $E$  di rango  $h$ .

**Definizione 2.15.** Una *sezione* (differenziabile) del fibrato vettoriale  $(E, M, \pi)$  è un'applicazione (differenziabile)  $s : M \rightarrow E$  tale che  $\pi \circ s = I_M$ .

Sia ora  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile e sia  $(E, N, \pi)$  un fibrato vettoriale su  $N$ . L'applicazione  $f$  induce un fibrato vettoriale su  $M$ , che si indica con  $f^{-1}E$  oppure con  $f^*E$ , le cui fibre sono  $E_{f(p)}$ ,  $p \in M$ . Le carte locali del fibrato  $f^{-1}E$ , detto *pull back* di  $E$  via  $f$ , sono del tipo  $(f^{-1}(U), \tilde{\psi} \circ f)$ , dove  $(U, \psi)$  è una carta locale del fibrato vettoriale  $E$ . In particolare:  $f^{-1}TN = \bigcup_{p \in M} T_{f(p)}N$  e le sezioni di  $f^{-1}TN$  sono esattamente le applicazioni differenziabili  $\tilde{X} : M \rightarrow f^{-1}TN, p \mapsto \tilde{X}_p \in T_{f(p)}N$ , dette anche campi di vettori lungo  $f$ .

**Proposizione 2.16.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Allora,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se e solo se  $X$  è una sezione differenziabile di  $TM$ , ovvero  $X : M \rightarrow TM$  è differenziabile e  $\pi \circ X = I_M$ . Pertanto, l'insieme delle sezioni differenziabili di  $TM$  è esattamente l'insieme  $\mathfrak{X}(M)$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo (cfr. Definizione 2.7) che un campo di vettori  $X$  su  $M$  si può pensare come un'applicazione  $X : M \rightarrow TM$  tale che  $\pi \circ X = I_M$ , quindi come una sezione di  $TM$ . Inoltre,  $X$  (come sezione) localmente è l'applicazione

$$X : p = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \xi^1(x_i), \dots, \xi^n(x_i)),$$

dove  $X_p = \sum_{j=1}^n \xi^j(x_i) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p$ . Quindi, la sezione  $X : M \rightarrow TM$  è differenziabile se e solo se le funzioni  $\xi^i(x_1, \dots, x_n)$  sono differenziabili, ma ciò equivale a dire che  $X$  come campo di vettori ha funzioni componenti (locali) differenziabili e quindi  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\square$

Molte nozioni in geometria differenziale possono essere viste come sezioni di un appropriato fibrato vettoriale. Oltre ai campi vettoriali su  $M$  che si possono pensare come sezioni di  $TM$ , i tensori di tipo  $(s, r)$  su  $M$  possono essere visti come sezioni del fibrato vettoriale  $\mathcal{T}^{s,r}M = \bigcup_{p \in M} \mathcal{T}^{s,r}(T_pM)$ , le  $k$ -forme differenziali su  $M$  possono essere viste come sezioni del fibrato vettoriale  $\Lambda^k TM = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM)$ , in particolare  $\Lambda^1 TM = TM^* = \bigcup_{p \in M} T_pM^*$  è il fibrato tangente duale. Se nella definizione di fibrato vettoriale si sostituisce  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{C}$ , si ha la nozione *fibrato vettoriale complesso* di rango  $k$ . Un fibrato vettoriale complesso  $E$  su  $M$  è detto *olomorfo* se  $E$  ed  $M$  sono varietà

complesse,  $\pi$  è un'applicazione olomorfa e  $\tilde{\psi}$  è un diffeomorfismo olomorfo (cioè  $\tilde{\psi}$  e  $\tilde{\psi}^{-1}$  sono olomorfe). Il gruppo lineare complesso  $GL(k, \mathbb{C})$  può essere identificato con il sottogruppo di  $GL(2k, \mathbb{R})$  costituito dalle matrici che commutano con la matrice  $J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$ . Questa rappresentazione di  $GL(k, \mathbb{C})$  in  $GL(2k, \mathbb{R})$ , detta *rappresentazione reale* di  $GL(k, \mathbb{C})$ , è data da

$$A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } A + iB \in GL(k, \mathbb{C}),$$

dove  $A, B$  sono matrici reali di ordine  $k$ . Un fibrato vettoriale complesso  $E$  su  $M$  di rango  $k$  può essere considerato come un fibrato vettoriale reale di rango  $2k$ . Siccome il suo gruppo strutturale  $GL(k, \mathbb{C}) \subset GL^+(2k, \mathbb{R})$ ,  $E$  è orientato in modo naturale come fibrato vettoriale reale.

**Teorema 2.17.** *Il fibrato tangente  $TM$  è banale se, e solo se, esistono  $n$  ( $n = \dim M$ ) campi vettoriali  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$  linearmente indipendenti.*

*Dimostrazione.* Supponiamo  $TM$  banale e sia  $f : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$  un diffeomorfismo che conserva le fibre, cioè  $\pi \circ f = \pi_1$ , e con  $f_p : \{p\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ ,  $(p, v) \mapsto f(p, v) \in T_p M$ , isomorfismo tra spazi vettoriali. Sia  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Definiamo

$$E_i : M \rightarrow TM, p \mapsto E_i(p) := f(p, e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Questi  $E_i$  sono campi vettoriali in quanto  $\pi \circ E_i(p) = \pi \circ f(p, e_i) = \pi_1(p, e_i) = p$ , sono differenziabili in quanto  $f$  è un diffeomorfismo, e sono linearmente indipendenti in quanto  $f_p : \{p\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ ,  $(p, e_i) \mapsto f(p, e_i) = E_i(p)$  è un isomorfismo tra spazi vettoriali. Viceversa, se  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$  sono linearmente indipendenti, basta definire

$$f : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM, (p, (v^1, \dots, v^n)) \mapsto \sum_{i=1}^n v^i E_i(p) \in T_p M.$$

Questa  $f$  chiaramente conserva le fibre ( $\pi \circ f(p, v) = p = \pi_1(p, v)$ ) con  $f_p : \{p\} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ ,  $(p, v) \mapsto \sum_{i=1}^n v^i E_i(p)$ , isomorfismo tra spazi vettoriali.

Inoltre  $f$  è un diffeomorfismo in quanto localmente, posto  $E_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ,

si ha

$$f : (x_1, \dots, x_n, v^1, \dots, v^n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \sum_{i=1}^n v^i a_i^1, \dots, \sum_{i=1}^n v^i a_i^n)$$

con  $\det(a_i^j) \neq 0$ . □

Se una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  ammette  $n$  campi vettoriali  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$  linearmente indipendenti, allora  $M$  è detta **varietà parallelizzabile**.  $\mathbb{R}^n$  è chiaramente parallelizzabile. Inoltre, le sfere  $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$  sono parallelizzabili, ciò dipende essenzialmente dall'esistenza di un prodotto in  $\mathbb{R}^2$  (tra numeri complessi), in  $\mathbb{R}^4$  (tra quaternioni) e in  $\mathbb{R}^8$  (tra numeri di Cayley).

L'applicazione

$$X : \mathbb{S}^1 \rightarrow T\mathbb{R}^2, p = (a_1, a_2) \mapsto X_p = -a_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p,$$



definisce un campo differenziabile di vettori unitari tangenti a  $\mathbb{S}^1$ .

Le applicazioni  $X, Y, Z : \mathbb{S}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^4$ , definite da

$$\begin{aligned} X_p &= a_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p - a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p + a_4 \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)_p - a_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_4} \right)_p, \\ Y_p &= a_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p - a_4 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p - a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)_p + a_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_4} \right)_p, \\ Z_p &= a_4 \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + a_3 \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p - a_2 \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)_p - a_1 \left( \frac{\partial}{\partial x_4} \right)_p, \end{aligned}$$

per ogni  $p = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{S}^3$ , definiscono tre campi differenziabili di vettori ortonormali tangenti alla sfera  $\mathbb{S}^3$ .

Nel caso della sfera  $\mathbb{S}^7$ , identifichiamo il vettore  $X_p = \sum_{i=1}^8 a_i (\partial/\partial x_i)_p$  con  $X_p = (a_1, a_2, \dots, a_8)$ , e quindi consideriamo le applicazioni  $X_i : \mathbb{S}^7 \rightarrow T\mathbb{R}^8$ ,  $i = 1, \dots, 7$ , definite, per ogni  $p = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \in \mathbb{S}^7$ , da

$$\begin{aligned} X_1(p) &= (a_2, -a_1, a_4, -a_3, a_6, -a_5, a_8, -a_7), \\ X_2(p) &= (a_3, -a_4, -a_1, a_2, a_7, -a_8, -a_5, a_6), \\ X_3(p) &= (a_4, a_3, -a_2, -a_1, -a_8, -a_7, a_6, a_5), \\ X_4(p) &= (a_5, -a_6, -a_7, a_8, -a_1, a_2, a_3, -a_4), \\ X_5(p) &= (a_6, a_5, a_8, a_7, -a_2, -a_1, -a_4, -a_3), \\ X_6(p) &= (a_7, -a_8, a_5, -a_6, -a_3, a_4, -a_1, a_2), \\ X_7(p) &= (a_8, a_7, -a_6, -a_5, a_4, a_3, -a_2, -a_1). \end{aligned}$$

Anche in questo caso,  $X_i, i = 1, \dots, 7$ , sono campi differenziabili di vettori ortonormali e tangenti a  $\mathbb{S}^7$ .

Si noti che le sfere  $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^7$  sono le sole sfere parallelizzabili [15]. Inoltre, si può vedere che esiste un campo vettoriale non nullo (in ogni punto) su  $\mathbb{S}^n$  se e solo se  $n$  è dispari (cioè se e solo se la caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi(\mathbb{S}^n)$  è nulla). Questo è un caso particolare del seguente risultato generale (cfr. [105], p.203).

**Teorema 2.18.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile (connessa) compatta. Allora esiste su  $M$  un campo vettoriale continuo non nullo (in ogni punto) se, e solo se, la caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi(M) = 0$ .*

In particolare, per una superficie connessa compatta orientabile  $M$  esiste un campo vettoriale continuo non nullo (in ogni punto) se, e solo se,  $M$  è una superficie torica.

## 2.3 Il differenziale di funzioni

Siano  $M$  una varietà differenziabile,  $p$  un punto di  $M$  ed  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile in un intorno di  $p$ . Il *differenziale* di  $f$  nel punto  $p$  è

definito dall'applicazione

$$(df)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad X_p \mapsto (df)_p(X_p) := X_p(f).$$

In altre parole, il differenziale  $(df)_p$  è un operatore che assegna ad ogni vettore tangente in  $p$  la derivata direzionale della funzione nella direzione di quel vettore.  $(df)_p$  è un'applicazione lineare, quindi un elemento dello spazio vettoriale duale  $T_p^* M$ . Se  $(x_1, \dots, x_n)$  sono coordinate locali definite in un intorno di  $p$ , allora

$$(df)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p.$$

Prendendo come  $f$  la funzione coordinata  $x_h : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto x_h(p)$ , si ha

$$(dx_h)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \left( \frac{\partial x_h}{\partial x_i} \right)_p = \delta_i^h.$$

Dunque i differenziali  $(dx_1)_p, \dots, (dx_n)_p$  costituiscono la base di  $T_p^* M$  duale della base coordinata  $\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p$  di  $T_p M$ . Pertanto:

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p (dx_i)_p.$$

**Esercizio 2.19.** Verificare che:

$$(d(f \cdot g))_p = f(p)(dg)_p + g(p)(df)_p \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(p).$$

Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile su  $A$  aperto di  $M$ , il *differenziale* di  $f$  è l'applicazione

$$df : \mathfrak{X}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A), \quad X \mapsto (df)(X) := X(f).$$

$df$  è una applicazione  $\mathcal{F}(A)$ -lineare, dunque  $df \in \Lambda^1(A) = \mathfrak{X}^*(A)$   $\mathcal{F}(A)$ -modulo duale di  $\mathfrak{X}(A)$ .  $\Lambda^1(A)$  è anche detto  $\mathcal{F}(A)$ -modulo delle 1-forme differenziali su  $A$ . Se  $(x_1, \dots, x_n)$  è un sistema di coordinate locali, allora

$$(df) \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Prendendo come  $f$  la funzione coordinata  $x_h$ , si ha

$$(dx_h) \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x_h}{\partial x_i} = \delta_i^h.$$

Dunque i differenziali  $dx_1, \dots, dx_n$  costituiscono una base locale di  $\Lambda^1(A)$  duale della base locale  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  di  $\mathfrak{X}(A)$ . Pertanto,  $df$  localmente si può esprimere con

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Si noti che per ogni  $\omega \in \Lambda^1(A)$  e per ogni  $p \in A$ , si può definire la forma lineare  $\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\omega_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \left(\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)(p)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Quindi, per ogni  $\omega \in \Lambda^1(A)$  e per ogni  $p \in A$ , si ha  $\omega_p \in T_p^* M$ .

Siano ora  $M$  e  $N$  due varietà differenziabili,  $p \in M$  ed  $F : M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile in un intorno di  $p$ .

**Definizione 2.20.** Si definisce *differenziale* di  $F$  in  $p$  l'applicazione

$$F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, \quad X_p \mapsto F_{*p} X_p, \quad \text{tale che}$$

$$F_{*p}(X_p)(g) := X_p(g \circ F) \quad \forall g \in \mathcal{F}(F(p)).$$

$F_{*p}$  è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare. Siano  $(x_1, \dots, x_m)$  coordinate locali definite in un intorno  $U$  di  $p$  e siano  $(y_1, \dots, y_n)$  coordinate locali definite in un intorno  $V$  di  $F(p)$  con  $F(U) \subset V$ , siano inoltre  $\varphi$  e  $\psi$  le corrispondenti applicazioni coordinate. Possiamo determinare la matrice associata a  $(F_{*p})_p$  rispetto alle basi coordinate  $\{(\partial/\partial x_i)_p\}$  e  $\{(\partial/\partial y_j)_{F(p)}\}$  di  $T_p M$  e  $T_{F(p)} N$  rispettivamente. Poiché

$$\begin{aligned} F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p &= \sum_{j=1}^n F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (y_j) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i} \right) (p) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{F(p)}, \end{aligned}$$

la suddetta matrice è data da:

$$\left( \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i} \right) (p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(y_1 \circ F)}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial(y_1 \circ F)}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial(y_1 \circ F)}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial(y_2 \circ F)}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial(y_2 \circ F)}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial(y_2 \circ F)}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(y_n \circ F)}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial(y_n \circ F)}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial(y_n \circ F)}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}.$$

Questa matrice viene detta *matrice jacobiana* di  $F$  nel punto  $p$  rispetto ai fissati sistemi di coordinate. Si noti che la matrice jacobiana di  $F$  in  $p$  è esattamente la matrice jacobiana di  $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  in  $\varphi(p)$ . Se  $F$  è un'applicazione differenziabile da  $\mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n$ , il differenziale  $F_{*p}$  si può identificare con la matrice jacobiana  $J(F)_p$  come un'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^m \equiv T_p \mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^n \equiv T_{F(p)} \mathbb{R}^n$ .

**Esercizio 2.21.** Sia  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una applicazione differenziabile. Indicata con  $t$  la coordinata su  $\mathbb{R}$ , si verifichi che

$$f_{*p}(X_p) = (df)_p(X_p)(d/dt)_{f(p)} \quad \forall X_p \in T_p M.$$

**Esercizio 2.22.** Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto F(x) = Ax + v$ , dove  $A$  rappresenta un'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  e  $v$  è un fissato vettore di  $\mathbb{R}^m$ . Determinare  $F_{*x}$  per ogni fissato  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Esercizio 2.23.** Sia  $F : M \rightarrow N$  una applicazione differenziabile tra varietà. Verificare che

$$F_* : TM \rightarrow TN, X_p \mapsto F_{*p}X_p,$$

è un'applicazione differenziabile tra le varietà tangenti.

**Proposizione 2.24.** Siano  $M, N, P$ , tre varietà differenziabili ed  $F : M \rightarrow N, G : N \rightarrow P$  due applicazioni differenziabili. Allora

$$(G \circ F)_{*p} = G_{*F(p)} \circ F_{*p} \quad \forall p \in M.$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che per ogni  $X_p \in T_pM$  e per ogni  $h \in \mathcal{F}(G(F(p)))$ :

$$\begin{aligned} (G \circ F)_{*p}(X_p)(h) &= X_p(h \circ G \circ F), \\ (G_{*F(p)} \circ F_{*p})(X_p)(h) &= (G_{*F(p)}(F_{*p}(X_p)))(h) = (F_{*p}X_p)(h \circ G) \\ &= X_p(h \circ G \circ F). \end{aligned}$$

□

**Corollario 2.25.** Se  $F : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo, allora  $F_{*p}$  è un isomorfismo e  $F_{*p}^{-1} = (F^{-1})_{*F(p)}$  per ogni  $p \in M$ . In particolare,  $\dim M = \dim N$  e la matrice jacobiana  $\left(\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}\right)_p \in GL(n, \mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Basta osservare che  $F \circ F^{-1} = I_N, F^{-1} \circ F = I_M$  e applicare la Proposizione 2.24. □

**Esercizio 2.26.** Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  rappresentata, localmente, con equazioni parametriche  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ . Siano  $\phi_u^0 = (x_u, y_u, z_u)_p$  e  $\phi_v^0 = (x_v, y_v, z_v)_p$  i vettori tangenti, in un fissato punto  $p$ , alle linee coordinate  $v = \text{cost.}$  e  $u = \text{cost.}$  rispettivamente. Si noti che l'inclusione  $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ , espressa in coordinate locali da  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , è differenziabile. Determinare i vettori tangenti  $i_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, i_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p$ , quindi trovare il legame tra le basi  $\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p\right)$  e  $(\phi_u^0, \phi_v^0)$  del piano tangente  $T_pM$ .

Nel caso di un diffeomorfismo  $F : M \rightarrow N$ , possiamo definire un differenziale che opera sui campi di vettori. Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $F_*X$  è il campo di vettori su  $N$  definito, per ogni  $q \in N, F(p) = q$ , da

$$(F_*X)_q = F_{*p}X_p.$$

Inoltre, per  $f \in \mathcal{F}(M)$ , si pone

$$F_*f = f \circ F^{-1} \in \mathcal{F}(N).$$

**Proposizione 2.27.** *Se  $F : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo, il differenziale  $F_*$  definisce una corrispondenza  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ ,  $X \mapsto F_*X$ , che verifica le seguenti proprietà:*

- (1)  $F_*(X)(g) = X(g \circ F) \circ F^{-1}$  (in particolare  $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$ ),
- (2)  $F_*$  è una corrispondenza biunivoca,
- (3)  $F_*(X + Y) = F_*(X) + F_*(Y)$  e  $F_*(fX) = F_*(f)F_*(X)$ ,
- (4)  $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$ ,

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $g \in \mathcal{F}(N)$  ed  $f \in \mathcal{F}(M)$ . In particolare,  $F_*$  è un isomorfismo tra le algebre di Lie  $\mathfrak{X}(M)$  e  $\mathfrak{X}(N)$ .

*Dimostrazione.* (1) Per ogni  $q \in N$ ,  $q = F(p)$ , si ha:

$$\begin{aligned} (F_*X)(g)(q) &= (F_*X)_q(g) = (F_{*p}X_p)(g) = X_p(g \circ F) = X(g \circ F)(p) \\ &= X(g \circ F)(F^{-1}(q)) = (X(g \circ F) \circ F^{-1})(q). \end{aligned}$$

- (2) Iniettività :  $F_*X = F_*Y \Rightarrow (F_*X)_q = (F_*Y)_q \forall q \in N \Rightarrow F_{*p}X_p = F_{*p}Y_p \forall p \in M \Rightarrow X_p = Y_p \forall p \in M \Rightarrow X = Y$ .

Suriettività : dato  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ , prendendo  $X = (F^{-1})_*Y$  elemento di  $\mathfrak{X}(M)$ , si ha  $F_*X = Y$ .

- (3)  $F_*(X + Y) = F_*(X) + F_*(Y)$  è ovvia. Verifichiamo che  $F_*(fX) = F_*(f)F_*(X)$ . Applicando la definizione di  $F_*$ , per ogni  $q \in N$ ,  $q = F(p)$ :

$$\begin{aligned} (F_*(fX))_q &= F_{*p}(fX)_p = f(p)F_{*p}X_p \\ &= f(F^{-1}(q))(F_*X)_q \\ &= ((f \circ F^{-1})F_*X)_q. \end{aligned}$$

- (4) Applicando la (1), si ha

$$\begin{aligned} (F_*[X, Y])(g) &= ([X, Y](g \circ F)) \circ F^{-1} \\ &= (XY(g \circ F)) \circ F^{-1} - (YX(g \circ F)) \circ F^{-1}. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} (F_*X)(F_*Y)(g) &= (F_*X)(Y(g \circ F) \circ F^{-1}) \\ &= (X(Y(g \circ F) \circ F^{-1} \circ F)) \circ F^{-1} \\ &= (XY(g \circ F)) \circ F^{-1}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$(F_*[X, Y])(g) = (F_*X)(F_*Y)(g) - (F_*Y)(F_*X)(g) = [F_*X, F_*Y](g). \quad \square$$

**$F_*X$  in coordinate locali.**

Siano  $(U, (x_i))$  e  $(V, (y_j))$ ,  $F(U) = V$ , carte locali di  $M$  ed  $N$  rispettivamente. Assumiamo  $X = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  con  $\xi^i \in \mathcal{F}(U)$ . Allora  $F_*X = \sum_{i=1}^m (F_*\xi^i) F_* \frac{\partial}{\partial x_i}$ , dove  $F_*\xi^i = \xi^i \circ F^{-1}$  e

$$F_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \left( F_* \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \frac{(\partial y_j \circ F)}{\partial x_i} \circ F^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Quindi,

$$F_*X = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^m (\xi^i \circ F^{-1}) \left( \frac{(\partial y_j \circ F)}{\partial x_i} \circ F^{-1} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

**Osservazione 2.28.** Si noti che se  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  è l'applicazione coordinata relativa alle coordinate  $(x_i)$ , allora  $\varphi_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$  e quindi

$$X = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ si può identificare con } \tilde{X} = \varphi_* X = \sum_{i=1}^m \tilde{\xi}^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove  $\xi^i \in \mathcal{F}(U)$  e  $\tilde{\xi}^i = \xi^i \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{F}(\varphi(U))$ .

Il rango di un'applicazione differenziabile  $F : M \rightarrow N$  in un fissato punto  $p \in M$  è, per definizione, il rango del differenziale  $F_{*p}$ . Quindi:

$$\begin{aligned} \text{rango}(F)_p &:= \text{rango} F_{*p} = \dim F_{*p}(T_p M), \quad F_{*p}(T_p M) \subset T_{F(p)} N, \\ &= \text{rango della matrice jacobiana di } F \text{ in } p \\ &= \dim T_p M - \dim \ker F_{*p} \quad (\leq \min \{ \dim M, \dim N \}). \end{aligned}$$

Si noti che:

$$\text{rango}(F)_p = \dim M \text{ (risp. } \dim N) \Leftrightarrow F_{*p} \text{ è iniettivo (risp. suriettivo).}$$

**Teorema 2.29.** (delle funzioni inverse) *Se  $F : M \rightarrow N$  è un'applicazione differenziabile tra varietà, le seguenti proprietà sono equivalenti.*

- (1)  $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  è un isomorfismo.
- (2)  $\text{rango}(F)_p = \dim M = \dim N = n$ .
- (3) Esistono  $U, V$  intorno aperti di  $p$  ed  $F(p)$  rispettivamente, tali che

$$F|_U : U \rightarrow V \text{ sia un diffeomorfismo.}$$

*Dimostrazione.* (1)  $\Rightarrow$  (2) segue facilmente dalle relazioni precedenti. (2)  $\Rightarrow$  (3): basta ricondursi, mediante carte locali, al caso di una applicazione differenziabile  $\tilde{F}$  tra aperti di  $\mathbb{R}^n$  e applicare il relativo teorema delle funzioni inverse. (3)  $\Rightarrow$  (1): se  $F|_U : U \rightarrow V$  è un diffeomorfismo, allora  $(F|_U)_{*p} : T_p U = T_p M \rightarrow T_{F(p)} V = T_{F(p)} N$  è un isomorfismo e quindi  $F_{*p} = (F|_U)_{*p}$  è un isomorfismo.  $\square$

**Proposizione 2.30.** *Sia  $F : M \rightarrow N$  una applicazione differenziabile tra varietà (con  $M$  connessa). Se  $F_{*p} = 0$  per ogni  $p \in M$ , allora  $F$  è un'applicazione costante.*

*Dimostrazione.* Sia  $q \in F(M)$ . Proviamo che  $F^{-1}(q) = M$ .  $F^{-1}(q)$  è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di  $M$ . Poiché  $M$  è connessa, per provare che  $F$  è costante basta provare che  $F^{-1}(q)$  è anche aperto. Proviamo che  $F^{-1}(q)$  è intorno di ogni suo punto. Dato  $p_0 \in F^{-1}(q)$ , consideriamo  $(U, \varphi)$  carta locale di  $M$  e  $(V, \psi)$  carta locale di  $N$  con  $p_0 \in U$  e  $F(U) \subset V$ . Poniamo  $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ ;  $F_{*p} = 0$  per ogni  $p \in U$  implica che la matrice jacobiana di  $F$  in  $p$  è la matrice nulla per ogni  $p \in U$ , ossia la matrice jacobiana di  $\tilde{F}$  è la matrice nulla per ogni punto di  $\varphi(U)$ . Di conseguenza,  $\tilde{F}$  è costante su  $\varphi(U)$  e quindi  $F$  è costante su  $U$ . Pertanto  $F(p) = \text{cost.} = F(p_0) = q$  per ogni  $p \in U$ , implica  $U \subset F^{-1}(q)$  e quindi  $F^{-1}(q)$  è intorno di  $p_0$ .  $\square$

**Esercizio 2.31.** Sia  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  un'applicazione di rivestimento tra varietà differenziabili. Si verifichi che:

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M) \quad \exists |\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M}) \quad \text{tale che} \quad \pi_{*\tilde{p}}\tilde{X}_{\tilde{p}} = X_{\pi(\tilde{p})} \quad \forall \tilde{p} \in \tilde{M}.$$

## 2.4 Curve differenziabili

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Una *curva differenziabile* di  $M$  è un'applicazione differenziabile  $\sigma : I \rightarrow M$  con  $I$  aperto di  $\mathbb{R}$ . Quando si considera  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ , si intende che  $\sigma$  è definita su un aperto che contiene  $[a, b]$ . Una curva  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  si dice differenziabile a tratti se esiste una suddivisione  $a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_{k-1} < a_k = b$  di  $[a, b]$  tale che  $\sigma|_{[a_i, a_{i+1}]}$  sia differenziabile per ogni  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Se  $\sigma : I \rightarrow M$  è una curva differenziabile, diremo *vettore tangente a  $\sigma$*  nel punto  $\sigma(t_0)$  il vettore

$$\dot{\sigma}(t_0) := (\sigma_*)_{t_0} \left( \frac{d}{dt} \right)_{t_0}, \quad \text{dove} \quad (\sigma_*)_{t_0} : T_{t_0}\mathbb{R} \rightarrow T_{\sigma(t_0)}M.$$

Sia  $(U, \varphi, (x_i))$  una carta locale con  $\sigma(t_0) \in U$ ; posto  $\tilde{\sigma}(t) = \varphi \circ \sigma(t)$  e  $x_i(t) = (x_i \circ \sigma)(t) = (x_i \circ \tilde{\sigma})(t)$ , si ha

$$\dot{\sigma}(t_0) = \sum_{i=1}^n (\sigma_*)_{t_0} \left( \frac{d}{dt} \right)_{t_0} (x_i) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\sigma(t_0)} = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i(t)}{dt} (t_0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\sigma(t_0)}.$$

Quindi,

$$\dot{\sigma}(t_0) = \varphi_{*\sigma(t_0)}^{-1} \dot{\tilde{\sigma}}(t_0).$$

Se  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{\sigma}(t)$  è l'usuale vettore velocità per le curve parametrizzate di  $\mathbb{R}^n$ .

*Significato geometrico del differenziale:* sia  $F : M \rightarrow M'$  un'applicazione differenziabile tra varietà. Se  $\sigma : I \rightarrow M$  è una curva differenziabile di  $M$ ,

$\tau = F \circ \sigma$  è una curva differenziabile di  $M'$  e

$$\dot{\tau}(t_0) = (F \circ \sigma)_{*t_0} \left( \frac{d}{dt} \right)_{t_0} = (F_{*\sigma(t_0)} \circ \sigma_{*t_0}) \left( \frac{d}{dt} \right)_{t_0} = (F_{*})_{\sigma(t_0)}(\dot{\sigma}(t_0)).$$

Quindi il differenziale trasforma vettori tangenti alla curva  $\sigma(t)$  in vettori tangenti alla curva  $\tau(t) = F \circ \sigma(t)$ .

**Proposizione 2.32.** *Sia  $\sigma : I \rightarrow M$  una curva differenziabile ed  $f \in \mathcal{F}(\sigma(t_0))$ . Posto  $f(t) = f(\sigma(t))$ , si ha*

$$\dot{\sigma}(t_0)(f) = \left( \frac{df}{dt} \right)_{\sigma(t_0)}.$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $f(t) = f(\sigma(t))$  e consideriamo una carta locale  $(U, (x_i))$  con  $\sigma(t_0) \in U$ . Allora

$$\dot{\sigma}(t_0)(f) = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i(t)}{dt}(t_0) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\sigma(t_0)} = \frac{df}{dt}(t_0).$$

□

Vediamo ora che, così come per le superfici di  $\mathbb{R}^3$ , anche per una arbitraria varietà differenziabile lo spazio tangente  $T_p M$  è costituito dai vettori tangenti a curve della stessa varietà passanti per il punto  $p$ . Più precisamente abbiamo la seguente

**Proposizione 2.33.** *Sia  $p$  un fissato punto di  $M$ . Allora, per ogni  $V_p \in T_p M$  esiste  $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  (differenziabile) tale che*

$$\sigma(0) = p \text{ e } \dot{\sigma}(0) = V_p.$$

*Dimostrazione.* Sia  $V_p \in T_p M$  e sia  $(U, \varphi, (x_i))$  una carta locale con  $p \in U$ . Poniamo

$$x_0 = \varphi(p) \in \varphi(U) \quad \text{e} \quad \tilde{V} = (V^1, \dots, V^n) \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $\sum_{i=1}^n V^i (\partial/\partial x_i)_p = V$ . Consideriamo in  $\mathbb{R}^n$  il segmento  $\tilde{\sigma}(t) = x_0 + t\tilde{V}$ ,  $|t| < \epsilon$ . Prendendo  $\epsilon$  abbastanza piccolo, possiamo assumere che  $\tilde{\sigma}$  abbia sostegno in  $\varphi(U)$  (aperto di  $\mathbb{R}^n$ ). Tale curva soddisfa:  $\tilde{\sigma}(0) = x_0$  e  $\dot{\tilde{\sigma}}(0) = \tilde{V}$ . Poniamo ora  $\sigma(t) := \varphi^{-1}(\tilde{\sigma}(t))$ .  $\sigma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$  che soddisfa

$$\sigma(0) = \varphi^{-1}(\tilde{\sigma}(0)) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p, \quad x_i(t) = x_i(\sigma(t)) = x_{0i} + tV^i$$

e

$$\dot{\sigma}(0) = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt}(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\sigma(0)} = \sum_{i=1}^n V^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = V_p. \quad \square$$

### Gruppo locale a un parametro

Siano  $M$  una varietà differenziabile,  $A$  un aperto di  $M$ ,  $X \in \mathfrak{X}(A)$ , e  $\sigma : I \rightarrow A \subset M$  una curva differenziabile di  $M$ . La curva  $\sigma$  si dice *curva integrale* del campo di vettori  $X$  con inizio in  $p_0$  se:

$$\sigma(0) = p_0 \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)} \quad \forall t \in I.$$



**Teorema 2.34.** *Sia  $X \in \mathfrak{X}(A)$  con  $A$  aperto di  $M$ . Allora, per ogni fissato punto  $p_0 \in A$ , esiste un  $\epsilon > 0$  ed esiste un'unica curva differenziabile  $\sigma : I = ] - \epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  curva integrale di  $X$  con inizio in  $p_0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(U, \varphi, (x_i))$  una carta locale di  $M$  con  $p_0 \in U \subset A$  e  $\varphi(p_0) = (a_1, \dots, a_n)$ . Allora, su  $U$ :  $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  con  $\xi^i \in \mathcal{F}(U)$ . Se  $\sigma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$  con sostegno in  $U$ , poniamo  $\tilde{\sigma}(t) := \varphi(\sigma(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  e  $\tilde{\xi}^i := \xi^i \circ \varphi^{-1}$ . Allora le condizioni  $\sigma(0) = p_0$  e  $\dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}$ , in termini di coordinate locali, diventano:

$$x_i(0) = a_i \quad \text{e} \quad \frac{dx_i}{dt} = \xi^i(\sigma(t)) = \tilde{\xi}^i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Questo è un sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine insieme a  $n$  condizioni iniziali. Dalla teoria delle equazioni differenziali segue l'esistenza e l'unicità della  $n$ -pla di funzioni differenziabili  $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \varphi(U)$ , definita per  $t \in I = ] - \epsilon, \epsilon[$ , che verifica il suddetto sistema. La curva  $\sigma(t) = \varphi^{-1}(x_1(t), \dots, x_n(t))$  è la curva integrale di  $X$  con inizio in  $p_0$  definita per  $t \in I$ .  $\square$

Si noti che la curva integrale  $\sigma$  determinata nel Teorema 2.34 non è detto che sia quella massimale. Sempre dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie, tenendo conto del teorema d'esistenza locale, di unicità e dipendenza  $C^\infty$  dai dati iniziali, applicato al sistema di equazioni differenziali ordinarie (2.2), si ottiene il seguente risultato.

**Teorema 2.35.** *Sia  $X \in \mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $M$ . Per ogni fissato punto  $p_0 \in A$ , esistono un intorno aperto  $U$  di  $p_0$ ,  $U \subset A$ , un  $\epsilon > 0$  e una applicazione differenziabile  $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$ ,  $(t, p) \mapsto \sigma_p(t)$ , dove  $\sigma_p(t)$  è l'unica curva integrale di  $X$  con inizio in  $p$  definita per  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  e per ogni  $p \in U$ . Inoltre, per ogni fissato  $|t| < \epsilon$ , si ha che  $\phi_t : U \rightarrow \phi_t(U)$ ,  $p \mapsto \phi_t(p) = \sigma_p(t)$ , è un diffeomorfismo che soddisfa*

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s} \quad \forall t, s \in (-\epsilon, \epsilon) \text{ con } t + s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

$\phi_t$  è detto *flusso locale* di  $X$ , oppure *gruppo locale a un parametro*, generato da  $X$ . Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  si dice *completo* se genera un gruppo globale ad un parametro, cioè  $(-\epsilon, \epsilon) \times U = \mathbb{R} \times M$ . Se  $M$  è compatta, ogni campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è completo. Un campo di vettori invariante a sinistra su un gruppo di Lie è completo. Per approfondimenti sul flusso locale generato da un campo di vettori si rinvia al testo [14] (Cap.IV, Sez. 3).

**Esempio 2.36.** Siano  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$  definiti rispettivamente da

$$X = x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2, \quad Y = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2, \quad Z = x_1 \partial_1 - x_2 \partial_2, \quad \text{dove } \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La curva integrale di  $X$  con inizio in  $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$  è data da  $\sigma(t) = (a_1 e^t, a_2 e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi, le curve integrali di  $X$  sono semirette radiali (il parametro non è affine). Si noti che

$$\phi_t(\phi_s(a_1, a_2)) = \phi_t(a_1 e^s, a_2 e^s) = (a_1 e^{t+s}, a_2 e^{t+s}) = \phi_{t+s}(a_1, a_2).$$

La curva integrale di  $Y$  con inizio in  $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$  è data da  $\sigma(t) = (a_1 \cos t - a_2 \sin t, a_1 \sin t + a_2 \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , che è una circonferenza di centro l'origine e passante per  $p$ . Anche in questo caso, usando le formule di somma per seno e coseno, si ha  $\phi_t(\phi_s(a_1, a_2)) = \phi_{t+s}(a_1, a_2)$ . La curva integrale di  $Z$  con inizio in  $p = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$  è data da  $\sigma(t) = (a_1 e^t, a_2 e^{-t})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . In questo caso una curva integrale è un semiasse coordinato oppure un ramo di iperbole equilatera. Inoltre, come prima, si ha  $\phi_t(\phi_s(a_1, a_2)) = \phi_{t+s}(a_1, a_2)$ .

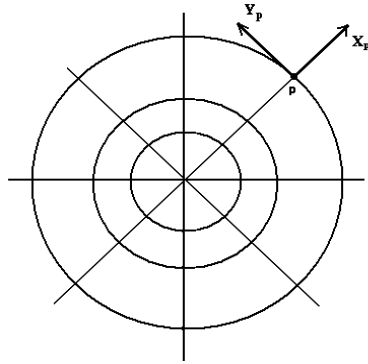


Figura 2.1: Curve integrali di  $X$  e  $Y$ .

## 2.5 Immersioni e sottovarietà

**Definizione 2.37.** Siano  $M, M'$  varietà differenziabili ed  $f : M \rightarrow M'$  un'applicazione differenziabile. Diremo che  $f$  è una *immersione* se il suo differenziale  $f_{*p}$  è iniettivo per ogni  $p \in M$ . In tal caso  $n' = \dim T_{f(p)}M' \geq \text{rang} f_{*p} = \dim T_p M = n$ .

Se  $f$  è un'immersione iniettiva, diremo che  $M$  è una *sottovarietà immersa* di  $M'$ . Data l'immersione iniettiva  $f : M \rightarrow M'$  e considerata su  $f(M)$  la topologia indotta da  $M'$ , se  $f : M \rightarrow f(M)$  è un omeomorfismo, allora diremo che  $f$  è un *imbedding* e in tal caso  $f(M)$  è detta *sottovarietà imbedded* di  $M'$ . Chiaramente l'immersione  $i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ , è un imbedding.

**Esercizio 2.38.** Verificare che l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

è un'immersione non iniettiva.

**Esercizio 2.39.** Verificare che l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t),$$

è un imbedding. Di conseguenza, l'elica cilindrica con la topologia indotta è una sottovarietà imbedded di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 2.40.** a) Verificare che l'applicazione

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto F(t) = (2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2})),$$

è un'immersione non iniettiva.

b) Sia data  $g : ]-\infty, +\infty[ \rightarrow ]0, 2\pi[$ ,  $t \mapsto g(t) = \pi + 2 \arctg t$ , e sia  $F$  quella dell'esercizio precedente. Verificare che l'applicazione  $G(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto G(t) = F(g(t))$ , è una immersione iniettiva che non è un imbedding e quindi  $G(\mathbb{R})$  "figura a otto" è una sottovarietà immersa non imbedded di  $\mathbb{R}^2$ .



Figura 2.2: figure relative all'Esercizio 2.40.

**Esercizio 2.41.** Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Si verifichi che  $X : M \rightarrow TM$  è un'immersione iniettiva.

Il classico teorema del rango costante per applicazioni differenziabili da  $A$  (aperto di  $\mathbb{R}^n$ ) in  $B$  (aperto di  $\mathbb{R}^{n'}$ ) la cui dimostrazione (cf. ad esempio [28], p.56) è abbastanza simile a quella del Teorema 1.15, è un teorema di natura locale. Pertanto possiamo enunciarlo direttamente per applicazioni tra varietà differenziabili.

**Teorema 2.42.** (del rango costante) *Sia  $f : A \subset M \rightarrow B \subset M'$  un'applicazione differenziabile, con  $\text{rang} f_{*p} = k$  per ogni  $p \in A$ , dove  $A$  è un aperto di  $M$  e  $B$  è un aperto di  $M'$ ,  $\dim M = n$ ,  $\dim M' = n'$ . Allora, per ogni  $p_0 \in A$  esistono due carte locali  $(U, \varphi, (x_i))$ ,  $p_0 \in U \subset A$ , e  $(V, \psi, (y_j))$  con  $f(U) \subset V \subset B$ , tali che*

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) &\longrightarrow \psi(V), \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_{n'}) = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

In particolare, se  $k = n \leq n'$ , allora

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) &\longrightarrow \psi(f(U)) \cap \mathbb{R}^n, \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_{n'}) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0), \end{aligned}$$

definisce chiaramente un diffeomorfismo; inoltre,

$$f(U) = \{q \in V : y_j(q) = 0, j = n + 1, \dots, n'\} \text{ e}$$

$$y_j(f(p)) = x_j(p) \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \text{ e per ogni } p \in U.$$

Pertanto, una conseguenza del Teorema 2.42 è il seguente risultato il quale mostra che la differenza tra sottovarietà immerse e sottovarietà imbedded è solo globale e non locale.

**Teorema 2.43.** *Siano  $M, M'$  varietà differenziabili,  $\dim M = n$ ,  $\dim M' = n'$  ed  $f : M \rightarrow M'$  un'immersione (quindi  $\text{rang} f_{*p} = n \leq n'$  per ogni  $p \in M$ ). Allora, per ogni  $p_0 \in M$  esistono  $(U, (x_i))$  intorno coordinato di  $p_0$ ,  $(V, (y_j))$  intorno coordinato di  $f(p_0)$ , tali che*

- (1)  $f|_U : U \rightarrow M'$  è un imbedding,
- (2)  $f(U) = \{q \in V : y_j(q) = 0, j = n+1, \dots, n'\}$  e  $y_j(f(p)) = x_j(p)$  per ogni  $j = 1, \dots, n$  e per ogni  $p \in U$ .

**Definizione 2.44.** Siano  $M, \bar{M}$  varietà differenziabili con  $\dim M = n \leq \bar{n} = \dim \bar{M}$ . Diremo che  $M$  è una sottovarietà di  $\bar{M}$  se  $M \subset \bar{M}$  e inoltre per ogni  $p_0 \in M$  esiste  $(\bar{U}, \bar{\varphi})$  carta locale di  $\bar{M}$ , con  $p_0 \in \bar{U}$ , e funzioni coordinate  $(y_1, \dots, y_{\bar{n}})$ , avente la seguente proprietà:  
 $U := \{p \in \bar{U} : y_{n+1}(p) = \dots = y_{\bar{n}}(p) = 0\} \subset \bar{U}$  è intorno coordinato di  $p_0$  in  $M$  con funzioni coordinate  $x_i = y_{i|U}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; quindi  $(U, \varphi)$  è carta locale di  $M$  con  $\varphi(p) = (y_1(p), \dots, y_n(p))$  per ogni  $p \in U$ . Le carte  $(U, \varphi)$  e  $(\bar{U}, \bar{\varphi})$  sono dette *carte locali speciali*.

Si noti che nella definizione di sottovarietà non è richiesto che  $U = \bar{U} \cap M$ , cioè non è detto che la topologia di  $M$  sia quella indotta da  $\bar{M}$ , in ogni caso la topologia di  $M$  è più fine di quella indotta da  $\bar{M}$ , cioè per ogni aperto  $\bar{A}$  di  $\bar{M}$ ,  $\bar{A} \cap M$  è un aperto di  $M$  (basta osservare che l'inclusione  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$  è differenziabile e quindi continua). In particolare  $\bar{U} \cap M$  è un aperto di  $M$ . La sottovarietà  $M$  è detta *sottovarietà regolare* di  $\bar{M}$  se la topologia di  $M$  coincide con quella indotta da  $\bar{M}$ . Una *sottovarietà aperta* di  $\bar{M}$  è costituita da un aperto  $A$  di  $\bar{M}$  con la struttura differenziabile indotta.

**Proposizione 2.45.** *Se  $M$  è una sottovarietà (risp. regolare) di  $\bar{M}$ , allora l'inclusione  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$  è un'immersione iniettiva (risp. un imbedding).*

*Dimostrazione.*  $i$  è chiaramente iniettiva. Inoltre, fissato  $p \in M$  e considerate carte locali speciali  $(U, \varphi, (x_k))$  e  $(\bar{U}, \bar{\varphi}, (y_h))$ , si ha

$$i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0), \text{ e quindi}$$

$$i_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_p \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Di conseguenza,  $\text{rg}(i_{*p}) = \dim M$ . Se  $M$  è anche regolare, allora la sua topologia è quella indotta da  $\bar{M}$  e quindi  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$  è un imbedding.  $\square$

Vale anche la proposizione inversa.

**Proposizione 2.46.** *Siano  $M, \bar{M}$  varietà differenziabili con  $M \subset \bar{M}$ . Se l'inclusione  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$  è un'immersione (risp. un imbedding), allora  $M$  è una sottovarietà (risp. regolare) di  $\bar{M}$ .*

*Dimostrazione.* Basta applicare il Teorema 2.43 e notare che se  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$  è un imbedding allora la topologia di  $M$  è quella indotta da  $\bar{M}$ .  $\square$

**Osservazione 2.47.** Sia  $M$  una sottovarietà immersa (risp. imbedded) di  $M'$  con immersione iniettiva (risp. imbedding)  $f : M \rightarrow M'$ . Sia  $N = f(M) \subset M'$ . Poiché  $f_{\#} : M \rightarrow N$  è una corrispondenza biunivoca, possiamo trasportare su  $N$  la topologia e la struttura differenziabile di  $M$  in modo naturale. Di conseguenza  $f_{\#}$  è un diffeomorfismo e quindi, essendo  $f$  un'immersione (risp. un imbedding), l'inclusione

$$i = f \circ f_{\#}^{-1} : N \rightarrow M \rightarrow M'$$

è un'immersione (risp. un imbedding). Pertanto, tenendo anche conto della Proposizione 2.46, le sottovarietà immerse (risp. imbedded) si possono identificare con le sottovarietà (risp. regolari).

**Proposizione 2.48.** *Ogni sottovarietà immersa compatta è imbedded.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  una sottovarietà compatta immersa in  $M'$ , con immersione  $f : M \rightarrow M'$ . Consideriamo su  $f(M)$  la topologia indotta da  $M'$ . Allora  $f : M \rightarrow f(M)$  è un'applicazione bigettiva e continua. Inoltre,  $f(M)$  è separato in quanto sottospazio di uno spazio separato. Pertanto, l'applicazione  $f : M \rightarrow f(M)$  è un omeomorfismo in quanto applicazione bigettiva e continua da uno spazio compatto in uno separato.  $\square$

Se  $M$  è una sottovarietà di  $\bar{M}$ , fissato  $p \in M$  e considerate carte locali speciali  $(U, (x_k))$  e  $(\bar{U}, (y_h))$ ,  $i_{*p} : T_p M \rightarrow i_{*p} T_p \bar{M} \subset T_p \bar{M}$  è un isomorfismo e inoltre  $i_{*p}(\partial/\partial x_k)_p = (\partial/\partial y_k)_p$ . Quindi  $i_{*p}$  permette di identificare  $T_p M$  con  $i_{*p} T_p \bar{M}$ ; inoltre, indicato con  $E_p$  il sottospazio generato da  $(\partial/\partial y_h)_p$  ( $h = n + 1, \dots, \bar{n}$ ), si ha

$$T_p \bar{M} = i_{*p} T_p M \oplus E_p = T_p M \oplus E_p.$$

Sia ora  $X \in \mathfrak{X}(U)$ , un campo di vettori  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$  si dice *estensione* di  $X$  su  $\bar{U}$ , e si scrive  $\bar{X}|_U = X$ , se  $\bar{X}_p = i_{*p} X_p \in i_{*p} T_p M \cong T_p M \forall p \in U$ . Risulta:

$$\bar{X}|_U = X \Leftrightarrow \bar{X}(\bar{f})|_U = X(\bar{f}|_U) \forall \bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{U}),$$

dove  $\bar{f}|_U = \bar{f} \circ i \in \mathcal{F}(U)$ . Infatti,

$$\begin{aligned} \bar{X}_p(\bar{f}) &= i_{*p} X_p(\bar{f}) \quad \forall p \in U \Leftrightarrow \bar{X}(\bar{f})(p) = X_p(\bar{f} \circ i) \quad \forall p \in U \\ &\Leftrightarrow \bar{X}(\bar{f})|_U = X(\bar{f}|_U). \end{aligned}$$

**Proposizione 2.49.** *Siano  $M_1, M_2$  sottovarietà di  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  rispettivamente. Inoltre, sia  $f : \bar{M}_1 \rightarrow \bar{M}_2$  un'applicazione differenziabile. Allora:*

( $j_1$ )  $f_1 = \bar{f}_{|M_1} : M_1 \rightarrow \bar{M}_2$  è differenziabile (in particolare, se  $M$  è sottovarietà di  $\bar{M}$  si ha  $g = \bar{g}_{|M} \in \mathcal{F}(M) \forall \bar{g} \in \mathcal{F}(\bar{M})$ );

( $j_2$ ) se  $\bar{f}(M_1) \subset M_2$ ,  $f_2 = \bar{f}_{|M_1} : M_1 \rightarrow M_2$  è differenziabile.

*Dimostrazione.* Per la ( $j_1$ ) basta osservare che  $f_1 = \bar{f} \circ i$  dove  $i : M_1 \hookrightarrow \bar{M}_1$ . Proviamo la ( $j_2$ ). Dato  $p_0 \in M_1$ , consideriamo  $(U, \varphi)$  carta locale di  $M_1$ ,  $p_0 \in U$ ,  $(V, \psi)$ ,  $(\bar{V}, \bar{\psi})$  carte locali speciali di  $M_2$  e  $\bar{M}_2$  con  $\bar{f}(p_0) \in V$ . Siccome  $\bar{f}(M_1) \subset M_2$ , possiamo assumere  $\bar{f}(U) \subset V$ . Poiché  $f_1$  è differenziabile, si ha che  $\bar{\psi} \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$  è differenziabile. D'altronde  $\bar{f}(U) \subset V \subset \bar{V}$ , per cui

$$\bar{\psi} \circ f_1 \circ \varphi^{-1} : (x_i) \rightarrow (y_1(x_i), \dots, y_{n_2}(x_i), 0, \dots, 0).$$

Di conseguenza anche

$$\psi \circ f_2 \circ \varphi^{-1} : (x_i) \rightarrow (y_1(x_i), \dots, y_{n_2}(x_i))$$

è differenziabile, ossia  $f_2$  è differenziabile in un intorno di  $p_0$ .  $\square$

**Corollario 2.50.** *Sia  $M$  una sottovarietà di  $\bar{M}$ . Allora  $TM$  è una sottovarietà di  $T\bar{M}$ . Inoltre, se  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ , si ha*

(a)  $\bar{X}_{|M} : M \rightarrow T\bar{M}$  è differenziabile;

(b) se  $\bar{X}(M) \subset TM$ , ossia  $\bar{X}_p \in T_p M$  per ogni  $p \in M$ , allora

$$X = \bar{X}_{|M} \in \mathfrak{X}(M).$$

*Dimostrazione.* Se  $M$  è una sottovarietà di  $\bar{M}$ , allora  $M \subset \bar{M}$  e  $T_p M \subset T_p \bar{M}$  per ogni  $p \in M$ , quindi  $TM \subset T\bar{M}$ . Inoltre, l'inclusione  $i : TM \hookrightarrow T\bar{M}$ , considerando coordinate locali speciali su  $M$  e  $\bar{M}$ , è data da

$$i : (x_1, \dots, x_n, \xi^1, \dots, \xi^n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \xi^1, \dots, \xi^n, 0, \dots, 0).$$

Pertanto  $i : TM \hookrightarrow T\bar{M}$  è un'immersione e quindi, per la Proposizione 2.46,  $TM$  è una sottovarietà di  $T\bar{M}$ . Inoltre,  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  si può pensare come una applicazione differenziabile da  $\bar{M}$  in  $T\bar{M}$ . Quindi, per avere (a) e (b), basta applicare la Proposizione 2.49 con  $\bar{M}_1 = \bar{M}$ ,  $\bar{M}_2 = T\bar{M}$ ,  $M_1 = M$  e  $M_2 = TM$ .  $\square$

Il Corollario 2.50 implica in particolare che i campi vettoriali  $X, Y, Z$  (considerati dopo il Teorema 2.17) che parallelizzano  $\mathbb{S}^3$  sono elementi di  $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$  (cf. anche Esempio 2.56).

**Proposizione 2.51.** *Sia  $M$  una sottovarietà di  $\bar{M}$  con  $n = \dim M$  e  $\bar{n} = \dim \bar{M}$ . Per ogni  $p_0 \in M$ , esistono  $(U, \varphi)$  e  $(\bar{U}, \bar{\varphi})$  intorni coordinati speciali di  $p_0$ , tali che:*

(1)  $\forall f \in \mathcal{F}(U)$ ,  $\exists \bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{U})$  tale che  $\bar{f}_{|U} = f$ ;

(2)  $\forall X \in \mathfrak{X}(U)$   $\exists \bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$  estensione di  $X$ ;

(3) se  $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$  sono estensioni di  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , allora

$$[\bar{X}, \bar{Y}] \text{ è un'estensione di } [X, Y].$$

*Dimostrazione.* Siano  $(U, \varphi, (x_i))$  e  $(\bar{U}, \bar{\varphi}, (y_j))$  carte locali speciali con  $p_0 \in U$ . Poiché  $\bar{\varphi}(\bar{U})$  è un intorno aperto di  $\bar{\varphi}(p_0)$ , possiamo assumere che sia un

intorno sferico aperto di centro il punto  $\bar{\varphi}(p_0) = (y_1^0, \dots, y_n^0, 0, \dots, 0)$ . Componendo con la traslazione definita da  $\bar{\varphi}(p_0)$ , possiamo assumere che  $\bar{\varphi}(p_0) = 0$ . Inoltre, componendo entrambe le applicazioni coordinate speciali con tale traslazione otteniamo ancora applicazioni coordinate speciali. Sia quindi  $\bar{\varphi}(\bar{U}) = B^{\bar{n}}$  intorno sferico aperto di  $\mathbb{R}^{\bar{n}}$  di centro  $0 = \bar{\varphi}(p_0) = \varphi(p_0)$  e raggio  $r$ , allora  $\varphi(U) = \{y \in B^{\bar{n}} : y_{n+1} = \dots = y_{\bar{n}} = 0\} = B^n$  intorno sferico di  $\mathbb{R}^n$  di centro  $0$  e raggio  $r$ . La proiezione

$$\pi : B^{\bar{n}} \rightarrow B^n, (y_1, \dots, y_n, \dots, y_{\bar{n}}) \mapsto (x_1, \dots, x_n) := (y_1, \dots, y_n)$$

è differenziabile. Pertanto, l'applicazione  $\zeta = \varphi^{-1} \circ \pi \circ \bar{\varphi} : \bar{U} \rightarrow U$  è differenziabile e

$$\forall p \in U : \zeta(p) = \varphi^{-1}(\pi(\bar{\varphi}(p))) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p.$$

Adesso verifichiamo le proprietà enunciate.

(1)  $\forall f \in \mathcal{F}(U)$ ,  $\bar{f} = f \circ \zeta \in \mathcal{F}(\bar{U})$  e  $\bar{f}|_U = f$ .

(2) Sia  $X \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $X = \sum_{j=1}^n \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j}$  con  $\xi^j \in \mathcal{F}(U)$ .

Posto  $\bar{\xi}^j = \xi^j \circ \zeta \in \mathcal{F}(\bar{U})$ ,  $\bar{\xi}^j|_U = \xi^j$ , allora  $\bar{X} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^j \frac{\partial}{\partial y_j} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$  e

$$\bar{X}_p = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}^j(p) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = \sum_{j=1}^n \xi^j(p) (i_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p = (i_*)_p X_p \quad \forall p \in U.$$

La (3) segue da

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}] (\bar{f})|_U &= (\bar{X}\bar{Y}(\bar{f}))|_U - (\bar{Y}\bar{X}(\bar{f}))|_U = X(\bar{Y}(\bar{f})|_U) - Y(\bar{X}(\bar{f})|_U) \\ &= X(Y(\bar{f}|_U)) - Y(X(\bar{f}|_U)) = [X, Y](\bar{f}|_U), \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{U}). \end{aligned}$$

□

**Osservazione 2.52.** Siano  $U$  e  $\bar{U}$  intorni coordinati speciali come nella Proposizione 2.51. Sia  $V$  un campo differenziabile di vettori tangenti a  $\bar{M}$  definito su  $U$  (aperto di  $M$ ), ciò vuol dire che

$$V(p) = \sum_{j=1}^{\bar{n}} f^j(p) (\partial/\partial y_j)_p, \quad \text{dove } f^j \in \mathcal{F}(U).$$

Dalla (1) della Proposizione 2.51 segue che esiste  $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$  estensione di  $V$ .

**Esercizio 2.53.** Sia  $M$  una sottovarietà imbedded di  $\bar{M}$  con  $\bar{M}$  paracompatta. Si verifichi che per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$  e per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  esistono  $\bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{M})$  e  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  tali che  $\bar{f}|_M = f$  e  $\bar{X}|_M = X$ .

**Esempio 2.54.  $n$ -superfici regolari.**

Consideriamo una funzione differenziabile  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e sia  $M = F^{-1}(c)$ . Se per ogni  $p \in M$  la matrice jacobiana  $J(F)_p$  ha rango  $m$ , allora  $M$ , detta  *$n$ -superficie regolare*, ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $n$ . La costruzione della struttura differenziabile su  $M$  (cf. Teorema 1.15 e commento successivo) mostra che  $M$  è una sottovarietà regolare di  $\mathbb{R}^{n+m}$ . Per ogni  $p \in M$ , un vettore  $V_p \in T_p M$  lo possiamo pensare del tipo  $V_p = \dot{\gamma}(0)$  dove  $\gamma(t)$  è una curva di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  (cf. Proposizione 2.33), quindi  $F(\gamma(t)) = c$ . Allora



$$F_{*p}(V_p) = F_{*p}(\dot{\gamma}(0)) = \frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))(0) = 0.$$

D'altronde  $T_p M$  e  $\ker F_{*p}$  sono entrambi sottospazi di dimensione  $n$  dello spazio  $T_p \mathbb{R}^{n+m}$ , pertanto  $T_p M = \ker F_{*p}$ .

Il caso delle  $n$ -superfici in effetti è solo un caso particolare del seguente teorema, la cui dimostrazione si ottiene esattamente come per il Teorema 1.15 esprimendo la  $F$  in coordinate locali.

**Teorema 2.55.** *Sia  $F : \bar{M} \rightarrow M$  un'applicazione differenziabile con  $\bar{n} = \dim \bar{M} > \dim M = m$ . Sia  $M_0 = F^{-1}\{q_0\} \subset \bar{M}$  con  $q_0 \in F(\bar{M})$ . Se per ogni  $p \in M_0$ , il differenziale  $F_{*p}$  è suriettivo, cioè  $\text{rang} F_{*p} = m = \dim M$ , allora  $M_0$  ha una struttura di sottovarietà regolare di  $\bar{M}$  di dimensione  $\bar{n} - m$  e  $T_p M_0 = \ker F_{*p}$  per ogni  $p \in M_0$ . In particolare, se  $F$  è una sommersione (cioè  $F_{*p}$  è suriettivo per ogni  $p \in \bar{M}$ ),  $M_0 = F^{-1}\{q_0\}$  è una sottovarietà regolare di  $\bar{M}$  di dimensione  $\bar{n} - m$  per ogni  $q_0 \in F(\bar{M})$*

**Esempio 2.56.** Sia  $M$  un'ipersuperficie regolare di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Quindi,  $M = f^{-1}(c)$  dove  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  e per ogni  $p \in M$  il gradiente  $(\nabla f)_p \neq 0$ . In questo caso:

$$T_p M = (\nabla f)_p^\perp \quad \forall p \in M.$$

Sia  $V_p \in T_p M$ ,  $V_p = \dot{\gamma}(0)$  dove  $\gamma(t)$  è una curva di  $M$  con  $\gamma(0) = p$ , quindi  $f(\gamma(t)) = c$ . Allora, posto  $f(t) = f(\gamma(t)) = c$ , si ha

$$g_0(V_p, (\nabla f)_p) = g_0(\dot{\gamma}(0), (\nabla f)_p) = \frac{df}{dt}(0) = 0,$$

dove  $g_0$  denota il prodotto scalare euclideo di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pertanto  $T_p M \subset (\nabla f)_p^\perp$  e quindi  $T_p M = (\nabla f)_p^\perp$ . In particolare, per la sfera  $\mathbb{S}^n$ :

$$T_p \mathbb{S}^n \equiv p^\perp.$$

Sia ora  $M$  una  $n$ -superficie regolare di  $\mathbb{R}^{n+m}$ :  $M = F^{-1}(c)$ , dove  $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$  ed  $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$ , è una funzione differenziabile, con matrice jacobiana  $J(F)_p$  di rango costante  $m$  per ogni  $p \in M$ . Notiamo che  $M$  è l'intersezione delle  $m$  ipersuperfici regolari  $M_1 = F_1^{-1}(c_1), \dots, M_m = F_m^{-1}(c_m)$ , le quali sono indipendenti nel senso che i vettori  $(\nabla F_1)_p, \dots, (\nabla F_m)_p$  sono linearmente indipendenti (difatti sono le  $m$  righe di  $J(F)_p$ ). Inoltre, per ogni  $p \in M$ , si ha

$$T_p M = \bigcap_{i=1}^m T_p M_i.$$

Infatti, per ogni  $i = 1, \dots, m$ , abbiamo

$$V_p \in T_p M \Leftrightarrow F_{*p} V_p = 0 \Leftrightarrow J(F)_p V_p = 0 \Leftrightarrow g_0(V_p, (\nabla F_i)_p) = 0.$$

**Esercizio 2.57.** Si consideri l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^2, (p, v) \mapsto \left( \frac{\|p\|^2 - 1}{2}, g_0(p, v) \right),$$

dove  $g_0$  denota il prodotto scalare euclideo di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Si verifichi che:

$$F^{-1}\{(0, 0)\} = T\mathbb{S}^n \text{ è una sottovarietà regolare di } \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} = T\mathbb{R}^{n+1}.$$



**Esempio 2.58. La bottiglia di Klein e il piano proiettivo.**

Dall'Esempio 2.54 segue che le superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$  sono sottovarietà regolari (quindi imbedded) di  $\mathbb{R}^3$ . D'altronde le superfici regolari compatte di  $\mathbb{R}^3$  sono orientabili, pertanto le 2-varietà connesse compatte non orientabili non possono essere imbedded in  $\mathbb{R}^3$ . Tuttavia, la bottiglia di Klein  $\mathcal{K}$  e il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  (che sono superfici non orientabili) possono essere imbedded in  $\mathbb{R}^4$ . Per la bottiglia di Klein  $\mathcal{K}$ , consideriamo l'applicazione

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, (\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos \varphi \cos \vartheta, \cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \varphi \sin \frac{\vartheta}{2}).$$

Poiché  $G(\vartheta, \varphi) = G(\vartheta + 2m\pi, 2n\pi - \varphi)$ ,  $G$  induce l'applicazione

$$\psi : \mathcal{K} = ([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, p = [x] \mapsto \psi(p) = G(x),$$

dove  $\mathcal{R}$  è la relazione di equivalenza che identifica  $(0, \varphi)$  con  $(2\pi, 2\pi - \varphi)$  e  $(\vartheta, 0)$  con  $(\vartheta, 2\pi)$ . Inoltre, indicata con  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  la proiezione naturale di rivestimento e con

$$\pi_1 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{K} = (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)/\{\pm I\}$$

la proiezione quoziente (considerando  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  come una superficie simmetrica rispetto all'origine), risulta  $G = \psi \circ \pi_1 \circ \pi$ . Poiché  $\pi$  e  $\pi_1$  sono diffeomorfismi locali,  $\psi$  è differenziabile e il rango di  $\psi_*$  coincide con il rango di  $G_*$  che è 2. Pertanto  $\psi$  è una immersione, e quindi un imbedding essendo  $\mathcal{K}$  un compatto. Per il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$ , consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz) \text{ e } f = F|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

Poiché  $f(p) = f(-p)$ ,  $f$  induce un'applicazione  $\widehat{f} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $[p] \mapsto f(p)$ . In coordinate locali  $f$  è data da :

$$f \circ \varphi^{-1} : (x, y) \mapsto (x, y, D) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xD, yD),$$

dove  $D = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Pertanto,  $f$  ha rango 2 e quindi è un'immersione. D'altronde,  $\widehat{f} \circ \pi = f$ , dove  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  è l'applicazione di rivestimento, per cui anche  $\widehat{f}$  è un'immersione. Inoltre si vede facilmente che  $\widehat{f}$  è iniettiva, e quindi, per la compattezza di  $\mathbb{P}^2$ , si conclude che  $\widehat{f}$  è un imbedding.

Infine, ricordiamo che Whitney nel 1936 dimostrò che ogni varietà differenziabile  $M$  può essere imbedded in  $\mathbb{R}^m$  con  $m \leq 2 \dim M + 1$  (cfr. [14], p. 195).

## 2.6 Tensori su una varietà differenziabile

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Un tensore  $T$  su  $M$  di tipo  $(s, r)$  è una applicazione  $\mathcal{F}(M)$ -multilineare

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{s\text{-volte}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-volte}} \longrightarrow \mathcal{F}(M).$$

$s$  è detto indice di controvarianza ed  $r$  indice di covarianza. Un tensore covariante di ordine  $r$  è un tensore di tipo  $(0, r)$ , un tensore controvariante di ordine  $s$  è un tensore di tipo  $(s, 0)$ . Denotiamo con  $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$  l'insieme di tutti i tensori di tipo  $(s, r)$  su  $M$  e con  $\mathfrak{X}^r(M) = \mathfrak{X}^{0,r}(M)$  l'insieme di tutti i tensori covarianti di ordine  $r$  su  $M$ .  $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$  e  $\mathfrak{X}^r(M)$  hanno una struttura di  $\mathcal{F}(M)$ -modulo definendo in modo naturale  $T_1 + T_2$ ,  $\lambda T$  e  $fT$ . Si noti che  $\mathfrak{X}^1(M) = \mathfrak{X}^*(M) = \Lambda^1(M)$   $\mathcal{F}(M)$ -modulo delle 1-forme differenziali su  $M$ . Se  $h, k$  sono indici con  $h \leq s$ ,  $k \leq r$ , si può definire l'operazione di contrazione degli indici  $(h, k)$ ,  $c_k^h : \mathfrak{X}^{s,r}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{s-1,r-1}(M)$ , nel modo seguente. Sia  $\{E_1, \dots, E_n\}$  una base locale di  $\mathfrak{X}(M)$  e sia  $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$  la corrispondente base locale duale. Allora

$$\begin{aligned} c_k^h(T)(\omega^1, \dots, \omega^{s-1}, X_1, \dots, X_{r-1}) \\ = \sum_{j=1}^n T(\omega^1, \dots, \omega^{h-1}, \theta^j, \omega^h, \dots, \omega^{s-1}, X_1, \dots, X_{k-1}, E_j, X_{k+1}, \dots, X_{r-1}) \end{aligned}$$

per ogni  $\omega^1, \dots, \omega^{s-1} \in \mathfrak{X}^*(M)$ ,  $X_1, \dots, X_{r-1} \in \mathfrak{X}(M)$ . Si verifica che la contrazione è ben definita, cioè non dipende dalla particolare base considerata.

Una  $r$ -forma differenziale  $\alpha$  su  $M$  è un tensore covariante di ordine  $r$  antisimmetrico, ossia:

$$\alpha(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) = -\alpha(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_r) \quad \forall i, j = 1, \dots, r.$$

Denotiamo con  $\Lambda^r(M)$  l'insieme di tutte le  $r$ -forme differenziali su  $M$ , anche  $\Lambda^r(M)$  ha una strutturale naturale di  $\mathcal{F}(M)$ -modulo. Se  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(r))$  è una permutazione degli indici  $(1, 2, \dots, r)$ , allora per ogni  $\alpha \in \Lambda^r(M)$ :

$$\alpha(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(r)}) = \epsilon(\sigma)\alpha(X_1, X_2, \dots, X_r),$$

dove  $\epsilon(\sigma)$  denota il segno della permutazione considerata. Sia  $\alpha \in \Lambda^r(M)$ , se  $X_1, X_2, \dots, X_r$  sono linearmente dipendenti, allora

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_r) = 0.$$

In particolare,  $\Lambda^r(M) = \{0\}$  se  $r > n$ . Inoltre, si pone  $\Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M)$ .

Un tensore  $T$  covariante di ordine  $r$  si dice simmetrico se:

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_r) = T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_r).$$

Un'applicazione  $\mathcal{F}(M)$ -multilineare

$$\tilde{T} : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-volte}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

si identifica in modo naturale con un tensore  $T \in \mathfrak{X}^{1,r}(M)$  :

$$T(\theta, X_1, \dots, X_r) = \theta(\tilde{T}(X_1, \dots, X_r)).$$

Il prodotto tensoriale

$$\otimes : \mathfrak{X}^r(M) \times \mathfrak{X}^p(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^{r+p}(M), \quad (T_1, T_2) \longmapsto T_1 \otimes T_2,$$

è definito da

$$(T_1 \otimes T_2)(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_p) = T_1(X_1, \dots, X_r)T_2(Y_1, \dots, Y_p).$$

Tale prodotto è  $\mathcal{F}(M)$ -bilineare, inoltre è associativo:

$$(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3).$$

In particolare, il prodotto tensoriale di  $r$  1-forme definisce un tensore covariante di ordine  $r$ . Su  $\mathfrak{X}^r(M)$  si possono definire gli operatori  $\mathcal{S}$  (di simmetrizzazione) ed  $\mathcal{A}$  (di antisimmetrizzazione):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(T)(X_1, \dots, X_r) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}), \\ \mathcal{A}(T)(X_1, \dots, X_r) &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) T(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}), \end{aligned}$$

dove in entrambi i casi la sommatoria è estesa a tutte le  $r!$  permutazioni  $\sigma$  degli indici  $1, \dots, r$ .  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{A}$  sono applicazioni  $\mathcal{F}(M)$ -lineari. Per  $r = 2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(T)(X_1, X_2) &= \frac{1}{2} (T(X_1, X_2) + T(X_2, X_1)), \\ \mathcal{A}(T)(X_1, X_2) &= \frac{1}{2} (T(X_1, X_2) - T(X_2, X_1)), \\ T &= \mathcal{S}(T) + \mathcal{A}(T). \end{aligned}$$

Se  $\alpha \in \Lambda^r(M)$  e  $\beta \in \Lambda^s(M)$ , il *prodotto esterno*  $\alpha \wedge \beta$  è la  $(r+s)$ -forma

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(r+s)!}{r!s!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta).$$

In particolare, per  $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$ ,  $\gamma \in \Lambda^2(M)$  e  $\omega \in \Lambda^p(M)$ :

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(X, Y) &= \alpha(X)\beta(Y) - \beta(X)\alpha(Y), \tag{2.3} \\ (\alpha \wedge \gamma)(X, Y, Z) &= \alpha(X)\gamma(Y, Z) + \alpha(Z)\gamma(X, Y) + \alpha(Y)\gamma(Z, X), \\ (\alpha \wedge \omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \alpha(X_i) \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}), \end{aligned}$$

per ogni  $X, Y, Z, X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$ .

Il prodotto esterno  $\wedge : \Lambda^r(M) \times \Lambda^s(M) \rightarrow \Lambda^{r+s}(M)$  è  $\mathcal{F}(M)$ -bilineare, associativo e verifica

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha.$$

Quindi, se  $\alpha \in \Lambda^{2r+1}(M)$  si ha  $\alpha \wedge \alpha = 0$ . Se  $\beta \in \Lambda^{2r}(M)$ , in generale si ha  $\beta \wedge \beta \neq 0$ . Ad esempio, se  $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4 \in \Lambda^1(M)$  sono quattro 1-forme linearmente indipendenti,  $\beta = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4$  è una 2-forma e

$$\beta \wedge \beta = 2\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \wedge \theta^4 \neq 0.$$

Altra proprietà del prodotto esterno: se  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(M)$  e  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ , allora

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(X_1, \dots, X_k) = \det(\alpha_i(X_j)). \quad (2.4)$$

Per provare la (2.4) procediamo per induzione su  $k$ . Per  $k = 1$ , la (2.4) è ovviamente vera. Supponiamo che essa valga per  $k - 1$ . Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga, si ottiene

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \alpha_1(X_1) & \dots & \alpha_1(X_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(X_1) & \dots & \alpha_k(X_k) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha_1(X_j) \det \begin{pmatrix} \alpha_2(X_1) & \dots & \widehat{\alpha_2(X_j)} & \dots & \alpha_2(X_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(X_1) & \dots & \widehat{\alpha_k(X_j)} & \dots & \alpha_k(X_k) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha_1(X_j) (\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(X_1, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k) \\ &= (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(X_1, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Se  $(x_1, \dots, x_n)$  sono coordinate locali definite in  $U$ ,  $\{\partial/\partial x_i\}$  è base locale per  $\mathfrak{X}(M)$  e  $\{dx_i\}$  è base locale per  $\Lambda^1(M)$ . Gli  $n^r$  prodotti tensoriali

$$\{dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r}\}_{1 \leq i_1 \dots i_r \leq n}$$

costituiscono una base locale per  $\mathfrak{X}^r(M)$ . Per ogni  $T \in \mathfrak{X}^r(M)$  si ha

$$T = \sum_{1 \leq i_1 \dots i_r \leq n} T_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r},$$

dove  $T_{i_1 \dots i_r} = T(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}) \in \mathcal{F}(U)$ . Gli  $\binom{n}{r}$  prodotti esterni

$$\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n}$$

costituiscono una base locale per  $\Lambda^r(M)$ . Per ogni  $\alpha \in \Lambda^r(M)$  si ha

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r},$$

dove  $\alpha_{i_1 \dots i_r} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right) \in \mathcal{F}(U)$ . La  $n$ -forma

$$\omega_0 = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

costituisce una base locale per  $\Lambda^n(M)$ . Sia  $\{e_i\}$  una base per  $\mathfrak{X}(U)$ , e sia  $\{\theta^i\}$  la corrispondente base (duale) di  $\Lambda^1(U)$ . Allora

$$\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_r}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \begin{cases} +1 & \text{se } (j_1, \dots, j_r) \text{ è una permutazione} \\ & \text{pari di } (i_1, \dots, i_r), \\ -1 & \text{se } (j_1, \dots, j_r) \text{ è una permutazione} \\ & \text{dispari di } (i_1, \dots, i_r), \\ 0 & \text{se } (j_1, \dots, j_r) \text{ non è una permutazione} \\ & \text{di } (i_1, \dots, i_r). \end{cases}$$

Sia ora  $\{v_i\}$  un'altra base per  $\mathfrak{X}(U)$  con  $v_j = \sum_i a_{ij} e_i$ ,  $a_{ij} \in \mathcal{F}(U)$ . Indichiamo con  $\{\eta^i\}$  la base di  $\Lambda^1(U)$  duale di  $\{v_i\}$ . Poniamo

$$\omega = \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \quad \text{e} \quad \omega' = \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n.$$

Dalla (2.4) segue che

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = \det(\theta^i(v_j)) = \det(a_{ij})$$

e

$$\omega'(e_1, \dots, e_n) = \det(\eta^i(e_j)) = \det(a'_{ij}),$$

dove  $(a'_{ij})$  è la matrice inversa di  $(a_{ij})$ , e quindi

$$\omega = \det(a_{ij})\omega' \quad \text{e} \quad \omega' = \det(a'_{ij})\omega.$$

Se  $\Omega$  è una arbitraria  $n$ -forma, da

$$\Omega(v_1, \dots, v_n)\omega' = \Omega = \Omega(e_1, \dots, e_n)\omega = \Omega(e_1, \dots, e_n)\det(a_{ij})\omega'$$

segue che

$$\Omega(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij})\Omega(e_1, \dots, e_n).$$

Facciamo ora alcune considerazioni sui tensori di tipo  $(s, r)$ , che per semplicità di notazione riferiremo a uno spazio vettoriale reale  $E$  di dimensione  $n$ . Denotiamo con  $E^*$  lo spazio duale e con  $E^{**}$  lo spazio biduale. Consideriamo una base  $\{e_i\}$  di  $E$ ,  $\{\theta^i\}$  la base di  $E^*$  duale di  $\{e_i\}$  e  $\{\phi_i\}$  la base di  $E^{**}$  duale di  $\{\theta^i\}$ . Sia  $X$  la matrice colonna delle componenti di un vettore  $v$  di  $E$  rispetto alla base  $\{e_i\}$ . Indichiamo con  $\theta$  l'elemento di  $E^*$  avente come componenti  $X$  rispetto alla base  $\{\theta^i\}$  e con  $\phi$  l'elemento del biduale  $E^{**}$  avente come componenti  $X$  rispetto alla base  $\{\phi_i\}$ . Adesso consideriamo una nuova base  $\{e'_i\}$ ,  $e'_j = \sum_i a_{ij} e_i$ , e siano  $\{\theta'^i\}$  e  $\{\phi'_i\}$  le corrispondenti basi di  $E^*$  e  $E^{**}$ . Indichiamo con  $X'$ ,  $X''$ ,  $X'''$  le componenti di  $v$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  rispetto alle rispettive nuove basi. Allora, posto  $A = (a_{ij})$ , si ha:

$$X' = A^{-1}X, \quad X'' = A^T X, \quad X''' = A^{-1}X.$$

Quindi  $E$  e  $E^*$ , pur essendo isomorfi, non sono identificabili nel senso che l'isomorfismo non è canonico ossia dipende dalla base fissata. Invece,  $E$  e  $E^{**}$  si possono identificare in quanto tra loro sussiste un isomorfismo naturale, e ogni vettore  $v$  di  $E$  si può pensare come una applicazione lineare  $v : E^* \rightarrow \mathbb{R}, \vartheta \mapsto \vartheta(v)$ . Se  $v, w \in E$ , si può quindi definire il prodotto tensoriale  $v \otimes w$  e il prodotto esterno  $v \wedge w$ . Inoltre,  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s}$  rappresenta un tensore di tipo  $(s, 0)$  su  $E$ . Naturalmente,  $E$  e  $E^*$  si possono identificare in modo naturale quando  $E$  è munito di un prodotto scalare. Si può dimostrare che gli  $n^{s+r}$  prodotti tensoriali

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_r}\}_{1 \leq i_1 \dots i_s \leq n; 1 \leq j_1 \dots j_r \leq n;}$$

costituiscono una base per lo spazio  $\mathcal{T}^{s,r}(E)$ , e per ogni  $T \in \mathcal{T}^{s,r}(E)$  :

$$T = \sum T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes \theta^{j_1} \otimes \dots \otimes \theta^{j_r},$$

dove  $T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = T(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_s}, e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ . Analogamente, se  $M$  è una varietà differenziabile e  $(x_1, \dots, x_n)$  un sistema di coordinate locali, gli  $n^{s+r}$  prodotti tensoriali

$$\{(\partial/x_{i_1}) \otimes \dots \otimes (\partial/x_{i_s}) \otimes dx_{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{j_r}\}_{1 \leq i_1 \dots i_s \leq n; 1 \leq j_1 \dots j_r \leq n;}$$

costituiscono una base locale per  $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$ . In termini di componenti locali, la contrazione  $c_h^k$  si esprime con

$$c_k^h(T)_{j_1 \dots j_{r-1}}^{i_1 \dots i_{s-1}} = \sum_{j=1}^n T_{j_1 \dots i_{k-1} j i_k \dots j_{r-1}}^{i_1 \dots i_{h-1} j i_h \dots i_{s-1}}.$$

**Esercizio 2.59.** Si verifichi che un tensore  $T$  di tipo  $(1, r)$  su  $M$  si può identificare in modo naturale con una applicazione  $\mathcal{F}(M)$ -multilineare

$$\tilde{T} : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r\text{-volte}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

**Osservazione 2.60.** Se  $S \in \mathfrak{X}^r(M)$ , per ogni  $p \in M$  si può considerare il tensore  $S_p$  covariante di ordine  $r$  su  $T_p M$  :

$$S_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \right)_p \right) := S \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \right) (p).$$

Viceversa, se  $S$  è un campo di tensori covarianti di ordine  $r$  su  $M$ , cioè per ogni  $p \in M$  è definito un tensore  $S_p$  covariante di ordine  $r$  su  $T_p M$ , e inoltre per ogni  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$

$$S(X_1, \dots, X_r) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto S(X_1, \dots, X_r)(p) := S_p(X_{1p}, \dots, X_{rp}),$$

è un'applicazione differenziabile, allora  $S \in \mathfrak{X}^r(M)$ . Analogo discorso vale per le  $r$ -forme e più in generale per i tensori di tipo  $(s, r)$ .

**L'applicazione duale**

Sia  $F : M \rightarrow N$  un'applicazione differenziabile tra le varietà  $M$  ed  $N$ . Per ogni  $p \in M$ , l'applicazione duale (del differenziale  $F_{*p}$ ) è l'applicazione lineare

$$F_p^* : T_{F(p)}^* N \longrightarrow T_p^* M, \quad w \longmapsto F_p^* w,$$

dove  $(F_p^* w)(V_p) = w(F_{*p} V_p)$  per ogni  $V_p \in T_p M$ . Consideriamo  $(x_i)$  coordinate locali definite in un intorno di  $p$  e  $(y_j)$  coordinate locali definite in un intorno di  $F(p)$ . Se  $w = \sum w_j (dy_j)_{F(p)}$ , allora

$$\begin{aligned} F_p^* w &= \sum_j w_j F_p^* (dy_j)_{F(p)} = \sum_j w_j \sum_i (F_p^* (dy_j)_{F(p)}) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (dx_i)_p \\ &= \sum_{i,j} w_j (dy_j)_{F(p)} (F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p) (dx_i)_p, \end{aligned}$$

dove

$$F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_k \frac{\partial y_k \circ F}{\partial x_i} (p) \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{F(p)}.$$

Quindi,

$$F_p^* (dy_j)_{F(p)} = \sum_i \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i} (p) (dx_i)_p,$$

e

$$F_p^* w = \sum_i \left( \sum_j w_j \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i} (p) \right) (dx_i)_p. \quad (2.5)$$

L'applicazione duale

$$F^* : \mathfrak{X}^*(N) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M), \quad \omega \longmapsto F^* \omega,$$

è definita da

$$(F^* \omega)_p = F_p^* \omega_{F(p)}, \quad (2.6)$$

e quindi

$$(F^* \omega)(X)(p) = (F^* \omega)_p(X_p) = (F_p^* \omega_{F(p)})(X_p) = \omega_{F(p)}(F_{*p} X_p) \quad (2.7)$$

per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ .

In termini di coordinate locali, se  $\omega = \sum \omega_j dy_j$ , da (2.5) e (2.6) segue

$$F^* \omega = \sum_i \left( \sum_j \omega_j \circ F \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i} \right) dx_i. \quad (2.8)$$

Tale formula implica

$$F^*(f\omega) = (F^*f)F^*\omega, \quad \text{dove } F^*f = f \circ F.$$

Inoltre, dalla (2.8) segue che

$$F^*dy_j = \sum_i \frac{\partial y_j \circ F}{\partial x_i} dx_i = d(y_j \circ F) \quad \text{e quindi } F^*dy_j = d(F^*y_j).$$

Di conseguenza,  $F^*$  commuta con il differenziale:

$$F^*df = d(F^*f) \quad \forall f \in \mathcal{F}(N).$$

Se  $F$  è un diffeomorfismo,  $F_{*p}X_p = (F_*X)_{F(p)}$  e quindi dalla (2.7), si ottiene

$$(F^*\omega)(X) = \omega(F_*X) \circ F.$$

Se  $F : M \rightarrow N$  e  $G : N \rightarrow P$  sono applicazioni differenziabili, si ha

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*, \quad \text{cioè } (G \circ F)_p^* = F_p^* \circ G_{F(p)}^*.$$

In particolare, se  $F : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo,  $F_p^*$  è un isomorfismo e

$$(F_p^*)^{-1} = (F^{-1})_{F(p)}^*.$$

L'applicazione duale si estende ai tensori covarianti:

$$F^* : \mathfrak{X}^r(N) \rightarrow \mathfrak{X}^r(M), \quad T \mapsto F^*T,$$

dove

$$(F^*T)(X_1, \dots, X_r)(p) = T_{F(p)}(F_{*p}X_{1p}, \dots, F_{*p}X_{rp})$$

per ogni  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ .  $F^*$  soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} F^*(T_1 + T_2) &= F^*(T_1) + F^*(T_2), & F^*(fT) &= F^*(f)F^*(T), \\ F^*(T_1 \otimes T_2) &= F^*(T_1) \otimes F^*(T_2), & F^*(\alpha \wedge \beta) &= F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta). \end{aligned}$$

Localmente, se

$$T = \sum_{1 \leq i_1 \dots i_r \leq m} T_{i_1 \dots i_r} dy_{i_1} \otimes \dots \otimes dy_{i_r}, \quad \dim N = m,$$

allora

$$F^*T = \sum_{1 \leq i_1 \dots i_r \leq n} (T_{i_1 \dots i_r} \circ F) d(y_{i_1} \circ F) \otimes \dots \otimes d(y_{i_r} \circ F).$$

Se  $F : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo,

$$(F^*T)(X_1, \dots, X_r) = T(F_*X_1, \dots, F_*X_r) \circ F.$$

Inoltre, quando  $F$  è un diffeomorfismo, possiamo definire  $F^*$  su  $\mathfrak{X}^{s,r}(N)$ . In tal caso, se  $Y \in \mathfrak{X}(N) \equiv \mathfrak{X}^{**}(N) = X^{1,0}(N)$ , poniamo  $F^*Y = F_*^{-1}Y$  e quindi  $F^*$  si può estendere a  $\mathfrak{X}^{s,r}(N)$  ponendo

$$F^*(Y_1 \otimes \dots \otimes Y_s \otimes \theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^r) = F^*(Y_1) \otimes \dots \otimes F^*(Y_s) \otimes F^*(\theta^1) \otimes \dots \otimes F^*(\theta^r),$$

dove  $Y_1, \dots, Y_s \in \mathfrak{X}(N)$  e  $\theta^1, \dots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(N)$ .



## 2.7 Differenziale esterno e derivata di Lie

Il differenziale sulle funzioni  $d : \mathcal{F}(M) = \Lambda^0(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)$  si estende a un operatore sulle  $r$ -forme  $d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ , detto *differenziale esterno*, e definito per ogni  $\alpha \in \Lambda^r(M)$  dalla formula

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i \alpha(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq r+1}^{r+1} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}). \end{aligned}$$

Il differenziale esterno verifica le seguenti proprietà:

$$d(\alpha + \alpha') = d\alpha + d\alpha', \quad d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f d\alpha,$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta,$$

$$d \circ d = 0,$$

per ogni  $\alpha, \alpha' \in \Lambda^r(M)$  e per ogni  $\beta \in \Lambda^s(M)$ . Di conseguenza, se  $\alpha \in \Lambda^r(M)$  è data localmente da  $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_r} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ , allora

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} d\alpha_{i_1 \dots i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Inoltre, se  $F : M \rightarrow N$  è un'applicazione differenziabile tra le varietà  $M$  ed  $N$ , vale

$$d \circ F^* = F^* \circ d',$$

dove  $d$  è il differenziale di  $M$  e  $d'$  è il differenziale di  $N$ . Formule esplicite, abbastanza semplici, si hanno per il differenziale di forme di grado basso. Per forme di grado zero si ha  $(df)(X) = X(f)$ . Se  $\alpha \in \Lambda^1(M)$  e  $\beta \in \Lambda^2(M)$ , abbiamo

$$(d\alpha)(X, Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y]) \quad (2.9)$$

e

$$\begin{aligned} (d\beta)(X, Y, Z) &= X\beta(Y, Z) - \beta([X, Y], Z) + Y\beta(Z, X) - \beta([Y, Z], X) \\ &+ Z\beta(X, Y) - \beta([Z, X], Y). \end{aligned}$$

Infine, si noti che il differenziale esterno permette di definire i gruppi di coomologia di de Rham  $H^k(M) = \ker d_k / \text{Im } d_{k-1}$ , dove  $d_k : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$  e  $\text{Im } d_{k-1} \subset \ker d_k$ . Tali gruppi sono in effetti spazi vettoriali reali che, se  $M$  è compatta e orientata, risultano anche di dimensione finita (cfr. [52], p. 69).

**Osservazione 2.61.** Alcuni autori definiscono il differenziale esterno con il coefficiente  $\frac{1}{r+1}$  che moltiplica tutto il secondo membro della definizione del differenziale  $d\alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda^r(M)$ , data all'inizio di questa sezione. In tal caso, se  $\alpha \in \Lambda^1(M)$ , la (2.9) diventa

$$(d\alpha)(X, Y) = \frac{1}{2}(X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X, Y])). \quad (2.10)$$

Questa formula è usata ad esempio in [11]. Quando si usa il coefficiente  $\frac{1}{r+1}$  nella definizione del differenziale esterno di  $r$ -forme, per il prodotto esterno di solito si usa la seguente definizione. Se  $\alpha \in \Lambda^r(M)$  e  $\beta \in \Lambda^s(M)$ ,

$$\alpha \wedge \beta = \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)$$

dove  $\mathcal{A}$  è l'operatore di antisimmetrizzazione. Quindi,

$$\alpha \wedge \beta(X_1, \dots, X_{r+s}) = \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \beta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)})$$

Con questa definizione, per  $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$  e  $\gamma \in \Lambda^2(M)$ , si ha

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \frac{1}{2}(\alpha(X)\beta(Y) - \beta(X)\alpha(Y)), \quad (2.11)$$

e

$$(\alpha \wedge \gamma)(X, Y, Z) = \frac{1}{3}(\alpha(X)\gamma(Y, Z) + \alpha(Y)\gamma(Z, X) + \alpha(Z)\gamma(X, Y))$$

### Derivata di Lie

Sia  $M$  una varietà differenziabile e sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Vogliamo definire la *derivata di Lie*, rispetto a  $X$ , di un tensore. Consideriamo  $(\phi_t)_{t \in I}$  gruppo ad un parametro di diffeomorfismi locali generato da  $X$ .  $\phi_{t*}$  definisce un isomorfismo tra gli spazi vettoriali  $T_p(M)$  e  $T_{\phi_t(p)}(M)$ , e quindi un isomorfismo  $\phi_t^*$  tra gli spazi di tensori  $\mathcal{T}^{s,r}(T_{\phi_t(p)}(M))$  e  $\mathcal{T}^{s,r}(T_p(M))$ . Se  $S$  è un tensore su  $M$  di tipo  $(s, r)$ , la derivata di Lie di  $S$  nella direzione di  $X$  è il tensore dello stesso tipo di  $S$  definito da

$$(\mathcal{L}_X S)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* S_{\phi_t(p)} - S_p).$$

L'operatore  $\mathcal{L}_X$  verifica le seguenti proprietà. Se  $f$  è una funzione differenziabile:

$$\mathcal{L}_X f = (df)(X) = X(f).$$

Infatti: considerata la curva  $\gamma(t) = \phi(t, p)$ , abbiamo  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ , quindi

$$\begin{aligned} X_p(f) &= \dot{\gamma}(0)(f) = \left( \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right) (0) = \left( \frac{d}{dt} f(\phi_p(t)) \right) (0) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\phi(t, p)) - f(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* f - f(p)) = (\mathcal{L}_X f)(p). \end{aligned}$$

Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y],$$

e l'identità di Jacobi diventa

$$\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z].$$

La derivata di Lie commuta con le contrazioni. Se  $S$  è un tensore di tipo  $(0, p)$ , oppure di tipo  $(1, p)$ , si ha

$$(\mathcal{L}_\xi S)(Y_1, \dots, Y_p) = \mathcal{L}_\xi S(Y_1, \dots, Y_p) - \sum_{i=1}^p S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, [\xi, Y_i], Y_{i+1}, \dots, Y_p),$$

dove  $\xi, Y_1, \dots, Y_p \in \mathfrak{X}(M)$ . In particolare, se  $g \in \mathfrak{X}^{0,2}(M)$ ,

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = \xi g(X, Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]).$$

Se  $\phi \in \mathfrak{X}^{1,1}(M)$  e  $\eta \in \Lambda^1(M)$ , risulta

$$(\mathcal{L}_\xi \phi)Y = [\xi, \phi(Y)] - \phi([\xi, Y]),$$

$$(\mathcal{L}_\xi \eta)Y = \xi \eta(Y) - \eta([\xi, Y]).$$

Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , si ha:

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X, Y]}.$$

Se  $d$  è il differenziale esterno sulle  $p$ -forme differenziali:

$$\mathcal{L}_\xi \circ d = d \circ \mathcal{L}_\xi$$

e

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi \quad (\text{nota anche come formula di Cartan}),$$

dove

$$(i_\xi \alpha)(X_1, \dots, X_{p-1}) = \alpha(\xi, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

Inoltre:

$$\mathcal{L}_\xi(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_\xi \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_\xi \beta),$$

$$\mathcal{L}_\xi(T_1 \otimes T_2) = (\mathcal{L}_\xi T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\mathcal{L}_\xi T_2),$$

dove  $\alpha, \beta$  sono forme differenziali e  $T_1, T_2$  tensori.

**Osservazione 2.62.** La formula di Cartan, nel caso delle 1-forme, si ottiene facilmente come conseguenza della (2.9). Infatti, se  $\alpha \in \Lambda^1(M)$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , si ha:

$$(i_X d\alpha + di_X \alpha)(Y) = (d\alpha)(X, Y) + d(\alpha(X))(Y)$$

e

$$(d\alpha)(X, Y) + Y\alpha(X) = X\alpha(Y) - \alpha([X, Y]) = (\mathcal{L}_X \alpha)(Y).$$

Per maggiori dettagli e altre proprietà sulla derivata di Lie, si può consultare ad esempio [56] vol.I e [14].



# Capitolo 3

## Gruppi di Lie

I gruppi di Lie e le loro algebre di Lie giocano un ruolo importante in geometria e in Fisica teorica. Nella concezione del programma di Erlangen (1872) formulato da Felix Klein, la geometria è vista come lo studio delle proprietà invarianti rispetto a gruppi di trasformazioni: differenti gruppi di trasformazioni su uno stesso spazio definiscono differenti geometrie. I gruppi che emergono nelle geometrie più semplici vennero studiati per la prima volta Sophie Lie (un amico di Klein). In questo capitolo vengono studiati i principali esempi di gruppi di Lie (i gruppi classici) e loro algebre di Lie. Inoltre, si presentano brevemente alcune delle principali proprietà dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie. Infine, si introducono i gruppi di Lie 3D unimodulari e non-unimodulari. Per maggiori dettagli e sviluppi si rinvia, oltre agli articoli citati nel corso della presentazione, a Boothby [14], Conlon [28], Kirillov[55], Milnor [69], Tricerri-Vanhecke [111], Warner [117].

### 3.1 Esempi di gruppi di Lie

**Definizione 3.1.** Un *gruppo di Lie* (reale) è una varietà differenziabile  $G$  munita di una struttura di gruppo tale che le applicazioni

$$G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto ab, \quad \text{e} \quad G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1},$$

siano differenziabili.

Se si assume che  $G$  sia soltanto uno spazio topologico di Hausdorff e che le applicazioni considerate siano solo continue, si ha la nozione di *gruppo topologico*. Nella definizione di gruppo di Lie si può sostituire la differenziabilità con la nozione di analiticità reale senza perdere di generalità (cfr. [28], pag.161).

Un *isomorfismo* tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , è un omomorfismo  $f : G \rightarrow G'$  che è anche un diffeomorfismo. Un *isomorfismo locale* tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , è un omomorfismo  $f : U \rightarrow U'$ , ossia  $f(ab) = f(a)f(b)$  per ogni  $a, b \in U$  con  $ab \in U$ , che è anche un diffeomorfismo, dove  $U$  (resp.  $U'$ ) è un intorno aperto di  $e$  (resp.  $e'$ ) elemento neutro di  $G$  (resp.  $G'$ ).

**Definizione 3.2.** Sia  $G$  un gruppo di Lie e sia  $H \subset G$ .  $H$  si dice *sottogruppo di Lie* di  $G$  se  $H$  è un sottogruppo algebrico e inoltre è una sottovarietà di  $G$ .

In particolare, applicando alcune proprietà della teoria delle sottovarietà, si vede che un sottogruppo di Lie ha una struttura di gruppo di Lie (cfr. [55], Definizione 3.39 e Proposizione 3.42). Se un sottogruppo di Lie  $H$  di  $G$  è una sottovarietà regolare, allora  $H$  è un chiuso come sottoinsieme di  $G$ . Se  $H$  è un sottogruppo algebrico di  $G$  che è anche un sottoinsieme chiuso di  $G$ , allora  $H$  è un sottogruppo di Lie di  $G$ , inoltre  $H$  è anche sottovarietà regolare (cfr. [14], [28], [55]). Di seguito alcuni esempi.

### La circonferenza $\mathbb{S}^1$

$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  è un gruppo di Lie rispetto al prodotto tra numeri complessi. Si noti che  $\mathbb{S}^1$  è isomorfo al gruppo delle rotazioni

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

e al toro unidimensionale  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (gruppo quoziente rispetto alla congruenza modulo  $\mathbb{Z}$ ).

Anche i gruppi moltiplicativi  $\mathbb{R}^*(\cdot)$  e  $\mathbb{R}_+(\cdot)$  sono gruppi di Lie di dimensione 1, dove  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ .

### Il gruppo abeliano $\mathbb{R}^n(+)$

$\mathbb{R}^n(+)$  è un gruppo di Lie (abeliano) rispetto alla struttura differenziabile ordinaria.  $\mathbb{C}^n(+)$  è un gruppo di Lie (abeliano) complesso.

### Il gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \det A \neq 0\}$  è un gruppo rispetto al prodotto. Inoltre è una varietà differenziabile di dimensione  $n^2$  (cfr. Esempio 1.8) e l'operazione di gruppo  $(A, B) \mapsto AB$  è chiaramente differenziabile (analogamente per l'inversa  $A \mapsto A^{-1}$ ). Quindi  $GL(n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n^2$ . Se  $E_n$  è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ , il gruppo degli automorfismi di  $E_n$ ,  $GL(E_n)$ , è un gruppo di Lie isomorfo a  $GL(n, \mathbb{R})$ .

### Il prodotto semidiretto

Dati due gruppi di Lie  $G$  e  $H$ , è possibile costruire altri gruppi di Lie nel modo seguente. Supponiamo che per ogni  $a \in G$  esista un automorfismo  $\alpha_a$  di  $H$  tale che

- (1) per ogni  $a, b \in G$  :  $\alpha_{ab} = \alpha_a \circ \alpha_b$ ,
- (2) l'applicazione  $H \times G \rightarrow H, (h, a) \mapsto \alpha_a(h)$ , è differenziabile.

In tal caso, si verifica che la varietà differenziabile  $H \times G$  dotata dell'operazione

$$(h, a)(h_1, b) = (h\alpha_a(h_1), ab) \quad \forall h, h_1 \in H, a, b \in G,$$

è un gruppo di Lie che viene detto *prodotto semidiretto* di  $H$  e  $G$  rispetto ad  $\alpha$ . Tale gruppo si indica con  $H \rtimes_{\alpha} G$ . Se per ogni  $a \in G$  l'automorfismo  $\alpha_a$

è l'identità su  $H$ , allora si ottiene il *prodotto diretto* che viene indicato con  $H \times G$ . Il toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$  è un gruppo di Lie.

Siano dati i gruppi  $GL(n, \mathbb{R})$  e  $H = \mathbb{R}^n$ . Per ogni  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  consideriamo l'automorfismo  $\alpha_A : H \rightarrow H, u \mapsto Au$ . Allora,  $\mathbb{R}^n \times_\alpha GL(n, \mathbb{R})$  non è altro che il gruppo delle affinità di  $\mathbb{R}^n$  che si può identificare con il gruppo delle matrici

$$\left\{ B \in GL(n+1, \mathbb{R}) : B = \begin{pmatrix} A & u^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A \in GL(n, \mathbb{R}), u \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

### Il semispazio $\mathbb{R}_+^n$

Siano dati i gruppi di Lie  $\mathbb{R}^{n-1}(+)$  e  $\mathbb{R}_+(\cdot)$ . Per ogni  $a \in \mathbb{R}_+$ , consideriamo l'automorfismo  $\alpha_a : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, x \mapsto ax$ . Allora il gruppo di Lie prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^{n-1} \times_\alpha \mathbb{R}_+$  non è altro che il semispazio  $\mathbb{R}_+^n = \{(x, a) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : a > 0\}$  con il prodotto

$$(x, a) \cdot (x', a') = (x + ax', aa'),$$

dove l'elemento neutro è  $e = (0, 1)$ . Si noti che la metrica iperbolica che definiremo su  $\mathbb{R}_+^n$  (cfr. Sezione 4.4) è invariante a sinistra rispetto alla suddetta struttura di gruppo.

### Il gruppo lineare speciale

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ , detto *gruppo lineare speciale*, è chiaramente un sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{R})(\cdot)$ . Per verificare che è una varietà differenziabile, consideriamo l'applicazione  $F : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det A$ . Posto  $A = (x_{ij})$ , siccome

$$F(A) = \det A = x_{i1}A_{i1} + x_{i2}A_{i2} \dots + x_{ij}A_{ij} + \dots + x_{in}A_{in},$$

si ha

$$\partial F / \partial x_{ij} = A_{ij}, \quad \text{dove } A_{ij} \text{ è il complemento algebrico di } x_{ij},$$

per cui il gradiente  $(\nabla F)_A \neq 0$  per ogni  $A \in SL(n, \mathbb{R})$  (altrimenti si avrebbe  $\det A = 0$ ). Applicando il Teorema 1.15 (oppure il Teorema 2.55) si ottiene che  $SL(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(1)$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n^2 - 1$ , anzi è una sottovarietà chiusa di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Le operazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili anche quando ristrette a  $SL(n, \mathbb{R})$  (cfr. Proposizione 2.49). Quindi  $SL(n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie, anzi è un sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$ .

### Il gruppo ortogonale

$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^T \cdot A = I\}$ , detto *gruppo ortogonale*, è un sottogruppo di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Vediamo che è anche una varietà differenziabile avente dimensione  $\frac{n^2-n}{2}$ . Sia  $\mathbb{R}^{n,n}$  lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine  $n$  (che possiamo identificare con  $\mathbb{R}^{n^2}$ ). Consideriamo il sottospazio vettoriale  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$  di  $\mathbb{R}^{n,n}$  costituito dalle matrici simmetriche:

$$\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A = A^T\}.$$

La dimensione di  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$  è  $n(n+1)/2$ , e quindi  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$  si può identificare con  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \equiv \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \equiv \text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}), A \mapsto F(A) = AA^T.$$

Chiaramente

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : AA^T = I\} = F^{-1}(I).$$

Quindi  $O(n)$  è un chiuso, inoltre è anche limitato per cui è un compatto. Per ogni  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , il differenziale  $F_{*A}$ , pensato come applicazione lineare da  $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n^2} \equiv T_A \mathbb{R}^{n^2}$  in  $\text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n}) = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \equiv T_{F(A)} \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , è dato da

$$F_{*A}(X) = AX^T + XA^T.$$

Per verificare l'espressione di  $F_{*A}$  si può procedere in questo modo. Data  $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ , consideriamo una curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $\mathbb{R}^{n,n}$  con  $\gamma(0) = A$  e  $\dot{\gamma}(0) = X$ , allora

$$\begin{aligned} F_{*A}X &= F_{*A}\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d(\gamma(t) \gamma^T(t))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \dot{\gamma}(0) \gamma^T(0) + \gamma(0) \dot{\gamma}^T(0) \\ &= XA^T + AX^T. \end{aligned}$$

Inoltre, data  $Y \in \text{Sym}(\mathbb{R}^{n,n})$ , la matrice  $X := \frac{1}{2}YA \in \mathbb{R}^{n,n}$  soddisfa

$$F_{*A}(X) = A \left( \frac{YA}{2} \right)^T + \frac{YA}{2} A^T = Y \quad \forall A \in O(n).$$

Quindi,  $F_{*A}$  è suriettivo per ogni  $A \in O(n)$ , ossia la matrice jacobiana  $J(F)_A$  ha rango costante  $k = n(n+1)/2$ . Applicando il risultato del Teorema 1.15, si ha che  $O(n)$  è una  $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ -superficie di  $\mathbb{R}^{n^2}$  e quindi una varietà differenziabile di dimensione  $n(n-1)/2$ . Si noti che la  $F$  si può anche pensare definita su  $GL(n, \mathbb{R})$  che è un aperto di  $\mathbb{R}^{n,n}$ , per cui  $O(n)$  è una sottovarietà di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Come per gli altri gruppi matriciali, anche in questo caso le operazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili. Quindi  $O(n)$  è un gruppo di Lie, anzi è un sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$ . Si noti che  $O(n)$  ha due componenti connesse  $SO(n)$  e  $O^-(n)$  definite da:

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}, O^-(n) = \{A \in O(n) : \det A = -1\}.$$

Inoltre,

$$O(n) = SO(n) \dot{\cup} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} SO(n).$$

$SO(n)$  è una sottovarietà aperta di  $O(n)$ , quindi è un sottogruppo di Lie di  $O(n)$ , detto *gruppo ortogonale speciale*,  $\dim SO(n) = \dim O(n) = \frac{n^2-n}{2}$ . Per  $n \geq 3$  il *gruppo spinoriale*  $Spin(n)$  è il rivestimento universale di  $SO(n)$ .



### Il gruppo unitario

Una matrice  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  si dice *hermitiana* se  $A^* = A$ , dove  $A^* = \bar{A}^T$ , mentre si dice *unitaria* se  $A^*A = I$ . Si noti che  $(AB)^* = \overline{AB}^T = \bar{B}^T \bar{A}^T = B^*A^*$ . L'insieme

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^* \cdot A = I\}$$

è chiaramente un gruppo, detto *gruppo unitario*. L'insieme

$$C_{her}^{n,n} = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} : A^* = A\}$$

è uno spazio vettoriale reale di dimensione  $k = n + 2\frac{n^2-n}{2} = n^2$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{C}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{2n^2} \rightarrow C_{her}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}, \quad A \mapsto F(A) = A^*A = \bar{A}^T A.$$

$F$  è differenziabile e, procedendo come nel caso di  $O(n)$ , si ha  $F_{*A}X = X^*A + A^*X$  per ogni  $X \in \mathbb{C}^{n,n} \equiv T_A C_{her}^{n,n}$ . Inoltre, per ogni  $A \in U(n)$ , il differenziale  $F_{*A}$  è suriettivo. Infatti, data  $Y \in C_{her}^{n,n}$ , quindi  $Y^* = Y$ , prendendo  $X = \frac{1}{2}AY$ , si ha

$$F_{*A}X = (1/2)Y^*A^*A + (1/2)A^*AY = (1/2)Y^* + (1/2)Y = Y.$$

Quindi per ogni  $A \in U(n) = F^{-1}(I)$ , la matrice jacobiana di  $F$  in  $A$  ha rango costante  $k = n^2$ . Pertanto  $U(n)$  ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $2n^2 - n^2 = n^2$ . Inoltre, le operazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili, per cui  $U(n)$  è un gruppo di Lie reale di dimensione  $n^2$ .  $U(n)$  è compatto in quanto chiuso e limitato, Il *gruppo unitario speciale* è il sottogruppo algebrico di  $U(n)$  definito da

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}.$$

Per  $A \in U(n)$ ,  $|\det A| = 1$  e quindi  $SU(n) = \det^{-1}\{1\}$  è un chiuso di  $U(n)$ . Pertanto  $SU(n)$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n^2 - 1$ , anzi un sottogruppo di Lie di  $U(n)$ . Così come  $O(n)$  è il gruppo delle trasformazioni ortogonali di  $\mathbb{R}^n$  munito di un prodotto scalare definito positivo, il gruppo unitario è legato alla presenza di un prodotto hermitiano su  $\mathbb{C}^n$ .

**Esercizio 3.3.** Verificare che

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \langle Az, Aw \rangle = \langle z, w \rangle\},$$

dove

$$\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i,$$

è il prodotto scalare hermitiano su  $\mathbb{C}^n$ .

**Osservazione 3.4.** Il gruppo lineare complesso  $GL(n, \mathbb{C})$  può essere identificato con il sottogruppo di  $GL(2n, \mathbb{R})$  costituito dalle matrici che commutano con la matrice  $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . Questa rappresentazione di  $GL(n, \mathbb{C})$  in

$GL(2n, \mathbb{R})$ , detta *rappresentazione reale* di  $GL(n, \mathbb{C})$ , è data dall'omomorfismo iniettivo (tra gruppi)

$$A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \forall A + iB \in GL(n, \mathbb{C}),$$

dove  $A, B$  sono matrici reali di ordine  $n$ . Inoltre, si noti che

$$SO(1) \cong SU(1) \cong \{e\}, \quad O(1) \cong S^0, \quad SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1,$$

dove il simbolo  $\cong$  indica che i gruppi sono isomorfi.

### Il gruppo simplettico reale

Sia  $E_m$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $m$  e sia  $\Phi$  una forma bilineare antisimmetrica non degenera su  $E_m$ . Poiché  $\Phi$  è antisimmetrica, si ha

$$\det \Phi = \det(-\Phi^T) = (-1)^m \det \Phi^T = (-1)^m \det \Phi,$$

inoltre  $\Phi$  è non degenera per cui la dimensione  $m$  deve essere pari,  $m = 2n$ . Quindi esiste una base  $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$  tale che

$$\Phi(v_i, v_j) = 0, \quad \Phi(v_i, w_j) = \delta_{ij}, \quad \Phi(w_i, v_j) = -\delta_{ij}, \quad \Phi(w_i, w_j) = 0.$$

Posto  $e_i = v_i$  per  $i = 1, \dots, n$  e  $e_i = w_i$  per  $i = n+1, \dots, 2n$ , si ha  $\Phi = (\Phi(e_i, e_j)) = J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ . La matrice  $J_n$  soddisfa

$$J_n^T = -J_n, \quad J_n^2 = -I_{2n} \quad \text{e} \quad J_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Inoltre,

$$\Phi(u, v) = g_0(u, J_n v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n},$$

dove  $g_0$  è il prodotto scalare euclideo di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Per  $A \in \mathbb{R}^{2n, 2n}$  abbiamo

$$\Phi(Au, Av) = g_0(Au, J_n Av) = g_0(u, A^T J_n Av).$$

Quindi:

$$\Phi(Au, Av) = \Phi(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \iff A^T J_n A = J_n.$$

Una matrice che soddisfa la precedente condizione si dice *matrice simplettica*. L'insieme

$$Sp(2n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{R}) : A^T J_n A = J_n\}$$

è il *gruppo simplettico reale*. Si noti che  $(A^T J_n A)^T = -A^T J_n A$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^{2n, 2n} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{antsim}}^{2n, 2n} \cong \mathbb{R}^{2n^2 - n}, \quad A \mapsto F(A) = A^T J_n A.$$

$F$  è differenziabile e  $F_{*A} X = X^T J_n A + A^T J_n X$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^{2n, 2n} \cong T_A \mathbb{R}^{2n, 2n}$ . Inoltre, per ogni  $A \in Sp(2n, \mathbb{R})$ , il differenziale  $F_{*A}$  è suriettivo: data  $Y$  antisimmetrica, quindi  $Y^T = -Y$ , considerando  $X = -\frac{1}{2} A J Y$ , si ha

$$F_{*A}X = Y.$$

Quindi per ogni  $A \in Sp(2n, \mathbb{R}) = F^{-1}(I)$ , la matrice jacobiana di  $F$  in  $A$  ha rango costante  $k = 2n^2 - n$ . Pertanto  $Sp(2n, \mathbb{R})$  ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $4n^2 - 2n^2 + n = n(2n+1)$ . Inoltre, le applicazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili, per cui  $Sp(2n, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n(2n+1)$ .  $Sp(2n, \mathbb{R})$  è compatto in quanto chiuso e limitato. In modo analogo si può definire il *gruppo simplettico complesso*

$$Sp(2n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2n, \mathbb{C}) : A^T J_n A = J_n\},$$

$$\dim_{\mathbb{C}} Sp(2n, \mathbb{C}) = n(2n+1).$$

### Il gruppo simplettico quaternionico

Richiamiamo brevemente il corpo dei *quaternioni*. Considerata la base canonica  $\{1, i, j, k\}$  di  $\mathbb{R}^4$ , si definisce un prodotto tra gli elementi di  $\mathbb{R}^4$  ponendo  $1i = i, 1j = j, 1k = k, i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, ik = -j, ki = j, kj = -i, jk = i$ , e si estende per linearità tale prodotto a tutti gli elementi di  $\mathbb{R}^4$ .  $\mathbb{R}^4$ , con tale prodotto, è un corpo (non commutativo), detto corpo dei quaternioni che si indica con  $\mathbb{H}$ . Se  $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ , il suo coniugato è  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ . Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

$$\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}; \quad \overline{pq} = \bar{q}\bar{p}; \quad \bar{q}q = \|q\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0.$$

Considerato  $\mathbb{H}^n$  come spazio vettoriale a destra su  $\mathbb{H}$  ( $(q, \lambda) \mapsto q\lambda$ ), il prodotto

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i q_i, \quad \text{dove } p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n),$$

soddisfa le seguenti proprietà:

- 1)  $\langle p, q + q' \rangle = \langle p, q \rangle + \langle p, q' \rangle$ ,
- 2)  $\langle p, q \rangle = \overline{\langle q, p \rangle}$ ,
- 3)  $\langle p\lambda, q \rangle = \bar{\lambda} \langle p, q \rangle, \quad \langle p, q\lambda \rangle = \langle p, q \rangle \lambda$ ,
- 4)  $\langle q, q \rangle \geq 0$  e  $\langle q, q \rangle = 0$  se e solo se  $q = 0$ ,
- 5)  $\langle Ap, q \rangle = \langle p, \bar{A}^T q \rangle$ ,

per ogni  $p, q, q' \in \mathbb{H}^n$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{H}$ .  $\langle, \rangle$  è detto *prodotto scalare quaternionico*. In particolare  $\langle, \rangle$  è  $\mathbb{R}$ -lineare. Un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $A : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  si dice  $\mathbb{H}$ -lineare se  $A(q\lambda) = A(q)\lambda$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{H}$  e  $q \in \mathbb{H}^n$ . L'insieme di tutte le applicazioni  $\mathbb{R}$ -lineari di  $\mathbb{H}^n$  è uno spazio vettoriale reale isomorfo allo spazio vettoriale reale  $\mathbb{H}^{n,n}$  di dimensione  $4n^2$  delle matrici di ordine  $n$  a elementi in  $\mathbb{H}$ . Un'applicazione  $\mathbb{H}$ -lineare  $A$  si dice  $\mathbb{H}$ -*isometria*, oppure *quaternionica unitaria*, se

$$\langle Ap, Aq \rangle = \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in \mathbb{H}^n.$$

Per  $A \in \mathbb{H}^{n,n}$ , siccome  $\langle p, Aq \rangle = \langle \bar{A}^T p, q \rangle$ , abbiamo

$$\langle Ap, Aq \rangle = \langle \bar{A}^T Ap, q \rangle.$$

Quindi

$$\langle Ap, Aq \rangle = \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in \mathbb{H}^n \iff \bar{A}^T A = I.$$

L'insieme

$$\begin{aligned} Sp(n) &= Sp(n, \mathbb{H}) = \{A \in \mathbb{H}^{n,n} : A \text{ } \mathbb{H}\text{-isometria}\} \\ &= \{A \in \mathbb{H}^{n,n} : \bar{A}^T A = I\} \end{aligned}$$

è un gruppo, che viene detto *gruppo simplettico quaternionico* oppure *gruppo quaternionico unitario*.  $Sp(n)$  è un gruppo compatto ed è l'analogo di  $U(n)$  e  $O(n)$  nel caso quaternionico. Si noti però che non esiste un gruppo simplettico quaternionico speciale in quanto si dimostra che  $Sp(n)$  è già speciale. Posto  $A^* = \bar{A}^T$ , una matrice  $A \in \mathbb{H}^{n,n}$  si dice  $\mathbb{H}$ -hermitiana se  $A^* = A$ . Notiamo che  $A^*A$  è hermitiana, inoltre  $(AB)^* = B^*A^*$  e  $\mathbb{H}_{herm}^{n,n}$  ha dimensione reale  $k = n + 4\frac{n^2-n}{2} = 2n^2 - n$ . Consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{H}^{n,n} \cong \mathbb{R}^{4n^2} \rightarrow \mathbb{H}_{herm}^{n,n} \cong \mathbb{R}^{2n^2-n}, \quad A \mapsto F(A) = A^*A.$$

$F$  è differenziabile e  $F_{*A}X = X^*A + A^*X$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^{4n^2}$ . Per ogni  $A \in Sp(n)$ , il differenziale  $F_{*A}$  è suriettivo. Infatti, data  $Y$   $\mathbb{H}$ -hermitiana, quindi  $Y^* = Y$ , considerando  $X = (1/2)AY$ , si ha

$$F_{*A}X = X^*A + A^*X = (1/2)(Y^*A^*A + A^*AY) = Y.$$

Quindi per ogni  $A \in Sp(n) = F^{-1}(I)$ , la matrice jacobiana di  $F$  in  $A$  ha rango costante  $k = 2n^2 - n$ . Pertanto,  $Sp(n)$  ha una struttura di varietà differenziabile di dimensione  $4n^2 - 2n^2 + n = n(2n+1)$ . Inoltre, le applicazioni  $(A, B) \mapsto AB$  e  $A \mapsto A^{-1}$  sono differenziabili, per cui  $Sp(n)$  è un gruppo di Lie reale di dimensione  $n(2n+1)$ .  $Sp(n)$  è compatto in quanto chiuso e limitato.

### La sfera $\mathbb{S}^3$

Sia  $\mathbb{H}$  il corpo non commutativo dei quaternioni.  $\mathbb{H}^*(\cdot) = \mathbb{H} - \{0\}(\cdot)$  è un gruppo algebrico (non commutativo) con  $q^{-1} = \bar{q}/\|q\|^2$ , che è chiaramente anche un gruppo di Lie (come varietà differenziabile  $\mathbb{H}^* = \mathbb{R}^4 - \{0\}$  è un aperto di  $\mathbb{R}^4$ ). La sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  la possiamo pensare come il gruppo dei quaternioni unitari:

$$\mathbb{S}^3 = \{q \in \mathbb{H}^* : \|q\|^2 = \bar{q}q = 1\} = \{q \in \mathbb{H}^* : q^{-1} = \bar{q}\},$$

quindi si vede facilmente che  $\mathbb{S}^3$  è un sottogruppo algebrico di  $\mathbb{H}^*$ . Inoltre,  $\mathbb{S}^3$  è una sottovarietà (regolare) di  $\mathbb{H}^* = \mathbb{R}^4 - \{0\}$ . Pertanto  $\mathbb{S}^3$  è un sottogruppo di Lie di  $\mathbb{H}^*$ , e quindi ha una struttura di gruppo di Lie. Tuttavia, si poteva osservare subito che  $\mathbb{S}^3$  è un gruppo di Lie in quanto  $\mathbb{S}^3 = Sp(1)$ . Altra presentazione di  $\mathbb{S}^3$  come gruppo di Lie è data dal gruppo unitario speciale

$$\begin{aligned} SU(2) &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \bar{A}^T A = I\} \\ &= \left\{ A \in GL(2, \mathbb{C}) : A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}, |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\} = \mathbb{S}^3. \end{aligned}$$

L'applicazione

$$\Phi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SU(2), q = a + xi + yj + zk \longmapsto A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

dove  $z = a + xi$  e  $w = y + zi$ , è un isomorfismo tra gruppi di Lie che identifica  $\mathbb{S}^3$  con  $SU(2)$ .

Si noti che  $\mathbb{S}^1 = SO(2)$  e  $\mathbb{S}^3 = SU(2)$  sono le sole sfere che ammettono una struttura di gruppo di Lie (cfr. [98], p.197).

**Osservazione 3.5.** I gruppi matriciali studiati in questa sezione sono noti in letteratura col nome di *gruppi classici*. Riguardo alla topologia di questi gruppi, osserviamo che  $SO(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $U(n)$  e  $Sp(n, \mathbb{H})$  sono connessi e compatti;  $O(n)$  è compatto ma ha due componenti connesse;  $SL(n, \mathbb{R})$  è connesso ma non compatto;  $SU(n)$  e  $Sp(n, \mathbb{H})$  sono semplicemente connessi;  $\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2$  per  $n \geq 3$  e  $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ . I gruppi simplettici  $Sp(2n, \mathbb{R})$  e  $Sp(2n, \mathbb{C})$  sono connessi ma non compatti.

## 3.2 Relazioni tra un gruppo di Lie e la sua algebra di Lie

Iniziamo con una breve premessa sulle algebre di Lie. Ricordiamo che una *algebra di Lie* (reale) è uno spazio vettoriale reale  $\mathfrak{g}$  munito di un prodotto

$$[, ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, (X, Y) \mapsto [X, Y], \text{ detto } \textit{parentesi di Lie},$$

che soddisfa le seguenti proprietà

- (1) è bilineare,
- (2) è antisimmetrico :  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- (3) vale l'identità di Jacobi:  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

Un'algebra di Lie è *abeliana* se, e solo se, la parentesi di Lie è identicamente nulla. Un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *sottoalgebra di Lie* di  $\mathfrak{g}$  se  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ , cioè  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{h}$ . Un sottospazio vettoriale  $\mathfrak{h}$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *ideale* di  $\mathfrak{g}$  se  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$ ; in particolare, gli ideali sono sottoalgebre di Lie.

Se  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  sono due algebre di Lie, si può definire la *somma diretta di algebre di Lie*  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}$ . Basta considerare  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}$  dotato della struttura di spazio vettoriale somma diretta e definire il prodotto parentesi di Lie  $[, ]$  in  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}$  nel modo seguente

$$[(U, X), (V, Y)] = ([U, V], [X, Y]) \quad \forall U, V \in \mathfrak{h} \text{ e } \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Un *omomorfismo tra algebre di Lie* è un'applicazione lineare  $\Psi$  tra due algebre di Lie tale che  $\Psi[X, Y] = [\Psi X, \Psi Y]$ . Un *isomorfismo tra algebre di Lie* è un omomorfismo bigettivo tra algebre di Lie.

Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie. Un endomorfismo (di spazi vettoriali)  $\phi$  di  $\mathfrak{g}$  si dice *derivazione* di  $\mathfrak{g}$  se

$$\phi([Y, Z]) = [\phi(Y), Z] + [Y, \phi(Z)], \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Se  $\phi, \psi$  sono derivazioni di  $\mathfrak{g}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , allora anche

$$\phi + \psi, \lambda\phi \text{ e } [\phi, \psi] := \phi \circ \psi - \psi \circ \phi \text{ sono derivazioni di } \mathfrak{g}.$$

Quindi l'insieme  $Der(\mathfrak{g})$  di tutte le derivazioni di  $\mathfrak{g}$  è una algebra di Lie che viene detta *algebra di Lie delle derivazioni di  $\mathfrak{g}$* . In particolare, per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , l'endomorfismo

$$ad_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, Y \mapsto ad_X Y = [X, Y],$$

è una derivazione di  $\mathfrak{g}$ , detta *derivazione interna*. Infatti, applicando l'identità di Jacobi, si ha la relazione  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ , la quale si può anche esprimere nella forma

$$[ad_X, ad_Y] = ad_X \circ ad_Y - ad_Y \circ ad_X = ad_{[X, Y]}.$$

Sia  $G$  un gruppo di Lie. Per ogni  $a \in G$ , consideriamo le seguenti applicazioni

$$L_a : G \rightarrow G, b \mapsto L_a(b) = ab, \quad R_a : G \rightarrow G, b \mapsto R_a(b) = ba.$$

$L_a$  e  $R_a$  sono diffeomorfismi (ma non omomorfismi di gruppi), detti *traslazione sinistra* e *traslazione destra*.

**Definizione 3.6.** Sia  $X \in \mathfrak{X}(G)$ .  $X$  si dice *invariante a sinistra* (risp. *invariante a destra*) se  $(L_a)_* X = X$  (risp.  $(R_a)_* X = X$ ), cioè

$$(L_a)_* X_b = X_{L_a(b)} = X_{ab} \quad (\text{risp. } (R_a)_* X_b = X_{ba}) \quad \forall a, b \in G.$$

Se  $X$  e  $Y$  sono due campi di vettori invarianti a sinistra (risp. a destra) anche i campi  $X + Y$ ,  $\lambda X$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $[X, Y]$  sono invarianti a sinistra (risp. a destra). Quest'ultima proprietà segue dal fatto che  $L_a$  è un diffeomorfismo e quindi vale (cfr. Proposizione 2.27):

$$L_{a*}[X, Y] = [L_{a*}X, L_{a*}Y] = [X, Y].$$

Da tali proprietà segue che l'insieme  $\mathfrak{g}$  dei campi vettoriali invarianti a sinistra ha una struttura di algebra di Lie, detta *algebra di Lie del gruppo di Lie  $G$* .

Tra gli spazi vettoriali  $\mathfrak{g}$  e  $T_e G$ , spazio tangente a  $G$  nell'elemento neutro  $e$  di  $G$ , possiamo definire l'applicazione

$$\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G, X \mapsto \Phi(X) = X_e.$$

La corrispondenza  $\Phi$  è chiaramente lineare. Inoltre, fissato  $v \in T_e G$ , esiste un unico  $X \in \mathfrak{g}$  tale che  $X_e = v$ . Basta definire, per ogni  $a \in G$ ,

$$X_a := (L_a)_* v. \tag{3.1}$$

Tale  $X$  è invariante a sinistra in quanto

$$\begin{aligned} X_{ab} &:= (L_{ab})_* v = (L_a \circ L_b)_* v \\ &= (L_a)_* (L_b)_* v = (L_a)_* X_b. \end{aligned}$$

Inoltre, si dimostra che  $X$  è differenziabile (anzi analitico). Pertanto, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 3.7.** *L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di un gruppo di Lie  $G$  è isomorfa (come spazio vettoriale) a  $T_e G$ . Quindi,  $\dim \mathfrak{g} = \dim G$ .*

In particolare, ogni gruppo di Lie è parallelizzabile e orientabile. In base al risultato precedente, si può introdurre su  $T_e G$  una struttura di algebra di Lie definendo, per ogni  $v, w \in T_e G$ ,

$$[v, w] = [\Phi X, \Phi Y] := \Phi[X, Y] = [X, Y]_e. \quad (3.2)$$

In tal modo,  $\Phi$  risulta un isomorfismo tra algebre di Lie. Di solito le due algebre di Lie  $T_e G$  e  $\mathfrak{g}$ , in quanto isomorfe, vengono identificate.

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione dei campi vettoriali invarianti a sinistra.

**Proposizione 3.8.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie e  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  una base della sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Allora per ogni  $X \in \mathfrak{X}(G)$ ,  $X = \sum_i X^i \xi_i$ , risulta che:*

$$X \text{ è invariante a sinistra} \iff \text{le } X^i \text{ sono funzioni costanti.}$$

*Dimostrazione.* Sia  $X \in \mathfrak{X}(G)$ , allora

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{ix}, & X(ax) &= \sum_{i=1}^n X^i(ax) \xi_{iax}, \\ (L_a)_* X_x &= (L_a)_* \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{ix} \\ &= \sum_{i=1}^n X^i(x) (L_a)_* \xi_{ix} = \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{iax}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g} &\iff X_{ax} = (L_a)_* X_x \\ &\iff \sum_{i=1}^n X^i(ax) \xi_{iax} = \sum_{i=1}^n X^i(x) \xi_{iax} \\ &\iff X^i(ax) = X^i(x) \\ &\iff X^i \text{ sono costanti.} \end{aligned}$$

□

## I teoremi di Lie

Sia  $f : G \rightarrow G'$  un omomorfismo differenziabile tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , quindi

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \text{cioè} \quad (f \circ L_a)(b) = (L_{f(a)} \circ f)(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Inoltre  $f(e) = e'$ . L'omomorfismo  $f$  induce un omomorfismo (tra spazi vettoriali)  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ,  $X \mapsto X' = f_*X := (\Phi'^{-1} \circ f_{*e} \circ \Phi)X$ , cioè

$$f_* : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G \rightarrow T_{e'} G' \rightarrow \mathfrak{g}', \quad X \mapsto X_e \mapsto f_{*e} X_e \mapsto X',$$

quindi

$$X'_{e'} = f_{*e} X_e \quad \text{e} \quad X'_{a'} = L_{a'*} X'_e.$$

Ovviamente  $f_*$  è un isomorfismo se, e solo se,  $f_{*e}$  è un isomorfismo. I campi vettoriali  $X$  e  $X'$  risultano *f-riferiti*, i.e, soddisfano

$$X'_{f(a)} = f_{*a} X_a.$$

Infatti

$$X'_{f(a)} = L_{f(a)*} X'_{e'} = L_{f(a)*} f_{*e} X_e = (L_{f(a)} \circ f)_{*e} X_e = (f \circ L_a)_{*e} X_e = f_{*a} X_a.$$

Inoltre, notiamo che

$$X \text{ e } X' \text{ f-riferiti} \Leftrightarrow X'(\varphi) \circ f = X(\varphi \circ f) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'). \quad (3.3)$$

Infatti,

$$\begin{aligned} X \text{ e } X' \text{ f-riferiti} &\Leftrightarrow X'_{f(a)} = f_{*a} X_a \quad \forall a \in G, \\ &\Leftrightarrow X'_{f(a)}(\varphi) = (f_{*a} X_a)(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'), \quad \forall a \in G, \\ &\Leftrightarrow X'(\varphi)(f(a)) = X_a(\varphi \circ f) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'), \quad \forall a \in G, \\ &\Leftrightarrow X'(\varphi) \circ f = X(\varphi \circ f) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}(G'). \end{aligned}$$

Se  $X'$  e  $Y'$  sono f-riferiti a  $X$  e  $Y$  rispettivamente, dalla (3.3) segue che

$$(X'Y'(\varphi)) \circ f = X'(Y'(\varphi)) \circ f = X(Y'(\varphi) \circ f) = X(Y(\varphi \circ f)).$$

e quindi  $[X', Y']$  è f-riferito a  $[X, Y]$ , cioè  $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$ . Dunque,  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ,  $X \mapsto X' = f_*X$ , è un omomorfismo tra algebre di Lie e di conseguenza  $f_*(\mathfrak{g})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}'$ . Abbiamo quindi dimostrato la seguente

**Proposizione 3.9.** *Se  $f : G \rightarrow G'$  è un omomorfismo differenziabile tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , allora resta definito un omomorfismo tra algebre di Lie  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ . In particolare,  $f_*(\mathfrak{g})$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}'$ .*

Se  $G$  è un sottogruppo di Lie di  $G'$ , l'immersione  $i : G \hookrightarrow G'$  è un omomorfismo iniettivo e il differenziale  $i_{*e}$  soddisfa  $i_{*e}T_e G = T_e G$ . Dalla Proposizione 3.9 segue quindi il seguente

**Corollario 3.10.** *Se  $G$  è un sottogruppo di Lie di  $G'$ , allora  $\mathfrak{g}$  è una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{g}'$ .*



Si osservi che il risultato precedente è valido anche per un *omomorfismo locale* tra due gruppi di Lie  $G$  e  $G'$ , cioè per un'applicazione differenziabile  $f : U \rightarrow U'$  (dove  $U$  è un intorno di  $e$  e  $U'$  è un intorno di  $e'$ ) che soddisfa

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad \text{cioè} \quad (f \circ L_a)(b) = (L_{f(a)} \circ f)(b)$$

per ogni  $a, b \in U$  tale che  $ab \in U$  e  $f(ab) \in U'$ . Infatti, per costruire  $f_*$  si utilizza solo il differenziale di  $f$  in  $e$ , e quindi, è sufficiente conoscere il valore di  $f$  in un intorno dell'elemento neutro. Se  $f : U \rightarrow U'$  è un diffeomorfismo,  $f_*$  è un isomorfismo di algebre di Lie. Dalla Proposizione 3.9 segue quindi che se due gruppi di Lie sono localmente isomorfi, allora le corrispondenti algebre di Lie sono isomorfe. Viceversa, anche un'algebra di Lie determina univocamente un gruppo di Lie. Valgono infatti i seguenti teoremi.

**Teorema 3.11.** (primo e secondo Teorema di Lie). *Siano  $G$  e  $G'$  due gruppi di Lie. Se  $G$  e  $G'$  sono localmente isomorfi, allora le loro algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}'$  sono isomorfe. Viceversa, se le algebre di Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}'$  sono isomorfe, allora  $G$  e  $G'$  sono localmente isomorfi.*

**Teorema 3.12.** *Se  $G$  è semplicemente connesso, ogni omomorfismo locale  $f : U \subseteq G \rightarrow G'$  si può estendere in modo unico ad un omomorfismo differenziabile globale  $\tilde{f} : G \rightarrow G'$ .*

**Teorema 3.13.** *Due gruppi di Lie semplicemente connessi sono isomorfi se, e solo se, le loro algebre di Lie sono isomorfe.*

**Teorema 3.14.** (terzo Teorema di Lie). *Data un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  esiste sempre un gruppo di Lie  $G$  la cui algebra di Lie è isomorfa a  $\mathfrak{g}$ .*

Infine definiamo alcune classi speciali di algebre di Lie. Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie. L'applicazione

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (X, Y) \mapsto \text{tr}(ad_X \circ ad_Y),$$

è una forma bilineare simmetrica, detta *forma di Killing*, invariante rispetto agli automorfismi di  $\mathfrak{g}$ . Un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice *semisemplice* se  $B$  è non degenera.  $\mathfrak{g}$  si dice *semplice* se è semisemplice e contiene solo ideali banali. Quindi, un gruppo di Lie  $G$  si dice *semplice* (risp. *semisemplice*) se la sua algebra di Lie è *semplice* (risp. *semisemplice*).  $\mathcal{D}^1 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , che è un ideale di  $\mathfrak{g}$ , viene detto *derivato primo*, o *algebra derivata*, di  $\mathfrak{g}$ . Per induzione si definiscono i derivati successivi:

$$\mathcal{D}^n \mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{n-1} \mathfrak{g}).$$

$\mathfrak{g}$  si dice *risolubile* se esiste un intero  $n$  tale che  $\mathcal{D}^n \mathfrak{g} = \{0\}$ . Poniamo

$$\mathfrak{g}^1 = \mathcal{D}^1 \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \quad \dots, \quad \mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}].$$

$\mathfrak{g}$  si dice *nilpotente* se esiste un intero  $n$  tale che  $\mathfrak{g}^n = \{0\}$ . Da notare che *ogni algebra di Lie nilpotente è risolubile* (non vale il viceversa). Un gruppo di Lie  $G$  si dice *risolubile* (risp. *nilpotente*) se la sua algebra di Lie è *risolubile* (risp. *nilpotente*).

### 3.3 Le costanti di struttura

Sia  $G$  un gruppo di Lie con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Una 1-forma differenziale  $\omega$  su  $G$  si dice *invariante a sinistra* se

$$(L_a)^*\omega = \omega \quad \forall a \in G,$$

dove  $(L_a)^*\omega$  è la 1-forma definita da

$$((L_a)^*\omega)_b X_b = \omega_{ab}((L_a)_* X_b) = \omega_{ab}(X_{ab})$$

per ogni  $b \in G$  e  $X \in \mathfrak{g}$ . Quindi,  $\omega$  è invariante a sinistra se, e solo se,

$$\omega_{ab}(X_{ab}) = \omega_b(X_b) \quad \forall a, b \in G \quad \text{e} \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

$$\text{ovvero} \quad \omega_a(X_a) = \omega_e(X_e) \quad \forall a \in G \quad \text{e} \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Segue che  $\omega$  è una 1-forma invariante a sinistra se, e solo se, la funzione  $\omega(X)$  è costante per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Pertanto, vale la proprietà:

$$\omega \text{ è invariante a sinistra se, e solo se, } \omega(X)(a) = \text{cost.} \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Ora, fissata una base  $(E_1, \dots, E_n)$  di  $\mathfrak{g}$ , poniamo

$$[E_i, E_j] = \sum_k c_{ij}^k E_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{R}.$$

Le  $c_{ij}^k$  si dicono *costanti di struttura* dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ , rispetto alla base  $(E_i)$ , e verificano le seguenti proprietà

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \quad \sum_m (c_{ij}^m c_{mh}^k + c_{jh}^m c_{mi}^k + c_{hi}^m c_{mj}^k) = 0 \quad (\text{identità di Jacobi}).$$

Viceversa, assegnate  $n^3$  costanti  $c_{ij}^k$  che verificano le precedenti due proprietà, allora esiste una sola algebra di Lie le cui costanti di struttura siano proprio le  $c_{ij}^k$  date. Se tutte le costanti di struttura sono nulle, allora l'algebra di Lie è abeliana.

**Osservazione 3.15.** (cfr. Conlon [28], p. 167-168)

- a)** Un gruppo di Lie è *abeliano* se, e solo se, la sua algebra di Lie è abeliana.  
**b)** Ogni gruppo di Lie (connesso) abeliano  $n$ -dimensionale è isomorfo a  $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  per qualche  $k = 0, 1, \dots, n$ . In particolare, ogni gruppo di Lie (connesso) compatto abeliano è un toro.

**Teorema 3.16.** (cfr. Tricerri-Vanhecke [111], pag.10) *Sia  $M$  una varietà differenziabile semplicemente connessa di dimensione  $n$ . Supponiamo che esistano  $n$  campi di vettori  $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$  completi, linearmente indipendenti e tali che*

$$[E_i, E_j] = \sum_k c_{ij}^k E_k \quad \text{dove} \quad c_{ij}^k \in \mathbb{R}.$$

*Allora, per ogni fissato  $p \in M$ ,  $M$  ha un'unica struttura di gruppo di Lie avente  $p$  come elemento neutro ed  $E_1, \dots, E_n$  come campi di vettori invarianti a sinistra.*

Se  $\omega$  è una 1-forma differenziale, il differenziale di  $\omega$  è la 2-forma  $d\omega$  definita da

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]),$$

per ogni coppia di campi di vettori  $X$  e  $Y$ . In particolare, se  $X$  e  $Y$  sono campi invarianti a sinistra e  $\omega$  è una 1-forma invariante a sinistra di un gruppo di Lie  $G$ , l'espressione precedente si riduce a

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]).$$

Quindi, se  $(\omega^1, \dots, \omega^n)$  è la base duale della base  $(E_1, \dots, E_n)$  di  $\mathfrak{g}$ , si ha

$$d\omega^k(E_i, E_j) = -\omega^k([E_i, E_j]) = -\sum_l c_{ij}^l \omega^k(E_l) = -c_{ij}^k$$

da cui, tenendo conto che  $(\omega_1 \wedge \omega_2)(X, Y) = \omega_1(X)\omega_2(Y) - \omega_1(Y)\omega_2(X)$ , si ricava

$$d\omega^k = -\sum_{i,j} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

Queste equazioni sono dette *equazioni di Maurer-Cartan*. Si dimostra che esse determinano (localmente) l'operazione prodotto in  $G$ . Per determinare le equazioni di Maurer-Cartan abbiamo usato per  $d\omega$  e  $\omega_1 \wedge \omega_2$  le formule (2.9) e (2.3). Usando (2.10) e (2.11) si ottengono le equazioni di Maurer-Cartan nella stessa forma.

### 3.4 Esempi di algebre di Lie

#### L'algebra di Lie di $\mathbb{R}^n(+)$

Per il gruppo di Lie  $\mathbb{R}^n(+)$ , le traslazioni sinistre sono le usuali traslazioni e quindi i campi di vettori  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  sono invarianti a sinistra. Infatti la funzione  $x_j \circ L_{p_o} = x_j + x_j(p_o) = x_j + \text{cost.}$ , e quindi

$$(L_{p_o})_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 = \sum_j \frac{\partial x_j \circ L_{p_o}}{\partial x_i}(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{L_{p_o}(0)} = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{p_o}.$$

Un arbitrario campo di vettori invariante a sinistra  $X$  è definito, per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$ , da  $X(p) = (L_p)_* v$ , dove  $v$  è un fissato vettore di  $T_0\mathbb{R}^n$ . Se  $v = \sum_i v^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ , allora  $X_p = \sum_i v^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ . Di conseguenza i campi di vettori invarianti a sinistra su  $\mathbb{R}^n$  sono del tipo  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  con  $X^i$  funzioni costanti. In particolare:  $[X, Y] = 0$  per ogni  $X, Y$  invarianti a sinistra. Pertanto l'algebra di Lie di  $\mathbb{R}^n(+)$  è abeliana.

In generale, l'algebra di Lie di un gruppo abeliano è abeliana.

**L'algebra di Lie di  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$** 

Per il gruppo di Lie  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  le traslazioni sinistre sono definite da

$$L_{(x_o, a_o)} : p = (x, a) \mapsto (x_o, a_o) \cdot (x, a) = (x_o + a_o x, a_o a),$$

e quindi i campi vettoriali

$$V_i(p) = \alpha a(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p, \quad \alpha = \text{cost.} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

sono invarianti a sinistra. Pertanto,  $V_1, \dots, V_n$  generano l'algebra di Lie di  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  e soddisfano

$$[V_n, V_j] = \alpha V_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n-1. \quad (3.4)$$

**L'algebra di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$** 

Sia  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  lo spazio vettoriale di tutte le matrici reali di ordine  $n$ .  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è un'algebra di Lie rispetto al prodotto

$$[A, B] := AB - BA, \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Vogliamo provare che  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie del gruppo di Lie  $GL(n, \mathbb{R})$ . Introduciamo un sistema di coordinate globali su  $GL(n, \mathbb{R})$  ponendo

$$x_{ij}(a) = a_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n, \quad \forall a = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Denotiamo con  $I$  l'elemento neutro del gruppo  $GL(n, \mathbb{R})$ . Ogni vettore  $v$  dello spazio tangente  $T_I GL(n, \mathbb{R})$  si può scrivere nel modo seguente

$$v = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_I, \quad A_{ij} \in \mathbb{R},$$

e quindi possiamo considerare l'isomorfismo tra spazi vettoriali

$$\Psi : T_I(GL(n, \mathbb{R})) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \quad v \longmapsto A = (A_{ij}).$$

Per verificare che  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$ , verifichiamo che la struttura di algebra di Lie di  $T_I(GL(n, \mathbb{R}))$ , ossia quella definita dalla (3.2), è isomorfa tramite  $\Psi$  a quella di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ :

$$\Psi[v, w] = [\Psi v, \Psi w].$$

Dato  $v \in T_I(GL(n, \mathbb{R}))$ , consideriamo il campo di vettori invariante a sinistra  $X$  tale che  $\Phi X = X_I = v$ , e quindi  $X_a = (L_a)_* I v$  per ogni  $a \in GL(n, \mathbb{R})$ . Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $GL(n, \mathbb{R})$  (cfr. Proposizione 2.33) tale che

$$\gamma(0) = I, \quad \dot{\gamma}(0) = v \equiv A = \Psi(v).$$

Sia  $a \in GL(n, \mathbb{R})$ , dalla definizione di differenziale segue che

$$X_a = (L_a)_* v = \dot{\tilde{\gamma}}(0), \quad \text{dove} \quad \tilde{\gamma}(t) = (L_a \circ \gamma)(t) = a \gamma(t).$$

Quindi,  $\tilde{\gamma}(0) = a$  e

$$\begin{aligned} X_a &= \dot{\tilde{\gamma}}(0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dt} (a \gamma(t))_{ij}(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_a \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}(a) (\dot{\gamma}(0))_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_a \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik}(a) A_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_a. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$X = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} A_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right).$$

In termini matriciali:

$$X_a = aA = x(a)A \quad \forall a \in GL(n, \mathbb{R}), \quad \text{si pone quindi} \quad X = xA.$$

Analogamente considerato un secondo vettore  $w \in T_I(GL(n, \mathbb{R}))$  del tipo

$$w = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right)_I, \quad B_{ij} \in \mathbb{R},$$

allora  $\Psi(v) = B$  e il campo invariante a sinistra  $Y$  tale che  $Y_I = w$  è dato da

$$Y = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n x_{ik} B_{kj} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right), \quad Y = xB.$$

Pertanto, dopo qualche calcolo, si ottiene

$$[X, Y] = \sum_{i,j,k,s=1}^n x_{ik} (A_{kj} B_{js} - B_{kj} A_{js}) \left( \frac{\partial}{\partial x_{is}} \right) = \sum_{i,k,s=1}^n x_{ik} [A, B]_{ks} \left( \frac{\partial}{\partial x_{is}} \right),$$

ossia in termini matriciali

$$[X, Y] = x[A, B],$$

e quindi

$$\Psi[X, Y]_I = [A, B].$$

Di conseguenza,

$$\Psi[v, w] = \Psi[\Phi X, \Phi Y] = \Psi\Phi[X, Y] = \Psi[X, Y]_I = [A, B] = [\Psi v, \Psi w]$$

e  $T_I(GL(n, \mathbb{R}))$  è isomorfo, come algebra di Lie, a  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ . Si noti che identificando il campo di vettori invariante a sinistra  $X$  con il vettore tangente  $\Phi(X) = X_I = v \equiv A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , si può scrivere

$$X_a = aX \quad \forall a \in GL(n, \mathbb{R}).$$

**Osservazione 3.17.** Si noti che ogni algebra di Lie reale  $\mathfrak{g}$  è isomorfa ad una sottoalgebra di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , per qualche  $n$ , quindi esiste un sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$  la cui algebra di Lie è isomorfa a  $\mathfrak{g}$  (cfr. Ado [3]).

### L'algebra di Lie di $SL(n, \mathbb{R})$

Indichiamo con  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  l'insieme di tutte le matrici di ordine  $n$  a traccia nulla, quindi  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \text{tr}X = 0\}$ .  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  è un'algebra di Lie, anzi una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , infatti è un sottospazio vettoriale e inoltre

$$\text{tr}[X, Y] = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0 \quad \text{per } X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

Per vedere che  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $SL(n, \mathbb{R})$ , basta far vedere, tenendo presente il Corollario 3.10, che  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  coincide con lo spazio tangente  $T_I SL(n, \mathbb{R})$ . Premettiamo il seguente

**Lemma 3.18.** *Sia  $A(t) = (a_{ij}(t))$  una matrice di ordine  $n$  i cui elementi sono funzioni differenziabili di  $t$  variabile in un aperto di  $\mathbb{R}$ . Sia  $\text{adj}(A) = (A_{ij})^T$  l'aggiunta classica di  $A$ , dove  $A_{ij}$  è il complemento algebrico dell'elemento  $a_{ij}$  di  $A$ . Posto  $D(t) = \det A(t)$ , si ha*

$$D'(t) = \text{tr}(\text{adj}(A)(t) \cdot A'(t)).$$

In particolare se  $A(t)$  è invertibile, abbiamo

$$D'(t) = (\det A(t)) \text{tr}(A^{-1}(t) \cdot A'(t)). \quad (3.5)$$

*Dimostrazione.* Per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$D'(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial D}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}}{dt}.$$

Siccome

$$D(t) = \det A(t) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in},$$

allora

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}} = A_{ij} \quad \text{e quindi} \quad D'(t) = \sum_{i,j} a'_{ij}(t) A_{ij}(t).$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{adj}(A) \cdot A') &= \sum_i (\text{adj}(A) \cdot A')_{ii} \\ &= \sum_i \sum_j (\text{adj}(A))_{ij} a'_{ji} \\ &= \sum_{i,j} A_{ji} a'_{ji} = D'. \end{aligned}$$

□

Sia ora  $X \in T_I SL(n, \mathbb{R})$  e  $A(t)$  una curva differenziabile di  $SL(n, \mathbb{R})$  con  $A(0) = I$  e  $A'(0) = X$ . Siccome  $D(t) := \det A(t) = 1$  per ogni  $t$ , applicando la (3.5), si ottiene  $0 = D'(t) = (\det A(t))\text{tr}(A^{-1}(t) \cdot A'(t))$  e quindi

$$0 = D'(0) = (\det A(0))\text{tr}(A^{-1}(0) \cdot A'(0)) = \text{tr}A'(0) = \text{tr}X.$$

Dunque  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ . D'altronde  $\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1 = \dim SL(n, \mathbb{R})$  per cui  $T_I SL(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ .

**Esercizio 3.19.** Si verifichi che le matrici

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

costituiscono una base di  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  e soddisfano

$$[X_1, X_2] = -2X_3, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = 2X_1.$$

**L'algebra di Lie di  $SO(n)$**

Indichiamo con  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  l'insieme di tutte le matrici reali di ordine  $n$  e antisimmetriche, quindi

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : X^T + X = 0\}.$$

Vogliamo provare che  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  è l'algebra di Lie di  $SO(n)$ . Intanto, osserviamo che  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  è un'algebra di Lie, anzi una sottoalgebra di Lie di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  e di  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , infatti è un sottospazio vettoriale e inoltre

$$[X, Y]^T = (XY)^T - (YX)^T = Y^T X^T - X^T Y^T = YX - XY = -[X, Y]$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ . Sia  $X \in T_I SO(n)$  e  $A(t)$  una curva differenziabile di  $SO(n)$  con  $A(0) = I$  e  $A'(0) = X$ . Siccome  $A(t) \cdot A(t)^T = I$ ,

$$0 = (A(t) \cdot A(t)^T)'(0) = A'(0) \cdot A(0)^T + A(0) \cdot A'(0)^T = X + X^T.$$

Poiché  $\dim \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \frac{n^2-n}{2} = \dim T_I SO(n)$ ,  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  coincide con lo spazio tangente  $T_I SO(n)$  e quindi è l'algebra di Lie di  $SO(n)$ . D'altronde,  $SO(n)$  è una componente connessa di  $O(n)$  e  $T_I SO(n) = T_I O(n)$ , per cui  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  è anche l'algebra di Lie di  $O(n)$ .

**Esercizio 3.20.** Si verifichi che le matrici

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  e soddisfano

$$[Y_1, Y_2] = Y_3, \quad [Y_3, Y_1] = Y_2, \quad [Y_2, Y_3] = Y_1.$$

Concludere che l'algebra di Lie  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  è isomorfa all'algebra di Lie dei vettori dello spazio euclideo rispetto al prodotto vettoriale.

Riportiamo brevemente le algebre di Lie degli altri gruppi matriciali introdotti nella Sezione 3.1:

L'algebra di Lie del gruppo unitario  $U(n)$  è lo spazio delle matrici hermitiane antisimmetriche

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X^T + \bar{X} = 0\}.$$

L'algebra di Lie del gruppo unitario speciale  $SU(n)$  è

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) : \text{Tr}X = 0\}.$$

Una base di  $\mathfrak{su}(2)$  è data da

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tali matrici soddisfano

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_3, X_1] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = 2X_1.$$

L'algebra di Lie del gruppo simplettico reale  $Sp(2n, \mathbb{R})$  è

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : J_n X \text{ è simmetrica}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : J_n X^T + X J_n = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) : X^T J_n + J_n X = 0\}. \end{aligned}$$

L'algebra di Lie del gruppo simplettico quaternionico  $Sp(n)$  è lo spazio delle matrici hermitiane quaternioniche antisimmetriche

$$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathbb{H}^{n,n} : \bar{X}^T = -X\}.$$

### 3.5 L'applicazione esponenziale

Consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^{n,n}$  munito della metrica euclidea:

$$\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}, \quad \|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

**Lemma 3.21.**  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ :

- 1)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- 2)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  e quindi  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ .

*Dimostrazione.* La 1) è la ben nota disuguaglianza triangolare. Per provare la 2), indichiamo con  $r_1, \dots, r_n$  le righe della matrice  $A$  e con  $c_1, \dots, c_n$  le colonne di  $B$ . Allora

$$A \cdot B = (d_{ij}) = (\langle r_i, c_j \rangle), \quad \text{dove } \langle r_i, c_j \rangle = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$



e quindi, applicando la disuguaglianza di Schwarz, si ha

$$\begin{aligned}\|A \cdot B\|^2 &= \sum_{i,j} (\langle r_i, c_j \rangle)^2 \leq \sum_{i,j} \|r_i\|^2 \cdot \|c_j\|^2 \\ &= \left( \sum_i \|r_i\|^2 \right) \cdot \left( \sum_j \|c_j\|^2 \right) = \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.\end{aligned}$$

□

Per ogni  $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ , consideriamo la seguente serie di matrici:

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

**Lemma 3.22.** *Siano  $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n,n}$ , allora:*

- (1) *la serie  $e^X$  è convergente;*
- (2) *se  $X, Y$  commutano, cioè  $XY = YX$ , allora  $e^{X+Y} = e^X e^Y$ ;*
- (3) *la matrice  $e^X \in GL(n, \mathbb{R})$  e  $(e^X)^{-1} = e^{-X}$ ;*
- (4)  $\det(e^X) = e^{\text{tr}X}$ ;
- (5)  $e^{X^T} = (e^X)^T$ .

*Dimostrazione.* (1) Applicando il Lemma 3.21, si ha

$$\left\| \frac{X^m}{m!} + \frac{X^{m+1}}{(m+1)!} + \dots + \frac{X^{m+k-1}}{(m+k-1)!} \right\| \leq \frac{\|X\|^m}{m!} + \dots + \frac{\|X\|^{m+k-1}}{(m+k-1)!}.$$

Siccome la serie numerica  $e^{\|X\|}$  è convergente per ogni  $X$ , le somme parziali di  $e^X$  costituiscono una successione di Cauchy nella norma delle matrici per cui anche la serie  $e^X$  è convergente.

(2) Se  $X, Y$  commutano, per calcolare  $(X + Y)^p$  si usa la formula binomiale come per gli scalari, per cui

$$\begin{aligned}e^X e^Y &= \left( \sum_{r=0}^{\infty} \frac{X^r}{r!} \right) \left( \sum_{s=0}^{\infty} \frac{Y^s}{s!} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \sum_{r+s=p} \frac{p!}{r!s!} X^r Y^s \right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (X + Y)^p = e^{X+Y}.\end{aligned}$$

(3) Poiché  $X$  e  $-X$  commutano, applicando la proprietà (2), si ha

$$I = e^0 = e^{X+(-X)} = e^X e^{-X}$$

e quindi  $\det e^X \neq 0$  e  $e^{-X} = (e^X)^{-1}$ .

(4) Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori (eventualmente complessi) di  $X$ . Allora

$\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$  sono gli autovalori di  $X^k$  e quindi  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$  saranno gli autovalori di  $e^X$ . Pertanto

$$\det e^X = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{tr}X}.$$

(5) Segue dalla definizione di  $e^X$  tenendo conto che  $(X^T)^k = (X^k)^T$ .  $\square$

Il Lemma 3.22 permette di considerare l'applicazione

$$e : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}), \quad X \mapsto e^X,$$

che viene detta *applicazione esponenziale* di matrici. Inoltre, sempre come conseguenza del Lemma 3.22, risulta che: se  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , allora  $\text{tr}X = 0$  e  $\det(e^X) = e^{\text{tr}X} = e^0 = 1$  e quindi

$$e : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow SL(n, \mathbb{R}).$$

Se  $X \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ , allora  $X^T = -X$  e  $X$  commutano e quindi  $(e^X)^T e^X = e^{X^T} e^X = e^{X^T + X} = e^0 = I$ . Inoltre,  $\det(e^X) = e^{\text{tr}X} = e^0 = 1$  e quindi

$$e : \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \rightarrow SO(n) \subset O(n).$$

Questa proprietà vale per ogni gruppo di Lie matriciale  $G$ , cioè:  $e^X \in G$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Ricordiamo che per  $X \in T_I G$  il corrispondente campo vettoriale invariante a sinistra, che per semplicità denotiamo con lo stesso simbolo  $X$ , è definito da  $X_A = (L_A)_* X_I$ ,  $X_I = X$ , per ogni matrice  $A \in G$ . Detta  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $G$  con  $\gamma(0) = I$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_I$ , si ha  $X_A = (L_A)_* \dot{\gamma}(0) = (L_A \gamma(t))'(0) = (A \cdot \gamma(t))'(0) = A \cdot \dot{\gamma}(0) = A \cdot X$ . Quindi,

$$X_A = A \cdot X \quad \forall X \in \mathfrak{g} \text{ e } \forall A \in G.$$

Osserviamo che, fissato  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\phi_X(t) = e^{tX}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è una curva differenziabile di  $G$  che soddisfa

$$\begin{aligned} \phi_X(0) &= e^0 = I, & \phi_X(t+s) &= \phi_X(t)\phi_X(s), \\ \frac{d}{dt}\phi_X(t) &= e^{tX} \cdot X = X_{e^{tX}} = X_{\phi_X(t)}. \end{aligned}$$

Quindi  $\phi_X(t) = e^{tX}$  è la curva integrale di  $X$  uscente dall'elemento neutro  $I$  e l'applicazione  $t \mapsto e^{tX}$  è un omomorfismo tra i gruppi  $\mathbb{R}(+)$  e  $G(\cdot)$ .

**Esempio 3.23.** Prendendo la matrice  $X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  come elemento di

$T_I GL(3, \mathbb{R})$ , si ha  $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $X^k = 0$  per ogni  $k \geq 3$ . Quindi,

$$e^{tX} = I + tX + (t^2/2)X^2 \text{ e}$$

$$X_{e^{tX}} = e^{tX} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & a & b + tac \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (e^{tX})'.$$

Le considerazioni fatte per l'esponenziale dei gruppi di Lie matriciali si estendono per un arbitrario gruppo di Lie. Sia quindi  $G$  un arbitrario gruppo

di Lie. Dato un campo di vettori  $X \in \mathfrak{g}$ , indichiamo con  $\phi_X(t)$  la curva integrale di  $X$  passante per l'elemento neutro  $e$  di  $G$ , quindi

$$\phi_X(0) = e, \quad \frac{d}{dt}\phi_X(t) = X_{\phi_X(t)}, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

In generale, una curva integrale è definita solo per  $t$  sufficientemente piccolo. Tuttavia, poiché  $X$  è invariante a sinistra,  $\phi_X$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Infatti, se  $\phi_X(t)$  è definita per  $|t| \leq \epsilon$ , la curva

$$\gamma(t) = \phi_X(\epsilon)\phi_X(t - \epsilon) = L_{\phi_X(\epsilon)}\phi_X(t - \epsilon), \quad \epsilon \leq t \leq 2\epsilon,$$

soddisfa  $\gamma(\epsilon) = \phi_X(\epsilon)$  e

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= (L_{\phi_X(\epsilon)}\phi_X(t - \epsilon))_{*t} \left( \frac{d}{dt} \right) \\ &= (L_{\phi_X(\epsilon)})_{*|\phi_X(t-\epsilon)} \dot{\phi}_X(t - \epsilon) \\ &= (L_{\phi_X(\epsilon)})_{*|\phi_X(t-\epsilon)} X_{\phi_X(t-\epsilon)} \\ &= X_{\phi_X(\epsilon)\phi_X(t-\epsilon)} = X_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Pertanto, ponendo

$$\tilde{\phi}_X(t) = \begin{cases} \phi_X(t) & \text{se } |t| \leq \epsilon, \\ \gamma(t) & \text{se } \epsilon \leq t \leq 2\epsilon, \end{cases}$$

si ottiene una curva integrale di  $X$  che estende  $\phi_X(t)$  all'intervallo  $(-\epsilon, 2\epsilon)$ . Così procedendo si estende  $\phi_X(t)$  su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Proposizione 3.24.** Per  $X \in \mathfrak{g}$ , la curva integrale  $\phi_X(t)$  soddisfa:

(a)  $\phi_X(t+s) = \phi_X(t)\phi_X(s)$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ ;

(b)  $\phi_X(ts) = \phi_{tX}(s)$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ ;

(c) la curva integrale di  $X$  passante per  $a \in G$  è :

$$\gamma(t) = a\phi_X(t) = (L_a \circ \phi_X)(t).$$

*Dimostrazione.* (a) Fissato  $t \in \mathbb{R}$ , consideriamo le curve  $\gamma_1(s) = \phi_X(t+s)$  e  $\gamma_2(s) = \phi_X(t)\phi_X(s)$ . Chiaramente  $\gamma_1(s)$  è curva integrale di  $X$  passante per il punto  $\gamma_1(0) = \phi_X(t)$ . Anche  $\gamma_2(s)$  passa per  $\gamma_2(0) = \phi_X(t)\phi_X(0) = \phi_X(t)$ , inoltre è curva integrale di  $X$  in quanto:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_2(s) &= (L_{\phi_X(t)}\phi_X(s))_{*} \left( \frac{d}{ds} \right) = (L_{\phi_X(t)})_{*\phi_X(s)} X_{\phi_X(s)} \\ &= X_{L_{\phi_X(t)}\phi_X(s)} = X_{\gamma_2(s)}. \end{aligned}$$

Per l'unicità delle curve integrali passanti per uno stesso punto, si può concludere che  $\gamma_1(s) = \gamma_2(s)$ .

(b) Si prova in modo analogo, in questo caso  $\gamma_1(s) = \phi_X(ts)$  e  $\gamma_2(s) = \phi_{tX}(s)$  sono entrambe curve integrali di  $tX$  passanti per  $e$ .

(c) Basta osservare che

$$\left( \frac{d}{dt} a\phi_X(t) \right) = (L_a)_{*|\phi_X(t)} \left( \frac{d}{dt} \phi_X(t) \right) = (L_a)_{*|\phi_X(t)} X_{\phi_X(t)} = X_{a\phi_X(t)}.$$

□

Dalla Proposizione 3.24 segue che, per ogni fissato  $X \in \mathfrak{g}$ , l'applicazione

$$\phi_X : \mathbb{R} \longrightarrow G, \quad t \longmapsto \phi_X(t),$$

è un omomorfismo tra gruppi. Per questo motivo,  $\phi_X(t)$  prende il nome di *sottogruppo ad un parametro* di  $G$ . L'*applicazione esponenziale* di un gruppo di Lie  $G$  è l'applicazione

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \exp X = \phi_X(1),$$

dove  $\phi_X(t)$  è il gruppo ad un parametro generato da  $X$ .

**Proposizione 3.25.** *L'applicazione  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  soddisfa:*

$$\exp(t+s)X = (\exp tX)(\exp sX) \quad e \quad \phi_X(t) = \exp tX,$$

per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$  e per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ . Inoltre,  $\exp$  è un diffeomorfismo da un intorno di  $0 \in \mathfrak{g}$  in un intorno di  $e \in G$ .

*Dimostrazione.* La prima parte segue dalla Proposizione 3.25. Ricordiamo che per un sistema di equazioni differenziabili ordinarie che dipendono dai parametri  $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$  (componenti di un fissato campo di vettori invariante a sinistra), le soluzioni dipendono in modo differenziabile dai parametri in un intorno dell'origine di  $\mathbb{R}^n$ , ciò implica che  $\exp$  è differenziabile in un intorno di  $0 \in \mathfrak{g}$ . Per vedere che è un diffeomorfismo in un intorno di  $0 \in \mathfrak{g}$ , basta verificare che il differenziale  $(\exp)_{*0}$  è un isomorfismo. Poiché  $\mathfrak{g}$  è uno spazio vettoriale, identifichiamo  $\mathfrak{g}$  con lo spazio tangente  $T_0\mathfrak{g}$ . Sia  $X \in \mathfrak{g}$ , allora  $\gamma(t) = tX$  è una curva di  $\mathfrak{g}$  con  $\gamma(0) = 0$  e  $\dot{\gamma}(0) = X$ , per cui posto  $\alpha(t) = \exp \circ \gamma(t) = \exp(tX) = \phi_X(t)$ , si ha  $(\exp)_{*0}(X) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\phi}_X(0) = X_{\phi_X(0)} = X_e$  e quindi  $(\exp)_{*0} : \mathfrak{g} \cong T_0\mathfrak{g} \rightarrow T_eG$  è un isomorfismo.  $\square$

**Osservazione 3.26.** Si noti che, se  $f : G \rightarrow G'$  è un omomorfismo differenziabile, dalla definizione di applicazione esponenziale segue che l'omomorfismo tra le algebre di Lie  $f_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  commuta con l'esponenziale, cioè  $f(\exp_G X) = \exp_{G'}(f_* X)$ .

## 3.6 Gruppi di Lie 3D

### Gruppi di Lie unimodulari

Siano  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  e  $G$  un gruppo di Lie. Una *rappresentazione di  $G$  su  $V$*  è un omomorfismo differenziabile

$$\phi : G \rightarrow GL(V).$$

In particolare, se  $V = \mathbb{R}^n$ , la rappresentazione si dice *matriciale*. Se  $\mathfrak{g}$  è un'algebra di Lie reale, una *rappresentazione di  $\mathfrak{g}$  su  $V$*  di rango  $n$ , è un omomorfismo di algebre di Lie  $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

La *rappresentazione aggiunta* di  $\mathfrak{g}$  su  $\mathfrak{g}$  è definita da

$$ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto ad_X,$$

dove

$$ad_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, Y \mapsto ad_X(Y) = [X, Y].$$

Si noti che  $ad(\mathfrak{g}) \subseteq Der(\mathfrak{g})$ , inoltre il nucleo dell'omomorfismo  $ad$ , ossia

$$\zeta(\mathfrak{g}) = \ker ad = \{X \in \mathfrak{g} : ad_X = 0\} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

si dice *centro* di  $\mathfrak{g}$ . Ogni gruppo di Lie ammette una rappresentazione molto importante sulla sua algebra di Lie, costruita nel modo seguente. Se  $a \in G$ ,  $I_a : G \rightarrow G, b \mapsto aba^{-1}$ , è un automorfismo di  $G$  e quindi  $(I_a)_*$  è un isomorfismo dell'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $G$ . Pertanto, si può definire l'applicazione

$$Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), a \mapsto Ad(a) = (I_a)_*.$$

$Ad$  è una rappresentazione di  $G$  in  $\mathfrak{g}$  che viene detta *rappresentazione aggiunta di  $G$  in  $\mathfrak{g}$* . Se  $(E_1, E_2, \dots, E_n)$  è una base di  $\mathfrak{g}$  e  $(\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$  è la corrispondente base duale, la  $n$ -forma differenziale

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n$$

è non nulla in ogni punto di  $G$  ed è invariante rispetto alle traslazioni sinistre, vale a dire  $(L_a)^*\Omega = \Omega$  per ogni  $a \in G$ . In particolare, ciò implica che *ogni gruppo di Lie è orientabile*. Un'altra importante conseguenza è la possibilità di estendere ai gruppi di Lie la nozione di integrale. Indicato con  $\mathcal{F}_c(G)$  l'insieme delle funzioni continue su  $G$ , a valori reali e a supporto compatto, si dimostra che esiste un'unica funzione (a meno di un fattore costante), detta *misura di Haar*,

$$\mu : \mathcal{F}_c(G) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \mu(f) = \int_G f \Omega,$$

avente le seguenti proprietà

- (1)  $\mu(af + bh) = a\mu(f) + b\mu(h)$ ,  $\forall f, h \in \mathcal{F}_c(G)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ;
- (2) se  $f \in \mathcal{F}_c(G)$  e  $f \geq 0$ , allora  $\mu(f) \geq 0$ ;
- (3) è invariante rispetto alle traslazioni sinistre:

$$\mu(f \circ L_a) = \mu(f), \text{ per ogni } f \in \mathcal{F}_c(G) \text{ e per ogni } a \in G.$$

**Definizione 3.27.** Un gruppo di Lie  $G$  si dice *unimodulare* se la sua misura di Haar (invariante a sinistra per definizione) è anche invariante a destra.

Una caratterizzazione dei gruppi di Lie unimodulari è data dal seguente

**Teorema 3.28.** *Un gruppo di Lie  $G$  è unimodulare se e solo se*

$$|\det Ad(a)| = 1 \quad \forall a \in G.$$

Sia  $\mathfrak{g}$  l'algebra di Lie di un gruppo di Lie  $G$ . L'applicazione

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto \text{tr}(ad_X),$$

è un omomorfismo tra algebre di Lie.  $\mathfrak{u} = \ker \phi$  si dice *nucleo unimodulare* ed è un ideale di  $\mathfrak{g}$ .

**Definizione 3.29.** Un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si dice unimodulare se  $\ker \phi = \mathfrak{g}$ , cioè  $\text{tr}(ad_X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$ .

**Proposizione 3.30.** *Siano  $G$  un gruppo di Lie e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra di Lie. Allora,  $G$  è unimodulare se, e solo se, la sua algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è unimodulare.*

Sia  $G$  un gruppo di Lie compatto. L'applicazione

$$\alpha : G \rightarrow \mathbb{R}_+(\cdot), \quad a \mapsto \alpha(a) = |\det Ad(a)|,$$

è analitica ed è anche un omomorfismo:

$$\alpha(ab) = |\det Ad(ab)| = |\det(Ad(a)Ad(b))| = \alpha(a)\alpha(b).$$

Quindi  $\alpha(G)$  è un sottogruppo compatto di  $\mathbb{R}_+(\cdot)$  e di conseguenza sarà  $\alpha(G) = \{+1\}$ . Pertanto, dal Teorema 3.28 segue il

**Corollario 3.31.** *Ogni gruppo di Lie compatto è unimodulare.*

### 3.6.1 Gruppi di Lie 3D unimodulari

Diamo ora una rapida descrizione dei gruppi di Lie unimodulari 3D (ovvero di dimensione tre), gruppi che si sono rivelati particolarmente significativi in diversi contesti. Consideriamo un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  3D munita di un prodotto scalare  $\langle, \rangle$ . Fissata una orientazione su  $\mathfrak{g}$ , si può identificare  $\mathfrak{g}$  con  $\mathbb{R}^3$  e definire un prodotto vettoriale  $X \wedge Y$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Si noti che  $\wedge$  dipende dall'orientazione scelta. Consideriamo l'endomorfismo

$$L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad \text{tale che} \quad L(X \wedge Y) = [X, Y].$$

Tale endomorfismo è univocamente determinato, infatti se  $(e_1, e_2, e_3)$  è una base ortonormale positiva di  $\mathfrak{g}$  si ha:

$$\begin{aligned} L(e_1) &= L(e_2 \wedge e_3) = [e_2, e_3], \\ L(e_2) &= L(e_3 \wedge e_1) = [e_3, e_1], \\ L(e_3) &= L(e_1 \wedge e_2) = [e_1, e_2]. \end{aligned}$$

La condizione di unimodularità  $\text{tr}(ad_X) = 0$ , applicata a  $X = e_1$ , diventa:

$$\langle [e_1, e_2], e_2 \rangle + \langle [e_1, e_3], e_3 \rangle = 0, \quad \text{cioè} \quad \langle L(e_3), e_2 \rangle = \langle L(e_2), e_3 \rangle.$$

Ripetendo il discorso per gli altri vettori della base, si ottiene che

$\mathfrak{g}$  è unimodulare se, e solo se,  $L$  è un endomorfismo simmetrico.

Quindi se  $\mathfrak{g}$  è unimodulare, esiste una base ortonormale  $(e_1, e_2, e_3)$  di  $\mathfrak{g}$  che diagonalizza l'endomorfismo  $L$ :

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad (3.6)$$

dove  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ . La classificazione, a meno di isomorfismi, delle algebre di Lie 3D è ben nota [69]. Cambiando, se necessario, l'orientazione di  $\mathfrak{g}$ , si hanno i seguenti casi:

1)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{su}(2)$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $SU(2)$ );

- 2)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $SL(2, \mathbb{R})$ );
- 3)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{e}(1, 1)$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $E(1, 1)$ , gruppo speciale delle isometrie del piano di Minkowski);
- 4)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{e}(2)$  (algebra di Lie del gruppo di Lie  $E(2)$ , gruppo speciale delle isometrie del piano euclideo);
- 5)  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  che corrisponde a  $\mathfrak{h}^3$  (algebra di Lie del gruppo di Heisenberg  $Nil^3$ );
- 6)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  che corrisponde all'algebra di Lie del gruppo abeliano  $\mathbb{R}^3$ .

In questo capitolo abbiamo già incontrato i gruppi di Lie unimodulari  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{R})$ , entrambi semplici, e il gruppo abeliano  $\mathbb{R}^3$ . Diamo ora una presentazione dei rimanenti gruppi di Lie 3D unimodulari.

### Il gruppo di Heisenberg $Nil^3$

Il gruppo di Heisenberg  $Nil^3$  (a volte indicato anche con  $H^3$ ) è il gruppo di Lie dato da

$$Nil^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset GL(3, \mathbb{R})(\cdot).$$

La sua algebra di Lie è generata dalle matrici

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le quali soddisfano

$$[e_1, e_2] = e_3 \quad \text{e} \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Si può vedere che  $Nil^3$  è un gruppo di Lie nilpotente.

### Il gruppo $E(2)$

Con  $E(2)$  denotiamo il gruppo speciale delle isometrie del piano euclideo.  $E(2)$  è il gruppo di Lie prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2(+) \rtimes_{\alpha} SO(2) \quad \text{dove} \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Il rivestimento universale  $\tilde{E}(2)$  è  $\mathbb{R}^2(+)$   $\rtimes_{\alpha}$   $\mathbb{R}$ , quindi  $\tilde{E}(2)$  si può identificare con il seguente gruppo matriciale

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & x \\ \sin t & \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La sua algebra di Lie è generata dalle matrici

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le quali soddisfano

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = e_2 \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

$\tilde{E}(2)$  è un gruppo di Lie semplicemente connesso risolubile.

### Il gruppo $E(1, 1)$

Denotiamo con  $E(1, 1)$  il gruppo speciale delle isometrie del piano di Minkowski (a volte indicato anche con  $Sol^3$ ).  $E(1, 1)$  è il gruppo di Lie prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2(+)$$
  $\rtimes_{\alpha}$   $\mathbb{R}(+)$ , dove  $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$ .

Quindi

$$E(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & x \\ \sinh t & \cosh t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La sua algebra di Lie è generata dalle seguenti matrici

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = e_2 \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = -e_1.$$

Anche  $E(1, 1)$  è un gruppo di Lie semplicemente connesso risolubile.



### 3.6.2 Gruppi di Lie 3D non-unimodulari

Un modo naturale di presentare i gruppi di Lie semplicemente connessi non-unimodulari 3D è considerare prodotti semidiretti  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ , dove  $A$  è una matrice reale  $2 \times 2$  con  $\text{tr} A \neq 0$ . Più precisamente, seguendo [67], indicata con  $e^{tA}$  l'usuale matrice esponenziale, ossia  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ , allora un gruppo di Lie  $\mathcal{G}$  semplicemente connesso 3D è non-unimodulare se, e solo se, è isomorfo a un gruppo di Lie prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} = (\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, *)$ ,  $\text{tr} A \neq 0$ , dove il prodotto  $*$  è definito da

$$(p_1, t_1) * (p_2, t_2) = (p_1 + e^{t_1 A} p_2, t_1 + t_2).$$

Se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a + d \neq 0$ , allora esiste una base di campi vettoriali invarianti a sinistra  $(e_1, e_2, e_3)$  tale che

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = a e_1 + c e_2, \quad [e_3, e_2] = b e_1 + d e_2. \quad (3.7)$$

L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  definita dalla (3.7) si dice che è l'algebra di Lie in *forma canonica* del prodotto semidiretto  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ . In tal caso il nucleo unimodulare  $\mathfrak{u} = \text{span}(e_1, e_2)$  è un ideale 2-dimensionale, e  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \{0\}$  è il sottogruppo normale 2-dimensionale di  $\mathcal{G}$  associato ad  $\mathfrak{u}$ .

Possiamo distinguere due casi:  $A = \alpha I_2$  e  $A \neq \alpha I_2$ .

- Se la matrice  $A = \alpha I_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , l'algebra di Lie è definita da

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = \alpha e_1, \quad [e_3, e_2] = \alpha e_2.$$

In questo caso il gruppo di Lie non-unimodulare  $\mathcal{G}$  è isomorfo al gruppo di Lie  $\mathbb{R}_+^3(\cdot)$  con la struttura naturale di gruppo di Lie definita dalla (3.4). Infatti, in tal caso, posto  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$ , i campi vettoriali

$$E_1 = \alpha t \partial_1, \quad E_2 = \alpha t \partial_2, \quad E_3 = \alpha t \partial_t$$

sono invarianti a sinistra e generano l'algebra di Lie di  $\mathbb{R}_+^3(\cdot)$ . Inoltre, soddisfano

$$[E_3, E_1] = \alpha E_1, \quad [E_3, E_2] = \alpha E_2 \quad \text{e} \quad [E_1, E_2] = 0.$$

Questo gruppo di Lie si indica anche con  $H^3(-\alpha^2)$ .

- Il seguente è un esempio con  $A \neq \alpha I_2$ .

**Esempio 3.32.** Consideriamo  $\mathbb{R}_+^2(\cdot)$ ,  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ , con l'usuale struttura di gruppo di Lie, quindi i campi vettoriali

$$E_1 = \alpha x_2 \partial_1, \quad E_3 = \alpha x_2 \partial_2, \quad \alpha \neq 0,$$

sono invarianti a sinistra. Ora consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto

$$\mathcal{G}_\alpha = \mathbb{R}_+^2(\cdot) \times \mathbb{R}, \quad \text{che si indica anche con } H^2(-\alpha^2) \times \mathbb{R},$$

allora  $E_1, E_2 = \partial_t, E_3$  sono invarianti a sinistra e soddisfano

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_3, E_1] = \alpha E_1, \quad [E_3, E_2] = 0.$$

Quindi,  $\mathcal{G}_\alpha$  è il gruppo di Lie non-unimodulare dato dal prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 3.33.** *Ogni gruppo di Lie non-unimodulare  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ , con  $A \neq \alpha I_2$ ,  $T = \text{tr} A \neq 0$  e  $D = \det A$ , è isomorfo al gruppo di Lie*

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathbb{R}^2 \rtimes_{\tilde{A}} \mathbb{R}, \quad \text{dove } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{pmatrix}.$$

In particolare, ogni gruppo di Lie non-unimodulare

$$\mathcal{G}_{ac} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0,$$

è isomorfo al gruppo di Lie

$$\mathcal{G}_a = H^2(-a^2) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}, \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Assumiamo che il gruppo di Lie non-unimodulare  $\mathcal{G}$  sia definito dall'algebra di Lie (3.7). Siccome la matrice  $A \neq \alpha I_2$ , è facile vedere che esiste un campo vettoriale  $E_1 = \alpha e_1 + \beta e_2$  tale che  $E_1, E_2 := [e_3, E_1]$  siano linearmente indipendenti (ad esempio, se  $c \neq 0$  si può prendere  $E_1 = e_1$  e  $E_2 = [e_3, e_1] = \alpha e_1 + c e_2$ ). Quindi, consideriamo i nuovi campi vettoriali invarianti a sinistra, linearmente indipendenti,

$$E_1, \quad E_2 = [e_3, E_1], \quad E_3 = e_3.$$

Allora,  $[E_1, E_2] = 0$ , e  $[E_3, E_1] = E_2$ . Per determinare  $[E_3, E_2]$ : se  $c \neq 0$ , usando la (3.7), si ha

$$[E_3, E_2] = aE_2 + c[e_3, e_2] = aE_2 + cbE_1 + d(E_2 - aE_1) = -DE_1 + TE_2;$$

se  $c = 0$ , sempre usando la (3.7), si ha

$$\begin{aligned} [E_3, E_2] &= [e_3, [e_3, E_1]] = [e_3, [e_3, \alpha e_1 + \beta e_2]] \\ &= (\alpha a^2 + \beta ba + \beta bd)e_1 + \beta d^2 e_2 \\ &= -DE_1 + TE_2. \end{aligned}$$

Per la seconda parte, basta osservare che entrambi i gruppi di Lie  $\mathcal{G}_{ac}$  e  $\mathcal{G}_a$  sono isomorfi al gruppo di Lie non-unimodulare definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -D \\ 1 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

□

Più in generale vale quanto segue.

Se  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  con la matrice  $A \neq \alpha I_2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora lo scalare

$$\mathcal{D} = 4 \frac{(ad - bc)}{(a + d)^2},$$

detto *invariante di Milnor*, determina l'algebra di Lie (e quindi il corrispondente gruppo di Lie) a meno di isomorfismi ([69], p. 309, 321).

**Osservazione 3.34.** Si noti che esistono gruppi di Lie unimodulari 3D che si possono esprimere come prodotti semidiretti del tipo  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ . Sia  $G$  un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso 3D la cui algebra di Lie è definita dalla (3.6) con  $\lambda_3 = 0$ , ossia:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_3, e_2] = -\lambda_1 e_1.$$

Allora,  $G$  è il gruppo di Lie prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  dove la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$  con  $b = -\lambda_1$  e  $c = \lambda_2$ . Pertanto, si distinguono i seguenti casi:

- Se  $A = 0$ ,  $G$  è l'usuale prodotto diretto di gruppi  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , ossia il gruppo abeliano  $\mathbb{R}^3$ .
- Se  $A \neq 0$  e  $\det A = 0$ , il gruppo di Lie unimodulare  $G$  è il gruppo di Heisenberg  $Nil^3$ .
- Se  $A \neq 0$  and  $\det A > 0$ , il gruppo di Lie unimodulare  $G$  è  $\tilde{E}(2)$ .
- Se  $A \neq 0$  and  $\det A < 0$ , il gruppo di Lie unimodulare  $G$  è  $E(1, 1)$ .



# Capitolo 4

## Varietà riemanniane

### 4.1 Metriche riemanniane

**Definizione 4.1.** Una *metrica riemanniana* su una varietà differenziabile  $M$  è un tensore covariante  $g$  del secondo ordine, simmetrico e definito positivo, cioè un'applicazione  $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$   $\mathcal{F}$ -bilineare, che soddisfa

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad g(X, X) \geq 0, \quad g(X, X)(p) = 0 \Rightarrow X_p = 0.$$

Una varietà differenziabile  $M$  dotata di una metrica riemanniana  $g$  è detta *varietà riemanniana*, e si indica con  $(M, g)$ . Una metrica riemanniana  $g$  induce un prodotto scalare  $g_p$  su ogni spazio tangente:

$$g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p).$$

Viceversa, una metrica riemanniana si può anche definire come una famiglia di prodotti scalari  $\{g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}\}_{p \in M}$  tali che per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , l'applicazione

$$g(X, Y) : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto g(X, Y)(p) := g_p(X_p, Y_p), \quad \text{è differenziabile.}$$

Per assegnare una metrica riemanniana su  $M$  basta definire una metrica riemanniana  $g_\alpha$  su ogni aperto  $U_\alpha$  di un ricoprimento  $(U_\alpha)_\alpha$  di  $M$  tale che comunque si considerino due aperti  $U_\alpha, U_\beta$ , con  $U_\alpha \cap U_\beta$  non vuoto, si abbia:

$$g_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}. \quad (4.1)$$

In tal caso, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $g(X, Y)$  è la funzione definita da

$$g(X, Y)(p) = g_\alpha(X|_{U_\alpha}, Y|_{U_\alpha})(p) \quad \text{per } p \in U_\alpha.$$

#### La metrica in coordinate locali

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n$ . Sia  $(x_1, \dots, x_n)$  un sistema di coordinate locali definito in  $U$ , allora  $\{(\partial/\partial x_j)\}$  è base per

$\mathfrak{X}(U)$ ,  $\{dx_i\}$  è base per  $\mathfrak{X}^*(U)$  e quindi gli  $n^2$  prodotti tensoriali  $\{dx_i \otimes dx_j\}$  costituiscono una base locale per i tensori covarianti del secondo ordine. Le funzioni  $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \in \mathcal{F}(U)$  sono le *componenti* di  $g$  rispetto alle coordinate  $(x_i)$ :

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

$(g_{ij})$  è una matrice simmetrica definita positiva che determina univocamente  $g$  su  $U$ . Se  $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ , allora

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} X^i Y^j g_{ij}.$$

Sia  $(y_1, \dots, y_n)$  un altro sistema di coordinate locali definito in un aperto  $V$ ,  $V \cap U \neq \emptyset$ . Posto  $g_{\alpha\beta} = g(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta})$ , su  $V \cap U$  si ha

$$(g_{\alpha\beta}) = \Phi^T (g_{ij}) \Phi, \quad (4.2)$$

dove  $\Phi = (\Phi_{i\alpha}) = (\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha})$  è la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate, ossia del cambiamento di base  $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Quindi, per assegnare una metrica riemanniana  $g$  su  $M$  basta assegnare, in ogni carta locale di un atlante di  $M$ , le  $n(n+1)/2$  funzioni  $g_{ij} = g_{ji}$  di una matrice simmetrica  $(g_{ij})$  definita positiva che soddisfa la (4.2) (che traduce in coordinate locali la (4.1)).

**Osservazione 4.2.** Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su un aperto  $U$  e  $\{\vartheta^1, \dots, \vartheta^n\}$  è la corrispondente base duale, allora su  $U$  si ha:

$$g = \sum_i \vartheta^i \otimes \vartheta^i.$$

Una base ortonormale locale di campi di vettori si può ottenere applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt a una base locale di campi di vettori coordinati. Tuttavia, non è sempre possibile trovare una carta locale  $(U, \varphi)$  tale che la base coordinata sia ortonormale in  $U$  (infatti, ciò è equivalente a richiedere che la metrica riemanniana sia piatta su  $U$ ).

**Osservazione 4.3.** Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana di dimensione 2, localmente  $g = g_{11} dx_1 \otimes dx_1 + g_{12} dx_1 \otimes dx_2 + g_{12} dx_2 \otimes dx_1 + g_{22} dx_2 \otimes dx_2$ . Le coordinate locali  $(x_1, x_2)$  si dicono isoterme se  $g_{11} = g_{22}$  e  $g_{12} = 0$ . Per ogni varietà riemanniana 2-dimensionale esistono sempre coordinate locali isoterme  $(x_1, x_2)$ , cioè localmente  $g = e^{2f}(dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2)$  con  $f$  funzione differenziabile.

**Esempio 4.4.** Lo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ .

La metrica euclidea  $g_0$  è il più semplice esempio di metrica riemanniana, essa è definita da

$$g_0(X, Y) = \sum_{i=1}^n X^i Y^i,$$

dove  $X = (X^1, \dots, X^n), Y = (Y^1, \dots, Y^n) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Le funzioni componenti sono  $g_{0ij} = \delta_{ij}$ , e quindi

$$g_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2.$$

Lo spazio  $\mathbb{R}^n$  con questa metrica riemanniana è detto *spazio euclideo* e la corrispondente geometria riemanniana è quella euclidea.

**Teorema 4.5.** *Il gruppo strutturale del fibrato tangente  $TM$  di una varietà riemanniana è riducibile al gruppo ortogonale  $O(n)$ .*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $(TM, M, \pi : TM \rightarrow M)$  il fibrato tangente. Sia  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  una carta locale di  $M$  con funzioni coordinate  $(x_i)$ . Sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su  $U_\alpha$ . Definiamo

$$\tilde{\varphi}_\alpha : \tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n, X_p = \sum_i \eta^i e_{ip} \mapsto (x_i(p), \eta^i).$$

$(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)$  è una carta locale per  $TM$  e, per ogni fissato  $p \in U_\alpha$ , l'isomorfismo

$$(\tilde{\varphi}_\alpha)_p : T_p M = \pi^{-1}(p) \rightarrow \varphi_\alpha(p) \times \mathbb{R}^n, X_p = \sum_i \eta^i e_{ip} \mapsto (\eta^1, \dots, \eta^n),$$

definisce una trasformazione ortogonale tra  $(T_p M, g_p)$  e lo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ . Applicando questo procedimento ad ogni carta locale di un atlante di  $M$ , si ottiene un atlante di  $TM$  le cui funzioni di transizione associano ad ogni punto del loro dominio di definizione un elemento del gruppo ortogonale  $O(n)$ .  $\square$

**Teorema 4.6.** *Ogni varietà differenziabile paracompatta  $M$  ammette una metrica riemanniana.*

*Dimostrazione.* Poiché  $M$  è paracompatta, possiamo considerare una partizione dell'unità  $(f_\alpha)_\alpha$  subordinata a un ricoprimento localmente finito  $(U_\alpha)_\alpha$  di intorni coordinati (cfr. Teorema 1.32). Ricordiamo che le  $f_\alpha$  sono funzioni differenziabili non negative, con supporto compatto  $K_\alpha$  contenuto in  $U_\alpha$  e tali che  $\sum_\alpha f_\alpha = 1$ . Sia  $\varphi_\alpha$  l'applicazione coordinata relativa a  $U_\alpha$ . La metrica euclidea  $g_0$  sull'aperto  $A_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha)$  di  $\mathbb{R}^n$  induce una metrica riemanniana  $g_\alpha$  su  $U_\alpha$ :  $g_\alpha = (\varphi_\alpha)^* g_0$ . Poiché  $f_\alpha = 0$  su  $M \setminus K_\alpha$  (complementare di  $K_\alpha$ ),  $f_\alpha g_\alpha$  è un tensore (differenziabile su  $M$ ) covariante del secondo ordine, simmetrico, semi-definito positivo, e nullo su  $M \setminus K_\alpha$ . Il tensore  $g := \sum_\alpha f_\alpha g_\alpha$  definisce una metrica riemanniana su  $M$ .  $\square$

**Esercizio 4.7.** Verificare che le funzioni componenti della metrica euclidea  $g_0$  sull'aperto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , rispetto alle coordinate polari  $(y_1, y_2) = (\rho, \theta)$ , sono date da:  $g_{011} = 1, g_{012} = 0, g_{022} = \rho^2$ .

**Esercizio 4.8.** Siano  $g, g_0, g_1$  metriche Riemanniane su  $M$  e  $\sigma \in \mathcal{F}(M)$ . Verificare che  $e^\sigma g$  e  $g_t = t g_0 + (1-t) g_1$ , con  $t \in [0, 1]$ , sono metriche riemanniane su  $M$ .

**Osservazione 4.9. (Varietà semi-riemanniane)**

Sia  $g$  un tensore covariante di ordine 2 su una varietà differenziabile  $M$ . Se  $g$  è simmetrico, non degenere e di segnatura  $(n - \nu, \nu)$ ,  $\nu \geq 0$ , costante, allora  $(M, g)$  è detta *varietà semi-riemanniana* (cfr. [79]) di indice  $\nu$ . In particolare,  $(M, g)$  è riemanniana se di segnatura  $(n, 0)$ .  $(M, g)$  è detta *varietà lorentziana* se la segnatura di  $g$  è  $(n, 1)$  con  $\dim M = n + 1$ . Per una varietà semi-riemanniana, un vettore tangente  $X_p$  è detto:

*tipo-spazio* se  $g_p(X_p, X_p) > 0$  oppure  $X_p = 0$ ,

*tipo-tempo* se  $g_p(X_p, X_p) < 0$ ,

*tipo-luce* se  $g_p(X_p, X_p) = 0$  e  $X_p \neq 0$ .

L'insieme  $\{X_p \in T_p M : g_p(X_p, X_p) = 0, X_p \neq 0\}$  è detto *cono di luce* in  $p$ .

Abbiamo provato che ogni varietà differenziabile paracompatta ammette una metrica riemanniana, ciò non accade in generale se richiediamo che la metrica sia semi-riemanniana. D'altronde, è ben noto che una varietà compatta ammette un campo differenziabile di vettori, non nulli, globalmente definito su  $M$ , se e solo se la caratteristica di Eulero-Poincaré è nulla. Quindi, una varietà compatta  $M$  con caratteristica di Eulero-Poincaré nulla ammette una metrica lorentziana. Infatti,  $M$  ammette una metrica riemanniana  $g$  e un campo di vettori  $X_0$  non nullo (in ogni punto), quindi possiamo supporre  $X_0$  unitario. Indicata con  $\eta$  la 1-forma duale di  $X_0$ , è facile verificare che il tensore

$$\tilde{g}(X, Y) = g(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y)$$

definisce una metrica lorentziana su  $M$ . Rispetto a tale metrica, il campo di vettori  $X_0$  è tipo-tempo. In generale una varietà lorentziana può non avere un campo di vettori tipo-tempo globalmente definito. Una varietà lorentziana con un campo di vettori tipo-tempo globalmente definito è detta varietà lorentziana tempo-orientabile, nota in fisica col nome di varietà spazio-tempo. La relatività generale si basa su una varietà spazio-tempo 4-dimensionale.

**Esercizio 4.10.** Sia  $X_0$  un campo di vettori unitario definito su una varietà riemanniana  $(M, g)$ . Indicata con  $\eta$  la 1-forma  $g$ -duale di  $X_0$ , si verifichi che per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ ,  $\tilde{g} = t g(X, Y) + t(t-1) \eta \otimes \eta$  è una metrica riemanniana.

## 4.2 Immersioni isometriche e la sfera canonica

Siano  $(\bar{M}, \bar{g})$  una varietà riemanniana,  $M$  una varietà differenziabile ed  $f : M \rightarrow \bar{M}$  un'immersione iniettiva. La metrica  $\bar{g}$  induce su  $M$  una metrica riemanniana:  $g = f^* \bar{g}$ , ossia

$$g(X, Y)(p) = \bar{g}_{f(p)}(f_{*p}(X_p), f_{*p}(Y_p)) \quad \forall p \in M \text{ e } \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si vede facilmente che il tensore  $g$  definisce una metrica riemanniana su  $M$ , in particolare  $g_p$  è definito positivo in ogni punto  $p \in M$  in quanto  $f_{*p}$  è



iniettivo. La varietà riemanniana  $(M, g)$  è detta *sottovarietà riemanniana* di  $(\bar{M}, \bar{g})$  ed  $f$  è detta *immersione isometrica*. Determiniamo  $g$  in coordinate locali. Sia  $(U, \varphi, (y_i))$  una carta locale di  $M$  e  $(V, \psi, (x_i))$  una carta locale di  $\bar{M}$  con  $f(U) \subset V$ . Su  $V$  la metrica  $\bar{g}$  è data da

$$\bar{g} = \sum_{i,j} \bar{g}_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

e quindi l'espressione di  $g$  su  $U$ , tenendo conto delle proprietà dell'applicazione duale  $f^*$ , è data da :

$$\begin{aligned} g &= f^* \bar{g} = \sum_{i,j} (f^* \bar{g}_{ij}) f^* dx_i \otimes f^* dx_j = \sum_{i,j} (\bar{g}_{ij} \circ f) d(x_i \circ f) \otimes d(x_j \circ f) \\ &= \sum_{i,j} (\bar{g}_{ij} \circ f) \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} dy_\alpha \otimes \frac{\partial f^j}{\partial y_\beta} dy_\beta, \end{aligned}$$

dove le  $f^i = x_i \circ f : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}, y = \varphi(p) \mapsto x_i(f(p)) := x_i(\psi(f(p)))$  sono le funzioni componenti di  $f$  (rispetto alle fissate coordinate locali). Pertanto,

$$g = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta, \quad \text{dove } g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} (\bar{g}_{ij} \circ f) \frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial f^j}{\partial y_\beta}.$$

Se  $(M, g)$  è una sottovarietà riemanniana dello spazio euclideo  $(\mathbb{R}^{\bar{n}}, g_0)$ , allora  $\bar{g}_{ij} = g_{0ij} = \delta_{ij}$  e quindi

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial f^i}{\partial y_\beta} \quad \text{e} \quad g_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left( \frac{\partial f^i}{\partial y_\alpha} \right)^2. \quad (4.3)$$

In tal caso, la metrica  $g = f^* g_0$  è detta la *metrica canonica* di  $M$ .

**Esempio 4.11.** Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  con parametrizzazione locale  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ . Siano  $\phi_u$  e  $\phi_v$  i vettori tangenti alle linee coordinate  $v = \text{cost.}$  e  $u = \text{cost.}$  rispettivamente. Posto  $E = g_0(\phi_u, \phi_u), F = g_0(\phi_u, \phi_v)$  e  $G = g_0(\phi_v, \phi_v)$ , la metrica riemanniana  $g = i^* g_0$  è determinata, rispetto alle coordinate  $(x_1, x_2) = (u, v)$ , da  $g_{11} = E, g_{12} = F, g_{21} = F, g_{22} = G$ .

**Osservazione 4.12.** Sia  $(M, g)$  una sottovarietà di  $(\bar{M}, \bar{g})$  con immersione isometrica  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ . Se  $(U, (y_\alpha))$  e  $(\bar{U}, (x_i))$  sono carte locali speciali, cioè  $y_\alpha = x_\alpha|_U$  e  $U = \{p \in \bar{U} : x_i(p) = 0, i = n+1, \dots, \bar{n}\}$ , allora  $g_{\alpha\beta}|_U = \bar{g}_{\alpha\beta}|_U$  per ogni  $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ . Infatti, per ogni  $p \in U$  :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(p) &= g_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right)_p \right) := \bar{g}_p \left( (i_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_p, (i_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right)_p \right) \\ &= \bar{g}_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right)_p \right) = \bar{g} \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) (p) = \bar{g}_{\alpha\beta}(p). \end{aligned}$$

**Osservazione 4.13.** Un importante Teorema di John Nash [74] afferma che ogni varietà riemanniana  $(M^n, g)$  può essere realizzata come sottovarietà riemanniana embedded dello spazio euclideo  $(\mathbb{R}^m, g_0)$  per  $m$  abbastanza grande. La dimostrazione di Nash è stata successivamente semplificata da M. Gunther [43]. Quindi, si potrebbero studiare solo sottovarietà embedded di  $\mathbb{R}^m$  con la metrica indotta. Tuttavia, se si vogliono capire le proprietà intrinseche di una varietà riemanniana l'introduzione di un embedding crea informazioni estranee e in alcuni casi potrebbe essere difficile distinguere proprietà intrinseche da quelle estrinseche.

### La sfera canonica $\mathbb{S}^n$

Come caso particolare di sottovarietà riemanniana di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , esaminiamo la *sfera canonica*  $(\mathbb{S}^n, g)$ , dove  $\mathbb{S}^n$  è la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $g = i^*g_0$  e  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Consideriamo la carta locale definita dalla proiezione stereografica dal polo sud:  $\psi : V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\psi : (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (y_1, \dots, y_n) = \left( \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

L'applicazione  $F = I_d \circ i \circ \psi^{-1}$  è l'inclusione  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  espressa in coordinate locali, quindi

$$F : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1+\|y\|^2}, \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2} \right).$$

Posto

$$F^i = \frac{2y_i}{1+\|y\|^2} \quad (i = 1, \dots, n), \quad F^{n+1} = \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2},$$

risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= \frac{-4y_i y_\alpha}{(1+\|y\|^2)^2} && \text{se } i \neq \alpha \text{ e } i < n+1, \\ \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} &= \frac{2(1+\|y\|^2) - 4y_\alpha^2}{(1+\|y\|^2)^2} && \text{se } i = \alpha < n+1, \\ \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} &= \frac{-4y_\alpha}{(1+\|y\|^2)^2}. \end{aligned}$$

Applicando la (4.3), si ottiene

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \right)^2 = \frac{4}{(1+\|y\|^2)^2}, \\ g_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} = 0 \text{ per } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

Di conseguenza, la metrica canonica  $g = i^*g_0$  è data da

$$g = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} (dy_1^2 + \cdots + dy_n^2).$$

**Esercizio 4.14.** Sia  $\mathbb{S}^2(r)$  la sfera di centro l'origine e raggio  $r$ , ottenuta ruotando la curva  $\gamma : x = r\cos(\frac{t}{r}), y = r\sin(\frac{t}{r}), z = 0, t \in \mathbb{R}$ , intorno all'asse  $x$ . Si verifichi che la metrica canonica  $g$  di  $\mathbb{S}^2(r)$  è data da

$$g = dt \otimes dt + r^2 \sin^2(\frac{t}{r}) d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

**Esercizio 4.15.** Verificare che la proiezione stereografica trasforma circonferenze della sfera  $\mathbb{S}^2$  in circonferenze o rette del piano equatoriale.

**Esercizio 4.16.** Si consideri la sfera  $\mathbb{S}^2(r)$  di centro l'origine e raggio  $r$ , rappresentata con equazioni parametriche  $x = r \sin u \cos v, y = r \sin u \sin v, z = r \cos u, 0 < u < \pi, 0 < v < 2\pi$ .  $x_1 = u$  (colatitudine) e  $x_2 = v$  (longitudine) sono coordinate locali per  $\mathbb{S}^2$ . Determinare le funzioni componenti  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  della metrica canonica di  $\mathbb{S}^2$  rispetto alle coordinate geografiche  $(u, v)$ .

**Esercizio 4.17.** Si consideri la sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  con equazioni parametriche:  $x_1 = \cos(t)\cos\vartheta_1, x_2 = \cos(t)\sin\vartheta_1, x_3 = \sin(t)\cos\vartheta_2, x_4 = \sin(t)\sin\vartheta_2$ . Si verifichi che la metrica canonica  $g$  di  $\mathbb{S}^3$  è data da

$$g = dt \otimes dt + \cos^2(t)d\vartheta_1 \otimes d\vartheta_1 + \sin^2(t)d\vartheta_2 \otimes d\vartheta_2.$$

**Osservazione 4.18. (La metrica lorentziana canonica su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ )**

Sia  $\mathbb{S}^{2n+1}$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$ . Indichiamo con  $J_0$  la struttura complessa canonica di  $\mathbb{C}^{n+1}$ , quindi per ogni  $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,

$z = (z_1, \dots, z_{n+1}) = (x_1 + iy_1, \dots, x_{n+1} + iy_{n+1}) \equiv p = (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$ ,  
abbiamo

$$J_0 z = iz, \text{ ossia } J_0 p = (-y_1, x_1, \dots, -y_{n+1}, x_{n+1}).$$

Ora, per ogni  $p = (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{S}_{2n+1}$ , poniamo

$$\xi_p = J_0 p = (-y_1, x_1, \dots, -y_{n+1}, x_{n+1}).$$

$\xi$  definisce un campo differenziabile di vettori unitari tangenti alla sfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , detto *campo vettoriale di Hopf standard* (cfr. Sez. 9.5). Se  $g_R$  è la metrica riemanniana canonica su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , ponendo

$$g_L = g_R - 2\eta_0 \otimes \eta_0, \text{ dove } \eta_0 = g_0(\xi, \cdot),$$

si ottiene la *metrica lorentziana canonica* su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ .

### 4.3 Sommersioni riemanniane

#### Mettrica riemanniana prodotto.

Siano  $(M_1, g_1)$ ,  $(M_2, g_2)$  due varietà riemanniane. Con  $M_1 \times M_2$  indichiamo la varietà differenziabile prodotto e con  $\pi_1, \pi_2$  le proiezioni canoniche su  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente. Poniamo  $\dim M_1 = n_1$  e  $\dim M_2 = n_2$ . Per ogni  $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ , lo spazio tangente  $T_p(M_1 \times M_2)$  può essere identificato con  $T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$  mediante l'isomorfismo:

$$X_p \longmapsto X_{p_1} + X_{p_2} = (\pi_1)_{*p}X_p + (\pi_2)_{*p}X_p.$$

Su  $M_1 \times M_2$  si può definire una metrica riemanniana  $g$ , detta *metrica riemanniana prodotto*, ponendo per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$  e per ogni  $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ :

$$\begin{aligned} g(X, Y)(p) &= g_{1p_1}((\pi_1)_{*p}X_p, (\pi_1)_{*p}Y_p) + g_{2p_2}((\pi_2)_{*p}X_p, (\pi_2)_{*p}Y_p) \\ &= g_{1p_1}(X_{p_1}, Y_{p_1}) + g_{2p_2}(X_{p_2}, Y_{p_2}). \end{aligned}$$

La metrica prodotto  $g$  si indica con  $g_1 \times g_2$ . In particolare  $T_{p_1}M_1$  e  $T_{p_2}M_2$ , pensati come sottospazi di  $T_p(M_1 \times M_2)$ , sono ortogonali:

$$\|X_p\|^2 = \|X_{p_1}\|^2 + \|X_{p_2}\|^2.$$

Se  $(x_i)$  e  $(y_\alpha)$  sono coordinate locali su  $M_1$  e  $M_2$  rispettivamente, allora  $(x_i, y_\alpha)$  sono coordinate locali su  $M_1 \times M_2$ . Inoltre, se

$$g_1 = \sum_{i,j=1}^{n_1} g_{1ij} dx_i \otimes dx_j \quad \text{e} \quad g_2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_2} g_{2\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta,$$

allora

$$g = \sum_{i,j=1}^{n_1} g_{1ij} dx_i \otimes dx_j + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n_2} g_{2\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta.$$

Più in generale, se  $f \in \mathcal{F}(M_1)$  è una funzione positiva, la varietà prodotto  $M_1 \times M_2$  munita della metrica riemanniana  $g = g_1 + f g_2$  si dice *warped product*. In particolare, se  $g_1$  è la metrica canonica della sfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$  e  $dt^2$  è la metrica su un intervallo aperto  $I$ , la metrica  $g = dt^2 + \sin^2 t g_1$  rappresenta (localmente) la metrica canonica della sfera unitaria  $\mathbb{S}^n$  ([97], p. 14).

#### Sommersioni riemanniane

Siano  $\bar{M}, M$  varietà differenziabili ed  $\pi : \bar{M} \rightarrow M$  un'applicazione differenziabile. Diremo che  $\pi$  è una *sommersione* se il suo differenziale  $\pi_{*p}$  è suriettivo per ogni  $p \in \bar{M}$ . In tal caso:

$$\bar{n} = \dim \bar{M} = \dim \ker \pi_{*p} + \text{rango}(\pi_{*p}) = \dim \ker \pi_{*p} + n \geq n = \dim M.$$

Sia ora  $\pi : \bar{M} \rightarrow M$  una sommersione suriettiva, allora per il Teorema 2.55 (del rango) le fibre  $M_x = \pi^{-1}\{x\}$  sono sottovarietà imbedded di  $\bar{M}$  per ogni  $x \in M$ ,  $\dim M_x = \bar{n} - n$ . Ponendo  $\mathcal{V}_p = \ker \pi_{*p}$  per ogni  $p \in \bar{M}$ , otteniamo una distribuzione integrabile  $\mathcal{V}$  (cfr. Sezione 6.8) che corrisponde alla foliazione di  $\bar{M}$  determinata da  $\pi$  in quanto  $T_p M_x = \ker \pi_{*p}$  per ogni  $p \in M_x$ . I vettori tangenti alle fibre sono detti *vettori verticali* e  $\mathcal{V}$  è detta

*distribuzione verticale.* Siano ora  $\bar{g}$  ed  $g$  metriche riemanniane su  $\bar{M}$  e  $M$  rispettivamente. La metrica riemanniana  $\bar{g}$  su  $\bar{M}$  determina una distribuzione  $\mathcal{H}$  complementare di  $\mathcal{V}$ , detta *distribuzione orizzontale*. Per ogni  $p \in \bar{M}$ ,  $\mathcal{H}_p$  è il sottospazio di  $T_p\bar{M}$  ortogonale a  $\ker\pi_{*p} \subset T_p\bar{M}$ , e quindi abbiamo la decomposizione ortogonale  $T_p\bar{M} = \ker\pi_{*p} \oplus \mathcal{H}_p$ , dove  $\dim\mathcal{H}_p = n$  e  $\pi_{*p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$  è un isomorfismo. I vettori del sottospazio  $\mathcal{H}_p$  sono detti *vettori orizzontali*. La sommersione  $\pi : (\bar{M}, \bar{g}) \rightarrow (M, g)$  si dice *sommersione riemanniana* se l'isomorfismo  $\pi_{*p} : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}M$  è isometrico, ossia

$$\bar{g}_p(X_p, Y_p) = g_{\pi(p)}(\pi_{*p}X_p, \pi_{*p}Y_p) \quad \forall X_p, Y_p \in \mathcal{H}_p.$$

Si noti che per sommersioni suriettive, per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  esiste un unico  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  (detto *sollevamento orizzontale* di  $X$ )  $\pi$ -riferito a  $X$ , i.e.,  $\tilde{X}_p \in \mathcal{H}_p$  e  $\pi_{*p}\tilde{X}_p = X_{\pi(p)}$  per ogni  $p \in \bar{M}$ . Inoltre,  $\pi_{*p}[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]$ .  
L'usuale proiezione

$$\pi : (\mathbb{R}^{n+h}, g_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, g_0), (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+h}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

è una sommersione riemanniana. Più in generale, se  $M_1 \times M_2$  è una varietà riemanniana prodotto, le proiezioni  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2$ , sono esempi di sommersioni riemanniane. Rispetto a  $\pi_1$ , i vettori di  $T_{p_2}M_2$  sono verticali mentre quelli di  $T_{p_1}M_1$  sono orizzontali. Se  $(M_1, g_1)$ ,  $(M_2, g_2)$  sono due varietà riemanniane e  $M_1 \times M_2$  è la varietà prodotto munita della metrica riemanniana "warped product"  $g = g_1 + hg_2$ , allora la proiezione  $\pi_1 : (M_1 \times M_2, g_1 + hg_2) \rightarrow (M_1, g_1)$  è un altro esempio di sommersione riemanniana. Rivestimenti riemanniani definiscono sommersioni riemanniane con fibre discrete. Un importante esempio di sommersione riemanniana è la *fibratura di Hopf*  $\pi : S^3 \rightarrow S^2(\frac{1}{2})$  che verrà discussa nella Sezione 9.3. Se sul fibrato tangente  $TM$  di una varietà riemanniana si considera la metrica riemanniana di Sasaki  $G_s$  (cfr. Appendice C), allora la proiezione  $\pi : (TM, G_s) \rightarrow (M, g)$  è un altro interessante esempio di sommersione riemanniana.

**Esercizio 4.19.** Determinare la metrica indotta su  $S^1$  dalla metrica euclidea di  $\mathbb{R}^2$  e la metrica riemanniana prodotto sul toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$ -volte).

**Esercizio 4.20.** Sia  $\mathbb{T}^2$  la superficie torica generata dalla rotazione, intorno all'asse  $z$ , della circonferenza  $\gamma$  di centro  $C(0, a, 0)$  e raggio  $b$ ,  $a > b > 0$ . Determinare la metrica  $g$  indotta sulla superficie torica  $\mathbb{T}^2$  dalla metrica euclidea di  $\mathbb{R}^3$ .  $g$  è una metrica riemanniana prodotto?

**Esercizio 4.21.** Sia  $M$  la superficie ottenuta ruotando la curva  $\gamma : x = 0, y = r(u) > 0, z = z(u), u$  ascissa curvilinea, intorno all'asse  $z$ , quindi  $M$  ha equazioni parametriche

$$x = r(u) \cos \vartheta, \quad y = r(u) \sin \vartheta, \quad z = z(u).$$

Si verifichi che la metrica  $g$  indotta su  $M = \gamma \times S^1$ , dalla metrica euclidea di  $\mathbb{R}^3$ , è data da

$$g = du \otimes du + r^2(u)d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

In tal caso,  $g$  è una metrica riemanniana prodotto?

**Esercizio 4.22.** Si verifichi che l'applicazione seguente :

$$\pi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow \mathbb{S}^2(\frac{1}{2}), (\cos(t)e^{i\vartheta_1}, \sin(t)e^{i\vartheta_2}) \mapsto (\frac{1}{2}\cos(2t), \frac{1}{2}\sin(2t)e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}),$$

è una sommersione riemanniana.

## 4.4 Lo spazio iperbolico e suoi modelli

Consideriamo su  $\mathbb{R}^{n+1}$  la metrica di Minkowski, ossia, la forma bilineare simmetrica  $q : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$q(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n - x_{n+1}y_{n+1}.$$

$q$  definisce una metrica semi-riemanniana di segnatura  $(n, 1)$ . Infatti, se  $\{e_i\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $q(e_i, e_i) = 1$  per  $i = 1, \dots, n$  e  $q(e_{n+1}, e_{n+1}) = -1$ ;  $i_+ = n$  (indice di positività),  $i_- = 1$  (indice di negatività) e  $i = i_+ - i_- = n - 1$  (indice della metrica). Lo spazio di Minkowski  $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$  è il più semplice esempio di varietà lorentziana ed è indicato brevemente con  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ . Poniamo

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1, \quad x_{n+1} > 0\}.$$

$H^n$  è una ipersuperficie regolare di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , precisamente è la falda superiore dell'iperboloide di equazione:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1,$$

e si può ricoprire con l'unica carta  $(H^n, \varphi)$ :

$$\varphi : H^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

$H^n$  è una sottovarietà regolare di  $\mathbb{R}^{n+1}$  con immersione  $i : H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposizione 4.23.** *Il tensore  $g = i^*q$  definisce una metrica riemanniana su  $H^n$ .*

*Dimostrazione.* Il tensore  $g$  è chiaramente covariante di ordine 2 e simmetrico. Quindi, basta verificare che è definito positivo. Sia  $X \in T_a H^n$  e sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $H^n$  con  $\gamma(0) = a$  e  $\dot{\gamma}(0) = X$ . Poiché  $\gamma(t) \in H^n$  per ogni  $t$ , si ha  $q(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$ , ossia  $q(a, X) = 0$  e quindi  $T_a H^n \subset a^\perp$ . D'altronde  $\dim T_a H^n = n = \dim a^\perp$ , pertanto

$$T_a H^n = a^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : q(v, a) = 0\}.$$

Poiché  $q(a, a) = -1$ , esiste una base  $b_0, b_1, \dots, b_n$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $b_0 = a$ , che soddisfa  $q(b_i, b_i) = 1$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , e  $q(b_i, b_j) = 0$  per ogni  $i \neq j$ . Ciò segue dal fatto che l'indice di una forma quadratica non dipende dalla base scelta (Teorema di Sylvester). Quindi,  $\{b_1, \dots, b_n\}$  è una base  $q$ -ortonormale di  $T_a H^n$ . Di conseguenza,  $g_a$  è definito positivo in quanto  $g_a = q|_{T_a H^n}$ .  $\square$

Dalla Proposizione 4.23 segue che  $(H^n, g)$  è una varietà riemanniana, che viene detta *spazio iperbolico* e la metrica  $g$  è detta *metrica riemanniana iperbolica*. Per tale metrica possiamo costruire i modelli di Poincaré nel disco  $\Delta^n = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|^2 < 1\}$  e nel semispazio  $\mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$ .

### Il modello di Poincaré nel disco unitario $\Delta^n$

Sia  $x_0 = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . L'applicazione

$$f : H^n \rightarrow \Delta^n, x \mapsto f(x) = \text{retta}(xx_0) \cap \mathbb{R}^n,$$

dove  $\mathbb{R}^n$  è l'iperpiano  $x_{n+1} = 0$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , è detta *proiezione stereografica iperbolica* (cfr. Figura 4.1). Con facili calcoli si trova:

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

Chiaramente  $f(x) \in \Delta^n$  in quanto:  $\|f(x)\|^2 = \frac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1} < 1 \forall x \in H^n$ . Inoltre, usando la metrica di Minkowski  $q$ ,  $\forall x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in H^n$ :

$$q(x - x_0, x - x_0) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - (x_{n+1} + 1)^2 = -2(1 + x_{n+1})$$

e quindi l'applicazione  $f$  si può esprimere anche con la seguente espressione:

$$f(x) = x_0 - \frac{2(x - x_0)}{q(x - x_0, x - x_0)} \quad \forall x \in H^n.$$

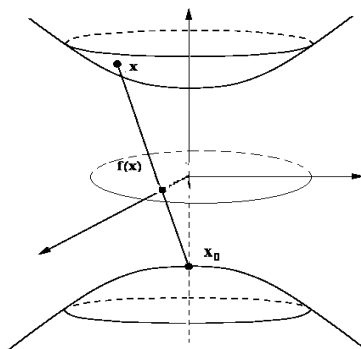


Figura 4.1: La proiezione stereografica iperbolica.

L'applicazione  $f$  è invertibile e la sua inversa è l'applicazione

$$f^{-1} : \Delta^n \rightarrow H^n, \quad y \mapsto f^{-1}(y) = \text{retta}(yx_0) \cap H^n,$$

quindi

$$y \mapsto f^{-1}(y) = \left( \frac{2y_1}{1 - \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 - \|y\|^2}, \frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2} \right).$$

Pertanto  $f$  è un diffeomorfismo e

$$\tilde{g} = (f^{-1})^*g = (i \circ f^{-1})^*q$$

è la metrica iperbolica nel disco unitario  $\Delta^n$ , dove  $g$  è la metrica iperbolica nell'iperboloide  $H^n$  e  $i : H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Poniamo

$$F = i \circ f^{-1} = (F^1, \dots, F^{n+1}) : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \text{ dove}$$

$$F^j(y_1 \dots y_n) = \frac{2y_j}{1 - \|y\|^2} \quad \forall j = 1, \dots, n, \quad F^{n+1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1 + \|y\|^2}{1 - \|y\|^2}.$$

Ricordiamo che  $q = dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n - dx_{n+1} \otimes dx_{n+1}$ . Operando come nel caso della metrica indotta su una sottovarietà di una varietà riemanniana, si ha:

$$\tilde{g} := (f^{-1})^*g = (f^{-1})^*i^*q = F^*q = \sum_{\alpha, \beta} \tilde{g}_{\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta,$$

dove

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= \frac{4y_i y_\alpha}{(1 - \|y\|^2)^2} \quad \text{per } i \neq \alpha \text{ e } i < n+1, \\ \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} &= \frac{2(1 - \|y\|^2) + 4y_\alpha^2}{(1 - \|y\|^2)^2} \quad \text{per } i = \alpha, \quad \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} = \frac{4y_\alpha}{(1 - \|y\|^2)^2}, \end{aligned}$$

si ha

$$\tilde{g}_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1, i \neq \alpha}^n \left( \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \right)^2 = \dots = \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2},$$

e per  $\alpha \neq \beta$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i \neq \alpha, \beta} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\beta} + \frac{\partial F^\beta}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^\beta}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta} = \dots = 0.$$

Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 4.24.** *La metrica iperbolica nel disco unitario  $\Delta^n$  è data da :*

$$\tilde{g} = \frac{4}{(1 - \|y\|^2)^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i. \quad (4.4)$$

Nel disco  $\Delta_r^n$  di raggio  $r$ , la metrica iperbolica è data da:

$$\tilde{g} = \frac{4r^4}{(r^2 - \|y\|^2)^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i.$$



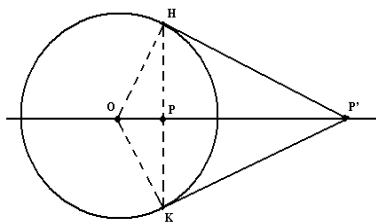
La (4.4) è la rappresentazione della metrica iperbolica nel disco  $\Delta^n$ , di conseguenza, la *proiezione stereografica iperbolica*  $f : (H^n, g) \rightarrow (\Delta^n, \tilde{g})$  è un'isometria. Si noti l'analogia dell'espressione di  $\tilde{g}$  con l'espressione della metrica canonica di  $S^n$  rispetto alle coordinate definite dalla proiezione stereografica.

### Il modello di Poincaré nel semispazio $\mathbb{R}_+^n$

Al fine di presentare il modello di Poincaré nel semispazio  $\mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$  introduciamo la nozione di inversione.

#### Inversione rispetto a una circonferenza

Sia  $S^1$  la circonferenza del piano di centro  $O$  e raggio  $r$ . L'inversione rispetto a tale circonferenza è l'applicazione  $J : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ ,  $P \mapsto P'$ , dove  $P'$  è il punto della semiretta  $OP$  tale che  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ . Se  $P$  è interno (risp. esterno) a  $S^1$ , allora  $P'$  è esterno (risp. interno). Se  $P \in S^1$ , allora  $P' = P$ . Quindi  $J$  scambia l'interno con l'esterno e mantiene fissi i punti di  $S^1(O, r)$ . Geometricamente l'inversione si può costruire come segue. Se  $P$  interno al cerchio, mandiamo da  $P$  la perpendicolare alla retta  $OP$  e siano  $H$  e  $K$  le intersezioni di tale perpendicolare con la circonferenza.



Le tangenti alla circonferenza in  $H$  e  $K$  si incontrano nel punto corrispondente  $P'$  (applicando il primo Teorema di Euclide si ha  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OH}^2 = r^2$ ). Se invece il punto  $P$  è esterno, basta condurre da esso le tangenti alla circonferenza e congiungere i loro punti di contatto; tale congiungente incontra  $OP$  nel punto corrispondente  $P'$ . Usando coordinate cartesiane, se  $O(u_0, v_0)$ ,  $P(u, v)$  e  $P'(u', v')$ , si vede facilmente che l'inversione è rappresentata dalle equazioni:

$$u' = u_0 + \frac{r^2}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}(u - u_0), \quad v' = v_0 + \frac{r^2}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}(v - v_0).$$

#### Inversione rispetto a una sfera

L'*inversione* rispetto alla sfera  $S^{n-1}(x_0, r) : \|x - x_0\|^2 = r^2$  (di centro  $x_0$  e raggio  $r$ ) di  $\mathbb{R}^n$  è la trasformazione

$$J : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\},$$

$$J : x \longmapsto J(x) = x' = x_0 + \frac{r^2}{\|x - x_0\|^2}(x - x_0).$$

$J(x)$  è il punto  $x'$  della semiretta  $x_0x$  tale che  $\|\overrightarrow{x_0x'}\| \cdot \|\overrightarrow{x_0x}\| = r^2$ .  $J$  lascia fissi i punti di  $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$  ed è involutoria:  $J^2 = Id$  (e quindi  $J^{-1} = J$ ). Infatti:

$$\begin{aligned} J^2(x) &= J(Jx) = x_0 + \frac{r^2}{\|Jx - x_0\|^2}(Jx - x_0) \\ &= x_0 + \frac{r^2}{\|r^2 \frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2}\|^2} r^2 \frac{(x-x_0)}{\|x-x_0\|^2} = x. \end{aligned}$$

$J$  scambia l'interno di  $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$  con l'esterno di  $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$ :

$$\|J(x) - x_0\| = \frac{r}{\|x - x_0\|} r < r \iff \frac{r}{\|x - x_0\|} < 1 \iff r < \|x - x_0\|.$$

Siano ora  $x_0 = (0, \dots, 0, -1)$  e  $r = \sqrt{2}$ . Allora,

$$J : x = (x_1 \dots x_n) \mapsto x' = (0, \dots, 0, -1) + \frac{2}{\|x - x_0\|^2}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + 1)$$

e poiché  $\|x - x_0\|^2 = \|x\|^2 + 2x_n + 1$ , si ha

$$J : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x' = \left( \frac{2x_1}{\|x - x_0\|^2}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{\|x - x_0\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - x_0\|^2} \right).$$

Quindi

$$\forall x \in \Delta^n : J(x) \in \mathbb{R}_+^n,$$

dove  $\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$  e  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} \|J(x)\|^2 &= \frac{4(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) + 1 + \|x\|^4 - 2\|x\|^2}{\|x - x_0\|^4} \\ &= \frac{4(\|x\|^2 - x_n^2) + 1 + \|x\|^4 - 2\|x\|^2}{(1 + \|x\|^2 + 2x_n)^2} = \frac{(1 + \|x\|^2)^2 - 4x_n^2}{(1 + \|x\|^2 + 2x_n)^2} \\ &= \frac{1 + \|x\|^2 - 2x_n}{1 + \|x\|^2 + 2x_n} < 1 \quad \text{se } x_n > 0. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^n : J(x) \in \Delta^n.$$

Di conseguenza,  $\tilde{f} = J|_{\mathbb{R}_+^n} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \Delta^n$ ,

$$\tilde{f} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto \left( \frac{2y_1}{\|y - x_0\|^2}, \dots, \frac{2y_{n-1}}{\|y - x_0\|^2}, \frac{1 - \|y\|^2}{\|y - x_0\|^2} \right),$$

è un diffeomorfismo con  $\tilde{f}^{-1} = J|_{\Delta^n} : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  che ha la stessa espressione analitica di  $\tilde{f}$ .

**Proposizione 4.25.** *Se  $\tilde{g}$  è la metrica di Poincaré nel disco  $\Delta^n$  (risp.  $\Delta_r^n$ ), allora la corrispondente metrica di Poincaré  $\tilde{\tilde{g}} = \tilde{f}^* \tilde{g}$  nel semispazio  $\mathbb{R}_+^n$  è espressa da*

$$\tilde{\tilde{g}} = \frac{1}{y_n^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i \quad \left( \text{risp.} \quad \tilde{\tilde{g}} = \frac{r^2}{y_n^2} \sum_{i=1}^n dy_i \otimes dy_i \right).$$

Di conseguenza, l'inversione  $J_{|\Delta^n} : (\Delta^n, \tilde{g}) \rightarrow (\mathbb{R}_+^n, \tilde{\tilde{g}})$  è un'isometria.

*Dimostrazione.*

$$\tilde{\tilde{g}} = \tilde{f}^* \tilde{g} = \tilde{f}^* (f^{-1})^* g = (f^{-1} \circ \tilde{f})^* g = (f^{-1} \circ \tilde{f})^* i^* q = (i \circ f^{-1} \circ \tilde{f})^* q = F^* q,$$

dove  $F = i \circ f^{-1} \circ \tilde{f}$ . Inoltre, si ha

$$F : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \Delta^n \longrightarrow H^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$(y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\tilde{f}} (y'_1, \dots, y'_n) = \left( \frac{2y_h}{1 + \|y\|^2 + 2y_n}, \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2 + 2y_n} \right)$$

$$\xrightarrow{f^{-1}} \left( \frac{2y'_k}{1 - \|y'\|^2}, \frac{1 + \|y'\|^2}{1 - \|y'\|^2} \right) \xrightarrow{i} \left( \frac{2y'_k}{1 - \|y'\|^2}, \frac{1 + \|y'\|^2}{1 - \|y'\|^2} \right),$$

dove  $h$  varia da 1 a  $n-1$  e  $k$  da 1 a  $n$ . Siccome

$$\begin{aligned} \|y'\|^2 &= \frac{1}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)^2} \left( 4 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 1 + \|y\|^4 - 2\|y\|^2 \right) \\ &= \frac{4\|y\|^2 - 4y_n^2 + 1 + \|y\|^4 - 2\|y\|^2}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)^2} \\ &= \frac{(1 + \|y\|^2 - 2y_n)(1 + \|y\|^2 + 2y_n)}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)^2}, \quad \text{si ha} \end{aligned}$$

$$1 - \|y'\|^2 = \frac{4y_n}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)} \quad \text{e} \quad 1 + \|y'\|^2 = \frac{2(1 + \|y\|^2)}{(1 + \|y\|^2 + 2y_n)}.$$

Allora,

$$F^i(y) = \frac{2y'_i}{1 - \|y'\|^2} = \frac{y_i}{y_n} \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

$$F^n(y) = \frac{2y'_n}{1 - \|y'\|^2} = \frac{1 - \|y\|^2}{2y_n}, \quad F^{n+1}(y) = \frac{1 + \|y'\|^2}{1 - \|y'\|^2} = \frac{1 + \|y\|^2}{2y_n}.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \forall \alpha \neq i, \quad \alpha \neq n, \\ \frac{\partial F^\alpha}{\partial y_\alpha} &= \frac{1}{y_n} \quad \forall \alpha = i = 1, \dots, n-1, \quad \text{e quindi} \\ \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} &= \frac{\delta_\alpha^i}{y_n} \quad \forall i, \alpha = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Inoltre, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^i}{\partial y_n} &= -\frac{y_i}{y_n^2}, \quad \forall i = 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial F^n}{\partial y_\alpha} = -\frac{y_\alpha}{y_n}, \quad \forall \alpha = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_n} &= -\frac{2y_n^2 + 1 - \|y\|^2}{2y_n^2}, \quad \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} = \frac{y_\alpha}{y_n} \quad \forall \alpha = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_n} &= \frac{2y_n^2 - 1 - \|y\|^2}{2y_n^2}.\end{aligned}$$

La metrica  $\tilde{g}$  è espressa da

$$\begin{aligned}\tilde{g} = F^*q &= \sum_{i=1}^n F^*(dx_i \otimes dx_i) - F^*(dx_{n+1} \otimes dx_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (dF_i \otimes dF_i) - (dF_{n+1} \otimes dF_{n+1}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta} \right) dy_\alpha \otimes dy_\beta \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \tilde{g}_{\alpha\beta} dy_\alpha \otimes dy_\beta,\end{aligned}$$

dove i coefficienti  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$  sono dati da:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial F^n}{\partial y_\alpha} \right)^2 - \left( \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \right)^2 \\ &= \frac{1}{y_n^2} + \frac{y_\alpha^2}{y_n^2} - \frac{y_\alpha^2}{y_n^2} = \frac{1}{y_n^2}, \quad 1 \leq \alpha \leq n-1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{nn} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_i^2}{y_n^4} + \left( \frac{1 + 2y_n^2 - \|y\|^2}{2y_n^2} \right)^2 - \left( \frac{1 - 2y_n^2 + \|y\|^2}{2y_n^2} \right)^2 \\
&= \frac{\|y\|^2 - y_n^2}{y_n^4} + \frac{1 + (2y_n^2 + \|y\|^2)^2 + 2(2y_n^2 - \|y\|^2)}{4y_n^4} \\
&\quad + \frac{-1 - (\|y\|^2 - 2y_n^2)^2 - 2(\|y\|^2 - 2y_n^2)}{4y_n^4} \\
&= \frac{4\|y\|^2 - 4y_n^2 - 4\|y\|^2 + 8y_n^2}{4y_n^4} = \frac{1}{y_n^2}; \\
\tilde{g}_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F^i}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^i}{\partial y_\beta} + \frac{\partial F^n}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^n}{\partial y_\beta} - \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial F^{n+1}}{\partial y_\beta},
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\alpha n} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_\alpha^i}{y_n} \left( -\frac{y_i}{y_n^2} \right) + \left( -\frac{y_\alpha}{y_n} \right) \left( -\frac{2y_n^2 + 1 - \|y\|^2}{2y_n^2} \right) \\
&\quad - \frac{y_\alpha}{y_n} \cdot \left( \frac{2y_n^2 - 1 - \|y\|^2}{2y_n^2} \right) = 0, \text{ per } \alpha = 1, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\delta_\alpha^i}{y_n} \cdot \frac{\delta_\beta^i}{y_n} + \frac{y_\alpha y_\beta}{y_n^2} - \frac{y_\alpha y_\beta}{y_n^2} = 0, \text{ per } \alpha, \beta = 1, \dots, n-1.$$

Pertanto,  $\tilde{g} = (1/y_n^2) \sum_{i=1}^n dy_i^2$ . □

**Osservazione 4.26.** Nel caso  $n = 2$ , possiamo definire con notazioni complesse  $\Delta^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $\mathbb{R}_+^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ ,  $z_0 = (0, -1) = -i$ . Per cui l'inversione  $J(z) = z_0 + \frac{r^2}{\|z - z_0\|^2}(z - z_0)$ , con  $r = \sqrt{2}$ , è data da:

$$\begin{aligned}
J(z) &= z_0 + \frac{r^2}{\|z - z_0\|^2}(z - z_0) = -i + \frac{2(x + iy + i)}{(y + 1)^2 + x^2} \\
&= \frac{2x - i(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + (y + 1)^2} = -i \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i} = -i \bar{C}(z),
\end{aligned}$$

dove  $C : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Delta^2$ ,  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ , è la *trasformazione di Cayley*.

**Osservazione 4.27. (Il modello di Klein)**

Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n$  si può pensare definito dalla sfera unitaria  $\mathbb{S}^n$ , centrata nell'origine, identificando i punti antipodali.  $G = \{\pm I_d\}$  è un gruppo di diffeomorfismi di  $\mathbb{S}^n$ . Nello spazio di Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ , la sfera di raggio

$i = \sqrt{-1}$  è l'iperboloide a due falde  $\bar{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1\}$ .  $G = \{\pm I_d\}$  è anche un gruppo di diffeomorfismi di  $\bar{H}^n$ . Identificando punti antipodali di  $\bar{H}^n$  si ottiene un sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n$ . Poiché punti antipodali stanno in componenti connesse disgiunte di  $\bar{H}^n$ , questo sottoinsieme di  $\mathbb{P}^n$  può essere modellato da una delle due componenti, ad esempio da  $H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1, x_{n+1} > 0\}$ . Con riferimento alla struttura differenziabile definita su  $\mathbb{P}^n$ , consideriamo la carta locale  $(U_{n+1} = \{p = [x] \in \mathbb{P}^n : x_{n+1} \neq 0\}, \varphi_{n+1})$ , dove

$$\varphi_{n+1} : U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi_{n+1} : p = [(x_1, \dots, x_{n+1})] \mapsto (y_1, \dots, y_n) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

$H^n \subset U_{n+1}$  e  $\varphi_{n+1}(H^n) = \Delta^n$  (disco aperto unitario di  $\mathbb{R}^n$ ). La presentazione dello spazio iperbolico  $H^n$  su  $\Delta^n$  mediante la  $\varphi_{n+1}$  è detto *modello iperbolico proiettivo o modello di Klein*. La proiezione stereografica  $\psi$  su  $\mathbb{S}^n$  dal polo sud  $S(0, \dots, 0, -1)$  applica la semisfera superiore  $\mathbb{S}_+^n$  nel disco unitario  $\Delta^n$ . Mediante la proiezione  $\psi$  si ottiene il *modello iperbolico di Poincaré nella semisfera  $\mathbb{S}_+^n$* .

## 4.5 Metriche associate a una struttura simplettica

La nozione di gruppo simplettico introdotta nel Capitolo sui gruppi di Lie è legata alla nozione di varietà simplettica che adesso esponiamo brevemente in relazione alle metriche riemanniane associate. Per maggiori dettagli, sviluppi e approfondimenti sulle metriche riemanniane associate a una struttura simplettica si consiglia la monografia di D.E. Blair [11].

**Definizione 4.28.** Una varietà simplettica è una varietà differenziabile  $M$ ,  $\dim M = 2n$ , con una assegnata 2-forma  $\Phi$  chiusa ( $d\Phi = 0$ ) non degenere ( $\Phi^n \neq 0$ ).

Localmente la 2-forma  $\Phi$  si può esprimere nella forma normale

$$\Phi = \theta^1 \wedge \eta^1 + \dots + \theta^n \wedge \eta^n,$$

dove  $\{\theta^1, \eta^1, \dots, \theta^n, \eta^n\}$  è una base locale di 1-forme. Un cambiamento di base che lascia invariata la forma normale  $\Phi = \sum_{i=1}^n \theta^i \wedge \eta^i$  è dato da una matrice simplettica. In particolare il gruppo strutturale del fibrato tangente di una varietà simplettica è riducibile a  $Sp(2n, \mathbb{R})$ . Il classico esempio di varietà simplettica è  $\mathbb{R}^{2n}$  con la 2-forma  $\Phi = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ , un altro esempio (usato in meccanica classica) è il fibrato cotangente  $T^*M$  di una varietà differenziabile.

Sia  $(M, \Phi)$  una varietà simplettica  $2n$ -dimensionale. Sia  $h$  una arbitraria metrica riemanniana su  $M$  e sia  $\{E_1, E_2, \dots, E_{2n}\}$  una base  $h$ -ortonormale locale di campi vettoriali. Sia  $\Phi_{ij} = \Phi(E_i, E_j)$ .  $A = (\Phi_{ij})$  è una matrice

antisimmetrica non degenera di ordine  $2n$ . Per il teorema di decomposizione polare, esiste una matrice ortogonale  $F$  di ordine  $2n$  ed esiste una matrice simmetrica definita positiva  $G$  di ordine  $2n$  che soddisfano:

$$A = F G \quad (\text{decomposizione polare destra}).$$

Definiamo i tensori  $g$  e  $J$  ponendo:

$$g(E_i, E_j) = G_{ij} \quad e \quad J E_j = \sum F_{ij} E_i.$$

La definizione di  $g$  è indipendente dalla scelta della base  $\{E_i\}$ . Se  $\{V_1, \dots, V_{2n}\}$  è un'altra base  $h$ -ortonormale locale di campi vettoriali, indicata con  $P$  la matrice ortogonale del cambiamento di base, si ha

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \Phi(V_i, V_j) = \Phi\left(\sum_k P_{ki} E_k, \sum_r P_{rj} E_r\right) = \sum_{k,r} P_{ki} A_{kr} P_{rj} \\ &= (P^T A P)_{ij}. \end{aligned}$$

Quindi, se  $B = F' G'$  è la decomposizione polare destra di  $B$ ,  $F' G' = B = P^T A P = P^T F G P = P^T F P P^T G P$  e per l'unicità della decomposizione polare si ha  $F' = P^T F P$  e  $G' = P^T G P$ . In particolare  $g$  e  $J$  sono globalmente definiti su  $M$ . Inoltre, essendo  $\Phi$  antisimmetrica, risulta  $F^2 = -I$ . Infatti,  $\Phi = F G$  e  $\Phi^T = -\Phi$  implicano  $G^T F^T = -F G$  dove  $G^T = G$ , per cui  $G F^T F = -F G F$ , e quindi  $G = -F G F = -F F F^T G F$  dove  $F^T G F$  è simmetrica ed è definita positiva; siccome  $G = I G$ , per l'unicità della decomposizione polare destra si ha  $F^2 = -I$  ed  $F$  è anche antisimmetrica (essendo  $F$  ortogonale,  $F = -F^{-1} = -F^T$ ). Infine, per come definiti i tensori  $g$  e  $J$ , si ha  $g(X, JY) = \Phi(X, Y)$  e quindi

$$g(JX, JY) = \Phi(JX, Y) = -\Phi(Y, JX) = -g(Y, J^2 X) = g(X, Y).$$

Pertanto, abbiamo il seguente

**Teorema 4.29.** *Sia  $(M, \Phi)$  una varietà simplettica di dimensione  $2n$ . Allora esistono una metrica riemanniana  $g$  e una struttura quasi complessa  $J$  (un tensore di tipo  $(1, 1)$  con  $J^2 = -I$ ) tali che*

$$g(X, JY) = \Phi(X, Y) \quad e \quad g(JX, JY) = g(X, Y).$$

Una varietà differenziabile  $2n$ -dimensionale munita di una struttura quasi complessa  $J$  è detta *varietà quasi complessa*. Una varietà complessa ammette una struttura quasi complessa naturale  $J$ . Se  $z_j = x_j + iy_j$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $j = 1, \dots, n = \dim_{\mathbb{C}} M$ , sono coordinate complesse,  $J$  è definita da

$$J(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j \quad e \quad J(\partial/\partial y_j) = -\partial/\partial x_j.$$

In tal caso  $J$  è detta *struttura complessa*. Se  $J$  è una struttura quasi complessa, il tensore di torsione di  $J$  è il tensore  $N$  di tipo  $(1, 2)$  definito da

$$N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Si dimostra (cfr. [56] vol.II, p.124) che: *il tensore di torsione  $N$  di  $J$  è nullo se, e solo se,  $J$  è una struttura complessa.*

Ogni struttura quasi complessa  $J$  su una varietà 2-dimensionale ha tensore di torsione  $N = 0$ . Infatti,

$$N(X, JX) = [JX, J^2X] - [X, JX] - J[JX, JX] - J[X, J^2X] = 0.$$

D'altronde,  $N(X, X) = 0$  e, nell'intorno di un punto dove  $X \neq 0$ , ogni campo vettoriale  $Y$  è combinazione lineare di  $X$  e  $JX$ . Pertanto,  $N = 0$ .

Una metrica riemanniana  $g$  su una varietà quasi complessa  $(M, J)$  è detta *metrica hermitiana* se

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

in tal caso la coppia  $(J, g)$  è detta *struttura quasi hermitiana*. Si noti che ogni varietà quasi complessa (paracompatta)  $M$  ammette una metrica hermitiana. Infatti, siccome  $M$  è paracompatta, esiste una metrica riemanniana  $\bar{g}$  e quindi ponendo

$$g(X, Y) = \bar{g}(X, Y) + \bar{g}(JX, JY)$$

si ottiene una metrica hermitiana su  $M$ . La 2-forma

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY),$$

è detta *2-forma fondamentale* della struttura quasi hermitiana. Se  $(J, g)$  è una struttura quasi hermitiana, le seguenti proprietà sono equivalenti:

$$(a) \nabla J = 0, \quad (b) \nabla \Phi = 0, \quad (c) d\Phi = 0 \quad \text{e} \quad N = 0,$$

dove  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita associata alla metrica  $g$ . Una struttura quasi hermitiana  $(J, g)$  è detta: di *Kähler* (o *kähleriana*) se il tensore  $J$  (equivalentemente  $\Phi$ ) è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita di  $g$ ; *almost Kähler* se  $d\Phi = 0$ . Quindi, le metriche riemanniane definite dal Teorema 4.29 si possono pensare come metriche di strutture almost Kähler la cui 2-forma fondamentale è la data forma simplettica. Inoltre, le varietà kähleriane sono particolari varietà simplettiche.

Ogni metrica riemanniana  $g$  su una varietà 2-dimensionale orientata  $M$  definisce una struttura quasi complessa (una rotazione)  $J$  in modo naturale. Infatti, se  $E_1, E_2$  è una base ortonormale locale positiva, basta definire

$$JE_1 = E_2 \quad \text{e} \quad JE_2 = -E_1. \quad (4.5)$$

Inoltre,  $g$  è hermitiana rispetto a tale  $J$ . In particolare, se  $M$  è una superficie di  $\mathbb{R}^3$  orientata da  $\xi$  (campo unitario normale alla superficie), la struttura quasi complessa naturale  $J$  è definita da

$$JX = \xi \wedge X.$$

**Esercizio 4.30.** Si verifichi che la struttura quasi complessa  $J$  definita dalla (4.5) non dipende dalla particolare base ortonormale positiva considerata.

Per uno studio sulle varietà quasi-complesse, complesse, hermitiane e kähleriane si consigliano i testi [10] e [56] vol.II.



## 4.6 Metriche associate a una struttura di (quasi) contatto

L'analogo in dimensione dispari delle varietà quasi complesse sono le varietà di quasi contatto. In questa sezione diamo una rapida presentazione delle varietà riemanniane di (quasi) contatto. Per maggiori dettagli, approfondimenti e motivazioni si consigliano le monografie [11] e [16].

### Strutture riemanniane di (quasi) contatto

Una varietà differenziabile  $(2n + 1)$ -dimensionale  $M$  si dice **varietà di contatto** se ammette una 1-forma di contatto  $\eta$ , ossia la  $(2n + 1)$ -forma  $\eta \wedge (d\eta)^n$  è diversa da zero in ogni punto. In particolare, una varietà di contatto è orientabile (cfr. Appendice A). Il classico Teorema di Darboux afferma che per ogni punto di una varietà di contatto esiste un intorno con coordinate locali  $(x_i, y_i, z)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , rispetto alle quali

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

Dalla condizione di contatto  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  segue che la distribuzione di contatto  $2n$ -dimensionale  $\mathcal{D} = \ker \eta$  non è integrabile. Data  $\eta$  forma di contatto, esiste ed è unico un campo vettoriale  $\xi$ , detto **campo vettoriale di Reeb**, o *campo vettoriale caratteristico*, determinato dalle condizioni

$$\eta(\xi) = 1 \text{ e } d\eta(\xi, \cdot) = 0.$$

Inoltre, vale il seguente

**Teorema 4.31.** ([11]) *Sia  $(M, \eta)$  una varietà di contatto con campo vettoriale di Reeb  $\xi$ . Allora, esiste una metrica riemanniana  $g$ , detta **metrica associata**, e un tensore  $\varphi$  di tipo  $(1, 1)$  tali che*

$$\eta = g(\xi, \cdot), \quad d\eta = g(\cdot, \varphi), \quad \varphi^2 = -Id + \eta \otimes \xi.$$

In tal caso  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ , o  $(\eta, g)$ , si dice **struttura riemanniana di contatto** (oppure *struttura metrica di contatto*). Una metrica associata soddisfa

$$g(\varphi X, \varphi Y) = (d\eta)(\varphi X, Y) = -(d\eta)(Y, \varphi X) = -g(Y, \varphi^2 X),$$

e quindi

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \quad (4.6)$$

In particolare,  $g|_{\mathcal{D}}$  è hermitiana. Si noti che per una struttura riemanniana di contatto le curve integrali del campo vettoriale di Reeb sono curve geodetiche. Inoltre, lo spazio  $\mathcal{A}(\eta)$  di tutte le metriche associate a una fissata forma di contatto è infinito-dimensionale, e si possono studiare problemi variazionali per funzionali della curvatura definiti su  $\mathcal{A}(\eta)$  ([11], Capitolo 10).

Osserviamo che data una varietà riemanniana di contatto  $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$  e un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  con  $f^*\eta = \eta$ , allora  $f^*g$  è una metrica associata a  $\eta$ . Più precisamente vale la seguente

**Proposizione 4.32.** *Sia  $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$  una varietà riemanniana di contatto ed  $f : M \rightarrow M$  un diffeomorfismo con  $f^*\eta = \eta$ . Allora:  $(\eta, \xi, \tilde{\varphi} = f_*^{-1} \circ \varphi \circ f_*, f^*g)$  è una struttura riemanniana di contatto su  $M$ .*

*Dimostrazione.* Intanto  $f_*\xi = \xi$  in quanto

$$\eta(f_*\xi) = (f^*\eta)(\xi) = \eta(\xi) = 1$$

e

$$(d\eta)(f_*\xi, f_*X) = (f^*d\eta)(\xi, X) = (df^*\eta)(\xi, X) = (d\eta)(\xi, X) = 0.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} (f^*g)(X, \tilde{\varphi}Y) &= g(f_*X, f_*\tilde{\varphi}Y) = g(f_*X, \varphi f_*Y) = (d\eta)(f_*X, f_*Y) \\ &= (f^*d\eta)(X, Y) = (df^*\eta)(X, Y) = (d\eta)(X, Y) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^2 &= f_*^{-1} \circ \varphi \circ f_* \circ f_*^{-1} \circ \varphi \circ f_* = f_*^{-1} \circ \varphi^2 \circ f_* \\ &= f_*^{-1}(-f_* + (\eta \circ f_*) \otimes \xi) = -I + (f^*\eta) \otimes f_*^{-1}\xi \\ &= -I + \eta \otimes \xi. \end{aligned}$$

Pertanto,  $(\eta, \xi, \tilde{\varphi}, f^*g)$  è una struttura riemanniana di contatto.  $\square$

Più in generale, si può definire una **struttura di quasi contatto** come una terna di tensori  $(\eta, \xi, \varphi)$  su  $M$  dove  $\eta$  è una 1-forma,  $\xi$  un campo di vettori e  $\varphi$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$ , che soddisfano

$$\eta(\xi) = 1 \quad e \quad \varphi^2 = -Id + \eta \otimes \xi.$$

Notiamo che se  $(\eta, \xi, \varphi)$  è una struttura di quasi contatto, allora anche  $(\eta, \xi, -\varphi)$ ,  $(-\eta, -\xi, \varphi)$ ,  $(-\eta, -\xi, -\varphi)$  sono strutture di quasi contatto.

Si può dimostrare la seguente

**Proposizione 4.33.** ([11]) *Se  $(\eta, \xi, \varphi)$  è una struttura di quasi contatto su  $M$ , allora  $\varphi\xi = 0$ ,  $\eta \circ \varphi = 0$  e l'endomorfismo  $\varphi$  ha rango  $2n$ .*

Una metrica riemanniana  $g$  su  $M$  si dice **metrica compatibile** con una fissata struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$  se è soddisfatta la (4.6). In questo caso,  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è detta *struttura riemanniana di quasi contatto* (oppure *struttura metrica di quasi contatto*). Posto  $Y = \xi$ , la (4.6) implica che la 1-forma  $\eta = g(\xi, \cdot)$ , quindi il fibrato tangente di una varietà riemanniana di quasi contatto si può decomporre come somma ortogonale della distribuzione  $2n$ -dimensionale  $\mathcal{D} = \ker \eta$  e della distribuzione 1-dimensionale definita da  $\xi$ . Dalla (4.6), tenendo anche conto che  $\eta \circ \varphi = 0$ , si ottiene

$$g(\varphi X, Y) = g(\varphi^2 X, \varphi Y) + \eta(\varphi X)\eta(Y) = -g(X, \varphi Y).$$

La 2-forma  $\Phi$  definita da

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

è la *2-forma fondamentale* della struttura riemanniana di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ . In particolare,  $\eta \wedge \Phi^n$  è una forma di volume su  $M$ , e quindi  $M$  è orientabile. If  $\Phi = d\eta$ , allora  $\eta$  è chiaramente una *forma di contatto* e in tal caso  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di contatto.

**Esercizio 4.34.** (Esistenza di metriche compatibili)

Sia  $(\eta, \xi, \varphi)$  una struttura di quasi contatto su  $M$  e sia  $\tilde{g}$  una arbitraria metrica riemanniana su  $M$ . Si verifichi che il tensore

$$g = \frac{1}{2}(\tilde{g}(\varphi^2 \cdot, \varphi^2 \cdot) + \tilde{g}(\varphi \cdot, \varphi \cdot)) + \eta \otimes \eta$$

definisce una metrica riemanniana su  $M$  compatibile con la struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$ . Quindi, data una struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$ , esiste sempre una metrica riemanniana  $g$  su  $M$  compatibile con tale struttura

**Esercizio 4.35.** Sia  $(\eta, \xi, \varphi)$  una struttura di quasi contatto su  $M$ . Si verifichi che

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0 \Leftrightarrow d\eta(\xi, \cdot) = 0,$$

dove  $\mathcal{L}_\xi$  è la derivata di Lie. Se  $g$  è una metrica compatibile con  $(\eta, \xi, \varphi)$ , usando proprietà della connessione di Levi-Civita  $\nabla$  (cfr. Capitolo 6), si può vedere che le precedenti condizioni sono equivalenti alla condizione  $\nabla_\xi \xi = 0$  (le curve integrali di  $\xi$  sono curve geodetiche).

Per una struttura riemanniana di contatto  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ , il **tensore  $h$**  definito da

$$h = (1/2)\mathcal{L}_\xi \varphi,$$

è simmetrico e soddisfa  $h\xi = 0$ ,  $\varphi h = -h\varphi$ . Esso gioca un ruolo fondamentale nello studio della geometria di una varietà riemanniana di contatto. In particolare, si può vedere che il tensore  $h$  e la torsione scalare  $\|\tau\|$ ,  $\tau = \mathcal{L}_\xi g$ , introdotta in [26], soddisfano:

$$\tau = 2g(\cdot, h\varphi) \quad \text{e} \quad \|\tau\|^2 = 4\text{tr}h^2.$$

e quindi  $h = 0$  se e solo se  $\tau = 0$ , ovvero il campo vettoriale di Reeb  $\xi$  è di Killing (cfr. Capitolo 9).

## Strutture riemanniane di contatto speciali

Una struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$  si dice *normale* se la struttura quasi complessa  $J$  on  $M \times \mathbb{R}$ , definita da  $J(X, f \frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$ , è integrabile. Equivalentemente, una struttura di quasi contatto è normale se, e solo se, vale la condizione  $[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ , dove  $[\varphi, \varphi]$  è il tensore di tipo (1, 2) definito da

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y].$$

Una struttura riemanniana di contatto si dice **struttura sasakiana** se la struttura di quasi contatto associata è normale. Caratterizzazioni delle varietà sasakiane, usando la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  (che studieremo nel Capitolo 6) e il tensore di curvatura di tipo (1, 3)  $R$  (che studieremo nel Capitolo 8), sono date dalla seguente proposizione.

**Proposizione 4.36.** ([11], p. 86, 114)

• Una struttura riemanniana di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è sasakiana se, e solo se,

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X.$$

- Una struttura riemanniana di contatto  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è *sasakiana* se, e solo se,

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X.$$

- Una varietà riemanniana di contatto  $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$  si dice:
  - **varietà di  $K$ -contatto** se il campo vettoriale di Reeb  $\xi$  è di Killing;
  - **varietà di  $H$ -contatto** se il campo vettoriale di Reeb  $\xi$  è un campo vettoriale armonico ([33], Cap. IV), in modo equivalente  $M$  è di  $H$ -contatto se  $\xi$  è un autovettore dell'operatore di Ricci.

Una varietà sasakiana è di  $K$ -contatto, il viceversa vale solo in dimensione tre. Una varietà di  $K$ -contatto è di  $H$ -contatto, in generale non vale il viceversa. Maggiori informazioni su queste speciali classi di varietà riemanniane di contatto si possono trovare in [11].

## Il cono metrico

Le varietà sasakiane sono l'analogo in dimensione dispari delle varietà kähleriane. In effetti, una diversa presentazione delle strutture metriche di (quasi) contatto è la seguente. Ricordiamo che il *cono metrico* (detto anche *cono riemanniano*) su una varietà riemanniana  $(M, g)$  è la varietà riemanniana  $C(M) = (\mathbb{R}_+ \times M, G = dt^2 + t^2g)$ , i.e., la varietà *warped product*  $\mathbb{R}_+ \times_{t^2} M$ . Il campo vettoriale  $\zeta$  su  $C(M)$  definito da

$$\zeta = t \frac{\partial}{\partial t}$$

è detto *campo vettoriale di Liouville* (o di *Eulero*). Geometria di  $C(M)$  che corrisponde a una struttura riemanniana di quasi contatto è considerata, ad esempio, in [16] Section 6.5. Se  $(M, \eta, \xi, \varphi)$  è una varietà di quasi contatto, possiamo definire un tensore  $J$  di tipo  $(1, 1)$  su  $C(M)$  ponendo

$$JX = \varphi X \quad \text{per } X \in \ker \eta, \quad J\xi = \zeta, \quad J\zeta = -\xi.$$

$J$  è una struttura quasi complessa. Inoltre, se  $g$  è una metrica riemanniana su  $M$  compatibile con la struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$ , allora la metrica riemanniana  $G = dt^2 + t^2g$  definita sul cono è hermitiana rispetto a  $J$ . In questa corrispondenza ([16], p.202-206):

- $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di quasi contatto su  $M$  se, e solo se,  $(J, G)$  è una struttura quasi hermitiana su  $C(M)$ ;
- $\eta$  è una forma di contatto su  $M$  se, e solo se, la 2-form  $\Omega = d(t^2\eta)$  è una forma simplettica su  $C(M)$ ;
- $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di contatto su  $M$  se, e solo se,  $(J, G, \Omega)$  è una struttura almost Kähler su  $C(M)$ ;
- $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura sasakiana su  $M$  se, e solo se,  $(J, G, \Omega)$  è una struttura di Kähler su  $C(M)$ .

### Deformazioni di metriche compatibili/associate

Se  $g$  è una metrica compatibile con  $(\eta, \xi, \varphi)$ , mediante una *deformazione  $\mathcal{D}$ -conforme*:

$\tilde{g} = e^\sigma g + (1 - e^\sigma)\eta \otimes \eta$ , dove  $\sigma$  è una funzione positiva differenziabile, otteniamo una nuova metrica compatibile con la stessa struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$ . Infatti,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\varphi X, \varphi Y) &= e^\sigma g(\varphi X, \varphi Y) = e^\sigma (g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)) \\ &= \tilde{g}(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).\end{aligned}$$

Se  $g$  è una metrica riemanniana associata a una forma di contatto:  $d\eta = g(\cdot, \varphi\cdot)$ , la nuova metrica riemanniana  $\tilde{g}$  ottenuta da  $g$  con una deformazione  $\mathcal{D}$ -conforme non è una metrica associata a  $\eta$ :

$$\tilde{g}(\cdot, \varphi\cdot) = e^\sigma g(\cdot, \varphi\cdot) = e^\sigma d\eta.$$

Quindi, è possibile avere strutture riemanniane di contatto  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  e strutture riemanniane di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi, \tilde{g})$ , con la stessa struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$ , ma con  $\tilde{g}$  metrica compatibile e non associata. Tuttavia, se  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di contatto (risp. di quasi contatto), mediante la seguente deformazione, detta *deformazione  $\mathcal{D}$ -omotetica*,

$$(\tilde{\eta} = a\eta, \tilde{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \tilde{\varphi} = \varphi, \tilde{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta), \quad a = \text{cost.} > 0,$$

si ottiene una nuova struttura riemanniana di contatto (risp. di quasi contatto). Strutture sasakiane, di  $K$ -contatto e di  $H$ -contatto sono invarianti per deformazioni  $\mathcal{D}$ -omotetiche.

### Esempi

Nel seguito diamo alcuni esempi di varietà riemanniane di contatto.

**Esempio 4.37.** La sfera canonica  $\mathbb{S}^{2n+1}$  è un esempio classico di varietà con struttura sasakiana costruita come ipersuperficie dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Più in generale consideriamo  $M$  ipersuperficie orientabile di una varietà quasi hermitiana  $(\bar{M}, \bar{g}, J)$  di dimensione  $2n+2$ . Poiché  $M$  è orientabile, esiste  $N$  campo vettoriale unitario ortogonale all'ipersuperficie  $M$ . Il campo vettoriale

$$\xi = JN,$$

detto *campo vettoriale di Hopf* di  $M$ , è tangente ad  $M$  in quanto  $\bar{g}(\xi, N) = \bar{g}(JN, N) = 0$ . Indichiamo con  $g$  la metrica riemanniana indotta da  $\bar{g}$  su  $M$ , e con  $\eta$  la 1-forma duale:

$$\eta(X) = g(\xi, X) \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Osserviamo che  $\bar{g}(JX, N) = -\bar{g}(X, JN) = -g(X, \xi) = -\eta(X)$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Quindi, indichiamo con  $\varphi$  il tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $M$  definito da:

$$-\varphi X = JX - \bar{g}(JX, N)N = JX + \eta(X)N, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

ovvero  $-\varphi X$  è la componente tangente di  $JX$ . Siccome  $\bar{g}(X, N) = \bar{g}(\xi, N) = 0$  per  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , il tensore  $\varphi$  soddisfa:

$$\begin{aligned}\varphi^2 X &= (-\varphi)^2 X = -\varphi(JX - \bar{g}(JX, N)N) \\ &= \dots = J^2 X - \bar{g}(JX, N)JN \\ &= -X + \eta(X)\xi.\end{aligned}$$

Inoltre,

$$g(\varphi X, \varphi X) = \bar{g}(JX + \eta(X)N, JY + \eta(Y)N) = \dots = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Pertanto,  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di quasi contatto sull'ipersuperficie  $M$ . In particolare, se consideriamo la sfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$  come ipersuperficie dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{2n+2}$ ,  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura sasakiana (cfr. Osservazione 9.25).

Un altro esempio classico di varietà con struttura sasakiana è il seguente

**Esempio 4.38.** Consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^{2n+1}(x_i, y_i, z)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , con forma di contatto di Darboux (con coefficiente  $1/2$ )

$$\eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i).$$

Il campo vettoriale di Reeb è  $\xi = 2\partial_z$  e la distribuzione di contatto  $\mathcal{D} = \ker \eta$  è generata dai campi vettoriali  $E_i = 2\partial_{y_i}$ ,  $E_{n+i} = 2(\partial_{x_i} + y_i\partial_z)$ . Se consideriamo la metrica riemanniana (non euclidea)

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^n (dx_i)^2 + (dy_i)^2),$$

e il tensore  $\varphi$  definito da

$$\varphi\xi = 0, \quad \varphi E_i = E_{n+i} \quad \text{e} \quad \varphi E_{n+i} = -E_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

allora  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  definisce una struttura sasakiana sullo spazio  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Si noti che per  $n = 1$ , questo esempio è spesso identificato con il gruppo di Heisenberg  $Nil^3$  munito di una struttura sasakiana invariante a sinistra (cfr. Osservazione 4.47).

**Esempio 4.39.** Data una varietà riemanniana  $(M, g)$ , sul fibrato tangente  $TM$  si può considerare la metrica di Sasaki  $G_s$  (da non confondere con la metrica sasakiana delle strutture di contatto). Il fibrato sferico tangente  $T_1M$  definito come ipersuperficie del fibrato tangente  $TM$ , ammette una struttura riemanniana di contatto naturale, dove il campo vettoriale di Reeb è il flusso geodetico (normalizzato) e la metrica riemanniana di contatto è la metrica di Sasaki (normalizzata) indotta dalla metrica di Sasaki  $G_s$  di  $TM$  (cfr. Osservazione C.4). Tale struttura, in generale, non è sasakiana. In effetti, un classico risultato di Y. Tashiro [107] afferma che la struttura riemanniana di contatto naturale di  $T_1M$  è di  $K$ -contatto se, e solo se, la varietà  $(M, g)$  ha curvatura sezionale costante  $+1$ , e in tal caso la struttura è sasakiana.

**Osservazione 4.40.** Anche nel caso semi-riemanniano, si possono definire strutture semi-riemanniane di (quasi) contatto (cfr., ad esempio, [94]).

### Osservazioni in dimensione 3

Ogni varietà differenziabile  $M$  orientabile di dimensione tre è parallelizzabile (cfr. Osservazione A.1), quindi esistono tre campi vettoriali linearmente indipendenti  $X_1, X_2, X_3$  globalmente definiti su  $M$ . Possiamo quindi definire una metrica riemanniana  $g$  ponendo  $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ , cioè in modo che  $(\xi = X_1, E_1 = X_2, E_2 = X_3)$  sia una base ortonormale. Se  $g$  è una fissata metrica riemanniana su  $M$ , possiamo ortonormalizzare la base  $(X_1, X_2, X_3)$  in modo da avere una base  $g$ -ortonormale che indichiamo con  $\xi, E_1, E_2$ . In ogni caso, ponendo

$$\eta = g(\xi, \cdot), \quad \varphi\xi = 0, \quad \varphi E_1 = E_2 \quad \text{e} \quad \varphi E_2 = -E_1,$$

otteniamo una 1-forma  $\eta$  e un tensore  $\varphi$  di tipo  $(1, 1)$  che insieme a  $\xi$  e alla metrica  $g$  definiscono una struttura riemanniana di quasi contatto. D'altronde, una varietà che ammette una struttura riemanniana di quasi contatto è orientabile. Pertanto, vale la seguente

**Proposizione 4.41.** *Una varietà differenziabile  $M$  di dimensione tre è orientabile se, e solo se, ammette una struttura riemanniana di quasi contatto. Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana orientabile di dimensione tre, allora  $M$  ammette una struttura riemanniana di quasi contatto avente la metrica  $g$  come metrica compatibile.*

Si noti che se una varietà differenziabile orientabile  $M$  di dimensione tre è anche compatta, allora  $M$  è parallelizzabile con tre forme di contatto (cfr. [42]). Inoltre, in dimensione tre, vale anche la seguente proposizione.

**Proposizione 4.42.** ([18]) *In dimensione tre, una struttura di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi)$  è normale se, e solo se, il tensore  $h = 0$ .*

### Strutture (quasi) cosimpletliche

Concludiamo questa sezione osservando che esistono speciali classi di strutture riemanniane di quasi contatto  $(\eta, \varphi, \xi, g)$ , con  $\eta$  non di contatto. Una *struttura quasi cosimpletliche* su una varietà  $M$  di dimensione  $2n + 1$  è una coppia  $(\eta, \omega)$ , dove  $\eta$  è una 1-forma e  $\omega$  è una 2-forma, tale che  $\eta \wedge \omega^n$  sia una forma di volume su  $M$ . Chiaramente se  $\omega = d\eta$ , allora  $\eta$  è una forma di contatto. Se

$$d\eta = 0 \quad \text{e} \quad d\omega = 0,$$

la struttura è detta *cosimpletliche*. Se

$$d\eta = 0 \quad \text{e} \quad d\omega = 2\alpha \eta \wedge \omega \quad \text{per qualche } \alpha \in \mathbb{R},$$

la struttura è detta  $\alpha$ -*cosimpletliche*. Una struttura  $\alpha$ -cosimpletliche con  $\alpha = 0$  è cosimpletliche. Anche una struttura quasi cosimpletliche  $(\eta, \omega)$  determina univocamente un campo vettoriale  $\xi$  su  $M$ , detto campo vettoriale di Reeb, completamente caratterizzato dalle condizioni

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{e} \quad i_\xi \omega = 0.$$



Se  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di quasi contatto con 2-forma fondamentale  $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ , allora  $\eta \wedge \Phi^n$  è una forma di volume su  $M$ , e quindi  $(\eta, \Phi)$  è una struttura quasi cosimplettica. Viceversa, per ogni struttura quasi cosimplettica  $(\eta, \omega)$  su  $M$ , con campo vettoriale di Reeb  $\xi$ , esiste una struttura riemanniana di quasi contatto  $(\varphi, \xi, \eta, g)$  tale che  $\omega = \Phi$ . Infatti, mediante polarizzazione si può costruire una struttura quasi hermitiana  $(J, g_{\mathcal{D}})$  con 2-forma di Kähler  $\omega$  su  $\mathcal{D} = \ker \eta$ , cioè:

$$J^2 = -I_{\mathcal{D}}, \quad g_{\mathcal{D}}(J\cdot, J\cdot) = g_{\mathcal{D}}(\cdot, \cdot), \quad \omega(\cdot, \cdot) = g_{\mathcal{D}}(\cdot, J\cdot).$$

Quindi, se poniamo  $g = g_{\mathcal{D}} + \eta \otimes \eta$  e definiamo  $\varphi$  con  $\varphi_{\mathcal{D}} = J$  e  $\varphi \xi = 0$ , otteniamo che  $(\eta, \varphi, \xi, g)$  è una struttura riemanniana di quasi contatto, con 2-forma fondamentale  $\Phi = \omega$ .

**Definizione 4.43.** Se  $(\eta, \omega)$  è una struttura cosimplettica su  $M$  e  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di quasi contatto associata, allora  $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$  si dice *varietà almost coKähler* (o *almost cokähleriana*). Se inoltre la struttura di quasi contatto è normale, allora  $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$  è detta *varietà di coKähler* (o *cokähleriana*).

Analogamente, se partiamo da una struttura  $\alpha$ -cosimplettica, abbiamo le corrispondenti strutture *almost  $\alpha$ -coKähler* e  *$\alpha$ -coKähler*.

Riassumendo, data una struttura riemanniana di quasi contatto  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  con forma fondamentale  $\Phi$ , si ha:

- a) se  $d\eta = \Phi$ , allora  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di contatto;
- b) se  $d\eta = 0$  e  $d\Phi = 0$ , allora  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura almost cokähleriana;
- c) se  $d\eta = 0$  e  $d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$ , allora  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura almost  $\alpha$ -cokähleriana.

Inoltre, se la struttura di quasi contatto è normale, allora nel caso a) la struttura è sasakiana, nel caso b) la struttura è cokähleriana e nel caso c) la struttura è  $\alpha$ -cokähleriana.

**Esempio 4.44.** Se  $(N, G, J)$  è una varietà almost Kähler (risp. Kähler), allora la varietà prodotto  $M = N \times \mathbb{R}$ , oppure  $M = N \times \mathbb{S}^1$ , con i tensori  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  definiti da

$$\eta = dt, \quad \xi = d/dt, \quad \varphi(X, f(d/dt)) = (JX, 0), \quad X \in \mathfrak{X}(N), \quad g = G + dt^2,$$

è una varietà almost coKähler (risp. coKähler).

**Osservazione 4.45.** Se  $(M, \eta, \xi, \varphi, g)$  è una varietà almost coKähler, la distribuzione  $\mathcal{D} = \ker \eta$  è integrabile e quindi definisce una foliazione  $\mathcal{F}$  su  $M$ , detta *foliazione canonica*. Inoltre, la struttura almost coKähler di  $M$  induce una struttura almost Kähler sulle foglie. Se  $M$  ha dimensione tre, oppure  $M$  è coKähler, allora le foglie della foliazione canonica sono varietà di Kähler.

Per maggiori dettagli e approfondimenti su queste speciali strutture metriche di quasi contatto si consiglia, ad esempio, [19], [64] e [92].



## 4.7 Strutture metriche di (quasi) contatto su gruppi di Lie 3D

In dimensione  $2n + 1$ , non è difficile vedere che ogni gruppo di Lie  $G$  ammette una struttura riemanniana di quasi contatto (invariante a sinistra). Esaminiamo il caso speciale della dimensione tre.

### Caso unimodulare

Facciamo vedere che in dimensione tre, ogni gruppo di Lie  $G$  unimodulare non abeliano ammette una struttura di contatto. Tale struttura è invariante a sinistra nel senso che i tensori coinvolti sono invarianti per traslazioni sinistre (cfr. Sezione 5.3 per le metriche invarianti a sinistra). Usando le notazioni della Sezione 3.6.1, se  $G$  è un gruppo di Lie unimodulare di dimensione tre, esiste una base di campi vettoriali  $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{g}$  i quali soddisfano

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3. \quad (4.7)$$

Siccome  $G$  è non abeliano, necessariamente qualche  $\lambda_i \neq 0$ , quindi possiamo assumere, ad esempio,  $\lambda_1 \neq 0$ . Sia  $\eta$  la 1-forma duale di  $e_1$ :

$$\eta(e_i) = \delta_{1i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Usando la (4.7), e la definizione di  $d\eta$  data dalla (2.10), si ha

$$2d\eta(e_2, e_3) = -\eta([e_2, e_3]) = -\lambda_1, \quad d\eta(e_i, e_j) = 0 \quad \text{per } (i, j) \neq (2, 3), (3, 2);$$

ciò implica che  $\eta \wedge d\eta$  è un forma volume e quindi  $\eta$  è una forma di contatto con campo di Reeb  $\xi = e_1$ . Inoltre, se prendiamo  $\lambda_1 = 2$  e definiamo la metrica  $g$  e il tensore  $\varphi$  con

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \varphi\xi = 0, \quad \varphi e_2 = e_3, \quad \varphi e_3 = -e_2$$

allora  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di contatto (invariante a sinistra). Inoltre, usando la (4.7), il tensore  $h$  soddisfa:

$$2he_2 = [\xi, \varphi e_2] - \varphi[\xi, e_2] = [e_1, e_3] - \varphi[e_1, e_2] = (\lambda_3 - \lambda_2)e_2,$$

$$2he_3 = [\xi, \varphi e_3] - \varphi[\xi, e_3] = [e_1, -e_2] - \varphi[e_1, e_3] = (\lambda_2 - \lambda_3)e_3.$$

Poiché siamo in dimensione tre, la struttura è saskiana se e solo se  $h = 0$ , ovvero se e solo se  $\lambda_2 = \lambda_3$ . Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 4.46.** *Ogni gruppo di Lie  $G$  unimodulare, non abeliano e di dimensione tre, ammette una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra. In particolare, un gruppo di Lie  $G$  unimodulare semplicemente connesso di dimensione tre, ammette una struttura saskiana invariante a sinistra solo nei seguenti casi:*

- $G = SU(2) \cong \mathbb{S}^3$  ( $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 > 0$ );
- $G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  ( $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 < 0$ );
- $G = Nil^3$  ( $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ).

**Osservazione 4.47.** Per  $n = 1$ , la struttura sasakiana definita nell'Esempio 4.38, è spesso identificata con la struttura sasakiana invariante a sinistra definita sul gruppo di Heisenberg  $Nil^3$ . Infatti, per  $n = 1$ , i campi vettoriali  $e_1 = \xi = 2\partial_z$ ,  $e_2 = E_1 = 2\partial_y$ ,  $e_3 = E_2 = 2(\partial_x + y\partial_z)$  definiti nell'Esempio 4.38, soddisfano

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= 4[\partial_z, \partial_y] = 0, & [e_1, e_3] &= 4[\partial_z, \partial_x + y\partial_z] = 0, \\ [e_2, e_3] &= 4[\partial_y, \partial_x + y\partial_z] = 2e_1, \end{aligned}$$

e la metrica riemanniana  $g$  dello stesso Esempio soddisfa  $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ .

**Esercizio 4.48.** Determinare sul gruppo di Heisenberg  $Nil^3$  una struttura riemanniana di quasi contatto (invariante a sinistra)  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  dove  $\eta$  non è di contatto.

### Caso non-unimodulare

Sia  $\mathcal{G}$  un gruppo di Lie semplicemente connesso non-unimodulare di dimensione tre. Usando le notazioni della Sezione 3.6.2,  $\mathcal{G}$  si può presentare come un gruppo di Lie prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  dove  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a + d \neq 0$ . Quindi, esiste una base di campi vettoriali invarianti a sinistra  $(e_1, e_2, e_3)$  tale che

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = ae_1 + ce_2, \quad [e_3, e_2] = be_1 + de_2. \quad (4.8)$$

Definiamo i tensori (invarianti a sinistra)  $\eta, \xi, \varphi$  e  $g$  ponendo:

$$\xi = e_2, \quad g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \eta = g(\xi, \cdot), \quad \varphi\xi = 0, \quad \varphi e_3 = e_1, \quad \varphi e_1 = -e_3.$$

Usando la (4.8) e la definizione di  $d\eta$  data dalla (2.10), si ha

$$2d\eta(e_1, e_3) = -\eta([e_1, e_3]) = c, \quad d\eta(e_2, e_1) = 0, \quad 2d\eta(e_2, e_3) = d.$$

Quindi, prendendo  $c = 2$  e  $d = 0$ , si ha che  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di contatto su  $\mathcal{G}$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} 2he_3 &= [\xi, \varphi e_3] - \varphi[\xi, e_3] = [e_2, e_1] - \varphi[e_2, e_3] = -be_3, \\ 2he_1 &= [\xi, \varphi e_1] - \varphi[\xi, e_1] = [e_2, -e_3] - \varphi[e_2, e_1] = be_1. \end{aligned}$$

Quindi la struttura è sasakiana, cioè  $h = 0$ , se e solo se la costante  $b = 0$ . Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 4.49.** *Ogni gruppo di Lie semplicemente connesso  $\mathcal{G}$  non-unimodulare di dimensione tre, definito dal prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  dove  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a \neq 0$ , ammette una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra. In particolare, tale struttura è sasakiana se, e solo se,  $b = 0$ .*

I risultati riportati nelle Proposizioni 4.46 e 4.49 sono in accordo con il Teorema di classificazione delle varietà riemanniane di contatto omogenee di

dimensione tre dato in [88] (cfr. anche Teorema 10.5). Inoltre, uno studio sulla curvatura dei gruppi di Lie di questi Esempi si può trovare nella Sezione 8.9 (cfr. Osservazioni 8.69, 8.74).

### Strutture metriche di bi-contatto su gruppi di Lie 3D

Sia  $M$  una varietà 3-dimensionale. Ricordiamo che una *struttura riemanniana di bi-contatto* (detta anche *struttura metrica di bi-contatto*) su  $M$  è definita da una terna  $(\eta_1, \eta_2, g)$ , dove  $(\eta_1, \eta_2)$  è una coppia di forme di contatto e  $g$  è una metrica riemanniana associata a entrambe le forme di contatto con i corrispondenti campi vettoriali di Reeb  $\xi_1, \xi_2$  ortogonali rispetto a  $g$ . Questo concetto introdotto in [92] è legato al concetto di *taut contact circle* introdotto da H. Geiges e J. Gonzalo [39] che ora richiamiamo brevemente.

Una coppia di forme di contatto  $(\eta_1, \eta_2)$  su  $M$  è detta *contact circle* se per ogni  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ , la 1-forma  $\eta_a = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$  è una forma di contatto. Se inoltre le forme di volume  $\eta_a \wedge (d\eta_a)$  sono uguali per ogni  $a \in \mathbb{S}^1$ , allora la coppia  $(\eta_1, \eta_2)$  è detta *taut contact circle*. Siccome

$$\eta_a \wedge d\eta_a = a_1^2\eta_1 \wedge d\eta_1 + a_2^2\eta_2 \wedge d\eta_2 + a_1a_2(\eta_1 \wedge d\eta_2 + \eta_2 \wedge d\eta_1),$$

allora una coppia di forme di contatto  $(\eta_1, \eta_2)$  è una *taut contact circle* se, e solo se,

$$\eta_1 \wedge d\eta_1 = \eta_2 \wedge d\eta_2 \quad \text{and} \quad \eta_1 \wedge d\eta_2 = -\eta_2 \wedge d\eta_1.$$

In particolare, una *taut contact circle*  $(\eta_1, \eta_2)$  è detta *struttura di Cartan* if

$$\eta_1 \wedge d\eta_2 = -\eta_2 \wedge d\eta_1 = 0.$$

Una varietà differenziabile compatta  $M$  di dimensione tre ammette una *taut contact circle* se, e solo se,  $M$  è un quoziente compatto (mediante l'azione di un sottogruppo discreto) di uno dei seguenti gruppi di Lie :  $SU(2)$ ,  $\tilde{E}(2)$  e  $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$  (cfr. [39]).

Ora facciamo vedere che i gruppi di Lie  $SU(2)$ ,  $\tilde{E}(2)$  e  $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$  ammettono una struttura riemanniana di bi-contatto invariante a sinistra. Sia  $G$  un gruppo di Lie 3D unimodulare semplicemente connesso con algebra di Lie definita da

$$[e_2, e_3] = 2 e_1, \quad [e_3, e_1] = 2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad (4.9)$$

e sia  $g$  la metrica invariante a sinistra definita da  $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ . Naturalmente,  $G = SU(2)$  se  $\lambda_3 > 0$ ,  $G = \tilde{SL}(2, \mathbb{R})$  se  $\lambda_3 < 0$  e  $G = \tilde{E}(2)$  se  $\lambda_3 = 0$ .

Consideriamo le 1-forme invarianti a sinistra

$$\eta_1 = g(e_1, \cdot) \quad \text{e} \quad \eta_2 = g(e_2, \cdot).$$

Allora, dalla (4.9) si ottiene

$$(d\eta_1)(e_2, e_3) = -1, \quad (d\eta_2)(e_1, e_3) = 1, \quad (d\eta_1)(e_1, \cdot) = 0, \quad (d\eta_2)(e_2, \cdot) = 0.$$

Di conseguenza, con un semplice calcolo si ha

$$\eta_1 \wedge d\eta_1 = \eta_2 \wedge d\eta_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \eta_1 \wedge d\eta_2 = \eta_2 \wedge d\eta_1 = 0.$$

Pertanto, le 1-forme  $(\eta_1, \eta_2)$  definiscono una struttura di Cartan su  $G$ . Inoltre, le condizioni

$$\eta_1(e_1) = 1, \quad (d\eta_1)(e_1, \cdot) = 0 \quad \text{e} \quad \eta_2(e_2) = 1, \quad (d\eta_2)(e_2, \cdot) = 0,$$

ci dicono che  $\xi_1 = e_1$  e  $\xi_2 = e_2$  sono i campi vettoriali di Reeb delle 1-forme di contatto  $\eta_1$  e  $\eta_2$  rispettivamente. Ora, se definiamo i tensori  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  ponendo

$$\varphi_1\xi_1 = 0, \quad \varphi_1\xi_2 = e_3, \quad \varphi_1e_3 = -\xi_2 \quad \text{e} \quad \varphi_2\xi_2 = 0, \quad \varphi_2e_3 = \xi_1, \quad \varphi_2\xi_1 = -e_3,$$

si ottiene facilmente che

$$(d\eta_1)(\cdot, \cdot) = \tilde{g}(\cdot, \varphi_1\cdot) \quad \text{e} \quad (d\eta_2)(\cdot, \cdot) = \tilde{g}(\cdot, \varphi_2\cdot).$$

Pertanto,  $(\eta_i, \xi_i, \varphi_i, \tilde{g})$ ,  $i = 1, 2$ , sono strutture riemanniane di contatto invarianti a sinistra su  $G$  con  $\tilde{g}(\xi_1, \xi_2) = 0$ . Di conseguenza,  $(\eta_1, \eta_2, g)$  definisce una struttura riemanniana di bi-contatto invariante a sinistra su  $G$ . Dunque, vale la seguente

**Proposizione 4.50.** *I gruppi di Lie  $SU(2)$ ,  $\tilde{E}(2)$  e  $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$  ammettono una struttura riemanniana di bi-contatto  $(\eta_1, \eta_2, g)$  invariante a sinistra con  $(\eta_1, \eta_2)$  che definisce una struttura di Cartan.*

**Osservazione 4.51.** Si noti che i gruppi di Lie  $E(1, 1)$  e  $\tilde{SL}(2, \mathbb{R})$  ammettono una struttura riemanniana di bi-contatto  $(\eta_1, \eta_2, g)$  invariante a sinistra con  $(\eta_1, \eta_2)$  che definisce una taut contact hyperbola (cfr. [93], [95]). Una *taut contact hyperbola* si definisce come nel caso di una taut contact circle sostituendo la circonferenza  $\mathbb{S}^1$  con  $\mathbb{H}_r^1 : x^2 - y^2 = r, r = \pm 1$  (quattro rami delle iperboli equilateri). Tale struttura si può caratterizzare come una coppia  $(\eta_1, \eta_2)$  di 1-forme di contatto che soddisfano le condizioni (cfr. [95])

$$\eta_2 \wedge d\eta_2 = -\eta_1 \wedge d\eta_1 \quad \text{and} \quad \eta_1 \wedge d\eta_2 = -\eta_2 \wedge d\eta_1.$$

## Esempi di strutture $\alpha$ -cokähleriane

Infine, riportiamo un esempio di struttura cokähleriana invariante a sinistra e un esempio di struttura  $\alpha$ -cokähleriana invariante a sinistra, rispettivamente sui gruppi di Lie non-unimodulari  $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$  e  $H^3(-k^2)$ .

**Esempio 4.52. La struttura cokähleriana standard su  $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$ .**

Consideriamo il gruppo di Lie prodotto diretto  $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$ , dove  $H^2(-k^2)$  è il piano iperbolico dato dal modello semipiano superiore  $\mathbb{R}_+^2(\cdot)$  con la metrica iperbolica di curvatura sezionale costante  $-k^2 < 0$ , e con l'usuale struttura di gruppo di Lie. Tale gruppo si indica anche con  $\mathbb{R}_+^2(\cdot) \times \mathbb{R}$ . Siano  $(x_1, x_2)$  le coordinate su  $\mathbb{R}_+^2$  e  $t$  la coordinata su  $\mathbb{R}$ . Allora, i campi vettoriali

$$V_1 = k x_2 \partial_1, \quad V_2 = k x_2 \partial_2, \quad V_3 = \partial_t$$

sono invarianti a sinistra e soddisfano

$$[V_2, V_1] = k V_1, \quad [V_3, V_1] = [V_3, V_2] = 0.$$

Inoltre,  $V_1, V_2$  sono ortonormali rispetto alla metrica iperbolica di  $\mathbb{R}_+^2$ , e quindi  $V_1, V_2, V_3$  sono ortonormali rispetto alla metrica riemanniana prodotto  $g$  (che è invariante a sinistra). Sia  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  la base duale di  $(V_1, V_2, V_3)$ :  $\eta_i(V_j) = \delta_{ij}$ . Definiamo i tensori  $\xi, \eta, \varphi$  ponendo:

$$\xi = V_3, \quad \eta = \eta_3 = g(\xi, \cdot), \quad \varphi \xi = 0, \quad \varphi V_1 = V_2, \quad \varphi V_2 = -V_1.$$

È facile verificare che  $(\eta, \xi, \varphi)$  è una struttura di quasi contatto e  $g$  è una metrica compatibile. La 2-forma fondamentale  $\Phi = g(\cdot, \varphi \cdot)$  e le 1-forme  $\eta_i$  soddisfano

$$\Phi = \eta_2 \wedge \eta_1, \quad d\eta_1 = k \eta_1 \wedge \eta_2 \quad \text{e} \quad d\eta_2 = d\eta_3 = 0.$$

Di conseguenza  $\eta$  e  $\Phi$  sono chiuse, e quindi  $(\eta, \Phi)$  è una struttura cosymplettica. Inoltre, il tensore  $h$  soddisfa

$$2hV_1 = [V_3, \varphi V_1] - \varphi[V_3, V_1] = 0, \quad 2hV_2 = [V_3, \varphi V_2] - \varphi[V_3, V_2] = 0.$$

Siccome il tensore  $h = 0$ , applicando la Proposizione 4.42, abbiamo che  $(\eta, \xi, \varphi)$  è una struttura di quasi contatto normale. Pertanto,  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  definisce una struttura cokähleriana su  $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$  dove  $g$  è la metrica riemanniana prodotto.

**Esempio 4.53. La struttura  $\alpha$ -cokähleriana standard su  $H^3(-k^2)$ .**

Sia  $H^3(-k^2)$  lo spazio iperbolico di dimensione tre con la metrica iperbolica  $g$  di curvatura sezionale costante  $-k^2 < 0$ . Consideriamo per  $H^3(-k^2)$  il modello del semispazio  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$  con la struttura standard di gruppo di Lie. I campi vettoriali

$$E_1 = kt\partial_1, \quad E_2 = kt\partial_2, \quad E_3 = kt\partial_t,$$

definiscono una base ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra e

$$[E_3, E_1] = kE_1, \quad [E_3, E_2] = kE_2, \quad [E_1, E_2] = 0. \quad (4.10)$$

Se poniamo  $\xi = -E_3$  e definiamo  $\varphi$  e  $\eta$  ponendo

$$\varphi \xi = 0, \quad \varphi E_1 = E_2, \quad \varphi E_2 = -E_1, \quad \eta = g(\xi, \cdot),$$

allora  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura di quasi contatto invariante a sinistra su  $H^3(-k^2)$ . Usando la (4.10), la 1-forma  $\eta$  e la 2-forma fondamentale  $\Phi$  soddisfano

$$d\eta = 0 \quad \text{e} \quad d\Phi = 2k \eta \wedge \Phi.$$

Inoltre, sempre facendo uso della (4.10), otteniamo  $2h = \mathcal{L}_\xi \varphi = 0$ . Pertanto, tenendo anche conto della Proposizione 4.42, si ha che  $(\xi, \varphi, \eta, g)$  è una struttura  $\alpha$ -cokähleriana, con  $\alpha = k$ , su  $H^3(-k^2)$ .

**Osservazione 4.54.** Anche la varietà prodotto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  (che non è un gruppo di Lie, ed è una delle varietà modello delle otto geometrie di Thurston) ammette una struttura cokähleriana  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ , dove  $g$  è la metrica riemanniana prodotto (cfr. Esempio 4.44 e, in forma più esplicita, l'Esempio 10.7).

**Osservazione 4.55.** In generale una varietà riemanniana  $(M, g)$  orientabile di dimensione tre ammette una struttura  $\alpha$ -cokähleriana, che ha la metrica  $g$  come metrica compatibile, se e solo se  $M$  ammette una foliazione, definita da una 1-forma  $\eta$  chiusa, unitaria e con curvatura media costante (cfr. [92]). Si noti che, come conseguenza della (6.21), la curvatura media della foliazione definita da  $\ker \eta$ ,  $\eta = g(\xi, \cdot)$ , è data da  $-(1/2)\operatorname{div}\xi$ .

# Capitolo 5

## Struttura di spazio metrico e isometrie

### 5.1 Distanza su una varietà riemanniana

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana (connessa). La metrica  $g$  permette di definire la lunghezza di una curva e la distanza tra due punti di  $M$ . Se  $v \in T_p M$ , si pone

$$\|v\|^2 := g_p(v, v).$$

Sia  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  una curva differenziabile. Assumiamo che  $\sigma([a, b]) \subset U$ ,  $(U, (x_i))$  carta locale, allora la *lunghezza* della curva  $\sigma$  è definita da:

$$L(\sigma) := \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\| dt \geq 0, \quad \text{dove}$$

$$\|\dot{\sigma}(t)\|^2 = g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} g_{ij}(\sigma(t)).$$

Si noti che  $\|\dot{\sigma}(t)\|$  non dipende dalle coordinate scelte. Se  $(y_\alpha)$  sono altre coordinate definite in  $U$ , si ha

$$\begin{aligned} \|\dot{\sigma}\|_y^2 &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy_\beta}{dt} g_{\alpha\beta}(\sigma(t)) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy_\beta}{dt} g \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) (\sigma(t)) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{dy_\alpha}{dt} \frac{dy_\beta}{dt} g \left( \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\sigma(t)}, \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\sigma(t)} \right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta,i,j} \frac{dy_\alpha}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} g_{ij}(\sigma(t)) = \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} g_{ij}(\sigma(t)) = \|\dot{\sigma}\|_x^2. \end{aligned}$$

Se  $\sigma([a, b]) \not\subset$  in un intorno coordinato,  $\sigma([a, b])$  (in quanto compatto) lo si può ricoprire con un numero finito di interni coordinati e si pone

$$L(\sigma) := \sum_{i=1}^r L(\sigma_i) \geq 0,$$

dove ogni arco  $\sigma_i$  ha sostegno contenuto in un intorno coordinato. Si ha

$$L(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \|\dot{\sigma}(t)\| = 0 \Leftrightarrow (dx_i/dt) = 0 \forall i \Leftrightarrow x_i(t) = cost \forall i \Leftrightarrow \sigma(t) = cost.$$

La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione, cioè, se  $\theta : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è un diffeomorfismo, le curve  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  e  $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \theta : [c, d] \rightarrow M$  hanno la stessa lunghezza. Infatti:

$$L(\tilde{\sigma}) = \int_c^d \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\| dt = \int_c^d \|\dot{\sigma}(\theta(t))\| |\theta'(t)| dt,$$

dove  $\theta'(t) > 0$  oppure  $\theta'(t) < 0$  (essendo  $\theta$  un diffeomorfismo). Se  $\theta'(t) > 0$ , e quindi  $\theta(c) = a$  e  $\theta(d) = b$ , si ha

$$L(\tilde{\sigma}) = \int_c^d \|\dot{\sigma}(\theta(t))\| \theta'(t) dt = \int_a^b \|\dot{\sigma}(\theta)\| d\theta = L(\sigma).$$

Se  $\theta'(t) < 0$ , e quindi  $\theta(c) = b$  e  $\theta(d) = a$ , si ha

$$L(\tilde{\sigma}) = - \int_c^d \|\dot{\sigma}(\theta(t))\| \theta'(t) dt = - \int_b^a \|\dot{\sigma}(\theta)\| d\theta = L(\sigma).$$

Se  $\sigma$  è una curva differenziabile a tratti,  $L(\sigma)$  è definita come somma finita delle lunghezze degli archi differenziabili. Inoltre, vale il seguente

**Lemma 5.1.** *Se  $M$  è una varietà differenziabile (connessa), allora  $M$  è connessa per archi differenziabili a tratti.*

*Dimostrazione.* Per ogni fissato  $p \in M$ , consideriamo l'insieme  $C_p$  costituito da tutti i punti  $q \in M$  per cui esiste  $\gamma(p, q)$  curva differenziabile a tratti che congiunge  $p$  e  $q$ .  $C_p$  è  $\neq \emptyset$  ( $p \in C_p$ ) e gode delle seguenti proprietà.

a)  $C_p$  è connesso per archi differenziabili a tratti (si noti che se  $q \in C_p$ , allora esiste  $\gamma(p, q) \subset C_p$ ).

b)  $C_p$  è un aperto, ossia intorno di ogni suo punto. Infatti, se  $q \in C_p$ , considerando una carta locale  $(U, \varphi)$  con  $q \in U$  e  $\varphi(U)$  intorno sferico di centro  $\varphi(q)$ , si ha  $U \subset C_p$ .

c)  $C_{p_1} \cap C_{p_2} \neq \emptyset$  implica  $C_{p_1} = C_{p_2}$ .

Quindi,  $\{C_p\}_{p \in M}$  è una partizione di  $M$ . Da a), b), c), segue che  $C_p \neq \emptyset$  è connesso, aperto e chiuso, pertanto  $C_p = M$ .  $\square$

Per ogni  $p, q \in M$ , poniamo

$$C(p, q) = \{\text{curve differenziabili a tratti che congiungono } p \text{ e } q\}.$$

Poiché  $M$  è connessa, applicando il Lemma 5.1, risulta  $C(p, q) \neq \emptyset$ . Definiamo la funzione

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+, (p, q) \mapsto d(p, q) := \inf_{\sigma \in C(p, q)} L(\sigma) \geq 0.$$



**Esempio 5.2. La distanza euclidea**

Per lo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ , la corrispondente funzione  $d_0$  è la distanza euclidea:

$$d_0(p, q) = \left( \sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2 \right)^{1/2} = \|q - p\| \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Basta osservare che il segmento  $\gamma_o(t) = (1-t)p + tq$ ,  $t \in [0, 1]$ , ha  $L(\gamma_o) = \|q - p\|$  e, per ogni  $\gamma \in C(p, q)$ ,

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq g_o\left(\dot{\gamma}(t), \frac{q-p}{\|q-p\|}\right) \text{ implica } L(\gamma) \geq \|q-p\| = L(\gamma_o).$$

**Teorema 5.3.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana (connessa). Allora:*

- (a)  *$d$  è una distanza (riemanniana) su  $M$ ;*
- (b) *la topologia indotta da  $d$  coincide con la topologia iniziale di  $M$ .*

*Dimostrazione.* Per provare la (a), dobbiamo dimostrare che per ogni  $p, q, x$  punti di  $M$ :

- (1)  $d(p, q) = d(q, p)$ ,
- (2)  $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$ ,
- (3)  $d(p, q) \geq 0$ ,  $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ .

Per la (1) basta osservare che se  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  congiunge  $p$  a  $q$ , allora  $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1-t)$  congiunge  $q$  a  $p$  e  $L(\sigma) = L(\sigma^{-1})$ .

(2) Dalle definizioni di  $d(p, x)$  e  $d(x, q)$  segue che :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \gamma_1 \in C(p, x), \exists \gamma_2 \in C(x, q) \text{ tali che:}$$

$$L(\gamma_1) < d(p, x) + \epsilon/2, \quad L(\gamma_2) < d(x, q) + \epsilon/2.$$

Ciò implica che

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \in C(p, q), \quad L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) < d(p, x) + d(x, q) + \epsilon,$$

e quindi  $d(p, q) = \inf_{\sigma \in C(p, q)} L(\sigma) < d(p, x) + d(x, q) + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$ .

Pertanto,  $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$ .

(3) Proviamo che  $d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$ , cioè  $p \neq q \Rightarrow d(p, q) > 0$ .

Supponiamo  $p \neq q$ . Sia  $(U, \varphi)$  carta locale con  $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$  e  $q \notin U$ . Sia  $r > 0$  tale che  $\bar{B}(O, r) \subset \varphi(U)$ .  $\forall x \in \varphi^{-1}(\bar{B}(O, r))$  e  $\forall X \in \mathbb{S}^{n-1}$  (sfera unitaria euclidea)  $\subset T_x M$ , poniamo

$$\vartheta(x, X) = (g_{x, \varphi}(X, X))^{1/2} > 0.$$

Poiché  $\vartheta : \varphi^{-1}(\bar{B}(0, r)) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, positiva e definita su un compatto, esistono  $\lambda, \mu > 0$  tali che

$$0 < \lambda \leq (g_{x, \varphi}(X, X))^{1/2} \leq \mu, \quad (5.1)$$

dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono rispettivamente il max e il min per  $\vartheta$ . Per ogni  $X \in T_x M$ ,  $X \neq 0$ ,  $\frac{X}{\|X\|_{g_o}} \in \mathbb{S}^{n-1}$ , dove  $\|\cdot\|_{g_o}$  è la norma euclidea, la (5.1) diventa

$$\lambda \|X\|_{g_o} \leq (g_{x, \varphi}(X, X))^{1/2} \leq \mu \|X\|_{g_o} \quad (5.2)$$

per ogni  $X \in T_x M$  e per ogni  $x \in \varphi^{-1}(\bar{B}(O, r))$ . Consideriamo ora una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma \in C(p, q)$ . Poiché  $q = \gamma(1) \notin \varphi^{-1}(\bar{B}(O, r))$ , la componente connessa di 0 in  $\gamma^{-1}(\varphi^{-1}(\bar{B}(O, r)))$  è del tipo  $[0, \delta]$  con  $\delta < 1$  (cfr. Figura 5.1).

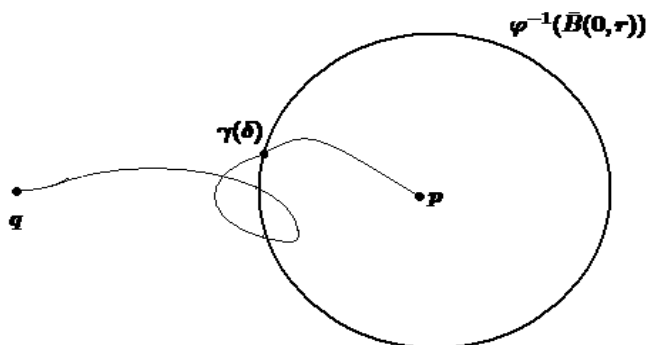


Figura 5.1:  $d(p, q) > 0$ .

Allora, posto  $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma|_{[0, \delta]}$ , si ha

$$\begin{aligned} L(\gamma|_{[0, \delta]}) &= \int_0^\delta \|\dot{\gamma}(t)\|_{g, \varphi} dt = \int_0^\delta \sqrt{g_{\gamma(t), \varphi}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\ &= \int_0^\delta \sqrt{g_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t))} dt. \end{aligned}$$

Applicando la (5.2), si ottiene

$$L(\gamma|_{[0, \delta]}) \geq \lambda \int_0^\delta \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_{g_o} dt = \lambda L_{g_o}(\tilde{\gamma}) \geq \lambda r$$

in quanto  $\tilde{\gamma}(\delta) \in \partial \bar{B}(0, r) = \mathbb{S}^{n-1}(0, r)$ . Pertanto

$$L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[0, \delta]}) \geq \lambda r \quad \forall \gamma \in C(p, q),$$

e quindi

$$d(p, q) = \inf L(\gamma) \geq \lambda r > 0.$$

(b) Proviamo che per ogni  $V$  intorno di  $p$  nella topologia iniziale di  $M$ , esiste  $U'$  intorno di  $p$  nella topologia definita da  $d$  tale che  $U' \subset V$ . Sia  $(U, \varphi)$  intorno coordinato di  $p$ ,  $\varphi(p) = O$ ,  $U \subset V$ , e  $r > 0$  tale che  $\bar{B}(O, r) \subset \varphi(U)$ . Preso  $q \in U' = \{q \in M : d(q, p) < r' \leq \lambda r\}$ , dove  $\lambda$  è definito dalla (5.1), necessariamente  $q \in U$ . Infatti, se fosse  $q \notin U$ , applicando la dimostrazione

del punto (a) si avrebbe  $d(p, q) \geq \lambda r \geq r'$ , mentre  $d(p, q) < r'$ . Viceversa, per ogni intorno  $U'$  di  $p$  nella topologia definita da  $d$ ,  $U' = \{q \in M : d(q, p) < r'\}$ , esiste  $V$  intorno di  $p$  nella topologia iniziale di  $M$  tale che  $V \subset U'$ . Sia  $(U, \varphi)$  una carta locale con  $\varphi(p) = O$ , e sia  $r > 0$  tale che  $\bar{B}(O, r) \subset \varphi(U)$ . Consideriamo la palla  $B(O, \rho) \subset B(O, r)$  tale che  $\rho < \frac{r'}{\mu}$ , dove  $\mu$  è definito dalla (5.1). Allora,  $V = \varphi^{-1}(B(O, \rho))$  è intorno di  $p$  ed è contenuto in  $U'$ . Infatti: per  $q \in V$ , consideriamo il segmento  $\tilde{\gamma} = O\varphi(q)$  parametrizzato da  $\tilde{\gamma}(t) = t\varphi(q)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ; allora la curva  $\gamma = \varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma} \in C(p, q)$  e inoltre, applicando la (5.2), si ottiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\ &\leq \mu \int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_{g_o} dt = \mu \int_0^1 \|\varphi(q)\|_{g_o} dt = \mu \|\varphi(q)\|_{g_o} < \mu\rho < r'. \end{aligned}$$

Pertanto  $d(q, p) < r'$  e quindi  $q \in U'$ .  $\square$

#### Esempio 5.4. La distanza sulla sfera canonica

Sia  $(\mathbb{S}^n, g)$  la sfera canonica di centro l'origine e raggio  $\rho$ . Per ogni  $x, y \in \mathbb{S}^n$  esiste una geodetica minimale  $\gamma$  che li congiunge (ed è unica se  $y \neq -x$ ) (cfr. Capitolo 7). Quindi,

$$d(x, y) = L(\gamma) = \rho\vartheta,$$

dove  $\gamma$  è l'arco più corto della circonferenza di raggio massimo che congiunge  $x$  a  $y$ , e  $\vartheta$  è l'angolo convesso individuato da  $x$  e  $y$  (pensati come vettori).

#### Esempio 5.5. La distanza nel piano iperbolico $\mathbb{R}_+^2$

Indichiamo con  $g$  la metrica iperbolica su  $\mathbb{R}_+^2$  (indicata con  $\tilde{g}$  nella Sezione 4.4). Per ogni  $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$  esiste un'unica geodetica minimale che li congiunge (cfr. Capitolo 7). Se la retta che congiunge  $p_1, p_2$  è parallela all'asse  $y$ , quindi  $x_1 = x_2 = a$ , la geodetica minimale che li congiunge è il segmento  $\gamma_0(t) = t(p_2 - p_1) + p_1 = (a, y_1 + t(y_2 - y_1))$ ,  $t \in [0, 1]$ , e

$$d(p_1, p_2) = L(\gamma_0) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

Infatti:  $\dot{\gamma}_0(t) = (0, y_2 - y_1)$ , per cui

$$\|\dot{\gamma}_0(t)\|_g = \frac{1}{y_1 + t(y_2 - y_1)}(y_2 - y_1), \quad (\text{assumendo } y_2 \geq y_1),$$

e quindi

$$L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_0(t)\|_g dt = [\ln(y_1 + t(y_2 - y_1))]_0^1 = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Se la retta che congiunge  $p_1, p_2$  non è parallela all'asse  $y$ , la geodetica minimale passante per  $p_1, p_2$  è la curva

$$\gamma(t) = (c + r \cos t, r \sin t), \quad t \in ]0, \pi[.$$

$\gamma$  è la semicirconferenza per  $p_1$  e  $p_2$  con centro  $c$  sull'asse  $x$  e di raggio  $r$ . Allora

$$\dot{\gamma}(t) = (-r \sin t, r \cos t) \quad \text{e} \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_g = \frac{1}{\sin t}.$$

Quindi, posto  $p_1 = (c + r \cos \alpha, r \sin \alpha)$  e  $p_2 = (c + r \cos \beta, r \sin \beta)$ , con  $\beta \geq \alpha$ , si ha:

$$d(p_1, p_2) = L(\gamma|_{[\alpha, \beta]}) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt = \left[ \ln \tan \frac{t}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2}.$$

Per  $\alpha, \beta \in ]0, \pi[$  arbitrari, si ha:

$$d(p_1, p_2) = \left| \ln \frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} \right|.$$

Usando le formule di bisezione:  $\frac{\tan \beta/2}{\tan \alpha/2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ , e tenendo presente che  $x_1 - c = r \cos \alpha$ ,  $x_2 - c = r \cos \beta$ ,  $y_1 = r \sin \alpha$ ,  $y_2 = r \sin \beta$ , si ha

$$d(p_1, p_2) = \left| \ln \left( \frac{x_1 - c + r}{x_2 - c + r} \cdot \frac{y_2}{y_1} \right) \right|.$$

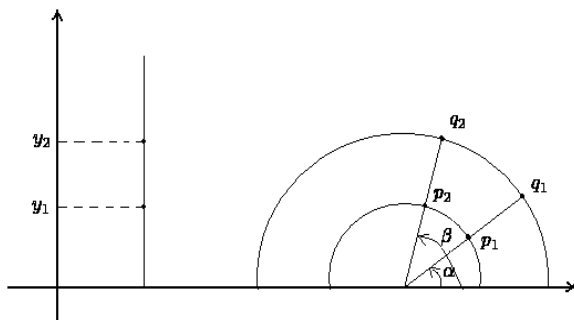


Figura 5.2:  $d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$

**Osservazione 5.6. a)** Si noti che negli esempi precedenti:

$$\forall p, q \in M \quad \exists \gamma(p, q) \quad \text{tale che} \quad L(\gamma) = d(p, q).$$

Ciò non vale sempre, ad esempio se consideriamo  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g_0)$  e i punti  $p = (-1, 0), q = (1, 0)$ , si ha:

$$d(p, q) = 2, \quad \text{ma non esiste } \gamma(p, q) \quad \text{tale che } L(\gamma) = 2.$$

b) Nell'Esempio 5.5, se  $q_1, q_2$  sono punti di una semicirconferenza concentrica con  $\gamma$ , con  $q_1, p_1, c$  allineati e  $q_2, p_2, c$  allineati, allora  $d(q_1, q_2) = d(p_1, p_2)$  (cfr. Figura 5.2).

**Esercizio 5.7.** Sia  $i : (M, g) \hookrightarrow (M', g')$  un'immersione isometrica e siano  $d, d'$  le corrispondenti distanze. Verificare che  $d(p, q) \geq d'(p, q)$  per ogni  $p, q \in M$ .

**Esercizio 5.8.** Trovare un esempio di immersione isometrica  $i : (M, g) \hookrightarrow (M', g')$  dove  $d(p, q) > d'(p, q)$  per ogni  $p, q \in M$  e un esempio dove  $d(p, q) > d'(p, q)$  non accade per ogni  $p, q \in M$ .

## 5.2 Isometrie di una varietà riemanniana

**Definizione 5.9.** Un'applicazione  $f : M \rightarrow M'$  tra due varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(M', g')$ , si dice *isometria* se  $f$  è un diffeomorfismo e  $f^*g' = g$ , cioè

$$g'_{f(p)}(f_*X_p, f_*Y_p) = g_p(X_p, Y_p) \quad \forall X_p, Y_p \in T_pM, \quad \forall p \in M,$$

in modo equivalente

$$g'(f_*X, f_*Y) \circ f = g(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

In particolare, la lunghezza di una curva è invariante per isometrie.

**Definizione 5.10.** Un'applicazione  $f : M \rightarrow M'$  si dice *isometria locale* se per ogni  $p \in M$  esistono  $U$  intorno aperto di  $p$  e  $V$  intorno aperto di  $f(p)$  tali che  $f|_U : (U, g_U) \rightarrow (V, g'_V)$  è isometria.

Se  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  è un'isometria, anche  $f^{-1} : (M', g') \rightarrow (M, g)$  è un'isometria:

$$(f^{-1})^*g = (f^{-1})^*f^*g' = (f \circ f^{-1})^*g' = g'.$$

Inoltre, la composizione di isometrie è ancora un'isometria, pertanto l'insieme  $\text{Iso}(M, g)$  di tutte le isometrie di una varietà riemanniana  $(M, g)$ , ha una struttura di gruppo rispetto alla composizione, anzi  $\text{Iso}(M, g)$  si può munire di una struttura di varietà differenziabile in modo tale che risulti un gruppo di Lie (cfr. [56] vol I, p.239). La topologia del gruppo di Lie  $\text{Iso}(M, g)$  coincide con la topologia della convergenza uniforme su sottoinsiemi compatti. Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale, completa (ad esempio come spazio metrico), allora l'algebra di Lie di  $\text{Iso}(M, g)$  è isomorfa all'algebra di Lie dei campi vettoriali di Killing (cfr. Osservazione 9.8), inoltre

$$\dim \text{Iso}(M, g) \leq n(n+1)/2 = \dim O(n+1),$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se,  $(M, g)$  è isometrica a una delle seguenti varietà riemanniane: lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , lo spazio iperbolico  $H^n$ , la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$ , o lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  (cfr. [100], p.117-120).

**Esercizio 5.11.** Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'isometria tra varietà riemanniane. Si verifichi che  $f$  è un'isometria anche tra i corrispondenti spazi metrici  $(M, d)$  e  $(M', d')$ , cioè

$$d'(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in M.$$

Vale anche il seguente teorema (cfr. Petersen [97], p. 132).

**Teorema 5.12.** *Se  $f : M \rightarrow M'$  è un'applicazione suriettiva che conserva le distanze tra le varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(M', g')$ , allora  $f$  è un'isometria.*

**Definizione 5.13.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  è detta *omogenea* se il gruppo delle isometrie opera transitivamente su  $M$ , ossia: per ogni  $p, q \in M$  esiste  $f \in \text{Iso}(M, g)$  tale che  $f(p) = q$ .  $(M, g)$  è detta *varietà riemanniana isotropa* (cfr. Thurston [108], p. 43) se per ogni  $p \in M$  e per ogni  $\mathcal{B} = \{e_i\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$  basi ortonormali ordinate di  $T_p M$ , esiste  $f \in \text{Iso}(M, g)$  tale che  $f(p) = p$  e  $f_* e_i = e'_i$  per ogni  $i$ .

Omogeneità e isotropia insieme sono condizioni molto forti, esse implicano che lo spazio ha curvatura sezionale costante (cfr. Teorema 8.37). In ogni dimensione esistono, a meno di isometrie, solo tre tipi di geometrie omogenee, isotrope e semplicemente connesse (cfr. Teorema 8.44) e sono quelle che corrispondono agli spazi semplicemente connessi con curvatura sezionale costante  $K = 0$  (geometria euclidea),  $K > 0$  (geometria sferica) e  $K < 0$  (geometria iperbolica). Si noti che la definizione di isotropia data in [62] (cfr. p. 33 e p. 153) è meno forte di quella data in [108]. Infine, ricordiamo (cfr. [56] vol.I, p. 187–192)) il seguente

**Teorema 5.14.** (di decomposizione di de Rham)

*Una varietà riemanniana completa semplicemente connessa  $(M, g)$  è isometrica a un prodotto riemanniano  $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_k$ , dove  $M_0$  è una varietà riemanniana piatta e  $M_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sono varietà riemanniane irriducibili complete semplicemente connesse. Tale decomposizione è unica a meno dell'ordine.*

### 5.3 Metriche invarianti a sinistra

Tra tutte le metriche riemanniane che possono essere definite su un gruppo di Lie, hanno una particolare importanza quelle che sono collegate al prodotto del gruppo.

**Definizione 5.15.** Una metrica riemanniana  $g$  su un gruppo di Lie  $G$  si dice *metrica riemanniana invariante a sinistra* se, per ogni  $a \in G$ , la traslazione sinistra  $L_a$  è un'isometria di  $(G, g)$ . In tal caso,  $(G, g)$  si dice *gruppo di Lie riemanniano*

**Proposizione 5.16.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie  $n$ -dimensionale e sia  $g$  una metrica riemanniana su  $G$ . Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti.*

- (1)  $g$  è invariante a sinistra;
- (2)  $g(X, Y) = \text{costante} = g(X, Y)(e)$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ;
- (3)  $\exists$  una base  $g$ -ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra.

*Dimostrazione.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Siano  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , allora

$$\begin{aligned} (L_a^*g)(X, Y) = g(X, Y) &\iff g_{ax}((L_a)_*X_x, (L_a)_*Y_x) = g_x(X_x, Y_x) \\ &\quad \forall x \in G, \\ &\iff g_{ax}(X_{ax}, Y_{ax}) = g_x(X_x, Y_x) \quad \forall x \in G, \\ &\iff g(X, Y)(ax) = g(X, Y)(x) \quad \forall x \in G. \end{aligned}$$

Quindi, se  $g$  è invariante a sinistra, ossia  $L_a^*g = g$  per ogni  $a \in G$ , allora  $g(X, Y)$  è costante per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3). Assumiamo che la metrica  $g$  soddisfi la proprietà

$$g(X, Y)(x) = \text{costante} = g(X, Y)(e) = g_e(X_e, Y_e) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base ortonormale di  $T_eG = \mathfrak{g}$ , e  $\xi_1, \dots, \xi_n$  è la corrispondente base di vettori invarianti a sinistra, allora

$$g(\xi_i, \xi_j) = \text{costante} = g_e(\xi_{ie}, \xi_{je}) = g_e(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

Quindi, esiste una base  $g$ -ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Sia  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  una base  $g$ -ortonormale di campi vettoriali invarianti a sinistra. Per  $X = \sum_{i=1}^n X^i \xi_i$  e  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \xi_j \in \mathfrak{X}(G)$ :

$$\begin{aligned} ((L_a^*g)(X, Y))(x) &= g_{ax}((L_a)_*X_x, (L_a)_*Y_x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n X^i(x) Y^j(x) g_{ax}((L_a)_*\xi_{ix}, (L_a)_*\xi_{jx}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n X^i(x) Y^j(x) g_{ax}(\xi_{iax}, \xi_{jax}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n X^i(x) Y^j(x) \delta_{ij} = g(X, Y)(x). \end{aligned}$$

Pertanto, la  $g$  è invariante a sinistra. □

**Proposizione 5.17.** *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle metriche invarianti a sinistra su  $G$  e l'insieme dei prodotti scalari su  $T_eG$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F$  la corrispondenza che ad ogni metrica riemanniana invariante a sinistra  $g$  su  $G$  associa il prodotto scalare  $g_e$  su  $T_eG$ . Se  $g_1$  e  $g_2$

sono due metriche riemanniane invarianti a sinistra con  $F(g_1) = F(g_2) = g_e$ , allora  $g_1 = g_2$ . Infatti, se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base  $g_e$ -ortonormale di  $T_e G = \mathfrak{g}$  e  $\xi_1, \dots, \xi_n$  è la corrispondente base di campi di vettori invarianti a sinistra, allora (cfr. Proposizione 5.16)

$$g_1(\xi_i, \xi_j) = \text{costante} = g_{1e}(\xi_{ie}, \xi_{je}) = g_e(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \dots = g_2(\xi_i, \xi_j).$$

D'altronde, dato un prodotto scalare  $g_0$  su  $T_e G$ , se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base  $g_0$ -ortonormale di  $T_e G = \mathfrak{g}$  e  $\xi_1, \dots, \xi_n$  è la corrispondente base di campi di vettori invarianti a sinistra, si può sempre definire una metrica invariante a sinistra ponendo  $g(X, Y) := \sum_{i=1}^n X^i Y^i$  per  $X = \sum_{i=1}^n X^i \xi_i$  e  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \xi_j \in \mathfrak{X}(G)$ , ovvero imponendo che  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sia una base ortonormale. Naturalmente  $g_e = g_0$ .  $\square$

Si possono definire, in modo ovvio, le metriche invarianti a destra: esse hanno proprietà del tutto speculari rispetto a quelle invarianti a sinistra. Una metrica riemanniana  $g$  su un gruppo di Lie  $G$  si dice *metrica bi-invariante* se è invariante a destra e sinistra. Si può dimostrare che una metrica riemanniana  $g$  su  $G$  è bi-invariante se, e solo se, è soddisfatta la seguente relazione (cfr. Do Carmo [32], p. 40,41):

$$g([X, Y], Z) = g([Y, Z], X) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \quad (5.3)$$

Ogni gruppo di Lie compatto ammette una metrica bi-invariante (cfr. Do Carmo [32], p. 46-47).

### Esempio 5.18. Una metrica invariante a sinistra su $Nil^3$

Consideriamo il gruppo di Heisenberg

$$Nil^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo spazio tangente  $T_I Nil^3$  è dato da  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$  e,

come osservato nella Sezione 3.6, una sua base è data da

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I corrispondenti campi vettoriali invarianti a sinistra si ottengono applicando il differenziale  $(L_A)_*$ ,  $A \in Nil^3$ , a queste matrici. Se consideriamo due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{la traslazione sinistra } L_A \text{ è}$$



data da

$$L_A : Nil^3 \longrightarrow Nil^3, B \longmapsto L_A B = AB = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + b_1 & b_3 + a_1 b_2 + a_3 \\ 0 & 1 & a_2 + b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando le coordinate globali  $(x_1, x_2, x_3)$  su  $Nil^3$ , si ha

$$\begin{aligned} x_1(B) &= b_1, & x_2(B) &= b_2, & x_3(B) &= b_3, \\ x_1(AB) &= x_1(B) + a_1, \\ x_2(AB) &= x_2(B) + a_2, \\ x_3(AB) &= x_3(B) + a_1 x_2(B) + a_3. \end{aligned}$$

Si deduce facilmente che

$$(L_A)_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi i corrispondenti campi vettoriali invarianti a sinistra sono

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

i quali costituiscono una base per l'algebra di Lie di  $Nil^3$  e soddisfano

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_1, E_3] = [E_2, E_3] = 0.$$

I campi vettoriali  $(E_1, E_2, E_3)$  si possono ottenere anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned} (E_1)_A &= Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)_A, \\ (E_2)_A &= Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)_A + x_1(A) \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)_A, \\ (E_3)_A &= Ae_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)_A. \end{aligned}$$

Una metrica riemanniana  $g$  su  $Nil^3$  invariante a sinistra si ottiene imponendo che  $\{E_1, E_2, E_3\}$  sia una base  $g$ -ortonormale. Siccome  $\partial_1 = E_1$ ,  $\partial_2 = E_2 - x_1 E_3$  e  $\partial_3 = E_3$ , posto  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ , si ha  $g_{11} = 1$ ,  $g_{22} = 1 + x_1^2$ ,  $g_{33} = 1$ ,  $g_{23} = -x_1$ ,  $g_{12} = g_{13} = 0$ . Pertanto,

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + (dx_3 - x_1 dx_2) \otimes (dx_3 - x_1 dx_2)$$

è una metrica riemanniana su  $Nil^3$  invariante a sinistra. Si noti che  $\omega_1 = dx_1$ ,  $\omega_2 = dx_2$ ,  $\omega_3 = dx_3 - x_1 dx_2$ , sono le 1-forme (invarianti a sinistra) duali di  $E_1, E_2, E_3$ . In particolare,  $\omega_3$  è una 1-forma di contatto.

**Esempio 5.19. Una metrica bi-invariante su  $SO(n)$**

La metrica euclidea  $g_0$  di  $\mathbb{R}^{n,n} \equiv \mathbb{R}^{n^2}$  si può esprimere in termini matriciali in questo modo:

$$g_0(X, Y) = \text{Tr}(X^T Y) = \sum X_{ik} Y_{ik} = \text{Tr}(Y^T X) = \text{Tr}(XY^T)$$

per ogni  $X = (X_{ij}), Y = (Y_{ij}) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n,n})$ . Il gruppo di Lie  $SO(n)$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{n,n}$  e quindi possiamo considerare la metrica riemanniana indotta dalla metrica euclidea che indichiamo con lo stesso simbolo. Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{so}(n)$  (algebra di Lie di  $SO(n)$ ) e per ogni  $A, B \in SO(n)$ :

$$\begin{aligned} g_0((L_B)_* X_A, (L_B)_* Y_A) &= g_0(X_{BA}, Y_{BA}) = g_0(BAX, BAY) \\ &= \text{Tr}((BAX)^T BAY) = \text{Tr}(X^T A^T B^T BAY) \\ &= \text{Tr}(X^T Y) = g_0(X, Y). \end{aligned}$$

Quindi la metrica indotta su  $SO(n)$  è invariante a sinistra. Inoltre, con un calcolo diretto si può vedere che tale metrica è anche invariante a destra tenendo conto che  $(R_B)_* X_A = X_{AB} = XAB$ , oppure verificando la (5.3).

**Esempio 5.20. La metrica iperbolica di  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$**

Facciamo vedere che la metrica iperbolica di  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  è invariante a sinistra. Per il gruppo di Lie  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  (cfr. Sezione 3.1), le traslazioni sinistre sono definite da

$$L_{(x_o, a_o)} : p = (x, a) \mapsto (x_o, a_o) \cdot (x, a) = (x_o + a_o x, a_o a).$$

Quindi il differenziale  $(L_{p_o})_{*p}$ , dove  $p_o = (x_o, a_o)$ , soddisfa

$$(L_{p_o})_{*p} V_p = \sum_j a_o b^j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{p_o p}, \quad \text{dove} \quad V_p = \sum_j b^j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p.$$

Di conseguenza, come già osservato nella Sezione 3.4, i campi vettoriali  $(V_i)_p = x_n(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sono invarianti a sinistra, dove  $x_n(p) = a(p)$  se  $p = (x, a)$ . Poiché la metrica iperbolica  $g$  in  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  è definita da

$$g_p(V_p, W_p) = (1/x_n^2(p)) g_0(V_p, W_p),$$

i campi di vettori  $V_i (i = 1, \dots, n)$  costituiscono una base  $g$ -ortonormale di campi di vettori invarianti a sinistra, e quindi, applicando la Proposizione

5.16, la metrica riemanniana iperbolica  $g$  è invariante a sinistra.  $g$  non è bi-invariante in quanto, come è facile verificare, non soddisfa la (5.3).

Diamo ora un'altra presentazione dello spazio iperbolico come gruppo di Lie. Sia  $G$  il sottogruppo di Lie di  $GL(n, \mathbb{R})$  costituito da tutte le matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} e^{x_n} & 0 & \dots & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & e^{x_n} & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e^{x_n} & x_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coordinate  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sono coordinate globali su  $G$ . Una base di campi vettoriali invarianti a sinistra è data da

$$E_n = c \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad E_i = c e^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

e la parentesi di Lie soddisfa

$$[E_n, E_i] = c E_i, \quad [E_i, E_j] = 0 \quad (\text{negli altri casi}).$$

La metrica riemanniana  $\tilde{g}$  su  $G$  definita da:  $\tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij}$  è invariante a sinistra ed è isometrica alla metrica iperbolica del semispazio di Poincaré  $(\mathbb{R}_+^n, g)$ :  $\mathbb{R}_+^n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$  e  $g = \frac{1}{(cy_n)^2} \sum_i dy_i \otimes dy_i$ . L'applicazione  $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}_+^n$  definita da

$$A \equiv (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, e^{x_n}),$$

è un'isometria e un isomorfismo tra gruppi.

## 5.4 Isometrie dello spazio euclideo e della sfera canonica

**Teorema 5.21.** *Le isometrie di  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  sono tutte e sole le trasformazioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  del tipo*

$$f(x) = h(x) + v$$

dove  $h$  è una trasformazione ortogonale e  $v$  è un fissato elemento di  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $\|\cdot\|$  e con  $d_0$  rispettivamente la norma e la distanza euclidea di  $\mathbb{R}^n$ . Ricordiamo che un'applicazione lineare  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è ortogonale se, e solo se,

$$\|h(x)\| = \|x\|, \quad \text{equivalentemente } g_0(x, y) = g_0(hx, hy), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sia  $f$  un'applicazione del tipo

$$f(x) = h(x) + v,$$

dove  $h$  è una trasformazione ortogonale e  $v$  è un fissato elemento di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} d_0(f(x), f(y)) &= \|f(x) - f(y)\| = \|h(x) - h(y)\| = \|h(x - y)\| \\ &= \|x - y\| = d_0(x, y), \end{aligned}$$

e quindi  $f$  è un'isometria per  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ . Oppure, bastava osservare che il differenziale  $f_* = h$ . Viceversa, sia ora  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una isometria. Basta provare che l'applicazione  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  così definita:

$$h(x) = f(x) - f(0)$$

è una trasformazione ortogonale. Poiché  $f$  è una isometria,  $f$  conserva le distanze e quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|h(x)\| = \|f(x) - f(0)\| = d_0(f(x), f(0)) = d_0(x, 0) = \|x - 0\| = \|x\|.$$

Inoltre, per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|h(x) - h(y)\| = \|f(x) - f(y)\| = d_0(f(x), f(y)) = d_0(x, y) = \|x - y\|,$$

$$\|x - y\|^2 = g_0(x - y, x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2g_0(x, y),$$

$$\|h(x) - h(y)\|^2 = \|h(x)\|^2 + \|h(y)\|^2 - 2g_0(h(x), h(y)).$$

Quindi,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad g_0(h(x), h(y)) = g_0(x, y).$$

Sia ora  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ , poiché  $h$  conserva il prodotto scalare anche  $\{h(e_1), \dots, h(e_n)\}$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ . L'applicazione  $h$  è lineare in quanto, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = \sum x_i e_i$ , si ha:

$$h(x) = \sum_i g_0(h(x), h(e_i))h(e_i) = \sum_i g_0(x, e_i)h(e_i) = \sum_i x_i h(e_i). \quad \square$$

**Teorema 5.22.** *Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\mathcal{B} = \{e_i\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$  basi ortonormali ordinate di  $T_x \mathbb{R}^n$  e  $T_y \mathbb{R}^n$  rispettivamente, esiste  $f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n, g_0)$  tale che  $f(x) = y$  e  $f_* e_i = e'_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . In particolare, lo spazio euclideo è omogeneo e isotropo.*

*Dimostrazione.* Fissati  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , siano  $\mathcal{B} = \{e_i\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{e'_i\}$  basi ortonormali ordinate di  $T_x \mathbb{R}^n$  e  $T_y \mathbb{R}^n$  rispettivamente. Identifichiamo i vettori tangenti  $e_i \in T_x \mathbb{R}^n$  e  $e'_i \in T_y \mathbb{R}^n$  con le loro parti vettoriali. Consideriamo la trasformazione ortogonale  $h$  definita da  $h e_i = e'_i \quad \forall i = 1 \dots n$ . Posto  $v = (y - h x) \in \mathbb{R}^n$ , l'isometria  $f = h + v$  verifica:  $f(x) = h(x) + v = y$ ,  $f_* = h$  e quindi  $f_* e_i = e'_i$ .  $\square$

**Il gruppo euclideo**  $E(n)$ 

Diamo ora una diversa presentazione del gruppo delle isometrie dello spazio euclideo. Sia

$$E(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in O(n), v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

dove  $v$  è pensato come matrice colonna.  $E(n)$  è un sottogruppo di  $GL(n+1, \mathbb{R})(\cdot)$  che viene detto *gruppo euclideo*. Quindi,  $E(n)$  è un gruppo rispetto al prodotto:

$$\begin{pmatrix} A' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'A & A'v + v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$E(n)$  agisce su  $\mathbb{R}^n$ , quando  $\mathbb{R}^n$  è identificato con  $\{(x, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$ , in questo modo:

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ . Ricordiamo che una trasformazione lineare  $h$  di  $\mathbb{R}^n$  è ortogonale se, e solo se, la matrice  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h) \in O(n)$ . Un'isometria  $f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$  è data da  $f = h + v$  con  $h$  trasformazione ortogonale e  $v \in \mathbb{R}^n$ . Inoltre, per ogni  $f, f' \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f = h + v$ ,  $f' = h' + v'$ , si ha

$$f' \circ f = h' \circ h + h'v + v'.$$

Pertanto, la corrispondenza

$$\Phi : \text{Iso}(\mathbb{R}^n) \rightarrow E(n) \quad \text{t.c.} \quad f = h + v \mapsto \Phi(f) = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo tra gruppi. Abbiamo quindi la seguente proposizione.

**Proposizione 5.23.**  $E(n)$  è isomorfo a  $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ .

Inoltre, abbiamo

**Proposizione 5.24.** Il gruppo euclideo  $E(n)$  è isomorfo al prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^n(+)$   $\rtimes_{\alpha}$   $O(n)(\cdot)$ , dove  $\alpha$  denota l'azione naturale di  $O(n)$  su  $\mathbb{R}^n(+)$ :

$$\forall A \in O(n), \quad \alpha_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto \alpha_A(v) = Av.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $A \in O(n)$ ,  $\alpha_A$  è un automorfismo e

$$\alpha_{AA'} = \alpha_A \circ \alpha_{A'} \quad \forall A, A' \in O(n).$$

Ricordiamo che il prodotto semidiretto  $O(n) \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}^n(+)$  (cfr. Sezione 3.1) è definito nel modo seguente.

$$\forall (v, A), (v', A') \in \mathbb{R}^n(+)$$

$$(v, A) \cdot (v', A') = (v + \alpha_A v', A \cdot A') = (v + Av', A \cdot A').$$

Allora, l'applicazione  $\psi : E(n) \rightarrow \mathbb{R}^n \rtimes_{\alpha} O(n)$  definita da

$$\psi : \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (v, A),$$

soddisfa:

$$\psi \left( \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \psi \left( \begin{pmatrix} AA' & Av' + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (Av' + v, AA').$$

Pertanto,  $\psi$  definisce un isomorfismo tra  $E(n)$  e  $\mathbb{R}^n(+)\rtimes_{\alpha} O(n)$ .  $\square$

**Osservazione 5.25.** Per  $n = 2$ , con  $E(2)$  spesso viene indicato anche il gruppo euclideo speciale  $\mathbb{R}^2(+)\rtimes_{\alpha} SO(2)$ , dove l'azione di  $SO(2)$  su  $\mathbb{R}^2$  è definita da

$$\alpha(t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{con} \quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Il seguente teorema classifica le isometrie della sfera canonica.

**Teorema 5.26.** *Le isometrie di  $(\mathbb{S}^n, g)$ ,  $g = i^*g_0$ , sono tutte e sole le restrizioni a  $\mathbb{S}^n$  delle trasformazioni ortogonali di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Quindi,  $\text{Iso}(\mathbb{S}^n)$  si può identificare con  $O(n+1)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  una trasformazione ortogonale, allora  $h$  è un'isometria di  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$  e  $h(0) = 0$ . Di conseguenza  $h(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$ . Infatti:

$$\|h^{-1}(x)\| = \|x\| = \|h(x)\| \Rightarrow h(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n \text{ e } h^{-1}(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^n \Rightarrow h(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n.$$

Inoltre  $h_1 = h|_{\mathbb{S}^n}$  è un diffeomorfismo di  $\mathbb{S}^n$  e dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{S}^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \quad \text{cioè} \quad h \circ i = i \circ h_1,$$

si ottiene che  $h_1$  è un'isometria di  $\mathbb{S}^n$ :

$$h_1^*g = h_1^*i^*g_0 = (i \circ h_1)^*g_0 = (h \circ i)^*g_0 = i^*h^*g_0 = i^*g_0 = g.$$

Viceversa, sia ora  $f$  un'isometria di  $(\mathbb{S}^n, g)$ . Proviamo che  $f$  è la restrizione ad  $\mathbb{S}^n$  di una trasformazione ortogonale  $h$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ricordiamo che la distanza su  $\mathbb{S}^n$  è definita in questo modo:

$$d(x, y) = \vartheta(x, \hat{y}) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^n,$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo convesso tra  $x$  e  $y$ . Poiché  $f$  è un'isometria di  $\mathbb{S}^n$ :

$$\vartheta(x, \hat{y}) = \vartheta(f(x), \hat{f}(y))$$

e quindi

$$g_0(x, y) = g_0(f(x), f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^n,$$

cioè  $f$  conserva il prodotto scalare di vettori unitari di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Definiamo

$$h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto h(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Allora  $h|_{\mathbb{S}^n} = f$ . Inoltre  $h$  conserva il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , infatti per  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}, x, y \neq 0$ ,

$$g_0(hx, hy) = \|x\| \cdot \|y\| g_0\left(f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right) = g_0(x, y).$$

Poiché  $h$  conserva il prodotto scalare, come visto nella dimostrazione del Teorema 5.21,  $h$  è lineare e quindi una trasformazione ortogonale.  $\square$

**Teorema 5.27.** *Per ogni  $p, q \in \mathbb{S}^n$  e per ogni  $\mathcal{B} = \{v_i\}, \mathcal{B}' = \{w_i\}$  basi ortonormali ordinate di  $T_p\mathbb{S}^n$  e  $T_q\mathbb{S}^n$  rispettivamente, esiste  $f \in O(n+1)$  tale che  $f(p) = q$  e  $f_*v_i = w_i, i = 1, \dots, n$ . In particolare,  $\mathbb{S}^n$  è uno spazio omogeneo e isotropo.*

*Dimostrazione.* Siano  $p, q \in \mathbb{S}^n$  e  $\mathcal{B} = \{v_i\}, \mathcal{B}' = \{w_i\}$  basi ortonormali ordinate di  $T_p\mathbb{S}^n$  e  $T_q\mathbb{S}^n$  rispettivamente. Possiamo pensare  $v = p$  e  $w = q$  come vettori unitari ortogonali a  $T_p\mathbb{S}^n$  e  $T_q\mathbb{S}^n$  rispettivamente. Pertanto  $\mathcal{B}_1 = \{v, v_i\}, \mathcal{B}'_1 = \{w, w_i\}$  sono basi ortonormali di  $T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  e  $T_q\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ . Consideriamo la trasformazione ortogonale  $f \in O(n+1)$  definita da  $fv = w$  e  $fv_i = w_i$ . Tale trasformazione definisce una isometria di  $\mathbb{S}^n$  che soddisfa  $f(p) = q$  e  $f_*v_i = f v_i = w_i$ .  $\square$

**Osservazione 5.28.** Dalla dimostrazione del Teorema 5.27 segue che anche  $SO(n+1)$  agisce transitivamente su  $\mathbb{S}^n$ . Infatti, sostituendo in  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  (se necessario)  $v_1$  con  $-v_1$  e  $w_1$  con  $-w_1$ , possiamo assumere  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}'_1$  basi ortonormali positive e di conseguenza sarà  $\det f = +1$ .

**Esercizio 5.29.** Sia  $\lambda$  un numero complesso unitario. Si verifichi che l'applicazione  $f_\lambda : z \mapsto \lambda z$  è un'isometria della sfera unitaria  $\mathbb{S}^{2n+1}$ .

## 5.5 Isometrie dello spazio iperbolico

### Isometrie del modello iperbolico $H^n$

Consideriamo lo spazio di Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, q)$ , dove  $q$  è la metrica di segnatura  $(n, 1)$ . Sia  $O(n, 1)$  il gruppo delle matrici che corrispondono alle trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}^{n+1}$  che conservano  $q$ :

$$O(n, 1) = \{A : q(Ax, Ay) = q(x, y)\}.$$

Posto  $\bar{I}_{n+1} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , risulta

$$O(n, 1) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A^t \cdot \bar{I}_{n+1} \cdot A = \bar{I}_{n+1}\}.$$

$O(n, 1)$  è il gruppo di Lorentz della fisica (cfr. [78], p. 235) ed è un gruppo di Lie di dimensione  $n(n+1)/2$  uguale alla dimensione di  $O(n+1)$ . Gli elementi di  $O(n, 1)$  applicano l'iperboloide a due fogli  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1\}$  in sè. Tale iperboloide ha due componenti connesse. Sia  $O_+(n, 1)$  il sottogruppo di  $O(n, 1)$  costituito dalle trasformazioni di Lorentz che applicano  $H^n$  (cioè la componente con  $x_{n+1} > 0$ ) in sè:

$$O_+(n, 1) = \{A \in O(n, 1) : A(H^n) = H^n\}.$$

Sia

$$SO_+(n, 1) = \{A \in O_+(n, 1) : \det A = +1\}.$$

Si noti che  $O(n, 1)$  ha 4 componenti connesse ( $\det A = \pm 1$ ,  $A$  applica  $H^n$  in sè oppure no).  $O(n, 1)$  è l'analogo del gruppo ortogonale  $O(n+1)$  di  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$  che ha due componenti connesse. Inoltre, mentre  $O(n+1)$  è compatto,  $O(n, 1)$  non è compatto. Ad esempio, elementi di  $O(2, 1)$  del tipo

$$\begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

costituiscono un sottoinsieme illimitato di  $\mathbb{R}^{3,3}$ .

Sia  $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1}, q)$  il gruppo di isometrie dello spazio di Minkowski. Come nel caso euclideo:

$$f \in \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1}, q) \Leftrightarrow \|f(x) - f(y)\|_q^2 = \|x - y\|_q^2 \Leftrightarrow f = h + v,$$

dove  $h \in O(n, 1)$  e  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Sia

$$E(n, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in O(n, 1), v \in \mathbb{R}^{n+1} \right\},$$

$E(n, 1)$  è un sottogruppo di  $GL(n+2, \mathbb{R})(\cdot)$ . Come nel caso euclideo, i gruppi

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1}, q), \quad E(n, 1) \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^{n+1} \rtimes_{\alpha} O(n, 1)$$

sono isomorfi. Nel caso particolare di  $n = 1$ , si ha

$$A \in O(1, 1) \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{tale che} \quad A^t \bar{I}_2 A = \bar{I}_2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$A^t \bar{I}_2 A = \bar{I}_2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 = 1, \quad d^2 - b^2 = 1 \quad \text{e} \quad ab - cd = 0$$

$$\Leftrightarrow c = b \quad \text{e} \quad d = a \quad \text{oppure} \quad c = -b \quad \text{e} \quad d = -a, \quad a^2 - c^2 = 1$$



$$\begin{aligned} \iff A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a^2 - b^2 = 1 \\ \iff A &= \pm \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \pm \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ \sinh t & -\cosh t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove  $2 \cosh t = e^t + e^{-t}$ ,  $2 \sinh t = e^t - e^{-t}$  e quindi  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  $O(1, 1)$  ha 4 componenti connesse che corrispondono ai 4 rami delle due iperboli  $a^2 - b^2 = 1$  e  $a^2 - b^2 = -1$ . Infine, si noti che con  $E(1, 1)$  spesso si indica anche il *gruppo speciale delle isometrie del piano di Minkowski*, ossia il prodotto semidiretto

$$\mathbb{R}^2(+)\rtimes_{\alpha}\mathbb{R}(+), \text{ dove } \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

**Teorema 5.30.** *Le isometrie dello spazio iperbolico  $(H^n, g = i^*q)$  sono tutte e sole le restrizioni ad  $H^n$  degli elementi di  $O_+(n, 1)$ . Quindi,  $\text{Iso}(H^n)$  si può identificare con  $O_+(n, 1)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\tilde{f} \in O_+(n, 1)$ , allora  $\tilde{f}(H^n) = H^n$  e quindi abbiamo  $f = \tilde{f}|_{H^n} : H^n \rightarrow H^n$ . Inoltre,  $f$  è un diffeomorfismo e soddisfa

$$f^*g = f^*i^*q = (i \circ f)^*q = (\tilde{f} \circ i)^*q = i^*\tilde{f}^*q = i^*q = g.$$

Pertanto  $f$  è un'isometria di  $H^n$ . Viceversa, sia  $f \in \text{Iso}(H^n)$  e, dato  $x \in H^n$ , sia  $y = f(x)$ . Consideriamo  $\{e_i\}$  base ortonormale di  $T_x(H^n)$  e quindi  $\{v_i = f_{*x}e_i\}$  base ortonormale di  $T_y(H^n)$ . Poiché  $e_0 = x$  ha  $\|e_0\|_q^2 = -1$  ed è ortogonale (rispetto a  $q$ ) a  $T_x H^n$ , analogamente per  $v_0 = y$ , allora  $\{e_0, e_i\}, \{v_0, v_i\}$  si possono pensare come basi ortonormali di  $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$ . Consideriamo la trasformazione  $F \in O_+(n, 1)$  definita da  $Fx = y$  e  $Fe_i = v_i = f_{*x}e_i$ . Posto  $F_0 = F|_{H^n}$ ,  $F_0 \in \text{Iso}(H^n)$ ; inoltre  $F_0(x) = y = f(x)$ ,  $(F_0)_{*x} = F = f_{*x}$ . Poiché un'isometria di una varietà riemanniana è univocamente determinata dal suo valore in un punto  $p$  e dal suo differenziale nello stesso punto  $p$  (cfr. Proposizione 7.37),  $f = F_0$  cioè  $f$  è la restrizione a  $H^n$  di una  $F \in O_+(n, 1)$ .  $\square$

**Teorema 5.31.** *Per ogni  $x, y \in H^n$  e per ogni  $\mathcal{B} = \{v_i\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{w_i\}$  basi ortonormali ordinate di  $T_x H^n$  e  $T_y H^n$  rispettivamente, esiste  $f \in O_+(n, 1) = \text{Iso}(H^n)$  tale che  $f(x) = y$  e  $f_*v_i = w_i, i = 1, \dots, n$ . In particolare, lo spazio iperbolico  $H^n$  è omogeneo e isotropo.*

*Dimostrazione.* Siano  $x, y \in H^n$  e  $\mathcal{B} = \{v_i\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{w_i\}$  basi ortonormali come nell'enunciato. Possiamo pensare  $v = x$  e  $w = y$  come vettori  $q$ -ortogonali a  $T_x H^n$  e  $T_y H^n$  rispettivamente e con  $\|x\|_q^2 = \|y\|_q^2 = -1$ . Pertanto,  $\mathcal{B}_1 = \{v, v_i\}$ ,  $\mathcal{B}'_1 = \{w, w_i\}$  sono basi  $q$ -ortonormali di  $T_x \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  e  $T_y \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  rispettivamente. Consideriamo la trasformazione lineare  $f$  tale che  $f(v) = w$  e  $f(v_i) = w_i$ .  $f \in O_+(n, 1)$  in quanto trasforma  $\mathcal{B}_1$  base  $q$ -ortonormale in  $\mathcal{B}'_1$  base  $q$ -ortonormale e inoltre  $f(x) = y$  con  $x, y \in H^n$ . Si

noti che anche  $SO_+(n, 1)$  agisce transitivamente su  $H^n$ . Infatti, sostituendo in  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  (se necessario)  $v_1$  con  $-v_1$  e  $w_1$  con  $-w_1$ , possiamo assumere  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}'_1$  basi q-ortonormali positive e di conseguenza sarà  $\det f = +1$ .  $\square$

### Isometrie del modello iperbolico $\mathbb{R}_+^n$

Le isometrie del modello iperbolico  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  sono relative alle applicazioni conformi di  $\mathbb{R}^n$ . Ricordiamo che la metrica iperbolica di  $\mathbb{R}_+^n$  è  $g = (1/x_n^2)g_0$ .

**Definizione 5.32.** Sia  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Un'applicazione differenziabile  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice *conforme* se il suo differenziale conserva gli angoli:

$$\forall p \in A \quad e \quad \forall v, w \in T_p A \equiv \mathbb{R}^n : \vartheta(v, \hat{w}) = \vartheta(f_* v, \hat{f_* w})$$

**Esercizio 5.33.** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione differenziabile con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Si verifichi che le seguenti proprietà sono equivalenti:

- 1)  $f$  è conforme;
  - 2)  $\|f_* v\| = \lambda(p)\|v\|$  con  $\lambda(p) > 0$ ,  $\forall p \in A$  e  $\forall v \in T_p A$ ;
  - 3)  $g_0(f_* v, f_* w) = \lambda^2(p)g_0(v, w)$ ,  $\forall p \in A$  e  $\forall v, w \in T_p A$ .
- La 3) si può anche esprimere nella forma  $f^* g_0 = \lambda^2 g_0$ . La funzione positiva  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \lambda(p)$ , si dice *coefficiente* dell'applicazione conforme.

**Esempio 5.34.** Le isometrie dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  sono applicazioni conformi con coefficiente  $\lambda = 1$ .

**Esempio 5.35.** Le dilatazioni (dette anche omotetie), ossia le trasformazioni di  $\mathbb{R}^n$  del tipo  $f(x) = kx + v$ , sono applicazioni conformi con coefficiente  $\lambda = k = \text{cost.} > 0$ . Più in generale, le similitudini, ossia le trasformazioni di  $\mathbb{R}^n$  del tipo  $f(x) = kAx + v$ , con  $A$  trasformazione ortogonale, sono applicazioni conformi con coefficiente  $\lambda = k = \text{cost.} > 0$ .

**Esempio 5.36.** Se  $f_1 : A \rightarrow A' \subset \mathbb{R}^n$  e  $f_2 : A' \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono applicazioni conformi, con  $A$  e  $A'$  aperti di  $\mathbb{R}^n$ , allora  $f_2 \circ f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è conforme con coefficiente  $\lambda = (\lambda_2 \circ f_1) \cdot \lambda_1$ , dove  $\lambda_1, \lambda_2$  sono i coefficienti delle applicazioni conformi  $f_1, f_2$  rispettivamente.

**Esempio 5.37.** L'inversione rispetto alla sfera  $\mathbb{S}^{n-1}(x_0, r)$ :

$$J : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}, \quad x \mapsto x_0 + \frac{r^2}{\|x - x_0\|^2}(x - x_0),$$

è un'applicazione conforme con coefficiente  $\frac{r^2}{\|x - x_0\|^2}$ . Per verificare ciò, consideriamo prima il caso dell'inversione  $J_0$  cioè con  $x_0 = 0$ . Per semplicità assumiamo  $n = 2$ , analogamente per  $n > 2$ . Risulta

$$J_0(x) = \frac{r^2}{\|x\|^2} x = \left( y_1 = \frac{r^2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}, y_2 = \frac{r^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

$$(J_0)_* x = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{r^2}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_2 & x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} (J_0)_{*x} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \frac{r^2}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} (x_2^2 - x_1^2)v_1 - 2x_1x_2v_2 \\ -2x_1x_2v_1 + (x_1^2 - x_2^2)v_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{r^2}{\|x\|^4} \left\{ \|x\|^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_1(v_1x_1 + v_2x_2) \\ 2x_2(v_2x_2 + v_1x_1) \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$(J_0)_{*x}v = \frac{r^2}{\|x\|^4} (\|x\|^2v - 2g_0(v, x)x)$$

e

$$\|(J_0)_{*x}v\|^2 = \frac{r^4}{\|x\|^4} \|v\|^2.$$

Quindi  $J_0$  è un'applicazione conforme con coefficiente  $\lambda = \frac{r^2}{\|x\|^2}$ . Consideriamo ora la traslazione  $T : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}, x \mapsto T(x) = x_0 + x$ . Allora,

$$T \circ J_0 \circ T^{-1}(x) = T \left( r^2 \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|^2} \right) = x_0 + \frac{r^2(x - x_0)}{\|x - x_0\|^2} = J(x)$$

e quindi  $J(x)$  è conforme in quanto composizione di applicazioni conformi. Inoltre,  $J$  ha coefficiente  $\lambda = \frac{r^2}{\|x - x_0\|^2}$  (basta applicare il risultato dell'Esempio 5.36).

Per le applicazioni conformi vale il seguente risultato (cfr. [32], p. 170).

**Teorema 5.38.** (di Liouville) *Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$ , è un'applicazione conforme, allora  $f$  è la restrizione ad  $A$  di una composizione di isometrie, dilatazioni e inversioni, ognuna delle quali compare al più una volta, di  $\mathbb{R}^n$ .*

**Proposizione 5.39.** *L'inversione  $J_0(p) = (r^2/\|p\|^2)p$  definisce un'isometria dello spazio iperbolico  $(\mathbb{R}_+^n, g)$ .*

*Dimostrazione.* Intanto  $J_0$  applica  $\mathbb{R}_+^n$  in  $\mathbb{R}_+^n$ . Inoltre, poiché  $J_0$  è conforme con coefficiente  $\lambda(p) = r^2/\|p\|^2$ , per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^n$  e per ogni  $v, w \in T_p\mathbb{R}_+^n$  risulta:

$$\begin{aligned} g_{J_0(p)}((J_0)_{*p}v, (J_0)_{*p}w) &= \frac{1}{x_n^2(J_0(p))} g_0((J_0)_{*p}v, (J_0)_{*p}w) \\ &= \frac{\|p\|^4}{r^4 x_n^2(p)} g_0((J_0)_{*p}v, (J_0)_{*p}w) \\ &= \frac{1}{x_n^2(p)} g_0(v, w) \\ &= g_p(v, w). \end{aligned}$$

□

**Proposizione 5.40.** *Le seguenti applicazioni, accanto sono presentate con notazione complessa ( $z = x + iy$ ), sono isometrie del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ .*

- 1)  $f_1 = J : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,  $p = (x, y) \mapsto (r^2/\|p\|^2)p$ ;  $J(z) = r^2/\bar{z}$ .
- 2)  $f_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,  $p = (x, y) \mapsto (-x, y)$ ;  $f_2(z) = -\bar{z}$ .
- 3)  $f_3 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,  $p = (x, y) \mapsto (x + a, y)$ ;  $f_3(z) = z + a$ .
- 4)  $f_4 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ ,  $p = (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ ,  $\lambda = \text{cost} > 0$ ;  $f_4(z) = \lambda z$ .

*Dimostrazione.* La  $f_1$  è un'inversione, quindi un'isometria (applicando la Proposizione 5.39). Le applicazioni  $f_2, f_3, f_4$ , che sono rispettivamente una simmetria (rispetto all'asse  $y$ ), una traslazione (parallela all'asse  $x$ ) e una dilatazione, si vede facilmente che sono isometrie del piano iperbolico.  $\square$

Sia ora  $f : (\mathbb{R}_+^n, g) \rightarrow (\mathbb{R}_+^n, g)$  un'isometria per la metrica iperbolica. Allora,

$$g_p(v, w) = g_{f(p)}(f_*p v, f_*p w) \Rightarrow g_0(f_*p v, f_*p w) = \frac{x_n^2(f(p))}{x_n^2(p)} g_0(v, w)$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^n$  e per ogni  $v, w \in T_p \mathbb{R}_+^n$ . Quindi  $f$  è un'applicazione conforme. Più in generale vale il seguente teorema.

**Teorema 5.41.** ([32], p. 175) *Le isometrie di  $(\mathbb{R}_+^n, g)$  sono tutte e sole le restrizioni a  $\mathbb{R}_+^n$  delle applicazioni conformi di  $\mathbb{R}^n$  che applicano  $\mathbb{R}_+^n$  in  $\mathbb{R}_+^n$ .*

**Osservazione 5.42.** Per quanto visto nella Sezione 4.4, la proiezione stereografica iperbolica, che indichiamo con  $\psi$ , definisce un'isometria tra lo spazio iperbolico  $H^n$  e il modello di Poincaré  $\Delta^n$ . Quindi  $\text{Iso}(\Delta^n) = \{\psi \circ f \circ \psi^{-1} : f \in \text{Iso}(H^n)\}$ . Analogamente, l'inversione (rispetto alla sfera di centro  $x_0 = (0, \dots, 0, -1)$  e raggio  $r = \sqrt{2}$ ) e la proiezione stereografica iperbolica definiscono un'isometria, che indichiamo con  $\phi$ , tra lo spazio iperbolico  $H^n$  e il modello di Poincaré  $\mathbb{R}_+^n$ . Quindi,

$$\text{Iso}(\mathbb{R}_+^n) = \{\phi \circ f \circ \phi^{-1} : f \in \text{Iso}(H^n)\}.$$

Inoltre, poiché  $H^n$  è omogeneo e isotropo, anche i modelli iperbolici  $\mathbb{R}_+^n$  e  $\Delta^n$  sono omogenei e isotropi in quanto isometrici ad  $H^n$ .

## 5.6 Trasformazioni di Möbius e isometrie del piano iperbolico

In questa sezione esaminiamo più in dettaglio le isometrie del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$ . Trasformazioni del tipo

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = (az + b)/(cz + d),$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ,  $ad - bc \neq 0$ , sono dette *trasformazioni di Möbius*. Esse sono invertibili con

$$f^{-1}(z) = (dz - b)/(a - cz).$$

Se  $c \neq 0$ :

$$f(z) = \alpha + \beta/(cz + d), \text{ dove } \alpha = a/c \text{ e } \beta = (bc - ad)/c.$$

Se  $c = 0$ :

$$f(z) = \alpha z + \beta, \text{ dove } \alpha = a/d \text{ e } \beta = b/d.$$

Quindi  $f(z)$  si può esprimere come composizione di trasformazioni di Möbius “semplici” del tipo:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= z + b, \quad b \in \mathbb{C} \quad (\text{traslazione}); & \psi_2(z) &= e^{i\vartheta} z \quad (\text{rotazione}); \\ \psi_3(z) &= \rho z, \quad \rho > 0 \quad (\text{dilatazione}); & \psi_4(z) &= 1/z. \end{aligned}$$

Si noti che la trasformazione  $f(z) = az, a \in \mathbb{C}$ , è composizione di trasformazioni del tipo  $\psi_2$  e  $\psi_3$ . In particolare, le trasformazioni di Möbius reali

$$f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad z \mapsto (az + b)/(cz + d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0,$$

in coordinate reali

$$z = (x, y) \longrightarrow \left( \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + db}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right),$$

sono isometrie per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ . Infatti, ogni trasformazione di Möbius reale è composizione di trasformazioni del seguente tipo:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= z + b, \quad b \in \mathbb{R} \quad (\text{traslazioni}), \\ \varphi_2(z) &= az, \quad a > 0 \quad (\text{dilatazioni}); & \varphi_3(z) &= -1/z, \end{aligned}$$

le quali sono isometrie per la metrica iperbolica. Si noti che anche la trasformazione  $\varphi_3$  è un’isometria del piano iperbolico in quanto composizione di un’inversione ( $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ ) e di una simmetria ( $z \mapsto -\bar{z}$ ).

Poiché la simmetria  $s: z \rightarrow -\bar{z}$  è un’isometria del piano iperbolico, allora anche le trasformazioni di Möbius del tipo:

$$s \circ f(z) = -(a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d), \quad \text{con } ad - bc > 0,$$

sono isometrie per  $(\mathbb{R}_+^2, g)$ . Più precisamente, si dimostra il seguente teorema (cfr. [104], p. 141).

**Teorema 5.43.** (di Poincaré) *Le isometrie del piano iperbolico  $(\mathbb{R}_+^2, g)$  sono tutte e sole le trasformazioni di Möbius reali del tipo:*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0; \quad \text{oppure} \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc < 0.$$

Poniamo  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Poiché

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda a\bar{z} + \lambda b}{\lambda c\bar{z} + \lambda d} = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

il gruppo  $\text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g) = \text{Iso}^+ \cup \text{Iso}^-$ , ossia si può esprimere con

$$\left\{ f : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \det A = 1 \right\} \cup \left\{ f : z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \det A = -1 \right\}.$$

$\text{Iso}^+$  è un sottogruppo di  $\text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$ . Si vede subito che

$$\text{Iso}^+ \cap \text{Iso}^- = \emptyset \quad \text{e} \quad \text{Iso}^- = \{s \circ f : f \in \text{Iso}^+\}, \text{ dove } s : z \rightarrow -\bar{z}.$$

Consideriamo i seguenti sottogruppi di  $GL(2, \mathbb{R})$ :

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : \det A = +1 \right\}$$

e

$$L(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} : \det A = \pm 1 \right\}.$$

L'applicazione  $\Phi : L(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g)$  tale che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( f : z \mapsto (az + b)/(cz + d) \right) \quad \text{se } \det A = 1,$$

e

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left( f : z \mapsto (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d) \right) \quad \text{se } \det A = -1,$$

è un omomorfismo suriettivo con

$$\ker \Phi = \{A : \Phi(A) = I\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Di conseguenza, l'epimorfismo  $\Phi$  induce l'isomorfismo

$$\tilde{\Phi} : L(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\} \rightarrow \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2, g), \quad [A] \rightarrow \Phi(A).$$

Si può dimostrare (cfr. [62], p. 45) che:

$$PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\} \quad \text{è isomorfo a} \quad SO_+(2, 1),$$

e quindi opera transitivamente su  $\mathbb{R}_+^2$ .

### Isometrie del modello iperbolico nel disco $\Delta^2$

La metrica iperbolica di  $\Delta^n$  è ottenuta da quella di  $\mathbb{R}_+^n$  mediante l'inversione  $J : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ ,  $Jx = x_0 + \frac{2}{\|x-x_0\|^2}(x-x_0)$  con  $x_0 = (0, \dots, 0, -1)$ , che di conseguenza sarà un'isometria. Per  $n = 2$ , in coordinate complesse:

$$J : \Delta^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad z \mapsto Jz = -i(\bar{z} + i)/(\bar{z} - i).$$

Consideriamo  $c : \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$ ,  $z \mapsto c(z) = \bar{z}$ , coniugazione complessa;  $c$  è un'isometria del disco iperbolico (in quanto è un'isometria lineare del piano euclideo). Quindi  $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \Delta^2$  definita da  $u = c \circ J$  è un'isometria e  $u(z) = \frac{iz+1}{z+i}$ . L'isometria inversa è  $v(z) = u^{-1}(z) = \frac{iz-1}{-z+i}$ . Di conseguenza,

$$\text{Iso}(\Delta^2) = \{\tilde{f} = u \circ f \circ v : f \in \text{Iso}(\mathbb{R}_+^2)\}.$$

Tenendo conto del Teorema 5.43 che descrive le isometrie di  $\mathbb{R}_+^2$ , si ottiene la seguente proposizione (cfr. anche [104], p. 215).

**Proposizione 5.44.** *Le isometrie del disco iperbolico sono le trasformazioni di Möbius del tipo:*

$$f(z) = (a\bar{z} + \bar{b})/(b\bar{z} + \bar{a}), \quad \text{oppure} \quad f(z) = (-a\bar{z} + \bar{b})/(-b\bar{z} + \bar{a}), \quad a, b \in \mathbb{C},$$

con  $|a|^2 - |b|^2 > 0$  (che in particolare si può porre = 1).

## 5.7 Rivestimenti riemanniani

Siano  $M, \tilde{M}$  due varietà differenziabili. Ricordiamo che un'applicazione differenziabile  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  è detta applicazione di rivestimento se per ogni  $x \in M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  tale che  $p^{-1}(U)$  sia unione disgiunta di aperti  $\tilde{U}_i$  (di  $\tilde{M}$ ) con  $p|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U$  diffeomorfismo per ogni  $i$ . Gli aperti  $\tilde{U}_i$  si dicono fogli su  $U$ ,  $U$  è detto aperto "ben coperto" e  $p^{-1}(x)$  è detta fibra su  $x$ .

**Definizione 5.45.** Siano  $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$  due varietà riemanniane.  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  si dice *rivestimento riemanniano* di  $(M, g)$  con proiezione  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  se  $p$  è un'applicazione di rivestimento e inoltre  $p^*g = \tilde{g}$ .

Nel caso di un rivestimento riemanniano,  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  è un'isometria locale e se  $f : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  è una trasformazione di rivestimento, cioè  $p \circ f = p$ , allora  $f$  è un'isometria di  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ .

**Proposizione 5.46.** *Siano  $M, \tilde{M}$  due varietà differenziabili e  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  un'applicazione di rivestimento. Se  $g$  è una metrica riemanniana su  $M$ , allora esiste un'unica metrica  $\tilde{g}$  su  $\tilde{M}$  tale che  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  sia rivestimento riemanniano di  $(M, g)$ .*

*Dimostrazione.* L'unicità segue dal fatto che la metrica  $\tilde{g}$  verifica la proprietà  $p^*g = \tilde{g}$ . Per l'esistenza basta provare che  $\tilde{g} := p^*g$  è una metrica riemanniana. Dalla definizione segue facilmente che  $\tilde{g}$  è un tensore covariante di ordine 2 simmetrico. Inoltre,  $\tilde{g}$  è definito positivo in quanto  $p$  è un diffeomorfismo locale e quindi  $(p_*)_{\tilde{x}}$  è un isomorfismo per ogni  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ .  $\square$

In generale, se  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  è un'applicazione di rivestimento, una metrica riemanniana  $\tilde{g}$  su  $\tilde{M}$  non induce una metrica riemanniana su  $M$ . Tuttavia, in alcuni casi, ciò accade come risulta dalla seguente proposizione.

**Proposizione 5.47.** *Siano  $M, \tilde{M}$  due varietà differenziabili e  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  un'applicazione di rivestimento. Se  $\tilde{g}$  è una metrica riemanniana su  $\tilde{M}$  e il*

*rivestimento è definito da un gruppo  $G$  discreto e propriamente discontinuo di isometrie di  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , allora esiste un'unica metrica  $g$  su  $M$  tale che  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  sia rivestimento riemanniano di  $(M, g)$  con proiezione  $p$ .*

*Dimostrazione.* Nel caso in esame,  $M = \tilde{M}/G$  e l'applicazione di rivestimento  $p : \tilde{M} \rightarrow M = \tilde{M}/G$  è la proiezione definita da  $p(\tilde{x}) = G\tilde{x}$  (orbita di  $\tilde{x}$  rispetto all'azione di  $G$ ). Se  $U$  è un aperto "ben coperto" di  $M$ , i fogli su  $U$  sono del tipo  $f\tilde{U}$  con  $f \in G$  e  $\tilde{U}$  aperto di  $\tilde{M}$ . Inoltre, gli elementi di  $G$  sono trasformazioni di rivestimento. Consideriamo un foglio  $\tilde{U}_1$  su  $U$ ,  $\tilde{U}_1 = f_1\tilde{U}$  con  $f_1 \in G$ , e il diffeomorfismo  $p_1 = p|_{\tilde{U}_1} : \tilde{U}_1 \rightarrow U$ . Ponendo

$$g = (p_1^{-1})^* \tilde{g}_1, \quad \text{dove} \quad \tilde{g}_1 = \tilde{g}|_{\tilde{U}_1},$$

otteniamo una metrica riemanniana sull'aperto  $U$ . Tale definizione di  $g$  su  $U$  non dipende dalla scelta del foglio. Sia  $\tilde{U}_2 = f_2\tilde{U}$ ,  $f_2 \in G$ , un altro foglio su  $U$  e sia  $p_2 = p|_{\tilde{U}_2} : \tilde{U}_2 \rightarrow U$  il diffeomorfismo corrispondente. Allora, l'isometria  $f = f_2 \circ f_1^{-1}$  verifica le proprietà

$$f(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_2 \quad \text{e} \quad p_2 \circ f|_{\tilde{U}_1} = p_1 \quad \text{cioè} \quad f|_{\tilde{U}_1} \circ p_1^{-1} = p_2^{-1}$$

e quindi (denotando, con abuso di notazione,  $f|_{\tilde{U}_1}$  con  $f$ ) si ha:

$$(p_2^{-1})^* \tilde{g}_2 = (f \circ p_1^{-1})^* \tilde{g}_2 = (p_1^{-1})^* f^* \tilde{g}_2 = (p_1^{-1})^* \tilde{g}_1.$$

Inoltre, se  $U$  e  $U'$  sono due aperti "ben coperti" a intersezione non vuota, indicate con  $g$  e  $g'$  le metriche definite su  $U$  e  $U'$  rispettivamente, come prima si può vedere che  $g|_{U \cap U'} = g'|_{U \cap U'}$ . Infine, poiché  $M$  si può ricoprire con una famiglia di aperti "ben coperti", le considerazioni precedenti assicurano che possiamo definire una metrica riemanniana  $g$  su  $M$  per cui  $p^*g = \tilde{g}$ . Tale proprietà assicura anche l'unicità di  $g$ .  $\square$

Un rivestimento riemanniano è chiaramente un'isometria locale, e se  $\tilde{M}$  è compatta vale anche il viceversa. Vale infatti la seguente

**Proposizione 5.48.** ([100], p. 116; [62], p. 197) *Siano  $(M, g)$ ,  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  due varietà riemanniane e  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  un'isometria locale con  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  completa. Allora,  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  è un rivestimento riemanniano di  $(M, g)$  con proiezione  $p$ .*

**Esempio 5.49.**  $G = \{I, -I\}$  è un gruppo di isometrie della sfera canonica  $(\mathbb{S}^n, g)$ , la cui azione è propriamente discontinua su  $\mathbb{S}^n$ . Quindi, la proiezione quoziente

$$p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^n/G$$

definisce un rivestimento dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Pertanto, possiamo definire su  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  una metrica riemanniana  $g_1$  per cui  $p^*g_1 = g$  (cfr. Proposizione 5.47).



**Esempio 5.50.** Il gruppo  $G$  delle traslazioni di  $\mathbb{R}^n$ , definite da vettori a coordinate intere, isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ , è un gruppo di isometrie di  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  la cui azione è propriamente discontinua. Quindi, la proiezione quoziente

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

definisce un rivestimento del toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n$ . Pertanto, possiamo definire su  $\mathbb{T}^n$  una metrica riemanniana  $g_1$  per cui  $p^*g_1 = g_0$ .  $\mathbb{T}^n$  munito di tale metrica è un *toro piatto*. Un toro piatto può essere definito anche nel modo seguente. Siano  $\xi_1, \dots, \xi_n$   $n$ -vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^n$ . Indichiamo con  $G$  il sottogruppo di  $\mathbb{R}^n$  generato da  $\xi_1, \dots, \xi_n : G = \{\xi = \sum m_i \xi_i, m_i \in \mathbb{Z}\}$ . L'azione di  $G$  su  $\mathbb{R}^n$  è propriamente discontinua e quindi  $\mathbb{R}^n$  è il rivestimento universale di  $\mathbb{R}^n/G$ . Inoltre, la varietà quoziente  $\mathbb{R}^n/G$  è diffeomorfa al toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  e la metrica euclidea  $g_0 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$  (dove per ogni  $x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_i x_i \xi_i$ ) è invariante per l'azione di  $G$ . Pertanto  $g_0$ , come nel caso di  $G = \mathbb{Z}^n$ , induce una metrica riemanniana piatta su  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/G$  (cfr. [56] vol.I, p. 210). Inoltre, due tori piatti  $\mathbb{R}^n/G$  e  $\mathbb{R}^n/G'$  sono isometrici se, e solo se, esiste una isometria dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  che scambia i sottogruppi  $G$  e  $G'$  (cfr. [7], p. 5).

**Esempio 5.51.** Consideriamo una superficie torica  $\mathbb{T}^2$  di  $\mathbb{R}^3$  simmetrica rispetto all'origine, con una metrica riemanniana piatta, che indichiamo con  $g$ , come definita nell'esempio precedente.  $G = \{I, -I\}$  è un gruppo di isometrie del toro piatto  $(\mathbb{T}^2, g)$ , inoltre  $G$  opera in modo propriamente discontinuo su  $\mathbb{T}^2$ . Quindi, la proiezione quoziente

$$p : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{T}^2/G$$

definisce un rivestimento della *bottiglia di Klein*  $\mathbb{K}$ . Pertanto, possiamo definire una metrica riemanniana piatta  $g_1$  su  $\mathbb{K}$  per cui  $p^*g_1 = g$ . La classificazione delle 2-varietà riemanniane compatte piatte si può trovare in [56] vol.I, p. 223.

## 5.8 Isometrie degli spazi modello della geometria semi-riemanniana (cenni)

Maggiori dettagli su questa sezione si possono trovare in [79]. Iniziamo introducendo brevemente gli spazi modello della geometria semi-riemanniana. Sia  $M$  una sottovarietà di una varietà semi-riemanniana  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , con immersione  $i : M \hookrightarrow \tilde{M}$ . Se il tensore  $g = i^*\tilde{g}$  è una metrica semi-riemanniana, allora  $(M, g)$  è detta sottovarietà semi-riemanniana di  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ .

Gli spazi modello della geometria semi-riemanniana sono :

- Lo spazio semi-euclideo  $\mathbb{R}_\nu^n$ , ossia  $\mathbb{R}^n$  con la metrica semi-euclidea  $g_0$  definita da

$$g_0 = -\sum_{i=1}^{\nu} dx_i \otimes dx_i + \sum_{i=\nu+1}^n dx_i \otimes dx_i.$$

$g_0$  è una metrica semi-riemanniana di indice  $\nu$ .

- La *pseudosfera* di raggio  $r > 0$  di  $\mathbb{R}_\nu^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , è l'ipersuperficie

$$\mathbb{S}_\nu^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : -\sum_{i=1}^\nu x_i^2 + \sum_{i=\nu+1}^{n+1} x_i^2 = r^2\}.$$

La metrica semi-riemanniana  $g = i^*g_0$ , di segnatura  $(n - \nu, \nu)$ , è la metrica canonica della pseudosfera  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ . Per  $\nu = 0$ ,  $\mathbb{S}_0^n(r)$  è la sfera canonica  $\mathbb{S}^n(r)$  dello spazio euclideo  $\mathbb{R}_0^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ .

- Lo *spazio pseudoiperbolico* di raggio  $r > 0$  di  $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , è l'ipersuperficie

$$H_\nu^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} : -\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2 + \sum_{i=\nu+2}^{n+1} x_i^2 = -r^2\}.$$

La metrica semi-riemanniana  $g = i^*g_0$ , di segnatura  $(n - \nu, \nu)$ , è la metrica canonica dello spazio pseudoiperbolico  $\mathbb{H}_\nu^n(r)$ . Per  $\nu = 0$ ,  $H_0^n(r)$  ha due componenti connesse, la falda superiore di  $H_0^n(r)$  è l'iperboloide  $H^n(r)$ ,  $x_1 > 0$ , con la metrica riemanniana iperbolica indotta dallo spazio di Minkowski  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ . Lo spazio di Minkowski  $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$  considerato nella Sezione 4.4 si ottiene da  $\mathbb{R}_1^{n+1}$  scambiando la coordinata  $x_1$  con la coordinata  $x_{n+1}$ .

Si noti (tenendo conto che  $\mathbb{R}^0$  consiste di un singolo punto, mentre  $\mathbb{S}^0$  consiste di due punti) che:

- la pseudosfera  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$  è diffeomorfa alla varietà  $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{S}^{n-\nu}$ , e
- lo *spazio pseudoiperbolico*  $H_\nu^n(r)$  è diffeomorfo alla varietà  $\mathbb{S}^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}$ .

Un diffeomorfismo  $f$  tra due varietà semi-riemanniane  $(M, g)$  e  $(M', g')$  tale che  $f^*g' = cg$ ,  $c = \text{cost.} \neq 0$ , è una omotetia. Naturalmente se la costante  $c = 1$ ,  $f$  è una isometria. Se la costante  $c = -1$ ,  $f$  è detta *anti-isometria*. L'applicazione  $F : \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n+1-\nu}^{n+1}$  data da

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, x_1, \dots, x_\nu)$$

è una anti-isometria che trasforma la pseudosfera  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$  nello spazio pseudoiperbolico  $H_{n-\nu}^n(r)$  e viceversa. Di conseguenza, anche l'applicazione

$$F : \mathbb{S}_\nu^n(r) \rightarrow H_{n-\nu}^n(r)$$

è una anti-isometria.

Come vedremo nel capitolo successivo, la connessione di Levi-Civita è invariante per omotetie (anche nel caso semi-riemanniano) e quindi tutte le nozioni geometriche che derivano da essa sono invarianti per omotetie (cfr. Osservazione 6.47).

### Isometrie degli spazi $\mathbb{R}_\nu^n$ , $\mathbb{S}_\nu^n$ , $H_\nu^n$

Sia  $I_\varepsilon$  la matrice segnatura relativa alla metrica semi-euclidea  $g_0$  dello spazio  $\mathbb{R}_\nu^n$ .  $I_\varepsilon$  è la matrice diagonale  $(\varepsilon_{ij})$  dove

$\varepsilon_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ ,  $\varepsilon_{ii} = -1$  per per  $i = 1, \dots, \nu$ , e  $\varepsilon_{ii} = +1$  per  $i = \nu + 1, \dots, n$ .

In altre parole, se  $(e_i)$  è una base pseudo-ortonormale di  $\mathbb{R}_\nu^n$ , allora

$$g_0(e_i, e_j) = \varepsilon_{ij} \quad \text{e} \quad I_\varepsilon = (g_0(e_i, e_j)).$$

Si noti che

$$I_\varepsilon^t = I_\varepsilon = I_\varepsilon^{-1} \text{ e, per } \nu = 0, I_\varepsilon = I_n \text{ (matrice identità di ordine } n\text{)}.$$

Indichiamo con  $O_\nu(n)$  il gruppo delle matrici  $A$  che corrispondono, rispetto a una fissata base pseudo-ortonormale  $(e_i)$ , alle trasformazioni pseudo-ortogonali di  $\mathbb{R}_\nu^n$ : trasformazioni lineari di  $\mathbb{R}_\nu^n$  che conservano  $g_0$ . Posto  $A = (a_{ij})$ , siccome

$$g_0(Ae_i, Ae_j) = g_0(e_i, e_j) \Leftrightarrow \sum_{k,h} a_{ki} a_{hj} \varepsilon_{kh} = \varepsilon_{ij},$$

allora  $O_\nu(n)$  corrisponde al sottogruppo delle matrici  $A$  di  $GL(n, \mathbb{R})$  che soddisfano:

$$A^t I_\varepsilon A = I_\varepsilon \text{ (ovvero } A^t = I_\varepsilon A^{-1} I_\varepsilon\text{)}.$$

Per i gruppi di isometrie, abbiamo quanto segue (cfr. [78], p.233-240).

- Il gruppo di isometrie di  $\mathbb{R}_\nu^n$  è il gruppo  $\text{Iso}(\mathbb{R}_\nu^n)$  di tutte le trasformazioni del tipo

$$f = A + p, \quad \text{dove } A \in O_\nu(n) \text{ e } p \in \mathbb{R}_\nu^n.$$

$\text{Iso}(\mathbb{R}_\nu^n)$  è un gruppo di Lie che ha dimensione

$$\dim \text{Iso}(\mathbb{R}_\nu^n) = \dim \mathbb{R}^n + \dim O_\nu(n) = n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2.$$

$\text{Iso}(\mathbb{R}_\nu^n)$ ,  $0 < \nu < n$ , ha quattro componenti connesse.

- Il gruppo di isometrie della pseudosfera  $\mathbb{S}_\nu^n$ ,  $\nu < n$ , è il gruppo  $O_\nu(n+1)$ ;
- Il gruppo di isometrie dello spazio pseudoiperbolico  $H_\nu^n$ ,  $\nu > 0$ , è il gruppo  $O_{\nu+1}(n+1)$ .

Anche  $O_\nu(n)$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n(n-1)/2$  che non dipende da  $\nu$ . Per  $\nu = 0$ ,  $O_0(n)$  è chiaramente il gruppo ortogonale  $O(n)$  che ha due componenti connesse.  $O_\nu(n)$ ,  $0 < \nu < n$ , ha quattro componenti connesse.

In particolare, nel caso del gruppo ortogonale  $O(2)$  il sottogruppo  $SO(2)$  delle rotazioni è definito dalle matrici ortogonali del tipo

$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in \mathbb{R};$$

$SO(2)$  è la componente connessa dell'identità in  $O(2)$  ed è diffeomorfo alla circonferenza  $\mathbb{S}^1$ .

Nel caso del gruppo pseudo-ortogonale  $O_1(2)$ , il sottogruppo  $B$  definito dalle matrici pseudo-ortogonali del tipo

$$B_\vartheta = \begin{pmatrix} \cosh \vartheta & \sinh \vartheta \\ \sinh \vartheta & \cosh \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in \mathbb{R},$$

è la componente connessa dell'identità in  $O_1(2)$ , ed è diffeomorfo a  $\mathbb{R}$ . Ogni matrice  $B_\vartheta$ , detta *boost* di  $\mathbb{R}_1^2$  di angolo lorentziano  $\vartheta$ , conserva ognuno dei quattro rami delle iperboli  $x^2 - y^2 = \pm 1$ .



## Capitolo 6

# Connessioni lineari e connessione di Levi-Civita

Abbiamo visto che su una varietà differenziabile esiste un modo naturale di derivare una funzione rispetto a un vettore tangente, tuttavia non esiste un modo naturale di derivare campi di vettori in quanto ciò dipende dall'introduzione di un'ulteriore nozione: la “*connessione lineare*”, ovvero l'operazione di *derivata covariante*. D'altro canto spazi tangenti in punti distinti sono isomorfi (in quanto hanno stessa dimensione), ma l'isomorfismo non è canonico, per cui non è possibile definire la derivata di un campo di vettori con un rapporto incrementale. L'assegnazione di una connessione lineare (da cui il nome) permette di collegare i vari spazi tangenti mediante la conseguente nozione di trasporto parallelo. Nel caso di una varietà riemanniana esiste un modo naturale di differenziare, e quindi un parallelismo canonico, nel senso che esiste un'unica connessione lineare (simmetrica) compatibile con la metrica: la “*connessione di Levi-Civita*”. Storicamente il parallelismo fu introdotto da T. Levi-Civita nel 1917 e quindi prima della connessione lineare. L'idea usata da Levi-Civita è la seguente. Siano  $S$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$ ,  $\sigma(t)$  una curva differenziabile di  $S$  e  $V_o$  un vettore tangente a  $S$  in un fissato punto  $\sigma(t_o)$ . Se  $S$  è un piano, il trasporto parallelo di  $V_o$  da  $\sigma(t_o)$  a  $\sigma(t_1)$  lungo  $\sigma$  non dipende dalla curva  $\sigma$  considerata. Se  $S$  non è un piano, si considera la famiglia di piani tangenti  $\{\pi(t) = T_{\sigma(t)}S\}_t$  ad  $S$  lungo  $\sigma(t)$ . Questa famiglia di piani determina una superficie rigata sviluppabile  $\Sigma$  detta superficie involuppo.  $\Sigma$  ha le proprietà di essere localmente piatta e tangente ad  $S$  lungo  $\sigma$  (cioè  $T_{\sigma(t)}\Sigma = T_{\sigma(t)}S$ ). Pertanto, il trasporto parallelo di  $V_o$  lungo  $\sigma$  in  $S$  coincide con il trasporto parallelo di  $V_o$  lungo  $\sigma$  in  $\Sigma$ . Poiché  $\Sigma$  è localmente piatta, il trasporto parallelo lungo  $\sigma$  in  $\Sigma$  si realizza in modo euclideo nell'immagine isometrica di  $\Sigma$  e poi si riporta su  $S$ . Il parallelismo di Levi-Civita stimolò poi le ricerche di É. Cartan il quale generalizzò tale nozione sviluppando la teoria degli spazi a connessione affine, proiettiva e conforme.

## 6.1 Connessioni lineari

La presentazione di connessione lineare che diamo è dovuta a J.L. Koszul.

**Definizione 6.1.** Una connessione lineare  $\nabla$  su una varietà differenziabile  $M$  è una applicazione

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

che soddisfa:

$$a) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$b) \quad \nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$c) \quad \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (\nabla_X f)Y,$$

per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ , dove  $\nabla_X f := X(f)$ .

L'operatore  $\nabla_X : Y \mapsto \nabla_X Y$ , si dice *derivata covariante rispetto a X*.

Attenzione:  $\nabla$  non è un tensore!

Se  $M = \mathbb{R}^n$ , per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ ,  $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$ ,  $\nabla^0$  definita da

$$\nabla_X^0 Y = \sum_i X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x_i} = (X(Y^1), \dots, X(Y^n))$$

è una connessione lineare che viene detta *connessione euclidea*.

La definizione di connessione lineare si può estendere al caso più generale di un fibrato vettoriale  $E$  su  $M$ . Indichiamo con  $\Gamma(E)$  lo spazio delle sezioni del fibrato  $E$ . Una connessione lineare su  $E$  è un'applicazione

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), (X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma,$$

che soddisfa:

$$a) \quad \nabla_{X+Y} \sigma = \nabla_X \sigma + \nabla_Y \sigma, \quad \nabla_{fX} \sigma = f\nabla_X \sigma,$$

$$b) \quad \nabla_X (\sigma + \sigma') = \nabla_X \sigma + \nabla_X \sigma',$$

$$c) \quad \nabla_X (f\sigma) = f\nabla_X \sigma + X(f)\sigma,$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , per ogni  $\sigma, \sigma' \in \Gamma(E)$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ .

Se  $E$  è il fibrato tangente  $TM$ , ritroviamo la precedente definizione in quanto  $\Gamma(E) = \mathfrak{X}(M)$ .

Nel seguito  $M$  denoterà sempre una varietà differenziabile munita di una connessione lineare  $\nabla$ .

**Proposizione 6.2.** Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni aperto  $U$  di  $M$ ,  $(\nabla_X Y)|_U$  dipende solo da  $X|_U$  e  $Y|_U$ .

*Dimostrazione.* Proviamo che se  $X, Y, X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$  soddisfano  $X|_U = X'$  e  $Y|_U = Y'$ , allora  $(\nabla_{X'} Y')|_U = (\nabla_X Y)|_U$ . Siano  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Intanto, proviamo che se  $V = 0$  su  $U$  oppure  $W = 0$  su  $U$ , allora  $(\nabla_V W)|_U = 0$ . Supponiamo  $W = 0$  su  $U$  e proviamo che  $(\nabla_V W)_p = 0$  per ogni  $p \in U$ . Fissato  $p \in U$ , consideriamo  $f \in \mathcal{F}(M)$  tale che  $f(p) = 1$  e  $f|_{M \setminus U} = 0$ . Allora  $fW = 0$  su  $M$  e quindi, applicando la b) della Definizione 6.1,  $\nabla_V fW = 0$  su  $M$ . Applicando poi la c), si ha

$$0 = (\nabla_V fW)_p = \{V(f)W + f\nabla_V W\}_p = (\nabla_V W)_p.$$

In modo analogo si procede quando  $V = 0$  su  $U$ . Allora, considerando prima  $V = X - X'$ ,  $W = Y$  e poi  $V = X'$ ,  $W = Y - Y'$ , si ottiene  $(\nabla_{X'} Y')|_U = (\nabla_X Y)|_U$ .  $\square$

**Corollario 6.3.**  $\nabla$  induce una connessione lineare su ogni aperto  $A$  di  $M$ .

*Dimostrazione.* Siano  $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$  e sia  $p \in A$ . Applicando la Proposizione 1.28, esistono  $V, V'$  intorni aperti di  $p$  con  $\bar{V} \subset V' \subset A$  ed esiste  $f \in \mathcal{F}(M)$  tale che  $f|_V = 1$  e  $f|_{M \setminus V'} = 0$ . Allora,  $\tilde{X} = fX, \tilde{Y} = fY \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\tilde{X}|_V = X|_V$ ,  $\tilde{Y}|_V = Y|_V$ , e quindi basta definire  $(\nabla_X Y)_p := (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p$ . Tale definizione è ben posta per la Proposizione 6.2.  $\square$

Siano  $(x_1, \dots, x_n)$  coordinate locali definite in  $U$ . Poniamo  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Le  $n^3$  funzioni  $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{F}(U)$  definite da:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

sono dette *coefficienti di Christoffel* della connessione lineare  $\nabla$ . Si noti che nel caso della connessione euclidea  $\nabla^0$ , i coefficienti di Christoffel sono nulli. Usando le proprietà a), b), c) di  $\nabla$ , se  $X = \sum_i X^i \partial_i$  e  $Y = \sum_j Y^j \partial_j$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left( \sum_j Y^j \partial_j \right) = \sum_j \left( X(Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_X \partial_j \right) \\ &= \sum_j \left( X(Y^j) \partial_j \right) + \sum_{i,j} \left( X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \right), \quad \text{ossia} \\ \nabla_X Y &= \sum_k \left( X(Y^k) + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Quindi, i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  determinano univocamente  $\nabla$  sull'aperto coordinato  $U$ . Inoltre, per ogni fissato  $p \in M$ , assumendo  $U$  intorno coordinato di  $p$ , dall'equazione (6.1) segue che:

$$(\nabla_X Y)_p = \sum_k \left( X_p(Y^k) + \sum_{i,j} X^i(p) Y^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right) (\partial_k)_p. \quad (6.2)$$

Pertanto, si ottiene la seguente

**Proposizione 6.4.** Per ogni  $p \in M$  e per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $(\nabla_X Y)_p$  dipende solo da  $X_p$  e da  $Y$  in un intorno di  $p$ .

La Proposizione 6.4 giustifica la seguente definizione.

**Definizione 6.5.** Siano  $V \in T_p M$  e  $Y \in \mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $M$  contenente  $p$ . Allora,

$$\nabla_V Y := (\nabla_X Y)_p,$$

dove  $X \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $U \subset A$  intorno aperto di  $p$ , e soddisfa  $X(p) = V$ .

Di conseguenza, l'operatore

$$\nabla : T_p M \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow T_p M, (V, Y) \mapsto \nabla_V Y,$$

soddisfa le seguenti proprietà:

a)  $\nabla_{\lambda V + \mu W} Y = \lambda \nabla_V Y + \mu \nabla_W Y,$

b)  $\nabla_V (Y + Z) = \nabla_V Y + \nabla_V Z,$

c)  $\nabla_V (fY) = f(p) \nabla_V Y + V(f) Y_p,$

dove  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in \mathcal{F}(M)$ ,  $V, W \in T_p M$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

La seguente proposizione migliora la Proposizione 6.4.

**Proposizione 6.6.** *Se  $X_p \in T_p M$  e  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , allora  $\nabla_{X_p} Y$  dipende solo da  $X_p$  e da  $Y$  lungo una curva differenziabile  $\gamma(t)$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ . Posto  $Y(t) = Y(\gamma(t))$  e quindi  $Y^k(t) = Y^k(\gamma(t))$ , l'enunciato segue dalla formula (6.2) tenendo conto che  $X_p(Y^k) = \dot{\gamma}(0)(Y^k) = \frac{dY^k}{dt}(0)$ .  $\square$

**Osservazione 6.7.** Si noti che: ogni varietà differenziabile paracompatta  $M$  ammette una connessione lineare, in verità tale  $M$  ammette una metrica riemanniana e di conseguenza, come vedremo, ammette una connessione lineare.

**Esercizio 6.8.** Siano  $\Gamma_{ij}^k$  e  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  i coefficienti di una connessione lineare rispetto a due sistemi di coordinate locali  $(x_i)$  e  $(y_\alpha)$  definiti entrambi su un aperto  $U$ . Osservato che  $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} \right) \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$ , verificare la seguente formula:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{ijk} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k}.$$

**Esercizio 6.9.** Sia  $\bar{\nabla}$  una connessione lineare su  $M$ . Si verifichi che l'insieme di tutte le connessioni lineari su  $M$  è dato da  $\{\nabla = \bar{\nabla} + S \text{ con } S \in \mathfrak{X}^{1,2}(M)\}$ .

## 6.2 Il tensore di torsione e l'operatore hessiano

**Definizione 6.10.** Una connessione lineare  $\nabla$  si dice *simmetrica* se per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Se  $\nabla$  è simmetrica,  $\nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = [\partial_i, \partial_j] = 0$  implica che  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . D'altronde, siccome  $[X, Y] = \sum_k (X(Y^k) - Y(X^k)) \partial_k$ , dalla (6.1) segue

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] + \sum_{i,j,k} X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k.$$



Quindi, vale la seguente

**Proposizione 6.11.** *Una connessione lineare  $\nabla$  è simmetrica se, e solo se, per ogni sistema di coordinate locali:  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .*

**Definizione 6.12.** Il tensore di torsione associato a una connessione lineare  $\nabla$  è il tensore  $T$  di tipo  $(1, 2)$  definito da:

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

$T$  stima la non simmetria di  $\nabla$ .

**Esercizio 6.13.** Si verifichi che la connessione euclidea  $\nabla^0$  è simmetrica.

**Esercizio 6.14.** Si verifichi che se  $T$  è il tensore di torsione di una connessione lineare  $\nabla$ , allora  $\nabla^1 = \nabla - \frac{1}{2}T$  è una connessione lineare simmetrica.

L'operatore derivata covariante  $\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  si estende in modo naturale allo spazio delle 1-forme  $\Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ . Per ogni  $\omega \in \Lambda^1(M)$  e per ogni  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , si pone

$$(\nabla_X \omega)(Y) := \nabla_X \omega(Y) - \omega(\nabla_X Y).$$

Si verifica facilmente che l'operatore

$$\nabla_X : \Lambda^1(M) \rightarrow \Lambda^1(M), \omega \mapsto \nabla_X \omega,$$

soddisfa

$$\nabla_X(\omega_1 + \omega_2) = \nabla_X \omega_1 + \nabla_X \omega_2, \quad \nabla_X(f\omega) = X(f)\omega + f\nabla_X \omega$$

per ogni  $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1(M)$  e per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Si noti che per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ , la 1-forma  $df$  si indica anche con  $\nabla f$  e si pone

$$\nabla_X f := (\nabla f)(X) = X(f).$$

Possiamo quindi definire, per una funzione  $f \in \mathcal{F}(M)$  e rispetto alla fissata connessione lineare  $\nabla$ , la derivata seconda  $\nabla^2 f$ :

$$\nabla_{X,Y}^2 f := (\nabla_X \nabla f)Y,$$

detta anche *hessiano di  $f$* . L'operatore hessiano definisce quindi l'applicazione

$$\begin{aligned} \nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathcal{F}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_{X,Y}^2 f, \text{ dove} \\ \nabla_{X,Y}^2 f &= (\nabla_X \nabla f)Y = \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla f)(\nabla_X Y) \\ &= \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla_X Y)(f) = XY(f) - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned}$$

**Esercizio 6.15.** Si verifichi che l'operatore hessiano  $\nabla^2 f$  è un tensore (covariante di ordine 2).

Denotiamo con  $(H_{ij}f)$  la matrice associata, rispetto alla base coordinata  $(\partial_i)$ , al tensore hessiano  $\nabla^2 f$ , quindi

$$H_{ij}f = \nabla_{\partial_i, \partial_j}^2 f = \partial_i \partial_j f - (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f.$$

Per  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , la matrice hessiana  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ , che è una matrice simmetrica, è esattamente la matrice associata all'operatore  $D^2 f$  (hessiano di  $f$  rispetto alla connessione euclidea  $\nabla^0$ ) che in questo caso è chiaramente simmetrico. Nel caso di una varietà differenziabile  $M$  munita di una arbitraria connessione lineare  $\nabla$ , risulta

$$\begin{aligned}\nabla_{X,Y}^2 f - \nabla_{Y,X}^2 f &= \nabla_X \nabla_Y f - (\nabla_X Y)(f) - \nabla_Y \nabla_X f + (\nabla_Y X)(f) \\ &= [X, Y](f) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f) \\ &= -(T(X, Y))(f).\end{aligned}$$

Pertanto, si ottiene la seguente caratterizzazione

**Proposizione 6.16.** *Una connessione lineare  $\nabla$  è simmetrica se, e solo se, l'operatore hessiano  $\nabla^2 f$  è simmetrico per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ .*

### 6.3 Derivata covariante e parallelismo

La nozione di parallelismo, introdotta da Levi-Civita (1917), traduce in termini geometrici l'operazione di derivazione covariante. Consideriamo una curva differenziabile  $\gamma(t)$ ,  $t \in I$ ,  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ , di una varietà differenziabile  $M$ . Anche in questa sezione con  $\partial_i$  indicheremo i campi di vettori coordinati rispetto a un fissato sistema di coordinate locali.

**Definizione 6.17.** Un campo di vettori differenziabile lungo la curva  $\gamma(t)$  è un'applicazione differenziabile  $V : I \rightarrow TM$  tale che  $\pi \circ V = \gamma$ , cioè

$$\forall t \in I : V(t) \in T_{\gamma(t)}M.$$

Localmente:

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t) \partial_i(t),$$

dove  $V^i(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni differenziabili e  $\partial_i(t) = (\partial_i)(\gamma(t))$ . L'insieme di tutti i campi di vettori differenziabili lungo  $\gamma$ , che denotiamo con  $\mathfrak{X}(\gamma)$ , ha una struttura naturale di  $\mathcal{F}(I) = C^\infty(I)$ -modulo rispetto alle seguenti operazioni:

$$(V + W)(t) = V(t) + W(t), \quad (fV)(t) = f(t)V(t),$$

dove  $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$  e  $f \in \mathcal{F}(I)$ . Chiaramente il campo tangente  $\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Se  $X \in \mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $M$  contenente  $\gamma$ , allora  $X(t) = X(\gamma(t)) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Non vale il viceversa, nel senso che un campo di vettori  $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$  non può essere esteso, in generale, a un campo di vettori  $V \in \mathfrak{X}(A)$ . Ad esempio, un campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$ , con  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  e  $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$ , non si può estendere. Tuttavia, se  $\gamma(t)$  è una curva con  $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ , allora  $\gamma$  in un intorno di  $p_0 = \gamma(t_0)$  è una curva imbedded in  $M$ , e in questo caso un campo di vettori  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è la restrizione di un campo vettoriale definito in un intorno  $U$  di  $p_0$  in  $M$  (cfr. Osservazione 2.52).

**Teorema 6.18.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile munita di una connessione lineare  $\nabla$ . Allora esiste un unico endomorfismo (detto derivata covariante lungo curve)*

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$$

che soddisfa le ulteriori proprietà:

$$a) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt} \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}(I);$$

b) se  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è indotto da  $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(A)$ ,  $A$  aperto di  $M$  contenente  $\gamma$ , cioè  $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$ , allora

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\frac{D}{dt}$  un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\gamma)$  che verifica le proprietà a), b). Sia  $U$  un intorno coordinato con  $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$ . Consideriamo  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ,  $V(t) = \sum_j V^j(t) \partial_j(t)$ , allora

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{D}{dt} (V^j(t) \partial_j(t)) = \sum_j \left( \frac{dV^j}{dt} \partial_j(t) + V^j \frac{D \partial_j}{dt} \right).$$

Quindi,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \left( \frac{dV^j}{dt} \partial_j(t) + V^j(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_j \right) \quad (6.3)$$

oppure, equivalentemente,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} V^j \Gamma_{ij}^k \right) (t) \partial_k(t). \quad (6.4)$$

Se  $(y_\alpha)$  è un altro sistema di coordinate locali definito in  $U$ , posto  $V(t) = \sum_\alpha V^\alpha(t) \partial_\alpha(t)$ , siccome  $V^k(t) = \sum_\alpha V^\alpha(t) \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha}(t)$ , si ha

$$\frac{dV^k}{dt} = \sum_\alpha \frac{dV^\alpha}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha}(t) + \sum_{\alpha,\beta} V^\alpha(t) \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{dt}. \quad (6.5)$$

Inoltre, vale (cfr. Esercizio 6.8)

$$\sum_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x_k}{\partial y_\gamma} = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial y_\beta} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\alpha \partial y_\beta},$$

dove  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  sono i coefficienti di  $\nabla$  rispetto al nuovo sistema di coordinate locali  $(y_\alpha)$ . Usando questa formula e la (6.5), partendo dalla (6.4) si ottiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} V^j \right) (t) \partial_k(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,\gamma} \left( \frac{dV^\alpha}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} + \sum_{\alpha,\beta} V^\alpha \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{dt} \right) \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&\quad + \sum_{k,\gamma} \left( \sum_{i,j,\alpha} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} V^\alpha \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} \right) \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_{k,\gamma,\alpha} \frac{dV^\alpha}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,\alpha,\beta,\gamma} V^\alpha \left( \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} \frac{dy_\beta}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{dy_\beta}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} \right) \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\gamma \left( \frac{dV^\gamma}{dt} + \sum_{i,j,k,\alpha,\beta} V^\alpha \left( \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_\beta \partial y_\alpha} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \frac{\partial x_j}{\partial y_\alpha} \right) \frac{dy_\beta}{dt} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \right) \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\alpha \frac{dV^\alpha}{dt} \partial_\alpha(t) + \sum_{k,\alpha,\beta,\gamma,\theta} V^\alpha \Gamma_{\beta\alpha}^\theta \frac{\partial x_k}{\partial y_\theta} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_k} \frac{dy_\beta}{dt} \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\alpha \frac{dV^\alpha}{dt} \partial_\alpha(t) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \frac{dy_\beta}{dt} V^\alpha \partial_\gamma(t) \\
&= \sum_\gamma \left( \frac{dV^\gamma}{dt} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \frac{dy_\beta}{dt} V^\alpha \right) \partial_\gamma(t).
\end{aligned}$$

Pertanto, abbiamo

$$\left( \frac{DV}{dt} \right)_{(x_i)} = \left( \frac{DV}{dt} \right)_{(y_\alpha)}. \quad (6.6)$$

La (6.4) e la (6.6) ci dicono che l'operatore  $\frac{D}{dt}$  è univocamente determinato dai coefficienti della connessione lineare  $\nabla$ . Proviamo ora l'esistenza. Consideriamo prima il caso in cui  $\gamma$  ha sostegno  $\gamma(I) \subset U$ ,  $U$  intorno coordinato. Definiamo  $\frac{D}{dt} : V \mapsto \frac{DV}{dt}$  mediante la (6.4) (che non dipende dalle coordinate locali scelte).  $\frac{D}{dt}$  è chiaramente un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\gamma)$  che verifica la proprietà *a*). Verifichiamo ora la *b*) per  $V(t) = \tilde{V}(\gamma(t))$  con  $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(A)$ . Usando la (6.3), si ha

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left( \frac{d\tilde{V}^i}{dt} \partial_i(t) + \tilde{V}^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_i \right).$$

Siccome  $\tilde{V}^i(t) = \tilde{V}^i(\gamma(t))$  implica che  $\frac{d\tilde{V}^i}{dt} = \dot{\gamma}(t)(\tilde{V}^i)$ , si ottiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left( \dot{\gamma}(t)(\tilde{V}^i) \partial_i(t) + \tilde{V}^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_i \right) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{V}.$$

Supponiamo ora che  $\gamma$  abbia sostegno  $\gamma(I)$  non contenuto in un singolo intorno coordinato. Fissato  $t_0 \in I$ , per ogni  $t \in I$ ,  $t > t_0$ , possiamo ricoprire

$\gamma[t_0, t]$  con un numero finito di intornoi coordinati e definire  $\frac{DV}{dt}$  in ogni intorno coordinato. La (6.6) assicura che le varie determinazioni coincidono nei domini coordinati con intersezione non vuota. Analogamente per  $t < t_0$ . Quindi,  $\frac{DV}{dt}$  è definito per ogni  $t \in I$ .  $\square$

Si noti che l'operatore  $\frac{D}{dt}$ , per come definito, ha carattere locale.

**Definizione 6.19.** Un campo di vettori  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  si dice *parallelo* lungo  $\gamma$  se

$$\frac{DV}{dt} = 0 \quad \forall t \in I.$$

Poiché l'operatore  $\frac{D}{dt}$  ha carattere locale, anche la nozione di campo di vettori parallelo ha carattere locale.

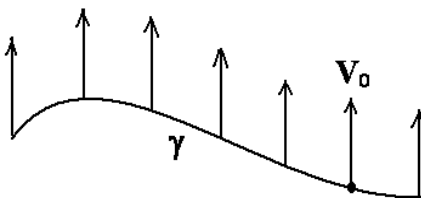


Figura 6.1: Trasporto parallelo del vettore  $V_0$  lungo  $\gamma$ .

Nel seguito,  $M$  denoterà sempre una varietà differenziabile munita di una connessione lineare  $\nabla$  con associato operatore  $\frac{D}{dt}$ , dove  $\gamma(t)$  (con  $t \in I$ ,  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ ) è una curva differenziabile di  $M$ .

**Osservazione 6.20.** Dato  $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , consideriamo un cambiamento regolare di parametro:  $t = t(s)$ ,  $\frac{dt}{ds} \neq 0$ . Posto  $V(s) = V(t(s))$ , dalla definizione di  $\frac{DV}{dt}$  segue che

$$\frac{DV}{ds} = \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} \frac{dt}{ds} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{ds} V^j \right) (\partial_k)_{\gamma(t)} = \frac{dt}{ds} \frac{DV}{dt}.$$

Dunque, il parallelismo è invariante per cambiamenti regolari di parametro.

**Esempio 6.21.** L'operatore  $\frac{D}{dt}$  associato alla connessione euclidea  $\nabla^0$  di  $\mathbb{R}^n$  è l'usuale operatore di derivazione  $\frac{d}{dt}$ . Infatti, siccome  $\nabla^0$  ha coefficienti di Christoffel nulli, dalla (6.4) si ha:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \frac{dV^k}{dt} (\partial_k)_{\gamma(t)},$$

equivalentemente si usa scrivere

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt} = \left( \frac{dV^1}{dt}, \dots, \frac{dV^n}{dt} \right).$$

Quindi, in  $\mathbb{R}^n$ , un campo di vettori  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è parallelo (rispetto a  $\nabla^0$ ), cioè  $(dV/dt) = 0$ , se e solo se  $V(t) = \text{cost.}$ , ossia  $V(t) = \sum_i V^i(t) (\partial_i)_{\gamma(t)}$  con  $V^i(t) = a^i$  funzioni costanti. Dato  $V_0 = \sum_i a^i (\partial_i)_{\gamma(t_0)}$ , il campo di vettori  $V(t) = \sum_i a^i (\partial_i)_{\gamma(t)}$  è l'unico campo vettoriale parallelo che soddisfa  $V(t_0) = V_0$  per ogni curva  $\gamma$ .

Il seguente lemma, che è un teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali ordinarie, è utile per l'esistenza di campi paralleli su una varietà differenziabile munita di un'arbitraria connessione lineare.

**Lemma 6.22.** *Siano  $A_j^k : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni differenziabili,  $k, j = 1, \dots, n$ ,  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$ . Allora, per ogni fissato  $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ , il sistema lineare di equazioni differenziali*

$$\frac{dV^k}{dt} = \sum_j A_j^k(t) V^j \quad k = 1, \dots, n,$$

*ammette un'unica soluzione  $(V^1(t), \dots, V^n(t))$ , definita per ogni  $t \in I$ , tale che  $V^i(t_0) = v^i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ .*

**Teorema 6.23.** (di esistenza e unicità di campi paralleli) *Per ogni fissato  $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ , esiste un unico campo di vettori  $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$  parallelo lungo  $\gamma$  tale che  $V(t_0) = V_0$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo prima il caso in cui la curva ha sostegno  $\gamma(I) \subset U$  (intorno coordinato). Poniamo  $V_0 = \sum_i V_0^i \partial_i(t_0)$  e  $V(t) = \sum_i V^i(t) \partial_i(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Allora, applicando la (6.4), il campo di vettori  $V(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$  se, e solo se,

$$\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} V^j = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (6.7)$$

Tale sistema si può scrivere nella forma

$$dV^k/dt = \sum_j A_j^k(t) V^j, \text{ dove } A_j^k(t) = - \sum_i \Gamma_{ij}^k (dx_i/dt), \quad k = 1, \dots, n.$$

Il Lemma 6.22 ci dice che esiste un'unica soluzione  $(V^1(t), \dots, V^n(t))$ , definita per ogni  $t \in I$ , soddisfacente le condizioni iniziali  $V^i(t_0) = V_0^i$ . Tale soluzione definisce il campo parallelo  $V(t)$  con  $V(t_0) = V_0$ . Supponiamo ora che  $\gamma$  abbia sostegno  $\gamma(I)$  non contenuto in un singolo intorno coordinato. Fissato  $t_0 \in I$ , per ogni  $t \in I$ ,  $t > t_0$ , possiamo ricoprire  $\gamma[t_0, t]$  con un numero finito di interni coordinati e determinare  $V(t)$  lungo i tratti di curva contenuti in ognuno di questi interni coordinati. L'unicità di  $V(t)$  assicura che le varie determinazioni di  $V(t)$  coincidono nei domini coordinati con intersezione non vuota. Analogamente per  $t < t_0$ . Quindi  $V(t)$  è determinato per ogni  $t \in I$ .  $\square$

**Lo Spostamento parallelo.**

Consideriamo l'applicazione

$$\tau_{t_0}^{t_1}(\gamma) : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M, \quad V_0 \mapsto V(t_1),$$

dove  $V(t_1)$  è ottenuto, per  $t = t_1$ , dal campo  $V(t)$  parallelo lungo  $\gamma$  con  $V(t_0) = V_0$ . Tale applicazione è detta *spostamento parallelo lungo  $\gamma$* . Dalla linearità del sistema (6.7) segue che  $\tau_{t_0}^{t_1}(\gamma)$  è un'applicazione lineare. Inoltre, è un isomorfismo con isomorfismo inverso dato da  $\tau_{t_0}^{t_1}(\gamma^{-1})$ , cioè dallo spostamento parallelo lungo la curva  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(t_0 + t_1 - t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ ; in tal caso il campo  $W$  parallelo lungo  $\gamma^{-1}(t)$ , con  $W(t_0) = V(t_1)$ , è  $W(t) = V(t_0 + t_1 - t)$ . Nel seguito con  $\tau_t(\gamma)$  denoteremo lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$  a partire da un fissato punto  $\gamma(t_0)$ . Se  $\gamma$  è una curva differenziabile a tratti, lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$  si può definire come composizione degli spostamenti paralleli lungo i tratti differenziabili assumendo come vettore iniziale di un tratto il vettore finale del tratto precedente. Il campo di vettori lungo  $\gamma$  così ottenuto è differenziabile a tratti.

**Esempio 6.24.** Nel caso di  $(\mathbb{R}^n, \nabla^0)$ , un campo di vettori è parallelo se, e solo se, è costante. Quindi, lo spostamento parallelo è l'usuale traslazione (che non dipende dalla curva). Inoltre, considerata una curva differenziabile

$\gamma(t)$  di  $\mathbb{R}^n$  e un campo  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , abbiamo  $\left(\frac{DV}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{t_0}$ . Più precisamente, abbiamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{DV}{dt}\right)_{t_0} &= \sum_k \left(\frac{dV^k}{dt}\right)_{t_0} (\partial_k)_{\gamma(t_0)} = \sum_k \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V^k(t) - V^k(t_0)}{t - t_0} (\partial_k)_{\gamma(t_0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_t^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

Vogliamo ora trovare una formula per  $(M, \nabla)$  analoga a quella trovata nell'Esempio 6.24. Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile e sia  $\tau_t(\gamma)$  lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$  da  $\gamma(t_0)$  a  $\gamma(t)$ . Sia  $\{e_i\}$  una base di  $T_{\gamma(t_0)}M$ . Poiché  $\tau_t(\gamma)$  è un isomorfismo,  $\{e_i(t) = \tau_t(\gamma)(e_i)\}$  è una base di  $T_{\gamma(t)}M$ .  $\{e_i(t)\}$  è detto *riferimento mobile* lungo  $\gamma(t)$ . Sia  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , allora  $V(t) = \sum_i V^i(t)e_i(t)$  e, siccome  $\frac{De_i}{dt}(t) = 0$ , si ha

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left( \frac{dV^i}{dt} e_i(t) + V^i \frac{De_i}{dt}(t) \right) = \sum_i \frac{dV^i}{dt} e_i(t).$$

Quindi, per tale  $V(t)$ , vale la seguente proprietà:

$$V \text{ è parallelo lungo } \gamma \Leftrightarrow V^i(t) = \text{cost.} \quad \forall i.$$

**Proposizione 6.25.** Per ogni  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ :

$$\left(\frac{DV}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_t^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ,  $V(t) = \sum_i V^i(t)e_i(t)$ . Allora,

$$\tau_t \left( \sum_i V^i(t)e_i(t_0) \right) = \sum_i V^i(t)\tau_t(e_i(t_0)) = \sum_i V^i(t)e_i(t) = V(t),$$

cioè

$$\tau_t^{-1}(V(t)) = \sum_i V^i(t)e_i(t_0).$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \left( \frac{DV}{dt} \right)_{t_0} &= \left( \sum_i \frac{dV^i}{dt} e_i(t) \right)_{t_0} = \sum_i \left( \frac{dV^i}{dt} \right)_{t_0} e_i(t_0) \\ &= \sum_i \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{V^i(t) - V^i(t_0)}{t - t_0} e_i(t_0) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sum_i V^i(t)e_i(t_0) - \sum_i V^i(t_0)e_i(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\tau_t^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0}. \end{aligned}$$

□

**Corollario 6.26.** *Una connessione lineare è completamente determinata dal suo spostamento parallelo.*

*Dimostrazione.* Verifichiamo che per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ , il vettore  $(\nabla_X Y)_p$  è completamente determinato dallo spostamento parallelo. Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ , allora

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} Y = \left( \frac{DY}{dt} \right)_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau_t^{-1}(Y(t)) - Y(0)}{t}.$$

□

Quindi, le nozioni di parallelismo e di derivata covariante sono equivalenti. Attualmente, per ragioni pratiche, si introduce prima la derivata covariante e poi lo spostamento parallelo, storicamente il parallelismo è stato introdotto prima della derivata covariante.

**Definizione 6.27.** Un campo di vettori  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  è detto *parallelo*, o *invariante per parallelismo*, se  $Y(t) = Y(\gamma(t))$  è trasportato per parallelismo, cioè  $\frac{DY}{dt} = 0$ , per ogni curva differenziabile  $\gamma(t)$ .

**Proposizione 6.28.** *Un campo di vettori  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  è parallelo se e solo se il tensore, di tipo  $(1, 1)$ ,  $\nabla Y : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ,  $X \mapsto \nabla_X Y$ , è nullo.*

*Dimostrazione.* Sia  $Y$  invariante per parallelismo. Allora, per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ , si ha

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{X_p} Y = \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} Y = \left( \frac{DY}{dt} \right)_{t_0} = 0.$$



Quindi,  $\nabla Y = 0$ . Viceversa, sia  $\nabla Y = 0$ . Allora, per ogni curva differenziabile  $\gamma(t)$  e per ogni fissato  $t_0$ , detto  $X$  un campo di vettori con  $X_p = \dot{\gamma}(t_0)$ , si ha

$$\left(\frac{DY}{dt}\right)_{t_0} = \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} Y = \nabla_{X_p} Y = (\nabla_X Y)_p = 0.$$

□

## 6.4 Curve geodetiche

Le geodetiche rivestono un'importanza fondamentale in relatività generale. Una delle intuizioni di Einstein è che lo spazio si incurvi nelle vicinanze dei corpi celesti. Di conseguenza, un raggio di luce che passi vicino al sole, si muoverà lungo una curva geodetica sensibilmente diversa da una retta. La deviazione dei raggi luminosi osservata durante le eclissi di sole, è una delle conferme sperimentali della relatività generale.

**Definizione 6.29.** Una curva differenziabile  $\gamma : I \rightarrow M$  è detta curva *geodetica* se il suo campo tangente  $V = \dot{\gamma}(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ , cioè se per ogni  $t \in I$ :

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt}(t) = 0.$$

**Teorema 6.30** (di esistenza e unicità delle geodetiche). *Per ogni  $p \in M$  e per ogni  $V_0 \in T_p M$ , esiste un  $\epsilon > 0$  ed esiste un'unica geodetica  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_0$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $(x_i)$  coordinate locali definite in un intorno  $U$  di  $p$ . Sia  $\gamma(t)$  un curva con sostegno in  $U$ ,  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Dalla 6.4 segue che:  $\gamma(t)$  è una geodetica, cioè  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ , se e solo se

$$\sum_k \left( \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \partial_k(t) = 0.$$

Quindi,  $\gamma(t)$  è una geodetica con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_0$  se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$d^2 x_k / dt^2 + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k (dx_i / dt)(dx_j / dt) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

con le  $2n$  condizioni iniziali  $x_i(0) = x_i(p)$ ,  $\dot{x}_i(0) = V_0^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dalla teoria delle equazioni differenziali, segue che esiste un  $\epsilon > 0$  ed un'unica  $n$ -pla  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $-\epsilon < t < \epsilon$ , soluzione del precedente sistema e soddisfacente le  $2n$ -condizioni iniziali. Tale soluzione definisce la curva geodetica cercata. □

Se  $\gamma$  e  $\sigma$  sono due curve geodetiche definite in un intervallo aperto  $I$ ,  $0 \in I$ , con  $\gamma(0) = \sigma(0)$  e  $\dot{\gamma}(0) = \dot{\sigma}(0)$ , per il Teorema 6.30, tali curve coincidono

in un intorno di 0. Sia  $] - a, a[ \subset I$  tale che  $\gamma(t) = \sigma(t)$  per ogni  $t \in ] - a, a[$ . Per continuità si ha  $\gamma(a) = \sigma(a)$  e  $\dot{\gamma}(a) = \dot{\sigma}(a)$ . Quindi, applicando il Teorema 6.30, si ha che  $\gamma$  e  $\sigma$  coincidono anche su un intorno destro di  $a$ . Analogamente su un intorno sinistro di  $-a$ . Così procedendo si ha che  $\gamma(t) = \sigma(t)$  per ogni  $t \in I$ . Di conseguenza, si ha l'unicità anche della geodetica massimale  $\gamma : I \rightarrow M$ .

**Esempio 6.31.** Abbiamo visto che l'operatore  $\frac{D}{dt}$  associato alla connessione euclidea  $\nabla^0$  di  $\mathbb{R}^n$  è l'usuale operatore di derivazione  $\frac{dV}{dt}$ , quindi un campo  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$  è parallelo (rispetto a  $\nabla^0$ ) se, e solo se,  $V(t) = \text{cost.}$  Di conseguenza, la curva  $\gamma(t)$  è una curva geodetica se, e solo se,  $\gamma$  è una retta parametrizzata da  $\gamma(t) = tv + p$ .

**Esercizio 6.32.** La nozione di curva geodetica dipende oltre che dalla sua "forma" anche dalla sua parametrizzazione. Se  $\gamma$  è una geodetica (come insieme di punti), un parametro  $t$  per cui  $\gamma(t)$  risulti geodetica si dice *parametro ammissibile*. Assumiamo  $t$  parametro ammissibile e sia  $t = t(s)$ ,  $dt/ds \neq 0$ , un cambiamento di parametro. Posto  $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ , si verifichi che

$$\gamma(s) \text{ è geodetica se, e solo se, } t = as + b, a \neq 0.$$

## 6.5 La connessione di Levi-Civita

Abbiamo già osservato che la connessione euclidea  $\nabla^0$  di  $\mathbb{R}^n$  è simmetrica, ora notiamo che, come si può verificare facilmente, è compatibile con la metrica euclidea  $g_0$ , ossia:

$$\nabla_Z^0 g_0(X, Y) := Z(g_0(X, Y)) = g_0(\nabla_Z^0 X, Y) + g_0(X, \nabla_Z^0 Y).$$

Inoltre, notiamo che la traslazione, che è lo spostamento parallelo definito da  $\nabla^0$ , è un'isometria dello spazio euclideo. Scopo di questa sezione è vedere che anche per un'arbitraria varietà riemanniana esiste una particolare connessione lineare con queste stesse proprietà di  $\nabla^0$ .

**Definizione 6.33.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Una connessione lineare  $\nabla$  su  $M$  si dice *compatibile* con la metrica  $g$  se soddisfa la seguente proprietà:  $(\nabla_Z g)(X, Y) = 0$ , ossia

$$\nabla_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

dove  $\nabla_Z g(X, Y) := Z(g(X, Y))$ .

Si noti che la precedente proprietà è equivalente alla seguente:

$$Z_p g(X, Y) = g_p(\nabla_{Z_p} X, Y_p) + g_p(X_p, \nabla_{Z_p} Y) \quad \forall p \in M \text{ e } \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Il seguente teorema interpreta geometricamente la precedente definizione.

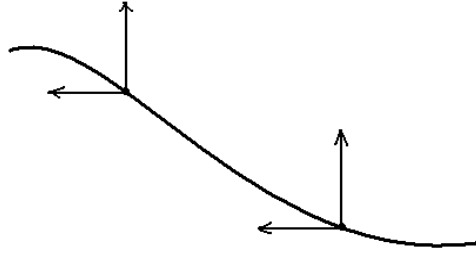


Figura 6.2: Il trasporto parallelo è un'isometria.

**Teorema 6.34.** Siano  $(M, g)$  una varietà riemanniana,  $\nabla$  una connessione lineare su  $M$  e  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$ . Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.

(a) Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , campi vettoriali paralleli lungo  $\gamma(t)$ , il prodotto scalare  $g(X(t), Y(t)) = \text{cost.}$ , ossia  $\tau_t$  (lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$ ) è un'isometria:

$$g_{\gamma(t)}(\tau_t X(t_0), \tau_t Y(t_0)) = g_{\gamma(t_0)}(X(t_0), Y(t_0)).$$

(b) Per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{DV}{dt}, W(t)\right) + g_{\gamma(t)}\left(V(t), \frac{DW}{dt}\right).$$

(c)  $\nabla$  è compatibile con  $g$ .

*Dimostrazione.* “(a)  $\Rightarrow$  (b)”

Siano  $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$  e  $\{e_i\}$  una base ortonormale di  $T_{\gamma(t_0)}M$ . Poiché  $\tau_t$  è un'isometria,  $\{e_i(t) = \tau_t(e_i)\}$  è una base ortonormale di  $T_{\gamma(t)}M$ . Allora, posto  $V(t) = \sum_i V^i(t)e_i(t)$  e  $W(t) = \sum_i W^i(t)e_i(t)$ , si ha  $g(V(t), W(t)) = \sum_i V^i(t)W^i(t)$  e quindi

$$\frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) = \sum_i \left( \frac{dV^i}{dt} W^i(t) + V^i(t) \frac{dW^i}{dt} \right).$$

D'altronde  $\frac{DV}{dt} = \sum_i \left( \frac{dV^i}{dt} e_i(t) + V^i(t) \frac{De_i(t)}{dt} \right) = \sum_i \frac{dV^i}{dt} e_i(t)$ , e quindi

$$\frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) = g\left(\frac{DV}{dt}, W(t)\right) + g\left(V(t), \frac{DW}{dt}\right).$$

“(b)  $\Rightarrow$  (a)”

Siano  $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$  e paralleli lungo  $\gamma$ . Dalla (b), essendo  $X, Y$  paralleli,

segue:

$$\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g\left(\frac{DX}{dt}, Y(t)\right) + g\left(X(t), \frac{DY}{dt}\right) = 0 \quad \forall t,$$

pertanto  $g(X(t), Y(t)) = \text{cost.}$

“(b)  $\Rightarrow$  (c)”

Proviamo che per ogni  $p \in M$  e per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  :

$$Z_p g(X, Y) = g_p(\nabla_{Z_p} X, Y_p) + g_p(X_p, \nabla_{Z_p} Y).$$

Fissato  $p \in M$ , sia  $\sigma$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\sigma(0) = p$  e  $\dot{\sigma}(0) = Z_p$ . Allora, applicando la (b), si ha

$$\begin{aligned} Z_p g(X, Y) &= \dot{\sigma}(0)g(X, Y) = \left\{ \frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) \right\}_{t=0} \\ &= g_p\left(\frac{DX}{dt}(0), Y(0)\right) + g_p\left(X(0), \frac{DY}{dt}(0)\right) \\ &= g_p(\nabla_{\dot{\sigma}(0)} X, Y(0)) + g_p(X(0), \nabla_{\dot{\sigma}(0)} Y) \\ &= g_p(\nabla_{Z_p} X, Y_p) + g_p(X_p, \nabla_{Z_p} Y). \end{aligned}$$

“(c)  $\Rightarrow$  (b)”

La (b) esprime l'uguaglianza tra due funzioni definite nel dominio di  $\gamma$ , quindi basta provare che esse coincidono su un intorno di un fissato  $t_0$ . Sia  $U$  un intorno coordinato del punto  $\gamma(t_0)$ . Consideriamo una base ortonormale locale  $\{u_i\}$  di campi vettoriali con  $u_i \in \mathfrak{X}(U)$ . Per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , posto  $V(t) = \sum_i V^i(t)u_i(t)$  e  $W(t) = \sum_j W^j(t)u_j(t)$ , si ha

$$g(V(t), W(t)) = \sum_i V^i(t)W^i(t),$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}g(V(t), W(t)) = \sum_i \left( \frac{dV^i}{dt}W^i(t) + V^i(t)\frac{dW^i}{dt} \right).$$

Poiché gli  $u_i(t)$  sono indotti dai campi di vettori definiti su  $U$ , si ha:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \left( \frac{dV^i}{dt}u_i(t) + V^i(t)\frac{Du_i}{dt} \right) = \sum_i \left( \frac{dV^i}{dt}u_i(t) + V^i(t)\nabla_{\dot{\gamma}(t)}u_i \right)$$

e

$$\frac{DW}{dt} = \sum_i \left( \frac{dW^i}{dt}u_i(t) + W^i(t)\nabla_{\dot{\gamma}(t)}u_i \right).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}
& g\left(\frac{DV}{dt}, W(t)\right) + g\left(V(t), \frac{DW}{dt}\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{dV^i}{dt} W^i(t) + V^i(t) \frac{dW^i}{dt}\right) \\
&\quad + \sum_{ij} V^i(t) W^j(t) \left(g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} u_i, u_j) + g(u_i, \nabla_{\dot{\gamma}(t)} u_j)\right) \\
&= \frac{d}{dt} g(V(t), W(t)) + \sum_{ij} V^i(t) W^j(t) \dot{\gamma}(t) (g(u_i, u_j)) \\
&= \frac{d}{dt} g(V(t), W(t)).
\end{aligned}$$

□

**Definizione 6.35.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Una connessione lineare  $\nabla$  su  $M$  si dice *riemanniana* o *di Levi-Civita* se soddisfa le seguenti proprietà:

- 1)  $\nabla$  è simmetrica, cioè  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ,
- 2)  $\nabla$  è compatibile con la metrica  $g$ .

**Teorema 6.36.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  ammette un'unica connessione di Levi-Civita. Inoltre, tale connessione è determinata dalla (6.8).

*Dimostrazione. Unicità.* Sia  $\nabla$  una connessione di Levi-Civita. Usando la simmetria e la compatibilità con  $g$ , si ha:

$$\begin{aligned}
Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
&= g([X, Y] + \nabla_Y X, Z) + g(Y, [X, Z] + \nabla_Z X), \\
Yg(X, Z) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) \\
&= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, [Y, Z] + \nabla_Z Y), \\
-Zg(X, Y) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y),
\end{aligned}$$

e quindi sommando:

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2} \left( Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \right. \\
&\quad \left. - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [X, Y]) \right).
\end{aligned} \tag{6.8}$$

La (6.8), nota in letteratura anche con il nome di *formula di Koszul*, mostra che  $\nabla$  è univocamente determinata da  $g$  tenendo conto che la stessa metrica  $g$  è definita positiva e quindi non degenera.

*Esistenza.* Basta definire  $\nabla$  con la formula di Koszul e verificare che è una connessione lineare, simmetrica e compatibile con  $g$ . □

Poiché ogni varietà differenziabile paracompatta ammette una metrica riemanniana, dal teorema precedente segue il seguente corollario.

**Corollario 6.37.** *Ogni varietà differenziabile paracompatta ammette una connessione lineare.*

**Osservazione 6.38.** Esaminando la dimostrazione del Teorema 6.34 e quella del Teorema 6.36 di esistenza e unicità della connessione di Levi-Civita, si può vedere che tali teoremi valgono più in generale per una varietà semi-riemanniana (cfr. anche [79], p.61, 65-67).

**Esempio 6.39.** Abbiamo già osservato che la connessione euclidea  $\nabla^0$  è una connessione lineare, simmetrica e compatibile con la metrica euclidea. Quindi  $\nabla^0$  è la connessione di Levi-Civita dello spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ . Se consideriamo lo spazio di Minkowski  $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$ , la connessione  $\nabla^0$  è compatibile anche con  $q$ :

$$\begin{aligned} Zq(X, Y) &= \sum_{i=1}^n (Z(X^i)Y^i + X^i Z(Y^i)) - Z(X^{n+1})Y^{n+1} - X^{n+1}Z(Y^{n+1}) \\ &= q(\nabla_Z^0 X, Y) + q(X, \nabla_Z^0 Y). \end{aligned}$$

Quindi  $\nabla^0$  è anche la *connessione di Levi-Civita dello spazio di Minkowski*  $(\mathbb{R}^{n+1}, q)$ .

**Esempio 6.40. La connessione di Levi-Civita di un gruppo di Lie riemanniano.**

Sia  $G$  un gruppo di Lie dotato di una metrica  $g$  invariante a sinistra. Essendo la metrica  $g$  invariante a sinistra,  $g(X, Y)$  è una funzione costante per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$  (cfr. Proposizione 5.16) dove  $\mathfrak{g}$  è l'algebra di Lie di  $G$ , e quindi

$$Xg(Y, Z) = Yg(Z, X) = Zg(X, Y) = 0.$$

Pertanto, applicando la (6.8), la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  di  $(G, g)$  è univocamente determinata dall'equazione

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y), \quad (6.9)$$

per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ . In particolare se la metrica  $g$  è bi-invariante, allora (cfr. (5.3))

$$g([Y, Z], X) = g([Z, X], Y)$$

e la (6.9) diventa

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (6.10)$$

Dalla (6.10) segue che, per una metrica bi-invariante, i campi di vettori invarianti a sinistra sono geodetici, cioè  $\nabla_X X = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{g}$ , equivalentemente: *le curve integrali  $\gamma_X$  di campi di vettori invarianti a sinistra sono curve geodetiche.*

**Esempio 6.41. La connessione di Levi-Civita di  $\mathbb{R}_+^n$ .**

Ricordiamo che la metrica iperbolica del semispazio di Poincaré  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$  è invariante a sinistra rispetto alla struttura di gruppo di Lie, e i campi vettoriali  $V_i = x_n \partial_i$ , dove  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , costituiscono una base ortonormale di campi di vettori invarianti a sinistra (cfr. Sezione 5.3). Inoltre, per  $i, j = 1, \dots, n-1$ , risulta

$$[V_n, V_j] = [x_n \partial_n, x_n \partial_j] = V_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = [x_n \partial_i, x_n \partial_j] = 0.$$

Di conseguenza, la connessione di Levi-Civita associata a questa metrica è determinata, applicando la (6.9), da

$$\nabla_{V_i} V_i = V_n, \quad \nabla_{V_i} V_n = -V_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \nabla_{V_i} V_j = 0 \quad (\text{negli altri casi}).$$

In particolare  $V_n$  è un campo geodetico. Se consideriamo la presentazione dello spazio iperbolico come sottogruppo di Lie  $G$  di  $GL(n, \mathbb{R})$  (cfr. Esempio 5.20), allora una base di campi vettoriali invarianti a sinistra è data da

$$E_n = c \partial_n, \quad E_i = c e^{x_n} \partial_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

e la parentesi di Lie soddisfa:  $[E_n, E_i] = c E_i$ ,  $[E_i, E_j] = 0$  (negli altri casi). La metrica riemanniana  $\tilde{g}$  su  $G$  definita da:  $\tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij}$  è invariante a sinistra ed è isometrica alla metrica iperbolica  $g = \frac{1}{(cy_n)^2} \sum_i dy_i \otimes dy_i$ . Anche in questo caso, applicando la (6.9), si trova che la connessione di Levi-Civita è data da

$$\begin{aligned} \nabla_{E_i} E_i &= c E_n, & \nabla_{E_i} E_n &= -c E_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ \nabla_{E_i} E_j &= 0 \quad (\text{negli altri casi}). \end{aligned}$$

**Teorema 6.42.** *La connessione di Levi-Civita è invariante per isometrie.*

*Dimostrazione.* Siano  $(M, g)$  e  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  due varietà riemanniane,  $\nabla$  e  $\tilde{\nabla}$  le corrispondenti connessioni di Levi-Civita, ed  $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  un'isometria, ossia  $\tilde{g}(F_*X, F_*Y) \circ F = g(X, Y)$ . Proviamo che per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$F_* \nabla_X Y = \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y.$$

Ricordiamo che il differenziale  $F_*$  indotto dal diffeomorfismo  $F$ , definito da  $(F_*X)_q = F_{*p}(X_p)$ ,  $p = F^{-1}(q)$ , è  $\mathbb{R}$ -lineare e inoltre verifica le seguenti proprietà:

$(F_*X)(h) = X(h \circ F) \circ F^{-1}$ ,  $F_*(fX) = (F_*f)F_*X$ ,  $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$ , dove  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in \mathcal{F}(M)$ ,  $h \in \mathcal{F}(\tilde{M})$  e  $F_*f := f \circ F^{-1}$ . Analoghe proprietà valgono per l'inverso  $F_*^{-1}$ . Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , poniamo:

$$\nabla'_X Y := F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y$$

e verifichiamo che  $\nabla' = \nabla$ . Intanto  $\nabla'$  è  $\mathbb{R}$ -lineare in quanto lo sono  $\tilde{\nabla}$  e  $F_*$ . Inoltre:

$$\begin{aligned} \nabla'_{fX} Y &= F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*(fX)} F_* Y = F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{(F_*f)F_*X} F_* Y \\ &= F_*^{-1} \left( (F_*f) \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y \right) \\ &= F_*^{-1} (F_*f) F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_* Y = f \nabla'_X Y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla'_X fY &= F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*(X)} F_*(fY) = F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} (F_*f) F_*Y \\
&= F_*^{-1} \left( (F_*X)(F_*f) F_*Y + (F_*f) \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y \right) \\
&= F_*^{-1} \left( (X(F_*f \circ F) \circ F^{-1}) F_*Y \right) \\
&\quad + (F_*^{-1} F_*f) F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y \\
&= F_*^{-1} \left( (X(f) \circ F^{-1}) F_*Y \right) + f \nabla'_X Y \\
&= F_*^{-1} \left( X(f) \circ F^{-1} \right) F_*^{-1} F_*Y + f \nabla'_X Y \\
&= X(f)Y + f \nabla'_X Y; \\
\nabla'_X Y - \nabla'_Y X &= F_*^{-1} \left( \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y - \tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X \right) \\
&= F_*^{-1} [F_*X, F_*Y] = F_*^{-1} F_* [X, Y] \\
&= [X, Y].
\end{aligned}$$

Dunque,  $\nabla'$  è una connessione lineare simmetrica. Infine, proviamo la compatibilità di  $\nabla'$  con la metrica  $g$ . Poiché  $F$  è un'isometria, si ha:

$$\begin{aligned}
g(\nabla'_X Y, Z) + g(Y, \nabla'_X Z) &= g(F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y, Z) + g(Y, F_*^{-1} \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Z) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y, F_*Z) \circ F \\
&\quad + \tilde{g}(F_*Y, \tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Z) \circ F \\
&= \left( (F_*X) \tilde{g}(F_*Y, F_*Z) \right) \circ F \\
&= \left( X(\tilde{g}(F_*Y, F_*Z) \circ F) \circ F^{-1} \right) \circ F \\
&= Xg(Y, Z).
\end{aligned}$$

Per l'unicità della connessione di Levi-Civita, si ha  $\nabla' = \nabla$ .  $\square$

**Teorema 6.43.** *Siano  $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  un'isometria e  $\sigma(t)$  una curva differenziabile di  $M$ . Posto  $\tilde{\sigma}(t) = F \circ \sigma(t)$ , per ogni  $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$  si ha:*

$$(F_*)_{\sigma(t)} \frac{DV}{dt} = \frac{D\tilde{V}}{dt} (F_*)_{\sigma(t)} V.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\{(U_i, \phi_i)\}_i$  un atlante differenziabile di  $M$ . Poiché  $F$  è un diffeomorfismo,  $\{(\tilde{U}_i = F(U_i), \tilde{\phi}_i = \phi_i \circ F^{-1}|_{\tilde{U}_i})\}_i$  è un atlante differenziabile di  $\tilde{M}$ . Se  $(x_k)$  sono coordinate su  $U$  e  $(y_k)$  le corrispondenti coordinate su  $\tilde{U}$ , allora

$$(y_k)(F(p)) = \tilde{\phi}(F(p)) = \phi(p) = (x_k)(p).$$

Di conseguenza, la  $F$  rispetto a queste coordinate locali è l'identità e

$$F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p = \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{F(p)}.$$



Sia  $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$ ,  $V(t) = \sum_k V^k(t) \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\sigma(t)}$ , allora

$$(F_*)_{\sigma(t)} V = \sum_k V^k(t) (F_*)_{\sigma(t)} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\sigma(t)} = \sum_k V^k(t) \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)}$$

e quindi

$$\frac{\tilde{D}}{dt} (F_*)_{\sigma(t)} V = \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) \tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\sigma}}(t)} \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Applicando il Teorema 6.42, si ha:

$$\begin{aligned} (F_*)_{\sigma(t)} \frac{DV}{dt} &= (F_*)_{\sigma(t)} \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\sigma(t)} + V^k(t) \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) (F_*)_{\sigma(t)} \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) \tilde{\nabla}_{(F_*)_{\sigma(t)} \dot{\sigma}(t)} F_* \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{dV^k}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial y_k} \right)_{\tilde{\sigma}(t)} + V^k(t) \tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\sigma}}(t)} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) = \frac{\tilde{D}}{dt} (F_*)_{\sigma(t)} V. \end{aligned}$$

□

**Corollario 6.44.** *Siano  $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  un'isometria,  $\sigma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  e  $V \in \mathfrak{X}(\sigma)$ . Posto  $\tilde{\sigma} = F \circ \sigma$ , si hanno le seguenti proprietà.*

- (a)  $V$  è parallelo lungo  $\sigma \Leftrightarrow (F_*)_{\sigma(t)} V$  è parallelo lungo  $\tilde{\sigma}$ .  
 (b) Il differenziale di  $F$  commuta con lo spostamento parallelo:

$$\tilde{\tau}_t \circ (F_*)_{\sigma(t_0)} = (F_*)_{\sigma(t)} \circ \tau_t,$$

dove  $\tau_t$  è lo spostamento parallelo lungo  $\sigma$  da  $\sigma(t_0)$  a  $\sigma(t)$  e  $\tilde{\tau}_t$  è lo spostamento parallelo lungo  $\tilde{\sigma}$  da  $\tilde{\sigma}(t_0)$  a  $\tilde{\sigma}(t)$ .

- (c)  $\sigma(t)$  è una geodetica di  $M \Leftrightarrow \tilde{\sigma}(t)$  è una geodetica di  $\tilde{M}$ .

*Dimostrazione.* (a) Segue in modo immediato dal Teorema 6.43.

(b) Segue da (a). Infatti: dato  $V_0 \in T_{\sigma(t_0)} M$ , se  $V(t)$  è parallelo lungo  $\sigma$  con  $V(t_0) = V_0$ , allora  $\tilde{V}(t) = (F_*)_{\sigma(t)} V(t)$  è parallelo lungo  $\tilde{\sigma}$  con  $\tilde{V}(t_0) = (F_*)_{\sigma(t_0)} V_0$ , per cui

$$\tilde{\tau}_t \left( (F_*)_{\sigma(t_0)} V_0 \right) = \tilde{V}(t) = (F_*)_{\sigma(t)} V(t) = (F_*)_{\sigma(t)} (\tau_t V_0).$$

- (c) Basta prendere  $V(t) = \dot{\sigma}(t)$  e applicare la (a). □

**Osservazione 6.45.** Poiché la nozione di trasporto parallelo è di natura locale, anche una isometria locale trasforma campi paralleli in campi paralleli e geodetiche in geodetiche. Inoltre, si noti che i risultati del Corollario 6.44 continuano a valere considerando un diffeomorfismo  $F$  che conserva la connessione di Levi-Civita. In generale, se  $M$  è una varietà differenziabile e  $\nabla$  una connessione lineare su  $M$ , un diffeomorfismo  $F$  di  $M$  si dice *trasformazione affine* se  $F_*\nabla_X Y = \nabla_{F_*X} F_*Y$ . Equivalentemente, un diffeomorfismo  $F$  è una trasformazione affine se, e solo se, verifica la proprietà a) del Corollario 6.44 (cfr. anche Kobayashi–Nomizu [56] vol. I, p.228).

**Osservazione 6.46.** Sia  $\gamma(s)$  una curva differenziabile, parametrizzata con l'ascissa curvilinea  $s \in I$ , di una varietà riemanniana. Si noti che la *curvatura geodetica* di  $\gamma(s)$ , ossia la funzione  $k_g(s) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto k_g(s) = \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{ds}(s) \right\|$ , è invariante per isometrie (locali).

**Osservazione 6.47.** La connessione di Levi-Civita è invariante per omotetie (cfr. Esercizio 6.50), ciò vale anche nel caso semi-riemanniano. Di conseguenza, tutte le nozioni geometriche che derivano dalla connessione di Levi-Civita, come ad esempio la derivata covariante lungo curve, trasporto parallelo e curve geodetiche sono invarianti per omotetie. Anche il tensore di curvatura  $R$  di tipo  $(1, 3)$  e il tensore di Ricci (che studieremo nel Capitolo 8) sono invarianti per omotetie. Tuttavia, curvatura sezionale e curvatura scalare non sono invarianti per omotetie (cfr. Esercizi 8.42 e 8.52).

#### Osservazione 6.48. Olonomia

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale e  $p$  un fissato punto di  $M$ . Se  $\sigma$  è una curva chiusa (differenziabile a tratti):  $\sigma(0) = p = \sigma(1)$ , in altre parole se  $\sigma$  è un cappio in  $p$ , allora lo spostamento parallelo  $\tau(\sigma)$  (rispetto alla connessione di Levi-Civita) è una isometria di  $T_p M$ . L'insieme delle isometrie così costruite lo denotiamo con  $H_p(M, g)$ . Se  $\sigma_1, \sigma_2$  sono due cappi in  $p$ , con  $\sigma_1 * \sigma_2$  denotiamo il cappio in  $p$  prodotto di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 * \sigma_2(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma_2(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Allora:  $\tau(\sigma_1 * \sigma_2) = \tau(\sigma_2) \circ \tau(\sigma_1)$ ,  $\tau(\sigma^{-1}) = \tau(\sigma)^{-1}$ , dove  $\sigma^{-1}$  denota il cappio opposto di  $\sigma$ , e  $\tau(\sigma_0) = I_d$  dove  $\sigma_0$  è il cappio costante. Pertanto,  $H_p(M, g)$  è un sottogruppo del gruppo ortogonale  $O(n)$  che viene detto *gruppo di olonomia* della varietà riemanniana  $(M, g)$  in  $p$ . Si noti che spesso si parla di olonomia di  $(M, g)$ , e si denota con  $H(M, g)$ , senza fare riferimento al punto base perché, essendo  $M$  connessa, gruppi di olonomia relativi a punti distinti sono isomorfi. Se  $\alpha$  è un cammino (differenziabile a tratti) che congiunge due punti  $p, q$  di  $M$ , l'applicazione  $\alpha_* : H_p(M, g) \rightarrow H_q(M, g)$ ,  $\tau(\sigma) \mapsto \tau(\alpha) \circ \tau(\sigma) \circ \tau(\alpha^{-1})$ , è un isomorfismo. Se ci limitiamo a considerare cappi in  $p$  omotopi al cappio costante, si ottiene un sottogruppo  $H^0(M, g)$  di  $H(M, g)$ , che viene detto *gruppo di olonomia ristretto* della varietà riemanniana  $M$ . Naturalmente, se  $\pi_1(M) = 0$ ,  $H^0(M, g) = H(M, g)$ .

Nel caso della connessione euclidea  $\nabla^0$  di  $\mathbb{R}^n$ , lo spostamento parallelo è definito dalla traslazione per cui il gruppo di ologonia dello spazio euclideo è banale:  $H(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n) = \{I_d\}$ . Più in generale vale il seguente risultato (cfr. [10], p. 283): *una varietà riemanniana  $(M, g)$  è piatta se, e solo se,  $H^0(M, g) = \{I_d\}$* . Infine, ricordiamo alcune proprietà dei gruppi di ologonia da cui si vede che la struttura di tali gruppi riflette proprietà geometriche della varietà (cfr. [97], p.226 oppure [100], p.122):

- $H(\mathbb{S}^n) = SO(n)$ ,  $H(H^n) = SO(n)$ ;
- $H(M, g) \subset SO(n)$  se, e solo se,  $M$  è orientabile;
- $H(\tilde{M}, \tilde{g}) = H^0(\tilde{M}, \tilde{g}) = H(M, g)$ , dove  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  denota il rivestimento riemanniano universale di  $(M, g)$ ;
- $H(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = H(M_1, g_1) \times H(M_2, g_2)$ ;
- $(M, g)$  è kähleriana se, e solo se,  $\dim M = 2m$  e  $H(M, g) \subset U(m)$  (gruppo unitario).

### Esercizi sulla connessione di Levi-Civita

**Esercizio 6.49.** Verificare che l'operatore  $\nabla$  definito dalla (6.8) è una connessione lineare, simmetrica e compatibile con  $g$ .

**Esercizio 6.50.** Verificare, usando la (6.8), che metriche riemanniane omotetiche  $g$  e  $g' = kg$ ,  $k = \text{cost.} > 0$ , hanno la stessa connessione di Levi-Civita. Più in generale, siano  $g$  e  $\tilde{g}$  due metriche riemanniane conformi,  $\tilde{g} = e^{2f}g$ ,  $f \in \mathcal{F}(M)$ , e siano  $\nabla$  e  $\tilde{\nabla}$  le corrispondenti connessioni di Levi-Civita. Verificare che

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\nabla f,$$

dove  $\nabla f$  è il gradiente di  $f$  rispetto alla metrica  $g$ , ovvero il campo vettoriale definito da  $g(\nabla f, X) := (df)(X) = X(f)$ .

**Esercizio 6.51.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana con connessione di Levi-Civita  $\nabla$ . Sia  $T$  un tensore di tipo  $(1, 2)$  su  $M$ . Si verifichi che  $\tilde{\nabla} = \nabla + T$  è una connessione lineare. Quindi, una varietà riemanniana ammette connessioni lineari che non sono di Levi-Civita.

**Esercizio 6.52.** Siano  $(M_1, g_1)$  e  $(M_2, g_2)$  due varietà riemanniane con connessioni di Levi-Civita  $\nabla^1$  e  $\nabla^2$  rispettivamente. Usando la (6.8), verificare che la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  della varietà riemanniana prodotto  $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$  è data da

$$\nabla_X Y = \nabla_{X_1}^1 Y_1 + \nabla_{X_2}^2 Y_2,$$

dove  $X_i, Y_i$  denotano le proiezioni di  $X, Y$  su  $TM_i$  ( $i = 1, 2$ ).

**Esercizio 6.53.** Come una conseguenza della formula dell'Esercizio 6.52, si verifichi che sulla varietà riemanniana prodotto  $(M \times \mathbb{R}, g \times dt \otimes dt)$  il campo di vettori  $V = d/dt$  è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita della metrica prodotto  $g \times dt \otimes dt$ .

**Esercizio 6.54.** Si consideri  $\mathbb{R}^2$  con la metrica riemanniana

$$g = f(dx^2 + dy^2), \text{ dove } f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2).$$

Osservato che  $(e_1 = (1/\sqrt{f})\partial_x, e_2 = (1/\sqrt{f})\partial_y)$  è base  $g$ -ortonormale di campi vettoriali, si verifichi che la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  di  $(\mathbb{R}^2, g)$  è definita da:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= (y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_2, & \nabla_{e_1} e_2 &= (-y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_1, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= (-x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_2, & \nabla_{e_2} e_2 &= (x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})e_1. \end{aligned}$$

**Esercizio 6.55.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana con connessione di Levi-Civita  $\nabla$ . Siano  $\Gamma_{ij}^k$  i coefficienti di Christoffel di  $\nabla$  e  $g_{ij}$  i coefficienti della metrica  $g$  rispetto a un fissato sistema di coordinate locali  $(x_i)$ . Indicata con  $(g^{ij})$  la matrice inversa di  $(g_{ij})$ , usando l'equazione (6.8), si verifichi che:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} \right\} g^{km},$$

dove  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Questa formula esprime i coefficienti di Christoffel della connessione di Levi-Civita in funzione dei coefficienti della metrica.

**Esercizio 6.56.** Si consideri la metrica iperbolica  $g$  del semispazio  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ , quindi  $g_{ij} = (1/x_n^2)\delta_{ij}$  e  $g^{ij} = (x_n^2)\delta_{ij}$ .

Si verifichi che i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  non nulli della connessione di Levi-Civita della suddetta metrica iperbolica di  $\mathbb{R}_+^n$  sono dati da

$$\Gamma_{ii}^n = 1/x_n, \quad \Gamma_{in}^i = \Gamma_{ni}^i = -1/x_n, \quad \Gamma_{nn}^n = -1/x_n, \quad i=1, \dots, n-1.$$

In particolare, i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  della connessione di Levi-Civita della metrica iperbolica di  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 1/y, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -1/y.$$

**Esercizio 6.57.** Si verifichi che i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  della connessione di Levi-Civita della metrica riemanniana dell'Esercizio 4.21 sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(u)r'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = r'(u)/r(u),$$

dove si è posto  $x_1 = u$  e  $x_2 = \vartheta$ .

**Esercizio 6.58.** Si verifichi che un diffeomorfismo di una varietà riemanniana che trasforma geodetiche in geodetiche, in generale, non è un'isometria. In altre parole, dare un esempio di varietà riemanniana  $(M, g)$  e di un diffeomorfismo  $f \notin \text{Iso}(M, g)$  che trasforma geodetiche in geodetiche.

**Esercizio 6.59.** Sia  $\gamma(t)$  una geodetica di una varietà riemanniana. Si verifichi che il vettore velocità  $\dot{\gamma}(t)$  ha lunghezza  $\|\dot{\gamma}(t)\| = a$  (costante). Inoltre, si verifichi che l'ascissa curvilinea di  $\gamma(t)$  è data da  $s(t) = at + b$ , e quindi è un parametro ammissibile.

**Esercizio 6.60.** Sia  $F$  un diffeomorfismo di una varietà riemanniana che trasforma campi paralleli in campi paralleli (cioè vale la proprietà a) del Corollario 6.44). Si verifichi che  $F$  è una trasformazione affine (cioè conserva la connessione di Levi-Civita).

**Esercizio 6.61.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana 2-dimensionale. Siano  $V, X \in \mathfrak{X}(\gamma)$  con  $V$  parallelo lungo  $\gamma$  e  $V(t) \neq 0$  per ogni  $t$ . Si verifichi che  $X$  è parallelo lungo  $\gamma$  se, e solo se, la lunghezza di  $X$  e l'angolo convesso  $(X, \hat{V})$  sono costanti.

**Esercizio 6.62.** Sia  $\pi : (M, g) \rightarrow (M', g')$  una sommersione riemanniana (suriettiva) (cfr. Sezione 4.3). Siano  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  sollevamenti orizzontali di  $X', Y' \in \mathfrak{X}(M')$ . Si verifichi, usando la formula di Koszul, che

$$\pi_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{X'} Y' = \nabla'_{\pi_* X} \pi_* Y,$$

dove  $\nabla$  e  $\nabla'$  sono le connessioni di Levi-Civita di  $M$  e  $M'$  rispettivamente.

## 6.6 Le equazioni di struttura di Cartan

Sia  $\gamma(s) = P(s)$  un arco di curva regolare dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ , parametrizzata con l'ascissa curvilinea. È ben noto che la curvatura  $k(s)$  e la torsione  $\tau(s)$  caratterizzano completamente la curva. D'altronde, è possibile considerare lungo la curva  $\gamma$  il *riferimento di Frenet*:  $\{\vec{t}(s)$  (versore tangente),  $\vec{n}(s)$  (versore normale),  $\vec{b}(s)$  (versore binormale) $\}$ , definito da

$$\vec{t}(s) := \dot{\gamma}(s), \quad \vec{n}(s) := \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{\|\dot{\vec{t}}(s)\|} = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}, \quad \vec{b}(s) := \vec{t}(s) \wedge \vec{n}(s).$$

Derivando  $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  si ottengono le *formule di Frenet*:

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{n}(s) \\ \dot{\vec{n}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) - \tau(s)\vec{b}(s) \\ \dot{\vec{b}}(s) = \tau(s)\vec{n}(s). \end{cases}$$

Le equazioni di struttura di Cartan, in un certo senso, si possono pensare come una generalizzazione delle formule di Frenet per una varietà differenziabile  $M$  munita di una connessione lineare  $\nabla$ . Sia  $\{E_i\}$  una base locale di campi vettoriali, indichiamo con  $\gamma_{ij}^k$  i corrispondenti coefficienti locali di  $\nabla$ , cioè

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_k \gamma_{ij}^k E_k.$$

Indicata con  $\{\theta^i\}$  la base locale duale di  $\{E_i\}$ , definiamo le  $n^2$  1-forme  $\omega_j^k$  ponendo

$$\omega_j^k(X) := \theta^k(\nabla_X E_j) \quad \text{e quindi} \quad \omega_j^k = \sum_i \omega_j^k(E_i)\theta^i = \sum_i \gamma_{ij}^k \theta^i.$$

Le 1-forme  $\omega_j^k$  sono dette *1-forme locali della connessione*  $\nabla$ . Indicato con  $T$  il tensore di torsione di  $\nabla$ , le 2-forme  $\Theta^i$  definite da

$$\Theta^i(X, Y) = \theta^i(T(X, Y))$$

sono dette *2-forme locali di torsione*. Tenendo presente le formule (2.3) e (2.9) relative al prodotto esterno e al differenziale esterno per 1-forme, si

ottiene:

$$\begin{aligned}
\Theta^i(X, Y) &= \theta^i(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\
&= \theta^i\left(\nabla_X \sum_j Y^j E_j - \nabla_Y \sum_j X^j E_j - [X, Y]\right) \\
&= \sum_j \left( X(Y^j) \theta^i(E_j) - Y(X^j) \theta^i(E_j) + Y^j \theta^i(\nabla_X E_j) \right) \\
&\quad - \sum_j \left( X^j \theta^i(\nabla_Y E_j) \right) - \theta^i([X, Y]) \\
&= X(\theta^i(Y)) - Y(\theta^i(X)) - \theta^i([X, Y]) + \sum_j \left( \omega_j^i(X) \theta^j(Y) \right. \\
&\quad \left. - \theta^j(X) \omega_j^i(Y) \right) = (d\theta^i)(X, Y) + \sum_j (\omega_j^i \wedge \theta^j)(X, Y),
\end{aligned}$$

ovvero

$$\Theta^i = d\theta^i + \sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j. \quad (6.11)$$

Definiamo le 2-forme

$$\Omega_j^i(X, Y) := \theta^i(R(X, Y)E_j),$$

dove  $R(X, Y)Z := -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z$  è il tensore di curvatura di  $\nabla$  (cfr. Sezione 8.2). Le  $\Omega_j^i$  sono dette *2-forme locali di curvatura* di  $\nabla$ .  
Risulta:

$$\begin{aligned}
\Omega_j^i(X, Y) &= \theta^i(R(X, Y)E_j) \\
&= \theta^i(\nabla_{[X, Y]} E_j) - \theta^i(\nabla_X \nabla_Y E_j) + \theta^i(\nabla_Y \nabla_X E_j) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i(\nabla_X \sum_{h,k} Y^h \gamma_{hj}^k E_k) + \theta^i(\nabla_Y \nabla_X E_j) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i(\nabla_X \sum_{h,k} \theta^h(Y) \gamma_{hj}^k E_k) + \theta^i(\nabla_Y \nabla_X E_j) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i(\nabla_X \sum_k \omega_j^k(Y) E_k) + \theta^i(\nabla_Y \sum_k \omega_j^k(X) E_k) \\
&= \omega_j^i([X, Y]) - \theta^i\left(\sum_k (X(\omega_j^k(Y)) E_k) + \omega_j^k(Y) \nabla_X E_k\right) \\
&\quad + \theta^i\left(\sum_k (Y(\omega_j^k(X)) E_k) + \omega_j^k(X) \nabla_Y E_k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_j^i([X, Y]) - X(\omega_j^i(Y)) - \sum_k \omega_j^k(Y)\omega_k^i(X) + Y(\omega_j^i(X)) \\
&\quad + \sum_k \omega_j^k(X)\omega_k^i(Y) \\
&= -(d\omega_j^i)(X, Y) - \sum_k (\omega_k^i \wedge \omega_j^k)(X, Y).
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\Omega_j^i = -d\omega_j^i - \sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k. \quad (6.12)$$

Le equazioni (6.11) e (6.12) sono dette *equazioni di struttura di Cartan*. Se poniamo

$$T(E_j, E_k) = \sum_l T_{jk}^l E_l \quad \text{e} \quad R(E_i, E_j)E_k = \sum_l R_{ijk}^l E_l,$$

allora

$$\begin{aligned}
\Theta^i &= \sum_{j < k} \Theta^i(E_j, E_k) \theta^j \wedge \theta^k = \sum_{j < k} \theta^i(T(E_j, E_k)) \theta^j \wedge \theta^k \\
&= \sum_{j < k} T_{jk}^l \theta^i(E_l) \theta^j \wedge \theta^k = \sum_{j < k} T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \\
\Omega_j^i &= \sum_{h < k} \Omega_j^i(E_h, E_k) \theta^h \wedge \theta^k = \sum_{h < k} \theta^i(R(E_h, E_k)E_j) \theta^h \wedge \theta^k \\
&= \sum_{h < k} R_{hjk}^l \theta^i(E_l) \theta^h \wedge \theta^k = \sum_{h < k} R_{hjk}^i \theta^h \wedge \theta^k.
\end{aligned}$$

Pertanto, le equazioni di struttura di Cartan diventano

$$\begin{cases} d\theta^i &= \sum_j \theta^j \wedge \omega_j^i + \sum_{j < k} T_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k, \\ d\omega_j^i &= -\sum_j \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \sum_{h < k} R_{hjk}^i \theta^h \wedge \theta^k. \end{cases}$$

Consideriamo ora una varietà riemanniana  $(M, g)$  e sia  $\nabla$  la connessione di Levi-Civita associata. Supponiamo  $\{E_i\}$  base ortonormale locale. Allora,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_i (X(Y^i)E_i + Y^i \nabla_X E_i) \\
&= \sum_i \left( X(Y^i)E_i + Y^i \sum_k \theta^k (\nabla_X E_i) E_k \right) \\
&= \sum_k \left( X(Y^k) + \sum_i Y^i \omega_i^k(X) \right) E_k.
\end{aligned}$$

**Esercizio 6.63.** Si verifichi che la compatibilità di  $\nabla$  con la metrica è espressa da:

$$\gamma_{ij}^k = -\gamma_{ik}^j, \quad \text{equivalentemente} \quad \omega_j^k = -\omega_k^j.$$

Si noti che la simmetria di  $\nabla$ , ossia la condizione  $T = 0$ , è espressa dalla proprietà  $\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ji}^k$  per ogni sistema di coordinate locali, dove  $\Gamma_{ij}^k$  sono i coefficienti della connessione rispetto alla corrispondente base coordinata. Le equazioni di struttura di Cartan della connessione di Levi-Civita di una varietà riemanniana, con riferimento a una base ortonormale locale, sono date da

$$\begin{cases} d\theta^i &= \sum_j \theta^j \wedge \omega_j^i, & \omega_j^i &= -\omega_i^j; \\ d\omega_j^i &= -\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k - \sum_{h < k} R_{hki}^j \theta^h \wedge \theta^k. \end{cases} \quad (6.13)$$

**Esercizio 6.64.** Posto

$$\omega_j^i = \sum_k a_{jk}^i \theta^k \quad \text{e} \quad d\theta^i = \sum_{j < k} b_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k,$$

si verifichi la seguente formula:  $2a_{jk}^i = b_{jk}^i + b_{ki}^j - b_{ij}^k$ , la quale fornisce esplicitamente l'unica soluzione del sistema (6.13) (cioè la connessione di Levi-Civita).

## 6.7 La connessione di Levi-Civita di sottovarietà riemanniane

Sia  $(M, g)$  una sottovarietà riemanniana di  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Per semplicità assumiamo  $M \subset \bar{M}$ , quindi  $g = i^* \bar{g}$ , dove  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ . Per ogni  $p \in M$  poniamo:

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus \mathcal{V}_p M,$$

dove  $\mathcal{V}_p M$  è l'ortogonale di  $T_p M \equiv i_* T_p M$  in  $T_p \bar{M}$ . Quindi, per ogni  $p \in M$  e per ogni  $V \in T_p \bar{M}$ :

$$V = V^\top + V^\perp,$$

dove  $V^\top \in T_p M$  è la componente tangente e  $V^\perp \in \mathcal{V}_p M$  è la componente normale.

**Teorema 6.65.** *Siano  $\nabla, \bar{\nabla}$  le connessioni di Levi-Civita di  $(M, g)$  e  $(\bar{M}, \bar{g})$  rispettivamente. Allora per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $p \in M$ :*

$$\nabla_{X_p} Y := (\nabla_X Y)_p = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})_p^\top \quad (6.14)$$

dove  $\bar{X}, \bar{Y}$  sono estensioni locali di  $X, Y$  su un intorno di  $p$  in  $\bar{M}$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $U, \bar{U}$  intorni coordinati speciali (di un fissato punto) in  $M$  e  $\bar{M}$  rispettivamente. Dati  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , esistono  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(\bar{U})$  estensioni di  $X, Y, Z$ , cioè  $i_{*p} X_p = \bar{X}_p$  per ogni  $p \in U$ , equivalentemente  $\bar{X}(\bar{f})|_U = X(f|_U)$  per ogni  $f \in \mathcal{F}(\bar{U})$  (cfr. Sezione 2.5). Per ogni  $p \in U$ :

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) = \bar{g}_p(i_{*p} X_p, i_{*p} Y_p) = \bar{g}_p(\bar{X}_p, \bar{Y}_p) = \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})(p),$$



cioè

$$g(X, Y)|_U = \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})|_U.$$

Di conseguenza,

$$(\bar{Z}\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}))|_U = Z(\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})|_U) = Z(g(X, Y)|_U). \quad (6.15)$$

Inoltre, siccome anche  $[\bar{X}, \bar{Y}] \in \mathfrak{X}(\bar{U})$  è una estensione di  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(U)$ ,

$$\bar{g}([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z})|_U = g([X, Y], Z)|_U. \quad (6.16)$$

Confrontando le equazioni che definiscono le connessioni di Levi-Civita  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$ :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y X, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [X, Y]), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Z}) &= \bar{X}\bar{g}(\bar{Y}, \bar{Z}) + \bar{Y}\bar{g}(\bar{X}, \bar{Z}) - \bar{Z}\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}) \\ &\quad - \bar{g}(\bar{Y}, [\bar{X}, \bar{Z}]) - \bar{g}(\bar{X}, [\bar{Y}, \bar{Z}]) - \bar{g}(\bar{Z}, [\bar{X}, \bar{Y}]), \end{aligned}$$

e tenendo presente le equazioni (6.15) e (6.16), si ottiene

$$g(\nabla_Y X, Z)|_U = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, \bar{Z})|_U. \quad (6.17)$$

Sia ora  $\{u_i\}$  una base ortonormale di campi di vettori definiti su  $U$ , e sia  $\{\bar{u}_i\}$  una estensione di  $\{u_i\}$  su  $\bar{U}$ . Allora, applicando la (6.17), per ogni  $p \in U$ :

$$\begin{aligned} (\nabla_Y X)_p &= \sum_{i=1}^n g_p((\nabla_Y X)_p, u_{ip})u_{ip} = \sum_{i=1}^n \bar{g}_p((\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p, \bar{u}_{ip})\bar{u}_{ip} \\ &= (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p^\top. \end{aligned}$$

□

Se  $\gamma : I \rightarrow M$  è una curva differenziabile di  $M$ ,  $\bar{\gamma} = i \circ \gamma$  è una curva differenziabile di  $\bar{M}$  che si identifica con  $\gamma$ , ossia una curva di  $M$  si può sempre pensare come una curva di  $\bar{M}$ . Sappiamo che il vettore  $(\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p$  dipende solo da  $\bar{Y}_p = Y_p$  e da  $\bar{X}(t) = \bar{X}(\gamma(t)) = X(\gamma(t)) = X(t)$ , dove  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = Y_p$  (cfr. Proposizione 6.6). Pertanto, si pone  $(\bar{\nabla}_Y X)_p = (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})_p$  e quindi la (6.14) diventa

$$(\nabla_Y X)_p = (\bar{\nabla}_Y X)_p^\top.$$

Inoltre, se  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , allora  $\bar{V}(t) = i_{*\gamma(t)}V(t) \in \mathfrak{X}(\bar{\gamma})$  si identifica con  $V(t)$ . Quindi, un campo di vettori differenziabile lungo  $\gamma$  in  $M$  si può sempre pensare come un campo di vettori differenziabile lungo  $\bar{\gamma}$  in  $\bar{M}$ .

**Corollario 6.66.** Se  $\frac{D}{dt}$  e  $\frac{\bar{D}}{dt}$  sono le derivate covarianti definite dalle connessioni di Levi-Civita  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$ , allora per ogni  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ :

$$\frac{DV}{dt} = \left( \frac{\bar{D}V}{dt} \right)^\top. \quad (6.18)$$

*Dimostrazione.* Usando le notazioni introdotte nella dimostrazione del Teorema 6.65, poniamo  $V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t)u_i(t)$ . Allora,

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dV^i}{dt} u_i(t) + V^i(t) \frac{Du_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dV^i}{dt} u_i(t) + V^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dV^i}{dt} \bar{u}_i(t) + V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\top \right). \end{aligned}$$

Il campo di vettori  $V(t)$ , pensato come elemento di  $\mathfrak{X}(\bar{\gamma})$ , ha componenti  $\bar{V}^k(t) = 0$  per ogni  $k = n+1, \dots, \bar{n}$ , quindi  $V(t) = \sum_{i=1}^n V^i(t) \bar{u}_i(t)$  e

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}V}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dV^i}{dt} \bar{u}_i(t) + V^i(t) \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dV^i}{dt} \bar{u}_i(t) + V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\top + V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\perp \right) \\ &= \frac{DV}{dt} + \sum_{i=1}^n V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} \bar{u}_i)^\perp. \end{aligned}$$

Pertanto,  $\frac{DV}{dt} = \left( \frac{\bar{D}V}{dt} \right)^\top$ . □

Consideriamo  $\{e_i\}$  base di  $\mathfrak{X}(U)$  e  $\{\bar{e}_i, \bar{v}_j\}$  base di  $\mathfrak{X}(\bar{U})$ , con  $\bar{e}_i$  estensione di  $e_i$  su  $\bar{U}$ . Sia  $\{E_i\}$  base ortonormale di  $\mathfrak{X}(U)$  ottenuta ortonormalizzando con il metodo di Gram-Schmidt la base  $\{e_i\}$ . Inoltre, sia  $\{\bar{E}_i, \bar{\xi}_j\}$  base ortonormale di  $\mathfrak{X}(\bar{U})$  ottenuta ortonormalizzando con il metodo di Gram-Schmidt la base  $\{\bar{e}_i, \bar{v}_j\}$ . Allora  $\bar{E}_i$  è una estensione di  $E_i$  su  $\bar{U}$ . Poniamo  $\xi_j = \bar{\xi}_j|_U$ . Sia  $\mathcal{V}(M) = \sqcup_{p \in M} \mathcal{V}_p(M)$  il fibrato normale su  $M$  relativo all'immersione  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ .  $\mathcal{V}(M)$  e  $TM$  sono sottofibrati di  $T\bar{M}$ . Sia  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  l'insieme dei campi differenziabili di vettori normali ad  $M$ , in altre parole  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  è l'insieme delle applicazioni differenziabili

$$\xi : M \rightarrow \nu(M), \quad p \mapsto \xi_p \in \mathcal{V}_p(M) = (T_p M)^\perp.$$

Localmente si ha

$$\xi = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} a^j \xi_j, \quad \text{dove } a^j \in \mathcal{F}(U).$$

$\mathfrak{X}(M)^\perp$  è un  $\mathcal{F}(M)$ -modulo, inoltre coincide con l'insieme delle sezioni differenziabili del fibrato normale  $\mathcal{V}(M)$  (così come  $\mathfrak{X}(M)$  è l'insieme delle sezioni differenziabili del fibrato tangente  $TM$ ). L'applicazione

$$\begin{aligned}\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp, (X, Y) \mapsto \alpha(X, Y), \\ \alpha(X, Y)(p) &:= (\bar{\nabla}_X Y)_p^\perp \text{ (componente normale),}\end{aligned}$$

viene detta *seconda forma fondamentale* dell'immersione. Si vede facilmente che  $\alpha$  è un'applicazione  $\mathcal{F}(M)$ -bilinare simmetrica, quindi  $\alpha(X, Y)(p)$  dipende solo da  $X_p$  e  $Y_p$ . In altre parole,  $\alpha$  è un tensore su  $M$  di tipo  $(0, 2)$  simmetrico a valori nel fibrato normale. Pertanto, per ogni fissato  $p \in M$ , possiamo definire l'applicazione bilinare simmetrica

$$\alpha_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathcal{V}_p M, (X_p, Y_p) \mapsto \alpha_p(X_p, Y_p) := \alpha(X, Y)(p),$$

dove  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  con  $X(p) = X_p$  e  $Y(p) = Y_p$ . Decomponendo  $\bar{\nabla}_X Y$  come somma della componente tangente e di quella normale, si ottiene l'equazione

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + \alpha(X, Y)_p \quad (6.19)$$

che viene detta *equazione di Gauss* (cfr. Figura 6.3).

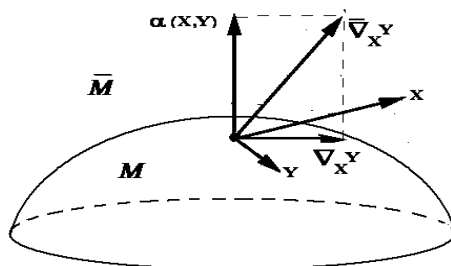


Figura 6.3: La decomposizione di  $\bar{\nabla}_X Y$ .

Per ogni curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M$  e per ogni  $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , dalla dimostrazione del Corollario 6.66, segue

$$\frac{\bar{D}V}{dt} = \frac{DV}{dt} + \sum_{i=1}^n V^i(t) (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} u_i)^\perp = \frac{DV}{dt} + \sum_{i=1}^n V^i(t) \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), u_i(t))$$

e quindi otteniamo l'equazione di Gauss per campi di vettori lungo curve:

$$\frac{\bar{D}V}{dt} = \frac{DV}{dt} + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), V). \quad (6.20)$$

La sottovarietà  $M$  è detta *totalmente geodetica* se  $\alpha = 0$ , cioè se per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ :

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p.$$

Il vettore *curvatura media* della sottovarietà riemanniana  $M$  è il vettore

$$H(p) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \alpha_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_p(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)_p^\perp \in \mathcal{V}_p(M), \quad (6.21)$$

dove  $\{e_i\}$  è una base ortonormale locale di  $\mathfrak{X}(M)$ . Quindi,  $nH(p)$  è il vettore ottenuto proiettando  $(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i)_p$  su  $(T_p M)^\perp = \mathcal{V}_p(M)$ . La sottovarietà  $M$  è detta *minimale* se  $H = 0$ .

**Proposizione 6.67.** *Sia  $(M, g)$  una sottovarietà riemanniana di  $(\bar{M}, \bar{g})$ ,  $g = i^* \bar{g}$ . Allora,  $M$  è totalmente geodetica se, e solo se, le geodetiche di  $M$  sono tutte e sole le curve geodetiche di  $\bar{M}$  contenute in  $M$ .*

*Dimostrazione.* Proviamo che  $M$  è totalmente geodetica se, e solo se, per ogni curva differenziabile  $\gamma(t)$  di  $M$  le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (a)  $\gamma(t)$  è una curva geodetica di  $M$ ;
- (b)  $\gamma(t)$  è una curva geodetica di  $\bar{M}$ .

Se  $M$  è totalmente geodetica, cioè se  $\alpha = 0$ , dall'equazione (6.20) si ha

$$\frac{\bar{D}\dot{\gamma}}{dt} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt},$$

e quindi  $\gamma(t)$  è una geodetica di  $M$  se, e solo se,  $\gamma(t)$  è una geodetica di  $\bar{M}$ . Viceversa, se (a) e (b) sono equivalenti, dall'equazione (6.20), con  $V(t) = \dot{\gamma}(t)$ , segue che  $\alpha = 0$  (in quanto bilineare e simmetrica) e quindi  $M$  è totalmente geodetica.  $\square$

**Esempio 6.68.** Dalla Proposizione 6.67 segue che la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  non è una sottovarietà totalmente geodetica dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{n+1}$  (non è nemmeno minimale). Più in generale: *non esistono sottovarietà riemanniane minimali compatte immerse nello spazio euclideo* ([56] vol. II, p. 34). Lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^m$  è chiaramente una sottovarietà totalmente geodetica di  $\mathbb{R}^n$ ,  $m < n$ . Verifichiamo che la sfera canonica  $\mathbb{S}^m$  è una sottovarietà riemanniana totalmente geodetica della sfera canonica  $\mathbb{S}^n$ ,  $n > m$ . Consideriamo le seguenti immersioni:

$$\begin{aligned} i_1 : \mathbb{S}^m &\hookrightarrow \mathbb{R}^{m+1}, & i_2 : \mathbb{R}^{m+1} &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}, \\ j_1 : \mathbb{S}^m &\hookrightarrow \mathbb{S}^n, x \mapsto (x, 0), & j_2 : \mathbb{S}^n &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \\ i &= i_2 \circ i_1 : \mathbb{S}^m &\hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}. \end{aligned}$$

Allora, indicando con  $g_0$  sia la metrica euclidea di  $\mathbb{R}^{m+1}$  che quella di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , si ha

$$i^* g_0 = i_1^* g_0 = g_{\mathbb{S}^m}, \quad i = j_2 \circ j_1, \quad g_{\mathbb{S}^m} = i^* g_0 = j_1^* (j_2^* g_0) = j_1^* g_{\mathbb{S}^n}.$$

Quindi  $j_1 : (\mathbb{S}^m, g_{\mathbb{S}^m}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$  è un'immersione isometrica. D'altronde, le geodetiche di una sfera (munita della metrica canonica) sono tutte e sole le

circonferenze di raggio massimo (cfr. Teorema 7.7). Pertanto, se  $\gamma(t)$  è una curva di  $\mathbb{S}^m$ ,  $\gamma(t)$  è una curva geodetica di  $\mathbb{S}^m$  se, e solo se,  $\gamma(t)$  è una curva geodetica di  $\mathbb{S}^n$ . In conclusione, applicando, la Proposizione 6.67, si ottiene che  $\mathbb{S}^m$  è una sottovarietà riemanniana totalmente geodetica di  $\mathbb{S}^n$ .

Torniamo al caso di una sottovarietà riemanniana  $(M, g) \hookrightarrow (\bar{M}, \bar{g})$ . Sia  $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ . Usando le notazioni di prima, localmente

$$\xi = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} a^j \xi_j, \quad a^j \in \mathcal{F}(U).$$

Per ogni  $p \in M$ , al vettore  $\xi_p \in \mathcal{V}_p(M)$  è associato l'endomorfismo simmetrico

$$S_{\xi_p} : T_p M \rightarrow T_p M,$$

detto *operatore forma* (o *operatore di Weingarten*), definito da

$$g_p(S_{\xi_p} X_p, Y_p) = \bar{g}_p(\alpha_p(X_p, Y_p), \xi_p).$$

In termini di derivate covarianti, l'operatore di Weingarten è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -(\bar{\nabla}_{X_p} \xi)^\top, \quad \text{equivalentemente} \quad S_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top. \quad (6.22)$$

Infatti, se  $X_p, Y_p \in T_p M$  e  $Y$  è un campo vettoriale definito in un intorno di  $p$  con  $Y(p) = Y_p$ , si ha:

$$\begin{aligned} \alpha_p(X_p, Y_p) &= (\bar{\nabla}_X Y)_p^\perp = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} Y, \xi_{jp}) \xi_{jp} \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} \xi_j, Y_p) \xi_{jp}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} g_p(S_{\xi_p} X_p, Y_p) &= \bar{g}_p(\alpha_p(X_p, Y_p), \xi_p) \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} \xi_j, Y_p) \bar{g}_p(\xi_{jp}, \xi_p) \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} \xi_j, Y_p) a^j(p) \\ &= - \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} \bar{g}_p(\bar{\nabla}_{X_p} a^j \xi_j, Y_p) \quad (\text{tenendo conto che } \xi_j \perp Y_p) \\ &= \bar{g}_p(-\bar{\nabla}_{X_p} \xi, Y_p) \quad \forall Y_p \in T_p M. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $S_{\xi_p} X_p = -(\bar{\nabla}_{X_p} \xi)^\top$ . Indicata con  $\nabla_X^\perp \xi$  la componente normale di  $\bar{\nabla}_X \xi$ , dalla (6.22) si ha l'equazione di Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla_X^\perp \xi. \quad (6.23)$$

Si noti che  $\nabla^\perp$ , detta *connessione normale* di  $M$ , definisce una connessione lineare nel fibrato normale  $\mathcal{V}(M)$ , inoltre  $\nabla^\perp$  risulta compatibile con la metrica riemanniana indotta sul fibrato  $\mathcal{V}(M)$  dalla metrica riemanniana  $\bar{g}$  di  $\bar{M}$ .

### Caso delle sottovarietà di codimensione 1

Consideriamo il caso di  $(M, g)$  sottovarietà riemanniana  $n$ -dimensionale di  $(\bar{M}, \bar{g})$  varietà riemanniana  $(n+1)$ -dimensionale. Supponiamo che esista  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ , unitario e ortogonale a  $M$ , quindi  $(T_p M)^\perp = \langle \xi_p \rangle$  per ogni  $p \in M$ . In tal caso, la formula (6.21) del vettore curvatura media diventa

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)_p^\perp = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e_i, \xi)_p \xi_p = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \xi, e_i)_p \xi_p$$

dove  $\{e_i\}$  è una base ortonormale locale di  $\mathfrak{X}(M)$ , e l'operatore forma  $S_\xi$  è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -\bar{\nabla}_{X_p} \xi.$$

Di conseguenza,

$$H(p) = \frac{1}{n} (\text{tr} S_{\xi_p}) \xi_p.$$

Inoltre,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_\xi \xi, \xi) = 0,$$

per cui tenendo conto della definizione di divergenza data nell'Appendice B, il vettore curvatura media è dato da

$$H = -\frac{1}{n} (\text{div} \xi) \xi.$$

La funzione

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{n} (\text{div} \xi) = \frac{1}{n} (\text{tr} S_\xi).$$

è detta *curvatura media* di  $(M, g)$ .

### Caso delle sottovarietà di $\mathbb{R}^n$

Per una ipersuperficie regolare  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , l'operatore di Weingarten è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi.$$

Di conseguenza, se  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita dell'ipersuperficie regolare  $(M, g = i^* g_0)$ , l'equazione di Gauss (6.19) diventa

$$(\nabla_X^0 Y)_p = (\nabla_X Y)_p + g(S_{\xi_p} X_p, Y_p) \xi_p. \quad (6.24)$$

Per la sfera unitaria  $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , il campo  $\xi$  è definito da  $\xi_p = p$  e quindi l'operatore di Weingarten è dato da

$$S_{\xi_p} X_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi = -X_p. \quad (6.25)$$

Se  $(M, g)$  è una sottovarietà riemanniana di  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ , la formula (6.18) diventa

$$\frac{DV}{dt} = \left( \frac{dV}{dt} \right)^\top. \quad (6.26)$$

In particolare se  $M$  è un'ipersuperficie di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{V}_p M$  è il sottospazio di  $T_p \mathbb{R}^n$  generato da  $\xi_p$  vettore unitario normale ad  $M$  in  $p$  ( $\xi$ , in generale, è definito solo localmente), quindi  $\mathcal{V}_p M$  è 1-dimensionale. In tal caso, se  $\gamma$  è una curva differenziabile di  $M$  e  $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , si ha

$$V(t) \text{ è parallelo lungo } \gamma \iff \frac{dV}{dt} \text{ è parallelo al campo normale } \xi_{\gamma(t)}.$$

Le stesse considerazioni valgono considerando  $\mathbb{R}^n$  con la metrica  $g$  di Minkowski, in tal caso le proiezioni sono riferite alla metrica  $g$ .

**Esempio 6.69.** Sia  $M$  una superficie (regolare) di  $\mathbb{R}^3$  con la metrica  $g$  indotta da  $g_0$ . Sia  $\gamma(s)$  una curva differenziabile (regolare, cioè con  $\dot{\gamma}(s) \neq 0$ ) di  $M$  (e quindi di  $\mathbb{R}^3$ ) parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Dall'equazione (6.20) segue

$$\ddot{\gamma}(s) = \frac{D\dot{\gamma}}{ds} + g_0(\ddot{\gamma}(s), \xi_{\gamma(s)}) \xi_{\gamma(s)}. \quad (6.27)$$

Siccome  $k_g(s) = \|\frac{D\dot{\gamma}}{ds}\|$  e  $k_n(s) = |g(\ddot{\gamma}(s), \xi_{\gamma(s)})|$  sono rispettivamente la curvatura geodetica e la curvatura normale di  $\gamma(s)$  come curva di  $M$ , e  $k(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$  è la curvatura di  $\gamma(s)$  come curva di  $\mathbb{R}^3$ , dall'equazione (6.27) segue la seguente relazione fra le tre curvature:

$$k^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s).$$

In particolare, se  $\gamma(s)$  è un parallelo di colatitudine  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) della sfera canonica  $\mathbb{S}^2$  di raggio  $R$ , quindi  $\gamma(s)$  ha raggio  $r = R \sin \varphi$ , allora  $k(s) = 1/(R \sin \varphi)$  e  $k_n(s) = k(s) \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = 1/R$ . Di conseguenza, la curvatura geodetica è data da

$$k_g(p) = \text{cost.} = \frac{\cos \varphi}{R \sin \varphi} \quad \forall p \in \gamma.$$

**Proposizione 6.70.** Siano  $M_1, M_2$  due superfici di  $\mathbb{R}^3$ , ognuna munita della metrica riemanniana canonica. Se  $M_1, M_2$  sono tangenti lungo una curva differenziabile  $\sigma$ , allora il trasporto parallelo lungo  $\sigma(t)$  in  $M_1$  coincide con il trasporto parallelo lungo  $\sigma(t)$  in  $M_2$ .

*Dimostrazione.* Dire che  $M_1, M_2$  sono tangenti lungo una curva differenziabile  $\sigma$ , vuol dire che esistono  $\sigma_1 : I \rightarrow M_1, \sigma_2 : I \rightarrow M_2$ , curve differenziabili tali che  $\sigma_1(t) = \sigma(t) = \sigma_2(t)$  e  $T_{\sigma(t)}M_1 = T_{\sigma(t)}M_2$  per ogni  $t \in I$ . Quindi,  $\mathfrak{X}(\sigma_1) = \mathfrak{X}(\sigma_2)$ . Sia  $\frac{D_i}{dt}$ , ( $i = 1, 2$ ) l'operatore di derivazione covariante su  $M_i$ . Se  $V \in \mathfrak{X}(\sigma_1) = \mathfrak{X}(\sigma_2)$ , dalla (6.26) si ottiene  $\frac{D_1V}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^\top = \frac{D_2V}{dt}$ . Dunque,  $V(t)$  è parallelo lungo  $\sigma(t)$  in  $M_1$  se, e solo se,  $V(t)$  è parallelo lungo  $\sigma(t)$  in  $M_2$ .  $\square$

La proposizione precedente offre una visualizzazione geometrica del trasporto parallelo per superfici di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\sigma(t), t \in I$ , una curva differenziabile di una superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo la famiglia  $\{T_{\sigma(t)}M\}_{t \in I}$  dei piani tangenti a  $M$  lungo la curva  $\sigma$ . Per  $t_0, t \in I$ , l'intersezione del piano tangente in  $\sigma(t_0)$  e del piano tangente in  $\sigma(t)$  sarà in generale una retta. Il suo limite, per  $t \rightarrow t_0$ , sarà una retta passante per  $\sigma(t_0)$  nel piano tangente  $T_{\sigma(t_0)}M$ . La famiglia di queste rette, al variare di  $t_0 \in I$ , costituisce una superficie rigata sviluppabile  $\Sigma$  (ossia c'è un unico piano tangente lungo i punti di una stessa retta generatrice), detta *superficie involuppo* di questa famiglia di piani, che risulta tangente a  $M$  lungo  $\sigma$  (cfr. Do Carmo [30], p.196). Poiché  $\Sigma$  è localmente isometrica al piano euclideo, la stessa superficie può localmente srotolarsi sul piano euclideo, e sul piano euclideo il trasporto parallelo non è altro che l'ordinaria traslazione. Un cono circolare retto e un cilindro circolare retto sono esempi di superfici rigate sviluppabili.

### Esempio 6.71. Trasporto parallelo sul cono di rotazione.

Consideriamo la superficie  $\Sigma : z = k\sqrt{x^2 + y^2}, k > 0, (x, y) \neq (0, 0)$ .  $\Sigma$  è un semicono di vertice l'origine  $O$  e angolo di apertura  $2\alpha$  definito da  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{k}$ .  $\Sigma$  ha equazioni parametriche

$$x = \rho \sin \alpha \cos \beta, \quad y = \rho \sin \alpha \sin \beta, \quad z = \rho \cos \alpha,$$

dove  $\rho > 0$  e  $\beta \in [0, 2\pi[$ . Facciamo vedere che la superficie  $\Sigma$ , munita della metrica riemanniana indotta da quella euclidea di  $\mathbb{R}^3$ , è localmente isometrica al piano euclideo. Nel seguito denotiamo con  $g_0$  sia la metrica euclidea di  $\mathbb{R}^2$  che quella di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $U$  l'aperto del piano espresso in coordinate polari  $(\rho, \vartheta)$  da

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad \text{dove } \rho > 0 \text{ e } \vartheta \in ]0, 2\pi \sin \alpha[.$$

È facile vedere che la metrica euclidea  $g_0 = dx \otimes dx + dy \otimes dy$  sull'aperto  $U$ , rispetto alle coordinate polari  $(\rho, \vartheta)$ , è data da

$$g_0 = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

Quando  $\vartheta$  varia nell'intervallo  $]0, 2\pi \sin \alpha[$ , l'angolo  $\beta = \frac{\vartheta}{\sin \alpha}$  descrive l'intervallo  $]0, 2\pi[$ . Quindi, se  $r_0$  è la generatrice di  $\Sigma$  ottenuta per  $\beta = 0$ , l'applicazione

$$F : U \rightarrow \Sigma \setminus r_0, \quad (\rho, \vartheta) \mapsto \left(\rho \sin \alpha \cos\left(\frac{\vartheta}{\sin \alpha}\right), \rho \sin \alpha \sin\left(\frac{\vartheta}{\sin \alpha}\right), \rho \cos \alpha\right),$$

è chiaramente un diffeomorfismo, in termini di coordinate (globali)

$$F : (\rho, \vartheta) \mapsto \left(\rho, \beta = \frac{\vartheta}{\sin \alpha}\right).$$



Sia  $g = i^*g_0$  la metrica riemanniana di  $\Sigma \setminus r_0$ , dove  $i : \Sigma \setminus r_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . Allora, la metrica  $h = F^*g = F^*i^*g_0 = (i \circ F)^*g_0$ , dove  $i : U \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ , ha coefficienti

$$h_{11} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F^i}{\partial \rho} \right)^2 = 1, \quad h_{22} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial F^i}{\partial \vartheta} \right)^2 = \rho^2, \quad h_{12} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F^i}{\partial \rho} \frac{\partial F^i}{\partial \vartheta} = 0.$$

Pertanto  $F : (U, g_0) \rightarrow (\Sigma \setminus r_0, g)$  è una isometria e quindi  $\Sigma$  è localmente isometrica al piano euclideo. Determiniamo ora il trasporto parallelo  $\tau_t$  lungo un parallelo di  $\Sigma$ . Siano  $p$  un fissato punto di  $\Sigma$ , con  $\text{dist}(O, p) = \rho$ , e  $\sigma$  il parallelo di  $\Sigma$  passante per  $p$  con  $\sigma(0) = \sigma(1) = p$ . Sia  $V_0 \in T_p\Sigma$ , vogliamo determinare il vettore  $V_1 \in T_p\Sigma$  ottenuto da  $V_0$  per trasporto parallelo lungo  $\sigma$ .  $\Sigma$  è una superficie localmente isometrica al piano euclideo. Sia  $r_0$  la generatrice per  $p$ ,  $\Sigma \setminus r_0$  sviluppata nel piano diventa l'aperto  $U$  (cfr. Figura 6.4), ossia il settore angolare definito da:  $\rho > 0$  e  $\vartheta \in ]0, 2\pi \sin \alpha[$ . In  $U$  il parallelo  $\sigma$  è rappresentato da un arco di circonferenza  $\gamma$ . Se  $\delta$  è l'angolo sotteso dall'arco  $\gamma$ , siccome  $\rho\delta = L(\gamma) = L(\sigma) = 2\pi\rho\sin\alpha$ , si ha:

$$\delta = 2\pi\sin\alpha.$$

Sia  $V_1$  il vettore ottenuto trasportando per parallelismo  $V_0$  lungo  $\gamma$  nel piano, quindi effettuando semplicemente una traslazione. Quando riavvolgiamo il settore angolare sul cono (cfr. Figura 6.4), notiamo che  $V_1$  è ottenuto da  $V_0$  con una rotazione (nel verso determinato da  $\dot{\sigma}(t)$ ) di angolo

$$a = 2\pi - \delta = 2\pi(1 - \sin\alpha).$$

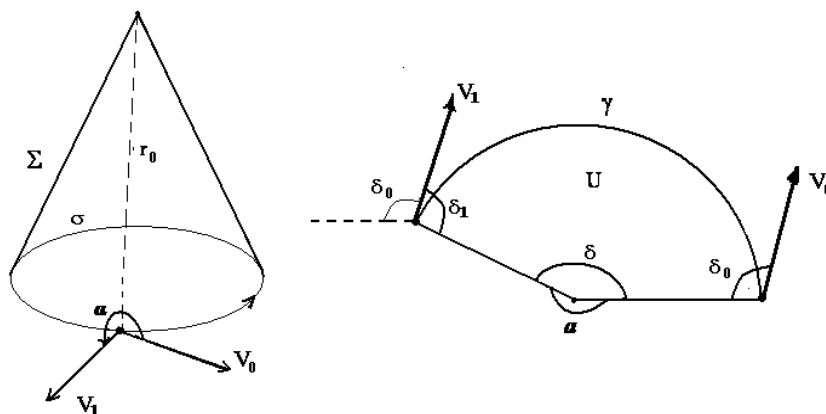


Figura 6.4: *Trasporto parallelo sul cono.*

Si noti che l'angolo  $a$  non dipende dal particolare parallelo considerato, ma solo dall'apertura del cono. Se  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) tende a  $\frac{\pi}{2}$ , allora  $a$  tende a 0. In particolare, se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Sigma$  degenera in un piano.

**Esempio 6.72. Trasporto parallelo sulla sfera.**

Sia  $\sigma$  un parallelo di colatitudine  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) della sfera canonica  $\mathbb{S}^2$ , con  $\sigma(0) = \sigma(1) = p$ . Fissato  $V_0 \in T_p\mathbb{S}^2$ , determiniamo  $V_1 = \tau_1(V_0)$ , dove  $\tau_1$  è lo spostamento parallelo da  $\sigma(0) = p$  a  $\sigma(1) = p$  lungo  $\sigma$ . Sia  $\Sigma$  il semicono tangente alla sfera  $\mathbb{S}^2$  lungo  $\sigma$ .

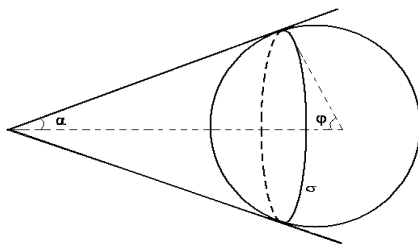


Figura 6.5: Semicono tangente alla sfera.

L'angolo di apertura di  $\Sigma$  è  $2\alpha$ , dove  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$  (cfr. Figura 6.5). Applicando la Proposizione 6.70, e quanto visto nell'esempio precedente,  $V_1$  è ottenuto da  $V_0$  con una rotazione (nel verso determinato da  $\dot{\sigma}(t)$ ) di angolo

$$a = 2\pi \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = 2\pi(1 - \cos\varphi).$$

Se  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , allora  $a = 2\pi$  e quindi  $V_1 = V_0$  (in tal caso  $\sigma$  è un equatore e  $\Sigma$  un cilindro circolare retto). Se  $\varphi \rightarrow 0$ , allora  $a \rightarrow 0$ .

## 6.8 Tensori fondamentali su una distribuzione

**Definizione 6.73.** Una *distribuzione*  $D$  di dimensione  $r$  su una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$  ( $r < n$ ) è una corrispondenza che ad ogni punto  $p \in M$  associa un sottospazio  $r$ -dimensionale  $D_p$  di  $T_pM$ .

Una distribuzione  $D$  si dice *differenziabile* se per ogni  $p \in M$  esistono un intorno  $U$  di  $p$  ed  $r$  campi di vettori linearmente indipendenti  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$  che definiscono una base di  $D_q$  per ogni  $q \in U$ . L'insieme  $\{X_1, \dots, X_r\}$  è detto *base locale* della distribuzione  $D$ . Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $X_p \neq 0$  per ogni  $p \in M$ , definisce una distribuzione differenziabile 1-dimensionale su  $M$ . Sia  $D$  una distribuzione differenziabile  $r$ -dimensionale. Un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  appartiene alla distribuzione  $D$  se  $X_p \in D_p$  per ogni  $p \in M$ . Indichiamo con  $\Gamma(D)$  l'insieme di tutti i campi di vettori differenziabile di  $D$ . Diremo che la distribuzione  $D$  è *involutiva* se per ogni punto  $p \in M$ , esiste  $U$  intorno di  $p$  ed esistono  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$  che costituiscono una base locale di  $D$ , tale che

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k X_k \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

Le  $c_{ij}^k$  sono funzioni differenziabili (in generale non costanti) definite nell'intorno considerato. Equivalentemente,

$$D \text{ è involutiva } \Leftrightarrow [X, Y] \in \Gamma(D) \quad \forall X, Y \in \Gamma(D).$$

In analogia alle curve integrali di un campo di vettori (distribuzione 1-dimensionale) abbiamo la nozione di varietà integrale di una distribuzione. Sia  $D$  una distribuzione differenziabile su  $M$ . Una sottovarietà (connessa)  $N$  di  $M$  si dice *varietà integrale* di  $D$  se  $\forall q \in N : T_q N \subset D_q$ . Si noti che una varietà integrale può avere dimensione minore di quella di  $D$ .

**Esempio 6.74.** Sia  $D$  la distribuzione su  $M = \mathbb{R}^{n+k}$  generata da  $E_i = \partial/\partial x_i, i = 1, \dots, n$ ;  $D$  associa, ad ogni punto  $p \in M$ , il sottospazio  $D_p$  costituito da tutti i vettori per  $p$  e paralleli a  $\mathbb{R}^n$ . Tale distribuzione è involutiva poiché  $[E_i, E_j] = 0$ .

La situazione dell'esempio precedente è tipica, almeno localmente, delle distribuzioni involutive. Sia  $D$  una distribuzione differenziabile su  $M$  di dimensione  $r < n$ . Diciamo che  $D$  è una *distribuzione integrabile*, o completamente integrabile, se ogni punto  $p \in M$  ha un intorno coordinato  $(U, \varphi)$  tale che, se  $(x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate locali, allora i vettori  $\partial/\partial x_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) formano una base locale su  $U$  per  $D$ . Una distribuzione  $r$ -dimensionale integrabile si dice che definisce una *fogliazione* di codimensione  $n - r$  di  $M$ . In questo caso, per ogni punto  $q \in U$ , esiste una varietà integrale  $r$ -dimensionale  $N$  (detta *foglia* per  $q$ ) tale che  $T_q N = D_q$ , quindi lo spazio tangente ad  $N$  è esattamente  $D$  in ognuno dei suoi punti. Infatti, se  $(a_1, \dots, a_n)$  denotano le coordinate di  $q$ , una varietà integrale per  $q$  è data dall'insieme  $N$  di tutti i punti di  $U$  le cui coordinate soddisfano:

$$x_{r+1} = a_{r+1}, \dots, x_n = a_n.$$

Queste equazioni definiscono un sottospazio  $r$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^n$ , pertanto  $N = \varphi^{-1}\{x \in \varphi(U) : x_j = a_j, j = r + 1, \dots, n\}$  è una fetta di  $U$ . Naturalmente, in questo caso la distribuzione è involutiva in quanto  $[E_i, E_j] = [\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0, 1 \leq i, j \leq r$ . Quindi, una distribuzione integrabile è involutiva. Viceversa, abbiamo

**Teorema 6.75.** (di Frobenius, cfr. [14], p. 159) *Una distribuzione  $D$  su una varietà  $M$  è integrabile se, e solo se, è involutiva.*

Esistono distribuzioni che non sono involutive. Su  $M = \mathbb{R}^3$ , la distribuzione generata da  $X_1 = x_3(\partial/\partial x_1) + \partial/\partial x_3$  e  $X_2 = \partial/\partial x_2 + \partial/\partial x_3$  non è involutiva (infatti  $[X_1, X_2] = -\partial/\partial x_1$ ). Una distribuzione  $D$  di dimensione 1 è un campo di rette, cioè  $D_p$  è un sottospazio 1-dimensionale. Una base locale è data da un campo di vettori  $X$ , privo di zeri, che appartiene ad  $D$  in ogni punto e, naturalmente, una curva integrale di  $X$  è una varietà integrale di  $D$ . Sappiamo che tali varietà integrali passanti per un dato punto, esistono e sono uniche. Una tale distribuzione è involutiva in quanto  $[X, X] = 0$ . Sia  $\eta$  una 1-forma differenziale su  $M$ . Indichiamo con  $D$  la distribuzione definita dal  $\ker \eta$ . Siccome il differenziale esterno  $d$  sulle 1-forme è definito da:

$$(d\eta)(X, Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y]),$$

dal Teorema di Frobenius segue che la distribuzione  $D$  è integrabile se, e solo se,  $d\eta|_D = 0$ . Una *varietà integrale massimale* di una distribuzione involutiva  $S$  è una varietà integrale (connessa)  $N$  che contiene ogni varietà integrale (connessa) di  $S$  che ha un punto in comune con essa. Naturalmente, per quanto osservato precedentemente, una varietà integrale massimale ha la stessa dimensione di  $S$ . Si può dimostrare che per ogni punto  $p \in M$  passa una ed una sola sottovarietà integrale massimale della distribuzione involutiva.

**Esercizio 6.76.** Si consideri su  $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  la distribuzione 2-dimensionale  $S$  definita da  $S_p = \{V \in T_p M : g_0(V, p) = 0\}$ . Verificare che  $S$  è involutiva e trovare le varietà integrali.

Discutiamo ora alcuni tensori fondamentali associati a una distribuzione (differenziabile)  $r$ -dimensionale  $\mathcal{V}$  su una varietà riemanniana  $(M, g)$ . Poiché  $M$  è riemanniana, possiamo considerare la distribuzione  $\mathcal{H}$  ortogonale a  $\mathcal{V}$ . Quindi, per ogni  $p \in M$ :

$$T_p M = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{H}_p, \quad \mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^\perp.$$

Chiamiamo  $\mathcal{V}$  distribuzione verticale e  $\mathcal{H}$  distribuzione orizzontale, e denotiamo con  $v$  la proiezione su  $\mathcal{V}$  e con  $h$  la proiezione su  $\mathcal{H}$ . La *seconda forma fondamentale* di  $\mathcal{V}$  è il tensore  $A^v$ , in generale non simmetrico, definito da

$$A^v(X, Y) = A_X^v Y := h(\nabla_{vX} vY) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

dove  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita di  $(M, g)$ . La *seconda forma fondamentale simmetrizzata* di  $\mathcal{V}$  è il tensore  $B^v$  definito da

$$B_X^v Y = \frac{1}{2}(A_X^v Y + A_Y^v X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Il tensore di integrabilità di  $\mathcal{V}$  è il tensore  $I^v$  definito da

$$I^v(X, Y) = A_X^v Y - A_Y^v X = h[vX, vY] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Quando  $\mathcal{V}$  è integrabile, cioè  $I^v = 0$ ,  $B^v = A^v$  è l'usuale seconda forma fondamentale delle foglie pensate come sottovarietà di  $M$ . Anche se  $\mathcal{V}$  non è integrabile, il *vettore curvatura media* di  $\mathcal{V}$  è il campo vettoriale (orizzontale)  $\mu^v$  definito da

$$\mu^v = \frac{1}{r} \operatorname{tr} B^v = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r h(\nabla_{E_i} E_i),$$

dove  $\{E_1, \dots, E_r\}$  è una base ortonormale locale di  $\Gamma(\mathcal{V})$ , cioè per ogni  $p \in U$  (aperto di  $M$ ),  $\{(E_1)_p, \dots, (E_r)_p\}$  è una base ortonormale di  $\mathcal{V}_p$ . La distribuzione  $\mathcal{V}$  è detta *distribuzione minimale* se, per ogni  $p \in M$ , il vettore curvatura media  $\mu^v(p) = 0$ , mentre è detta *distribuzione totalmente geodetica* se la seconda forma fondamentale simmetrizzata  $B_p^v = 0$  per ogni  $p \in M$ . Siccome

$$A^v(E, F) = B^v(E, F) + \frac{1}{2}I^v(E, F) \quad \forall E, F \in \Gamma(\mathcal{V}),$$

allora

$$A^v = 0 \quad \text{se, e solo se, } \mathcal{V} \text{ è integrabile e totalmente geodetica.}$$

La *connessione parziale di Bott* su  $\mathcal{H}$  (lungo  $\mathcal{V}$ ) è l'applicazione

$$\nabla^{oh} : \Gamma(\mathcal{V}) \times \Gamma(\mathcal{H}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{H}), (V, F) \mapsto \nabla_V^{oh} F = h(\mathcal{L}_V F) = h([V, F]).$$

La *connessione normale*  $\nabla^h$  è definita da

$$\nabla_V^h F = h(\nabla_V F) \quad (V \in \Gamma(\mathcal{V}), F \in \Gamma(\mathcal{H})).$$

Risulta che le due connessioni coincidono, cioè  $\nabla_V^{oh} F = \nabla_V^h F$  se e solo se  $\mathcal{H}$  è integrabile e  $\mathcal{V}$  è riemanniana (cioè,  $(\mathcal{L}_V g)(E, F) = 0$  per ogni  $V \in \Gamma(\mathcal{V}), E, F \in \Gamma(\mathcal{H})$ ). Si noti che in questa discussione i ruoli di  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{V}$  si possono scambiare.

Se  $\pi : (\bar{M}, \bar{g}) \rightarrow (M, g)$  è una sommersione riemanniana (cfr. Sezione 4.3), allora su  $\bar{M}$  abbiamo una distribuzione orizzontale  $\mathcal{H}$  e una distribuzione verticale  $\mathcal{V}$ . B. O'Neill introdusse due tensori fondamentali  $A$  e  $T$  per descrivere la geometria della sommersione. Se  $\bar{\nabla}$  è la connessione di Levi-Civita di  $\bar{M}$ , per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ :

$$A_X Y = h(\bar{\nabla}_{hX} vY) + v(\bar{\nabla}_{hX} hY), \quad T_X Y = h(\bar{\nabla}_{vX} vY) + v(\bar{\nabla}_{vX} hY).$$

Il tensore  $A$  è una ostruzione all'integrabilità della distribuzione orizzontale, ed è detto *tensore di integrabilità* di  $\pi$ . L'annullarsi del tensore  $T$  ci dice che le fibre della sommersione sono totalmente geodetiche.

## 6.9 Derivata covariante di tensori

### Lunghezza di tensori

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. La corrispondenza

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M), \quad X \longmapsto \omega, \quad \text{tale che } \omega(Y) = g(X, Y),$$

definisce un isomorfismo che permette di identificare in modo naturale  $\mathfrak{X}(M)$  con  $\Lambda^1(M)$ . Se  $X = \sum X^i e_i$  e  $\omega = g(X, \cdot) = \sum \omega_i \theta^i$ , con  $(\theta^i)$  base (locale) duale della base  $(e_i)$ , allora

$$\omega_i = \sum_j g_{ij} X^j \quad \text{e} \quad X^i = \sum_j g^{ij} \omega_j, \quad \text{dove } g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

La stessa procedura può essere applicata ai tensori di tipo  $(s, r)$ , in questo modo tutti gli spazi  $\mathfrak{X}^{s,r}(M)$ , con  $s + r = p$ , sono isomorfi. Questi isomorfismi commutano con la derivata covariante che definiremo nella sottosezione successiva. Se  $T \in \mathfrak{X}^{s,r}(M)$  ha componenti  $T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$ , allora il corrispondente tensore, che indichiamo ancora con  $T$ , di  $\mathfrak{X}^{r,s}(M)$  ha componenti

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum T_{k_1 \dots k_r}^{h_1 \dots h_s} g_{j_1 h_1} \dots g_{j_s h_s} g^{k_1 i_1} \dots g^{k_r i_r}.$$

In particolare se  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , cioè se la base locale  $(e_i)$  è ortonormale, allora  $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ . Se  $T, S \in T_p^{s,r} M$ ,

$$\langle T, S \rangle := \sum T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} S_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$$

definisce un prodotto scalare su  $T_p^{s,r} M$ . La *norma*, o *lunghezza*, è definita da

$$\|T\| = (\langle T, T \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

In particolare, se  $T, S$  sono due tensori covarianti dello stesso tipo e le componenti sono considerate rispetto a una base ortonormale, si ha

$$\langle T, S \rangle = \sum T_{ij \dots} S_{ij \dots}, \quad \|T\|^2 = \langle T, T \rangle = \sum (T_{ij \dots})^2.$$

**Esercizio 6.77.** Siano  $S, T$  due tensori covarianti dello stesso tipo su  $(M, g)$ , con  $S$  simmetrico e  $T$  antisimmetrico. Si verifichi che

$$\langle T, S \rangle = 0.$$

Inoltre, se  $T$  è di tipo  $(1, 1)$  e  $(E_1, \dots, E_n)$  è una base ortonormale, si verifichi che  $\|T\|^2 = \sum_i \|T(E_i)\|^2$ .

### Derivata covariante di tensori

Sia  $\nabla$  la connessione di Levi-Civita associata alla varietà riemanniana  $(M, g)$ . Se  $S$  è un tensore di tipo  $(s, r)$ ,  $\nabla S$  è il tensore di tipo  $(s, r + 1)$  definito da:

$$\begin{aligned} (\nabla S)(\theta^1, \dots, \theta^s, X, Y_1, \dots, Y_r) &:= (\nabla_X S)(\theta^1, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_r) \\ &= \nabla_X S(\theta^1, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r S(\theta^1, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s S(\theta^1, \dots, \theta^{i-1}, \nabla_X \theta^i, \theta^{i+1}, \dots, \theta^s, Y_1, \dots, Y_r), \end{aligned}$$

dove  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  è la base (locale) duale di una fissata base (locale)  $(e_1, \dots, e_n)$  di  $\mathfrak{X}(M)$ . Nel caso riemanniano, come osservato, un tensore di tipo  $(s, r)$  si può sempre identificare con un tensore di tipo  $(s - k, r + k)$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  tale che  $r + k, s - k \geq 0$ . Ciò è conseguenza del fatto, già osservato, che  $\mathfrak{X}(M)$  si può identificare in modo naturale con  $\Lambda^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ . Quindi, possiamo limitarci a considerare tensori  $S$  del tipo  $(0, r)$  oppure di tipo  $(1, r)$ , in tal caso per il tensore  $\nabla S$  si ha:

$$\begin{aligned} (\nabla S)(X, Y_1, \dots, Y_r) &:= (\nabla_X S)(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla_X S(Y_1, \dots, Y_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_r). \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà :

$$\begin{aligned}\nabla_X \langle T, S \rangle &= X(\langle T, S \rangle) = \langle \nabla_X T, S \rangle + \langle T, \nabla_X S \rangle, \\ \nabla_X(S_1 \otimes S_2) &= (\nabla_X S_1) \otimes S_2 + S_1 \otimes \nabla_X S_2, \\ \nabla_X(\text{tr}S) &= \text{tr}\nabla_X S,\end{aligned}$$

dove  $\text{tr}$  denota la traccia rispetto a una coppia di indici. Inoltre, se  $S_1$  e  $S_2$  sono tensori di tipo  $(1, 1)$  allora il tensore  $S_1 S_2 := S_1 \circ S_2$  è ancora di tipo  $(1, 1)$  e

$$\nabla_X(S_1 S_2) = (\nabla_X S_1)S_2 + S_1(\nabla_X S_2).$$

### Tensori paralleli

Mentre i campi di vettori paralleli rispetto alla connessione di Levi-Civita sono rari. Ciò non accade, in generale, per i campi tensoriali. Un campo tensoriale  $S$ , di tipo  $(0, r)$  o  $(1, r)$ , lungo una curva differenziabile  $\gamma(t)$  è un'applicazione che associa ad ogni  $t \in I$  un tensore  $S(t)$  del tipo  $(0, r)$  o  $(1, r)$  sullo spazio tangente  $T_{\gamma(t)}M$  che dipende differenziabilmente da  $t$ , nel senso che se  $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ ,  $S(t) = S(X_1(t), \dots, X_r(t))$  è differenziabile. Se  $f(t)$  è una funzione differenziabile, si pone  $\frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt}$ . Possiamo allora estendere la derivata covariante ai campi tensoriali lungo  $\gamma$  ponendo:

$$\begin{aligned}\frac{DS}{dt}(X_1(t), \dots, X_r(t)) &= \frac{D}{dt}S(X_1(t), \dots, X_r(t)) \\ &\quad - \sum_r^{i=1} S(X_1(t), \dots, \frac{DX_i}{dt}, \dots, X_r(t)).\end{aligned}$$

$DS/dt$  è un campo tensoriale dello stesso tipo di  $S$ . Diremo che  $S$  è un *tensore parallelo lungo la curva  $\gamma$*  se  $DS/dt = 0$ . Come per i campi di vettori paralleli, fissato un tensore  $S_0$  in  $\gamma(0)$ , si dimostra che esiste un solo campo tensoriale  $S(t)$  parallelo lungo  $\gamma$  tale che  $S(0) = S_0$ . Inoltre, indicato con  $\tau_t$  lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$  e posto

$$\tau_t(S_0)(V_1, \dots, V_r) := S_0(\tau_t^{-1}V_1, \dots, \tau_t^{-1}V_r) \quad \text{se } S_0 \text{ è di tipo } (0, r),$$

$$\tau_t(S_0)(V_1, \dots, V_r) := \tau_t(S_0(\tau_t^{-1}V_1, \dots, \tau_t^{-1}V_r)) \quad \text{se } S_0 \text{ è di tipo } (1, r),$$

dove  $V_1, \dots, V_r \in T_{\gamma(t)}M$ , risulta  $S(t) = \tau_t(S_0)$ . Si noti che: se  $S$  è un tensore di tipo  $(0, r)$  definito, mediante la metrica  $g$ , da un tensore  $S$  di tipo  $(1, r-1)$ , allora

$$\frac{DS}{dt}(X_1(t), \dots, X_r(t)) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{DS}{dt}(X_1(t), \dots, X_{r-1}(t)), X_r(t)\right).$$

Se  $S$  è un tensore di tipo  $(1, r)$  o  $(0, r)$  su  $M$ , e  $\gamma$  una curva differenziabile, allora

$$\frac{DS}{dt}(0) = \nabla_{\dot{\gamma}(0)}S.$$

Un campo tensoriale  $S$  su  $M$  è *invariante per parallelismo*, oppure è parallelo, se per ogni curva differenziabile  $\gamma$  di  $M$  si ha:  $S(t) = S(\gamma(t)) = \tau_t(S_0)$ , dove  $S_0 = S(0)$ . Segue facilmente che:

$$S \text{ è invariante per parallelismo} \iff \nabla_X S = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

### Derivata di Lie di un tensore

Nella Sezione 2.7 la derivata di Lie di un tensore  $S$  di tipo  $(0, p)$  (su una varietà differenziabile  $M$ ) è stata definita da:

$$(\mathcal{L}_\xi S)(Y_1, \dots, Y_p) = \mathcal{L}_\xi S(Y_1, \dots, Y_p) - \sum_{i=1}^p S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, [\xi, Y_i], Y_{i+1}, \dots, Y_p).$$

Se  $g$  è una metrica riemanniana su  $M$  e  $\nabla$  la corrispondente connessione di Levi-Civita, la precedente formula diventa:

$$(\mathcal{L}_\xi S)(Y_1, \dots, Y_p) = (\nabla_\xi S)(Y_1, \dots, Y_p) + \sum_{i=1}^p S(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \nabla_{Y_i} \xi, Y_{i+1}, \dots, Y_p).$$

In particolare:

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi),$$

quindi  $\xi$  è di *Killing* (cfr. Capitolo 9) se, e solo se, l'operatore  $\nabla \xi$  è antisimmetrico. Se  $\phi$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$ :

$$(\mathcal{L}_\xi \phi)Y = (\nabla_\xi \phi)Y - \nabla_{\phi Y} \xi + \phi \nabla_Y \xi.$$

Se  $\omega$  è la 1-forma  $g$ -duale di  $\xi$ ,  $\omega = g(\cdot, \xi)$ , allora:

$$(\mathcal{L}_\xi \omega)Y = g(\nabla_\xi \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, \xi).$$

Se  $M$  è orientabile e  $\Omega_g$  è la  $n$ -forma di volume riemanniano (cfr. Appendice A), allora (cfr. Appendice B)

$$\nabla_\xi \Omega_g = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_\xi \Omega_g = (\operatorname{div} \xi) \Omega_g.$$



# Capitolo 7

## Geodetiche su varietà riemanniane

Questo capitolo è dedicato alle curve geodetiche di una varietà riemanniana, alle loro proprietà, all'esponenziale riemanniana e al Teorema di Hopf-Rinow.

### 7.1 Esempi di curve geodetiche

Scopo principale di questa sezione è determinare le curve geodetiche degli spazi modello delle geometrie non-euclidee. Iniziamo con la seguente proposizione.

**Proposizione 7.1.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Se il sostegno  $\sigma(I)$  di una curva differenziabile  $\sigma : I \rightarrow M$  è il luogo dei punti fissi di un'isometria  $f$  di  $(M, g)$ , cioè  $\sigma(I) = \{p \in M : f(p) = p\}$ , allora  $\sigma$  (opportunamente parametrizzata) è una curva geodetica di  $M$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $p \in \sigma(I)$ ,  $p = \sigma(t_0)$ . Posto  $v = \dot{\sigma}(t_0)$ , per il Teorema di esistenza e unicità delle geodetiche, esiste un'unica geodetica  $\gamma(s)$ ,  $s \in ]-\delta, +\delta[$ , tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Poiché  $f$  è una isometria,  $\gamma_1 = f \circ \gamma$  è una geodetica con  $\gamma_1(0) = f(\gamma(0)) = f(p) = p$  e  $\dot{\gamma}_1(0) = (f \circ \gamma)'(0) = (f_*)_p \dot{\gamma}(0) = (f_*)_p \dot{\sigma}(t_0) = (f \circ \sigma)'(t_0) = \dot{\sigma}(t_0) = v$ . Dunque, per l'unicità della geodetica  $\gamma$  con le fissate condizioni iniziali, avremo  $(f \circ \gamma)(s) = \gamma(s)$ ,  $\forall s \in ]-\delta, +\delta[$  e quindi  $\gamma(]-\delta, +\delta[) \subset \sigma(I)$ . Ciò prova che  $\sigma$  è una geodetica in un intorno di  $p$  e quindi, per l'arbitrarietà di  $p$ ,  $\sigma$  è una geodetica (come insieme di punti).  $\square$

Più in generale, vale la seguente proposizione.

**Proposizione 7.2.** *Siano  $(\bar{M}, \bar{g})$  una varietà riemanniana e  $(M, g)$  una sottovarietà riemanniana di  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Se  $M$  è l'insieme dei punti fissi di una*

isometria  $\Phi$  di  $(\bar{M}, \bar{g})$ , cioè  $M = \{p \in \bar{M} : \Phi(p) = p\}$ , allora  $M$  è una sottovarietà totalmente geodetica di  $\bar{M}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ . Consideriamo una curva  $\sigma(s)$  di  $M$  con  $\sigma(0) = p$  e  $\dot{\sigma}(0) = v$ , inoltre consideriamo la geodetica  $\gamma(t)$  di  $\bar{M}$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ ,  $t \in ]-\delta, +\delta[$ . Poiché  $\sigma$  è una curva di  $M$  si ha  $\Phi \circ \sigma = \sigma$ , inoltre  $\Phi$  è un'isometria di  $\bar{M}$ , per cui  $\tilde{\gamma}(t) = \Phi(\gamma(t))$  è una curva geodetica di  $\bar{M}$  con  $\tilde{\gamma}(0) = \Phi(p) = p$  e  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \Phi_{*p} v = \Phi_{*p} \dot{\sigma}(0) = (\Phi \circ \dot{\sigma})(0) = \dot{\sigma}(0) = v$ . Pertanto, deve essere  $\Phi(\gamma(t)) = \gamma(t)$  e quindi  $\gamma \subset M$ . Poiché  $\gamma$  è una geodetica di  $\bar{M}$  contenuta in  $M$ , dall'equazione di Gauss:

$$0 = \frac{\bar{D}\dot{\gamma}}{dt} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} + \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$$

segue che  $D\dot{\gamma}/dt = 0$  e  $\alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$  per ogni  $t$ . In particolare,  $\gamma$  è una curva geodetica di  $M$  e  $\alpha_p(v, v) = 0$ . Dall'arbitrarietà di  $p$  e  $v$ , segue che la seconda forma fondamentale  $\alpha \equiv 0$  e quindi  $M$  è totalmente geodetica.  $\square$

Come osservato nell'Esempio 6.68, la sfera canonica  $\mathbb{S}^m$  è una sottovarietà riemanniana della sfera  $\mathbb{S}^n$ ,  $n > m$ . Inoltre, l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^{n-m}, \\ p = (x, y) &\mapsto \Phi(p) = (x, -y), \end{aligned}$$

è una trasformazione ortogonale di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e quindi un'isometria di  $\mathbb{S}^n$ . D'altronde,

$$\{p = (x, y) \in \mathbb{S}^n : \Phi(p) = p\} = \{p = (x, y) \in \mathbb{S}^n : y = 0\} = \mathbb{S}^m.$$

Pertanto, anche dalla Proposizione 7.2, segue che  $\mathbb{S}^m$  è una sottovarietà riemanniana totalmente geodetica di  $\mathbb{S}^n$ .

**Esercizio 7.3.** Determinare le isometrie del piano euclideo che ammettono una curva come luogo di punti fissi.

**Proposizione 7.4.** Sia  $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  un rivestimento riemanniano. Allora le geodetiche di  $(M, g)$  sono tutte e sole le proiezioni delle geodetiche di  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\tilde{\gamma}$  una geodetica di  $\tilde{M}$ , allora  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  è una geodetica di  $M$  perché  $p$  è un'isometria locale. Viceversa, sia  $\gamma$  una geodetica di  $M$ . Dati  $x_0 = \gamma(t_0) \in \gamma(I)$  e  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}\{x_0\}$ , consideriamo  $U$  intorno ben coperto di  $x_0$ ,  $\tilde{U}$  foglio su  $U$  per  $\tilde{x}_0$ . Allora,  $p_1 = p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  è un'isometria e quindi, se  $\gamma_1$  è l'arco di  $\gamma$  contenuto in  $U$ ,  $\tilde{\gamma}_1 = p_1^{-1} \circ \gamma_1$  è una geodetica su  $\tilde{M}$ . Pertanto  $\gamma_1 = p \circ \tilde{\gamma}_1$ , con  $\tilde{\gamma}_1$  geodetica, in un intorno di  $x_0$ . Lo stesso procedimento si può ripetere in un intorno di ogni punto di  $\gamma$ , ottenendo in questo modo la stessa  $\gamma$  come proiezione di una geodetica  $\tilde{\gamma}$  di  $\tilde{M}$ .  $\square$

**Esempio 7.5. Le geodetiche dello spazio euclideo**

Le geodetiche  $\gamma(t)$  dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  sono tutte e sole le rette (opportunitamente parametrizzate) o segmenti di retta. Infatti, in questo caso

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t) \quad \text{e quindi:}$$

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \Leftrightarrow (\ddot{x}_1(t), \dots, \ddot{x}_n(t)) = 0 \Leftrightarrow \gamma(t) = tv + x_0.$$

**Proposizione 7.6.** *Le geodetiche di un'ipersuperficie  $M$  dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{n+1}$  sono le curve  $\gamma(t)$  di  $M$  la cui accelerazione estrinseca  $\ddot{\gamma}(t) = d\dot{\gamma}/dt$  è ortogonale a  $M$ .*

*Dimostrazione.*  $D\dot{\gamma}/dt = 0 \Leftrightarrow (d\dot{\gamma}/dt)^\top = 0 \Leftrightarrow \ddot{\gamma}(t)$  è normale a  $M$ .  $\square$

**Esempio 7.7. Le geodetiche della sfera canonica**

Le geodetiche massimali della sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  sono tutte e sole le circonferenze (opportunitamente parametrizzate) di raggio massimo.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbb{S}^n$  la sfera unitaria di centro l'origine di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sia  $\sigma$  una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^n$ . Allora, esistono due punti  $u, v$  (su tale circonferenza) che, pensati come vettori unitari, risultano ortogonali fra loro, quindi si può scrivere

$$\sigma(t) = (\cos t)u + (\sin t)v \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Siccome  $\dot{\sigma}(t) = (-\sin t)u + (\cos t)v$ , allora

$$\frac{d\dot{\sigma}}{dt} = \ddot{\sigma}(t) = (-\cos t)u + (-\sin t)v = -\sigma(t)$$

è ortogonale a  $T_{\sigma(t)}\mathbb{S}^n = \sigma(t)^\perp$ , e quindi  $\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = (\ddot{\sigma}(t))^\top = 0$ . Pertanto le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche per  $\mathbb{S}^n$ . Viceversa, sia  $\gamma(t)$  un arco geodetico, parametrizzato a velocità unitaria, con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Allora, pensando  $p$  e  $v$  come vettori applicati nell'origine (centro della sfera), la curva  $\sigma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è una circonferenza di raggio massimo che soddisfa le condizioni  $\sigma(0) = p$  e  $\dot{\sigma}(0) = v$ . Pertanto, per l'unicità delle geodetiche con fissate condizioni iniziali, abbiamo che  $\gamma \subset \sigma$ .

Un altro modo per vedere che le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche di  $\mathbb{S}^n$  è il seguente. Sia  $\gamma$  una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^n$  e sia  $E$  il piano per il centro  $O$  di  $\mathbb{S}^n$  tale che  $\gamma = E \cap \mathbb{S}^n$ . Consideriamo la riflessione  $\Phi$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  rispetto al piano  $E$ :

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp$$

$$x = x_E + x_{E^\perp} \longmapsto \Phi(x) = x_E - x_{E^\perp}.$$

$\Phi$  è una trasformazione ortogonale di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Quindi,  $\phi = \Phi|_{\mathbb{S}^n}$  è una isometria di  $\mathbb{S}^n$ . D'altronde il piano  $E$  è l'autospazio di  $\Phi$  relativo all'autovalore  $+1$ . Pertanto, applicando la Proposizione 7.1,

$$\gamma = \mathbb{S}^n \cap E = \{x \in \mathbb{S}^n : x \in E\} = \{x \in \mathbb{S}^n : \Phi(x) = x\}$$

è una curva geodetica.  $\square$

**Esercizio 7.8.** Sia  $M$  una superficie regolare di  $\mathbb{R}^3$  simmetrica rispetto a un piano  $E$ . Verificare che la curva  $\gamma = E \cap M$  è una geodetica (come insieme di punti) di  $M$ .

**Esempio 7.9. Le geodetiche di una superficie di rotazione**

Consideriamo una superficie di rotazione  $M$  di  $\mathbb{R}^3$  ottenuta ruotando una curva piana regolare  $\gamma$  intorno ad un asse del piano della curva e che non intersechi la stessa curva. Supponiamo che il piano di  $\gamma$  sia il piano  $yz$ , l'asse di rotazione sia l'asse  $z$  e la curva  $\gamma$  sia parametrizzata da  $x = 0, y = r(u) > 0, z = z(u), u$  ascissa curvilinea, pertanto  $M$  (ottenuta ruotando  $\gamma$  intorno all'asse  $z$ ) ha equazioni parametriche  $x = r(u) \cos \vartheta, y = r(u) \sin \vartheta, z = z(u)$ . Dall'Esercizio 4.21 sappiamo che la metrica  $g$  indotta su  $M = \gamma \times S^1$ , dalla metrica euclidea di  $\mathbb{R}^3$ , è data da

$$g = du \otimes du + r^2(u) d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

Proviamo che le curve geodetiche della suddetta superficie di rotazione sono:

- 1) tutti i meridiani;
- 2) i paralleli  $\sigma(t)$  che hanno  $\xi_{\sigma(t)}$  (campo normale ad  $M$  in  $\sigma(t)$ ) ortogonale all'asse di rotazione;
- 3) le curve  $(u(t), \vartheta(t))$ , parametrizzate con l'ascissa curvilinea, che soddisfano il sistema:

$$(u'(t))^2 + r^2(u(t))(\vartheta'(t))^2 = 1, \quad r^2(u(t))\vartheta'(t) = c,$$

dove  $c$  è una costante associata alla geodetica.

Dall'Esercizio 6.57 sappiamo che i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  della connessione di Levi-Civita di  $g$  sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -r(u)r'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{r'(u)}{r(u)},$$

dove si è posto  $x_1 = u$  e  $x_2 = \vartheta$ . Dunque,  $\sigma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (u(t), \vartheta(t))$  è una curva geodetica se, e solo se, soddisfa le seguenti equazioni differenziali:

$$u''(t) - r(u)r'(u)(\vartheta'(t))^2 = 0, \quad \vartheta''(t) + 2(r'(u)/r(u))u'(t)\vartheta'(t) = 0. \quad (7.1)$$

Se  $\sigma(t)$ , con  $t$  ascissa curvilinea, è un meridiano di  $M$ , cioè

$$\sigma(t) = (u(t), \text{cost.}) = (u(t), \vartheta_0), \quad u'(t) \neq 0,$$

allora  $\vartheta'(t) = \vartheta''(t) = 0$ . Inoltre,

$$1 = g(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = (u'(t))^2 \Rightarrow u''(t) = 0.$$

Dunque, il sistema (7.1) è identicamente soddisfatto, e quindi tutti i meridiani sono curve geodetiche.

Sia ora  $\sigma(t)$ , con  $t$  ascissa curvilinea, un parallelo di  $M$ , cioè  $\sigma(t) = (\text{cost.}, \vartheta(t)) = (u_0, \vartheta(t))$ . Allora,  $\dot{\sigma}(t) = (0, \vartheta'(t))$  e

$$\begin{aligned} 1 &= g(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = r^2(u_0)(\vartheta'(t))^2 \\ &\Rightarrow r^2(u_0)\vartheta'(t)\vartheta''(t) = 0 \Rightarrow \vartheta''(t) = 0 \quad (\text{siccome } \vartheta'(t) \neq 0). \end{aligned}$$

Dunque la seconda equazione del sistema (7.1) è identicamente soddisfatta, mentre la prima equazione diventa  $r(u_0)r'(u_0)(\vartheta'(t))^2 = 0$ . Siccome  $r(u_0) \neq 0$ , il parallelo  $\sigma(t)$  è una geodetica se e solo se  $r'(u_0) = 0$ . La condizione  $r'(u_0) = 0$  significa che la tangente alla curva generatrice nel punto  $\sigma(t)$  è parallela all'asse  $z$ , equivalentemente  $\xi_{\sigma(t)}$  (campo normale ad  $M$  in  $\sigma(t)$ ) è ortogonale all'asse di rotazione (cfr. Figura 7.1).

Infine, il risultato enunciato in 3) si ottiene dal sistema (7.1).

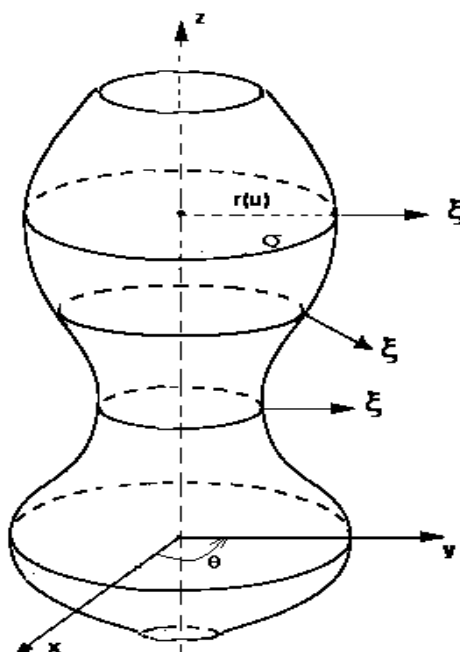


Figura 7.1: Geodetiche di una superficie di rotazione.

**Osservazione 7.10.** Esaminando il sistema di equazioni differenziali del punto 3) relativo all'Esempio 7.9, si ottiene che la geodetica  $\gamma$ , che soddisfa tale sistema, oscilla tra due paralleli consecutivi che verificano la condizione  $r(u) = c$  e ai quali essa è tangente. Se uno di questi paralleli è estremo ( $r'(u) = 0$ ), allora la geodetica è asintotica a questo parallelo che è esso stesso una geodetica.

### Esempio 7.11. Le geodetiche di una superficie torica

In una superficie torica, con la metrica canonica, un meridiano è costituito da due circonferenze che saranno quindi geodetiche; tra i paralleli solo quello di raggio max e quello di raggio minimo sono geodetiche. Consideriamo ora il toro piatto  $(\mathbb{T}^2, g)$ , dunque il rivestimento

$$p : (\mathbb{R}^2, g_0) \rightarrow (\mathbb{T}^2, g), (x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}),$$

è riemanniano e le geodetiche di  $(\mathbb{T}^2, g)$  sono tutte e sole le immagini delle rette di  $\mathbb{R}^2$ . In particolare, data la retta  $r(t) : x = t, y = kt$ , di coefficiente angolare  $k$ , la geodetica  $\gamma(t) = p(r(t))$  è una curva chiusa se, e solo se,  $k$  è razionale:

$$\begin{aligned} \gamma \text{ chiusa} &\Leftrightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2, \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \\ &\Leftrightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2, e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i t_2} \text{ e } e^{2\pi i k t_1} = e^{2\pi i k t_2} \\ &\Leftrightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 \neq t_2, t_1 - t_2, k(t_1 - t_2) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, se  $k$  è irrazionale, la geodetica  $\gamma(t)$  non può essere chiusa; in questo caso  $\gamma(\mathbb{R})$  è un sottoinsieme denso di  $\mathbb{T}^2$  (cfr. [14], p.86). Queste proprietà osservate per le geodetiche di  $\mathbb{T}^2$  non si verificano per le geodetiche di  $\mathbb{R}^2$ , quindi le geodetiche di uno spazio localmente isometrico allo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  possono avere un comportamento molto diverso dalle geodetiche di  $\mathbb{R}^n$ .

### Esempio 7.12. Le geodetiche dello spazio proiettivo

Sullo spazio proiettivo  $\mathbb{P}^n$  consideriamo la metrica  $h$  definita dal rivestimento  $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \{\pm I_d\}$ ,  $g = p^*h$ , dove  $g$  è la metrica canonica di  $\mathbb{S}^n$ . Quindi,  $p$  definisce un rivestimento riemanniano e le geodetiche di  $\mathbb{P}^n$  sono tutte e sole le proiezioni delle geodetiche di  $\mathbb{S}^n$  (cfr. Figura 7.2).

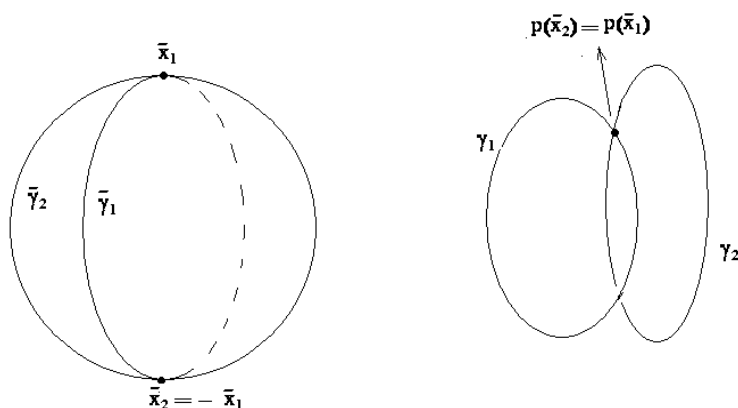


Figura 7.2: Geodetiche del piano proiettivo

Sia  $\gamma(t)$  una geodetica massimale di  $\mathbb{P}^n$ , allora esiste  $\tilde{\gamma}$  circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^n$  tale che  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ , e quindi

$$\gamma(t + \pi) = p \circ \tilde{\gamma}(t + \pi) = p(-\tilde{\gamma}(t)) = p(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t).$$

Pertanto, le geodetiche massimali di  $\mathbb{P}^n$  sono curve chiuse di periodo  $\pi$  (radianti). Inoltre, mentre due geodetiche massimali distinte  $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$  di  $\mathbb{S}^n$  hanno due punti in comune, due geodetiche massimali distinte di  $\mathbb{P}^n$  hanno un solo punto in comune. Infatti:

$$\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2 = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\} \implies \tilde{x}_1 = -\tilde{x}_2 \implies p(\tilde{x}_2) = p(\tilde{x}_1).$$

**Osservazione 7.13.** Assumendo come “rette” del piano proiettivo  $\mathbb{P}^2$  le sue geodetiche massimali, si ottiene un modello di geometria non euclidea ellittica. Per quanto visto prima, dati  $x \in \mathbb{P}^2$  e  $\gamma$  “retta” con  $x \notin \gamma$ , non esiste una “retta”  $\gamma'$  tale che  $x \in \gamma'$  e  $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$ , quindi non vale il postulato delle parallele della geometria euclidea. Si noti inoltre che per ogni  $x, y \in \mathbb{P}^2, x \neq y$ , esiste un’unica “retta” che congiunge  $x$  e  $y$  (ciò non accade per la sfera  $\mathbb{S}^2$ ).

Determiniamo ora le geodetiche della geometria iperbolica nei vari modelli.

**Esempio 7.14. Le geodetiche dell’iperboloide  $H^n$**

Le curve geodetiche dell’iperboloide  $H^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0$ , munito della metrica iperbolica indotta dalla metrica di Minkowski  $q$ , sono tutte e sole le curve (le iperboli) intersezioni di  $H^n$  con i piani di  $\mathbb{R}^{n+1}$  passanti per l’origine.

*Dimostrazione.* Per determinare le geodetiche di  $H^n$  procediamo come per le geodetiche di  $\mathbb{S}^n$ . Sia  $\mathcal{C}$  la curva intersezione di  $H^n$  con un piano  $E$  passante per l’origine. Siano  $x$  un punto di  $\mathcal{C}$  e  $v$  un vettore tangente in  $x$  a  $\mathcal{C}$ . Quindi  $v \in T_x H^n = x^\perp$ , dove  $\perp$  è considerata rispetto a  $q$ ; in particolare possiamo prendere  $v$  unitario, quindi  $q(x, v) = 0$  e  $q(v, v) = 1$ . Consideriamo la curva parametrizzata

$$\gamma(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)v, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$  e  $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$ ;  $\gamma(0) = x \in H^n$  e

$$\begin{aligned} q(\gamma(t), \gamma(t)) &= (\cosh^2 t)q(x, x) + (\sinh^2 t)q(v, v) \\ &+ 2(\sinh t \cosh t)q(x, v) = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1 \end{aligned}$$

implicano che  $\gamma$  è una curva di  $H^n$ . Dunque,  $\gamma(t)$  è una curva di  $H^n \cap E$  e quindi una parametrizzazione del ramo di iperbole  $\mathcal{C}$ . Il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  e l’accelerazione estrinseca  $\ddot{\gamma}(t)$  sono dati da

$$\dot{\gamma}(t) = (\sinh t)x + (\cosh t)v, \quad \ddot{\gamma}(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)v = \gamma(t).$$

Quindi  $D\dot{\gamma}/dt$ , proiezione  $q$ -ortogonale di  $\ddot{\gamma}(t)$  su  $T_{\gamma(t)}H^n = \gamma(t)^\perp$ , è data da  $(\ddot{\gamma}(t))^\top = 0$ . Pertanto,  $\gamma(t)$  è una geodetica di  $H^n$ . Viceversa, sia  $\sigma(t)$  una geodetica di  $H^n$  parametrizzata a velocità unitaria, con  $\sigma(0) = x$  e  $\dot{\sigma}(0) = v$ . Allora,  $x$  e  $v$ , pensati entrambi come vettori, sono  $q$ -ortogonali (in quanto  $v \in T_x H^n = x^\perp$ ) con  $q(v, v) = 1$  e  $q(x, x) = -1$ , e il ramo di iperbole  $\gamma(t) = (\cosh t)x + (\sinh t)v$  soddisfa le condizioni iniziali  $\gamma(0) = x$  e  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Pertanto, applicando il teorema di esistenza e unicità per le curve geodetiche, abbiamo che  $\sigma \subset \gamma$ . Un altro modo di procedere per determinare le geodetiche di  $H^n$  è il seguente. Sia  $E$  un piano per  $O$  e per  $x_1, x_2$ , con  $x_1, x_2 \in H^n$ . Posto  $E^\perp = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : q(y, x) = 0 \quad \forall x \in E\}$ , si ha

$$\mathbb{R}^{n+1} = E \oplus E^\perp \quad \text{e} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1} : x = x_E + x_{E^\perp}.$$

L'applicazione

$$s : x = x_E + x_{E^\perp} \mapsto s(x) = x_E - x_{E^\perp}$$

è un elemento di  $O(n, 1)$ . Infatti:

$$q(s(x), s(y)) = q(x_E, y_E) + q(x_{E^\perp}, y_{E^\perp}) = q(x_E + x_{E^\perp}, y_E + y_{E^\perp}) = q(x, y).$$

Inoltre,  $s^2 = I$  e quindi  $s^{-1} = s$ . Se  $x \in H^n$ , poiché  $q(s(x), s(x)) = q(x, x)$ , allora  $s(x) \in \bar{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : q(x, x) = -1\}$  che ha due componenti connesse, la falda superiore  $H^n$  e la falda inferiore. Siccome  $s(x_1) = x_1$ ,  $s(x_2) = x_2 \in H^n$ ,  $s(H^n)$  dovendo essere connesso sarà necessariamente contenuto in  $H^n$ . Quindi,  $s(H^n) \subset H^n$ . Viceversa,  $y \in H^n \Rightarrow x = s^{-1}(y) \in H^n \Rightarrow y = s(x) \in s(H^n)$ . Pertanto,  $s(H^n) = H^n$  e quindi  $s \in O_+(n, 1) = \text{Iso}(H^n)$ . Di conseguenza, applicando la Proposizione 7.1,  $\gamma = E \cap H^n$  (luogo dei punti fissi di  $s$ ) è geodetica per  $H^n$ .  $\square$

**Esempio 7.15. Le geodetiche del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$**

Le geodetiche massimali del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  sono tutte e sole le semirette parallele all'asse  $y$  e le semicirconferenze con centro sull'asse  $x$  (cfr. Figura 7.3).

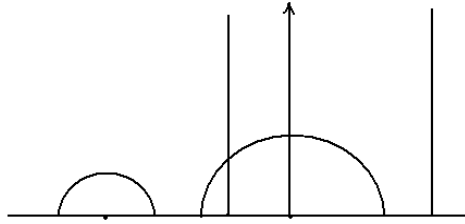


Figura 7.3: Le geodetiche di  $\mathbb{R}_+^2$ .

*Dimostrazione.* Per determinare le geodetiche del piano iperbolico consideriamo le seguenti isometrie di  $\mathbb{R}_+^2$  (cfr. Proposizione 5.40):

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= (-x, y), \\ \psi_2(x, y) &= (1/\|p\|^2)p, \quad \text{dove } p = (x, y), \\ \psi_3(x, y) &= (x + a, y), \\ \psi_4(x, y) &= (ax, ay), \quad a > 0. \end{aligned}$$

Applicando la Proposizione 7.1 all'isometria  $\psi_1$ , si ha che la semiretta  $\gamma_1 : \begin{cases} y > 0 \\ x = 0 \end{cases}$  è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$ . Applicando la stessa proposizione a  $\psi_2$ , si ha che la semicirconferenza  $\gamma_2 : \begin{cases} y > 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$  è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$ .



Ogni semiretta parallela all'asse  $y$ , cioè del tipo  $\begin{cases} y > 0 \\ x = \lambda \end{cases}$ , è una geodetica di  $\mathbb{R}_+^2$  in quanto immagine di  $\gamma_1$  mediante un'isometria del tipo  $\psi_3$ . Ogni semicirconferenza di  $\mathbb{R}_+^2$  del tipo  $\gamma_3 : \begin{cases} y > 0 \\ x^2 + y^2 = \lambda^2 \end{cases}$ , cioè di centro l'origine e raggio  $\lambda$ , è una geodetica in quanto immagine di  $\gamma_2$  mediante un'isometria del tipo  $\psi_4$  con  $a = \lambda$ . Infine, ogni semicirconferenza di  $\mathbb{R}_+^2$  con centro  $(a, 0)$  e raggio  $\lambda$  è una geodetica in quanto immagine di  $\gamma_3$  mediante un'isometria del tipo  $\psi_3$ . Le curve esaminate sono tutte e sole le geodetiche di  $\mathbb{R}_+^2$  in quanto, per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e per ogni  $v \in T_p\mathbb{R}_+^2$ , esiste una geodetica del tipo di prima passante per  $p$  e avente  $v$  come vettore tangente in  $p$  (cfr. Figura 7.4).  $\square$

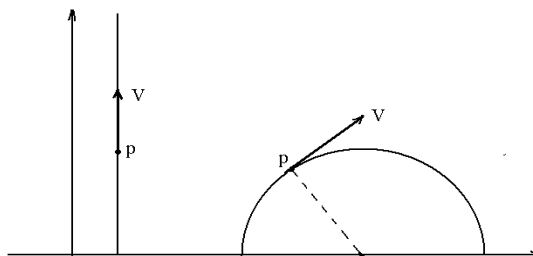


Figura 7.4: Geodetiche tangenti a vettori di  $T_p\mathbb{R}_+^2$ .

**Osservazione 7.16.** L'Esempio 7.15 determina le geodetiche del piano iperbolico come insiemi di punti. Osserviamo che il semiasse positivo delle  $y$  parametrizzato da  $\gamma_1(t) = (0, e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è una curva geodetica, inclusa la parametrizzazione, in quanto il suo vettore velocità  $\dot{\gamma}_1(t) = (0, e^t)$  ha lunghezza costante unitaria. Oppure, ricordando che il campo vettoriale  $E_2 = y\partial_y$  è un campo geodetico (cfr. Esempio 6.41), basta osservare che il vettore velocità  $\dot{\gamma}_1(t) = (E_2)_{\gamma_1(t)}$ . Inoltre, osserviamo che le trasformazioni di Möbius (reali), espresse in coordinate reali da

$$z = (x, y) \longrightarrow \left( \frac{ac(x^2 + y^2) + (ad + bc)x + db}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right),$$

sono isometrie per il piano iperbolico (cfr. Sezione 5.6). In particolare, la trasformazione di Möbius  $\psi$  definita dai coefficienti  $a = c = d = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  trasforma la geodetica  $\gamma_1(t)$  nella geodetica

$$\gamma_2(t) = \psi(\gamma_1(t)) = \left( \frac{(e^{2t} - 1)}{(e^{2t} + 1)}, \frac{2e^t}{(e^{2t} + 1)} \right), t \in \mathbb{R},$$

che è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio unitario. Procedendo in questo modo, tutte le geodetiche dell'Esempio 7.15 si possono ottenere come curve geodetiche parametrizzate.

**Esercizio 7.17.** Si consideri il semipiano  $\mathbb{R}_+^2$  con la metrica iperbolica  $g = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$ . Si verifichi, usando l'Esercizio 6.56, che una curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  è una curva geodetica parametrizzata del piano iperbolico se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali

$$x''(t) - 2\frac{x'(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \quad y''(t) + \frac{x'^2(t) - y'^2(t)}{y(t)} = 0. \quad (*)$$

Quindi, si verifichi che le geodetiche parametrizzate  $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$  dell'Osservazione 7.16 soddisfano il sistema di equazioni differenziali (\*). Pertanto, le geodetiche del piano iperbolico si possono parametrizzare con  $\tilde{\gamma}_1(t) = (x_0, e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , semiretta parallela all'asse delle  $y$ , e con

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \left( x_0 + R\frac{(e^{2t} - 1)}{(e^{2t} + 1)}, R\frac{2e^t}{(e^{2t} + 1)} \right) = (x_0 + R \tanh t, R \operatorname{sech} t), \quad t \in \mathbb{R},$$

che è la semicirconferenza di centro  $(x_0, 0)$  e raggio  $R$ .

**Osservazione 7.18.** Assumendo come "rette" del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$  le sue geodetiche massimali, si ottiene un modello di geometria non euclidea iperbolica. In questo caso, rispetto al caso euclideo, il postulato delle parallele perde l'unicità: dati  $p \in \mathbb{R}_+^2$  e  $\gamma$  "retta" con  $p \notin \gamma$ , esistono infinite geodetiche per  $p$  che non incontrano  $\gamma$  (cfr. Figura 7.5). Inoltre, per ogni  $x, y \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $x \neq y$ , esiste una sola "retta" che li congiunge.

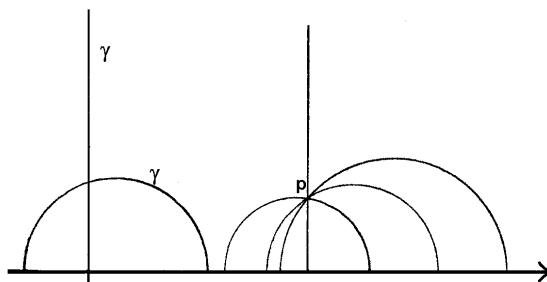


Figura 7.5: Esistenza di infinite geodetiche per  $p$  che non incontrano  $\gamma$ .

**Esempio 7.19. Le geodetiche dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$**

Le geodetiche massimali dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$ , ossia del semispazio  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  con la metrica iperbolica  $g = (1/x_n^2)(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$ , sono tutte e sole le semirette parallele all'asse  $x_n$  e le semicirconferenze con centro sull'iperpiano  $x_n = 0$  e ortogonali allo stesso iperpiano.

*Dimostrazione.* Consideriamo l'applicazione

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-x_1, \dots, -x_{n-1}, x_n).$$

$\Phi$  è una simmetria rispetto al semiasse  $\gamma_1 : \begin{cases} x_n > 0 \\ x_1 = \dots = x_{n-1} = 0 \end{cases}$ , quindi una isometria euclidea che applica  $\mathbb{R}_+^n$  in  $\mathbb{R}_+^n$ , pertanto  $\Phi$  è un'isometria dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$ . Di conseguenza,  $\gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) = x\}$  è una geodetica per  $\mathbb{R}_+^n$ . Sia ora  $\gamma_j$  una generica semicirconferenza di centro  $O$  ortogonale all'iperpiano  $\Pi_n : x_n = 0$ . Consideriamo il piano  $E_j = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_h = 0, h = 1, \dots, n-1, h \neq j\}$  e la semisfera  $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ , allora  $\gamma_j = E_j \cap \mathbb{S}_+^{n-1}$  è una semicirconferenza. Inoltre, i piani  $E_j$  sono ortogonali all'iperpiano  $\Pi_n$ . Infatti:

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 = x_2 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_{n-1} = 0\},$$

e

$$\Pi_n^\perp = \text{asse } x_n \subset E_j \quad \forall j = 1, \dots, n-1.$$

Quindi, la semicirconferenza  $\gamma_j \subset E_j$  è ortogonale all'iperpiano  $x_n = 0$ . Denotiamo con  $\psi$  l'isometria di  $\mathbb{R}_+^n$  definita da

$$\psi : x = (x_i) \mapsto \psi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

L'applicazione  $\psi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che

$$x \mapsto \psi_j(x) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_{j-1}, x_j, -x_{j+1}, \dots, -x_{n-1}, x_n),$$

è un'isometria euclidea di  $\mathbb{R}^n$  che applica  $\mathbb{R}_+^n$  in  $\mathbb{R}_+^n$ , quindi anche  $\psi_j$  è un'isometria di  $\mathbb{R}_+^n$ . Siccome

$$\{x \in \mathbb{R}_+^n : \psi(x) = x\} \cap \{x \in \mathbb{R}_+^n : \psi_j(x) = x\} = \mathbb{S}_+^{n-1} \cap E_j = \gamma_j,$$

$\gamma_j$  è una geodetica per  $\mathbb{R}_+^n$ . Proviamo ora che ogni semiretta  $\gamma'_1$  di  $H^n$  parallela all'asse  $x_n$ , è una curva geodetica (opportunitamente parametrizzata). Infatti  $\gamma'_1 = \psi(\gamma_1)$ , dove  $\psi$  è un'isometria di  $\mathbb{R}_+^n$  del tipo

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (\phi(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$$

con  $\phi$  traslazione dell'iperpiano  $\mathbb{R}^{n-1}$  di equazione  $x_n = 0$ . Anche la semicirconferenza  $\gamma'_j = E_j \cap \mathbb{S}_+^{n-1}(\lambda)$ , dove  $\mathbb{S}_+^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \|x\|^2 = \lambda^2\}$ , è una curva geodetica in quanto  $\gamma'_j = \psi(\gamma_j)$ , dove  $\psi$  è l'isometria di  $\mathbb{R}_+^n$  definita da  $\psi(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ . Infine, ogni semicirconferenza  $\gamma''_j$  con centro sull'iperpiano  $x_n = 0$  e ortogonale allo stesso iperpiano è una curva geodetica. Infatti,  $\gamma''_j = \psi(\gamma'_j)$ , dove  $\psi$  è un'isometria del tipo  $\psi(x_1, \dots, x_n) = (\phi(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$  con  $\phi$  isometria dell'iperpiano  $\mathbb{R}^{n-1} : x_n = 0$ . Le curve esaminate sono tutte e sole le geodetiche di  $\mathbb{R}_+^n$ . Infatti, per ogni  $p \in \mathbb{R}_+^n$  e per ogni  $v \in T_p \mathbb{R}_+^n$ , esiste certamente una geodetica del tipo di prima che passa per  $p$  con vettore tangente (in  $p$ )  $v$ .  $\square$

**Osservazione 7.20. (Geodetiche parametrizzate di  $\mathbb{R}_+^n$ )**

Per determinare le geodetiche parametrizzate dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$ , possiamo procedere nel modo seguente. Sia  $E^2$  un piano di  $\mathbb{R}^n$  contenente l'asse  $x_n$ , quindi  $E^2 = \text{span}(e_n, v)$ , dove  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  e  $v$  è un vettore unitario dell'iperpiano  $\mathbb{R}^{n-1}$  definito da  $x_n = 0$ , ovvero  $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0)$  e  $g_0(v, v) = 1$ . Quindi  $E^2$  è un piano ortogonale all'iperpiano  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Sia

$$E_+^2 = \{x \in E^2 : \lambda v + x_n e_n, \lambda \in \mathbb{R}, x_n > 0\}$$

il semipiano superiore. Il semiasse positivo delle  $x_n$  si può parametrizzare con  $\gamma_1(t) = (0, \dots, 0, e^t)$ . La semicirconferenza di centro l'origine e raggio  $R$  del semipiano  $E_+^2$  si può parametrizzare, come visto nell'Esercizio 7.17, con  $\gamma_2(t) = R(\tanh t)v + R(\text{sech } t)e_n$ . Se  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, 0)$  è un generico punto dell'iperpiano  $\mathbb{R}^{n-1}$ , la curva

$$\tilde{\gamma}_1(t) = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, e^t)$$

è una semiretta parallela al semiasse positivo delle  $x_n$ , e la curva

$$\tilde{\gamma}_2(t) = x_0 + R(\tanh t)v + R(\text{sech } t)e_n$$

è una semicirconferenza, ortogonale all'iperpiano  $\mathbb{R}^{n-1}$ , di centro  $x_0$  e raggio  $R$ . D'altronde, usando i coefficienti  $\Gamma_{ij}^k$  dell'Esercizio 6.56, si ottiene che una curva  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  è una curva geodetica parametrizzata dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$  se, e solo se, è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{2}{x_n(t)} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_n}{dt} &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{d^2 x_n}{dt^2} + \frac{1}{x_n(t)} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 - \left( \frac{dx_n}{dt} \right)^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Le geodetiche parametrizzate  $\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t)$  soddisfano il suddetto sistema di equazioni differenziali.

**Esempio 7.21. Le geodetiche del disco iperbolico**

*Le geodetiche del disco iperbolico  $\Delta^2$  sono tutti e soli i diametri e gli archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente il bordo  $\partial\Delta^2$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $H^2$  la falda superiore dell'iperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ . Consideriamo la proiezione stereografica  $f : H^2 \rightarrow \Delta^2$ ,  $P \mapsto f(P) = (\text{retta PS}) \cap (\text{piano } z=0) = (\text{retta PS}) \cap \Delta^2$ , dove  $S = (0, 0, -1)$ .  $f$  è una isometria tra i due modelli iperbolici, quindi le geodetiche di  $\Delta^2$  sono tutte e sole le immagini tramite  $f$  delle geodetiche di  $H^2$ . Se  $\gamma$  è una geodetica di  $H^2$  data da  $H^2 \cap E$ , dove  $E$  è un piano contenente l'asse  $z$ , allora la sua proiezione  $f(\gamma)$  su  $\Delta^2$  è chiaramente un diametro. Negli altri casi si ottengono invece archi di circonferenza che incontrano ortogonalmente  $\partial\Delta^2$ .  $\square$

Il risultato dell'Esempio 7.21 vale anche per il disco iperbolico  $\Delta^n$ .

**Osservazione 7.22.** Nel modello iperbolico proiettivo (o modello di Klein) sul disco  $\Delta^n$ , le geodetiche sono segmenti di retta. Infatti, esse si ottengono

come immagini delle geodetiche di  $H^n$  mediante la  $\varphi_{n+1}$  (cfr. Osservazione 4.27). Nel modello iperbolico di Poincaré sulla semisfera  $\mathbb{S}_+^n$ , le geodetiche sono archi di circonferenza tracciati su  $\mathbb{S}_+^n$  che incontrano ortogonalmente  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\Delta^n$ . Infatti, esse si ottengono come controimmagini delle geodetiche di  $\Delta^n$  mediante la proiezione stereografica  $\psi$  (cfr. Osservazione 4.27).

## 7.2 Esponenziale e geodetiche minimali

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. In questa sezione studieremo l'esponenziale riemanniana e la questione: "dati due punti  $p$  e  $q$  di  $M$ , esiste una geodetica minimale che li congiunge?"

**Definizione 7.23.** Una geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  congiungente due punti  $p, q$ , si dice *geodetica minimale* se

$$L(\gamma) = d(p, q), \text{ cioè se } L(\gamma) \leq L(\sigma) \quad \forall \sigma \in C(p, q).$$

In generale, come vedremo, solo localmente le geodetiche hanno la proprietà di essere minimali. Vediamo ora con degli esempi le diverse situazioni che si possono presentare.

**Esempio 7.24.** Sia  $M$  lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Si verifica facilmente che: tra tutte le curve che congiungono due punti  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , il segmento di retta  $\gamma(t) = (1-t)p + tq$ ,  $t \in [0, 1]$ , è quello che realizza la minima distanza.

**Esempio 7.25.** La sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  e lo spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$ , come vedremo nel seguito di questa sezione, sono varietà riemanniane geodeticamente complete e quindi, per il Teorema di Hopf-Rinow (cfr. Teorema 7.50) comunque prendiamo due punti esiste sempre una geodetica minimale che li congiunge. Se  $p, q \in \mathbb{S}^n$  non sono antipodali, cioè  $q \neq -p$ , allora esiste un'unica geodetica minimale  $\gamma$  che li congiunge. Se  $p, q \in \mathbb{S}^n$  sono antipodali, esistono infinite geodetiche minimali che li congiungono. Nel caso dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$ , comunque si considerano due punti distinti esiste un'unica geodetica minimale che li congiunge.

**Esempio 7.26.** Sia  $(M, g) = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g_0)$ . Se  $p = (1, 0)$  e  $q = (-1, 0)$ , allora non esiste una geodetica che li congiunge.

**Esempio 7.27.** Sia  $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  un cilindro circolare retto munito della metrica canonica  $g$ . Poiché il rivestimento  $F : (\mathbb{R}^2, g_0) \rightarrow (M, g)$ ,  $(\vartheta, \varphi) \mapsto (e^{i\vartheta}, \varphi)$  è riemanniano, le geodetiche di  $M$  sono le rette generatrici, le circonferenze e le eliche. Se  $p, q$  appartengono alla stessa circonferenza, allora esistono due archi di geodetica che li congiungono di cui uno minimale. Se  $p, q$  non appartengono alla stessa circonferenza, verifichiamo che esistono infinite geodetiche che li congiungono le cui lunghezze non sono uguali. L'isometria locale  $F$  sviluppa il cilindro sul piano (cfr. Figura 7.6). Poniamo  $F(0, 0) = p$  e  $F(\vartheta_0, \varphi_0) = q$  con  $\vartheta_0 \neq 0$ , quindi  $p, q$  non appartenenti alla stessa generatrice.

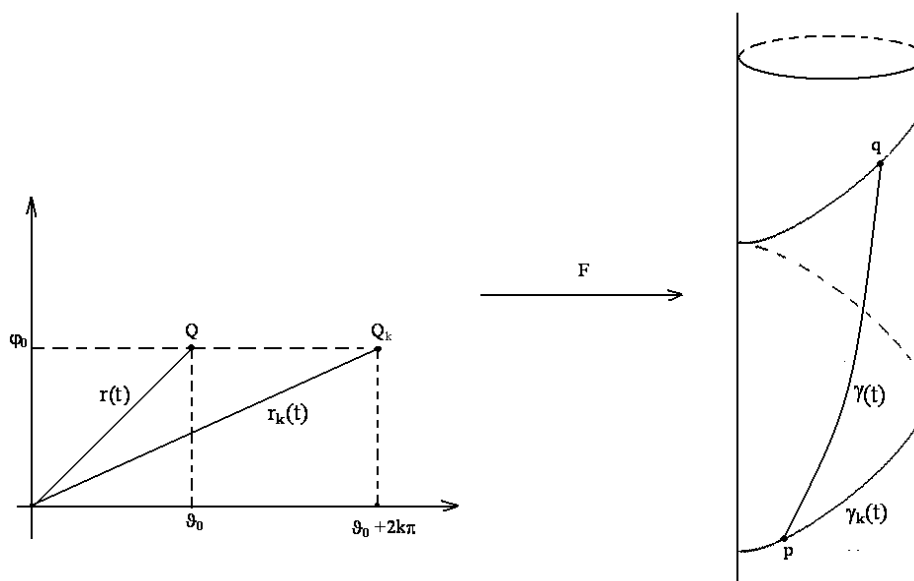


Figura 7.6: Le geodetiche del cilindro.

Se  $r(t)$  è il segmento  $\overline{OQ}$ ,  $Q(\vartheta_0, \varphi_0)$ , l'elica  $\gamma(t) = F(r(t))$  è una geodetica che congiunge  $p$  e  $q$ . Se consideriamo  $Q_k = (\vartheta_0 + 2k\pi, \varphi_0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , e  $r_k(t)$  è il segmento  $\overline{OQ_k}$ , allora  $\gamma_k(t) = F(r_k(t))$  è una geodetica che congiunge, per ogni  $k$ , gli stessi punti. La geodetica minimale è l'arco di elica che corrisponde al segmento  $\overline{OQ}$  con  $Q(\vartheta_0, \varphi_0)$ ,  $0 < \vartheta_0 < 2\pi$ . In particolare, se  $p, q$  appartengono alla stessa generatrice, vale il discorso di prima:  $F(\vartheta_0, \varphi_0) = p$ ,  $F(\vartheta_0 + 2k\pi, \varphi_1) = F(\vartheta_0, \varphi_1) = q$ , e la geodetica minimale è il segmento di generatrice che congiunge  $p$  e  $q$ .

### L'applicazione esponenziale (riemanniana)

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Nel seguito di questa sezione con  $\| \cdot \|$  denoteremo, salvo avviso contrario, la norma rispetto alla metrica riemanniana  $g$ . Sia  $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$  il campo vettoriale flusso geodetico definito nella Appendice C. Fissato  $p_0 \in M$ , e quindi  $z_0 \in TM$ ,  $z_0 = (p_0, V_0)$ ,  $V_0 = 0 \in T_{p_0}M$ , applicando il Teorema 2.35 al campo di vettori  $\xi$ , si ha che esiste un intorno aperto  $\tilde{U}$  di  $z_0$  che possiamo pensare del tipo  $\tilde{U} = U \times B(0, \delta)$ , dove  $U$  è un intorno aperto di  $p_0$  in  $M$  e  $B(0, \delta) = \{V \in T_{p_0}M : \|V\| < \delta\}$ , ed esiste un  $\epsilon > 0$  tale che per ogni  $z \in \tilde{U}$ ,  $z = (p, V)$ , esiste un'unica curva  $\tilde{\gamma}_z$  (curva integrale di  $\xi$  con inizio in  $z$ ):

$$\tilde{\gamma}_z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM, t \mapsto \tilde{\gamma}_z(t), \text{ con } \tilde{\gamma}_z(0) = z \text{ e } \dot{\tilde{\gamma}}_z(t) = \xi_{\tilde{\gamma}_z(t)}.$$

Siccome  $\xi$  è il flusso geodetico,  $\tilde{\gamma}_z(t)$  è del tipo  $\tilde{\gamma}_z(t) = (\gamma_z(t), \dot{\gamma}_z(t))$  con  $\gamma_z(t)$  curva geodetica di  $M$  tale che  $\gamma_z(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_z(0) = V$  (cioè,  $\tilde{\gamma}_z(0) = z$ ).

Ricapitolando, possiamo descrivere il risultato ottenuto con la seguente proposizione.

**Proposizione 7.28.** *Per ogni fissato  $p_0 \in M$ , esistono un intorno aperto  $U$  di  $p_0$ , un  $\delta > 0$  e un  $\epsilon > 0$  tali che per ogni  $p \in U$  e per ogni  $V \in T_p M$ ,  $\|V\| < \delta$ , esiste un'unica curva geodetica  $\gamma_{p,V}(t)$ , definita per  $|t| < \epsilon$ , con  $\gamma_{p,V}(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_{p,V}(0) = V$ .*

Consideriamo la geodetica  $\gamma_{p,V}(t)$ , definita per  $|t| < \epsilon$ . Se  $\lambda$  è una costante  $\neq 0$ , la curva  $\sigma(t) := \gamma_{p,V}(\lambda t)$ ,  $|\lambda t| < \epsilon$ , è una geodetica e verifica le condizioni:

$$\sigma(0) = \gamma_{p,V}(0) = p \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}(0) = \lambda \dot{\gamma}_{p,V}(0) = \lambda V.$$

Dunque, per l'unicità delle geodetiche con le fissate condizioni iniziali, deve essere  $\sigma(t) = \gamma_{p,\lambda V}(t)$  con  $|t| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ . Pertanto, abbiamo la seguente proprietà di omogeneità:

$$\gamma_{p,\lambda V}(t) = \gamma_{p,V}(\lambda t) \quad \text{con} \quad |t| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}. \quad (7.2)$$

Quindi è possibile diminuire la velocità di una geodetica aumentando l'intervallo di tempo (cioè l'intervallo di  $t$ ), e viceversa. In particolare, se  $|\lambda| < 1$ , allora anche  $\gamma_{p,\lambda V}(t)$  è definita per  $|t| < \epsilon$ . Applicando la (7.2) per  $\lambda = \frac{\epsilon}{2}$ , con  $\|V\| < \delta$  (dove  $\delta$  è definito dalla Proposizione 7.28), si ha che

$$\gamma_{p,\frac{\epsilon}{2}V}(t) \text{ è definita per } |t| < \epsilon/(\epsilon/2) = 2, \text{ dove } \|(\epsilon/2)V\| < (\epsilon\delta)/2.$$

Di conseguenza, per ogni  $W \in T_p M$ ,  $\|W\| < \delta_0$ , prendendo  $\delta_0 < \epsilon\delta/2$ , si ottiene che la geodetica  $\gamma_{p,W}(t)$  è definita per  $|t| < 2$ . Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 7.29.** *Per ogni  $p_0 \in M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  e un  $\delta_0 > 0$  tale che per ogni  $p \in U$  e per ogni  $W \in T_p M$ ,  $\|W\| < \delta_0$ , la geodetica  $\gamma_{p,W}(t)$  è definita per  $|t| < 2$  e quindi, in particolare, per  $t = 1$ .*

Nel seguito, quando il punto  $p$  è fissato, la geodetica  $\gamma_{p,V}(t)$  la denoteremo semplicemente con  $\gamma_V(t)$ . La Proposizione 7.29 permette di introdurre la seguente definizione.

**Definizione 7.30.** *L'applicazione esponenziale in  $p$  è l'applicazione*

$$\begin{aligned} \exp_p : B(0, \delta_0) &= \{W \in T_p M : \|W\| < \delta_0\} \subset T_p M \rightarrow M, \\ \exp_p : W &\mapsto \exp_p W = \gamma_W(1). \end{aligned}$$

Si noti che  $\exp_p$  è definita, in generale, solo su un intorno del vettore nullo, e  $\exp_p 0 = p$ . Se  $\exp_p$  è definita in  $W \in B(0, \delta_0)$ , allora  $\gamma_W(t)$  è definita per  $t \in [-1, 1]$  e

$$\gamma_W(t) = \gamma_{tW}(1) = \exp_p(tW) \quad \forall t \in [-1, 1]. \quad (7.3)$$

Geometricamente,  $\exp_p V = \gamma_V(1)$  è un punto di  $M$  che si trova sulla geodetica  $\gamma_V(t)$  a distanza  $\|V\|$  dal punto  $p$  nel verso di  $V$ . Infatti, siccome  $\|\dot{\gamma}_V(t)\| = \text{cost.}$ , abbiamo

$$L(\gamma_V|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(t)\| dt = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(0)\| dt = \int_0^1 \|V\| dt = \|V\|.$$

In particolare, preso un  $r$  con  $0 < r < \delta_0$ , per ogni  $V \in T_p M$ ,  $\|V\| = 1$ , si ha  $\|tV\| \leq r$  per  $|t| \leq r$ , quindi:

la geodetica  $\gamma_V(t) := \gamma_{tV}(1)$  è certamente definita per  $|t| \leq r$ .

Inoltre,  $\gamma_V(t)$ ,  $|t| \leq r < \delta_0$ , è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. La seguente proposizione evidenzia la naturalità dell'applicazione esponenziale.

**Proposizione 7.31.** *L'applicazione esponenziale commuta con le isometrie (locali). Più precisamente, se  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  è un'isometria (locale), allora*

$$f \circ \exp_p = \exp_{f(p)} \circ f_{*p} \quad \text{su } B(0, \delta_0) \subset T_p M.$$

*Dimostrazione.* Sia  $V \in B(0, \delta_0)$  e  $\gamma_V(t)$  la geodetica definita per  $t \in [0, 1]$ , con  $\gamma_V(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_V(0) = V$ . Poiché  $f$  è un'isometria locale, la curva  $\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma_V(t)$  è una geodetica, inoltre  $\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma_V(0)) = f(p)$  e  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = f_{*p} \dot{\gamma}_V(0) = f_{*p} V$ . Pertanto,  $f \circ \gamma_V(t) = \gamma_{f_{*p} V}(t)$  per ogni  $t \in [0, 1]$ , e quindi:  $f(\exp_p V) = f(\gamma_V(1)) = \gamma_{f_{*p} V}(1) = \exp_{f(p)} f_{*p} V$ .  $\square$

**Esempio 7.32.** Consideriamo il gruppo di Lie  $SO(n)$  con una metrica riemanniana bi-invariante (cfr. Esempio 5.19). In tal caso, i campi invarianti a sinistra sono geodetici, cioè  $\nabla_X X = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{so}(n)$ . Di conseguenza,  $\phi_X(t) = e^{tX}$ , le curve integrali uscenti da  $I$  dei campi di vettori invarianti a sinistra, sono curve geodetiche (cfr. Esempio 6.40) e quindi l'applicazione esponenziale riemanniana

$$\exp_I : T_I SO(n) = \mathfrak{so}(n) \rightarrow SO(n), X \mapsto \gamma_X(1) = \phi_X(1) = e^X,$$

è l'usuale esponenziale di matrici (cfr. Sezione 3.5). Più in generale, se  $G$  è un gruppo di Lie compatto munito di una metrica bi-invariante, si ha che i sottogruppi ad un parametro  $\phi_X(t)$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , sono le curve geodetiche uscenti dall'elemento neutro di  $G$  (cfr. (6.10)). Quindi, in questo caso, l'esponenziale del gruppo di Lie  $G$  coincide con l'esponenziale riemanniana.

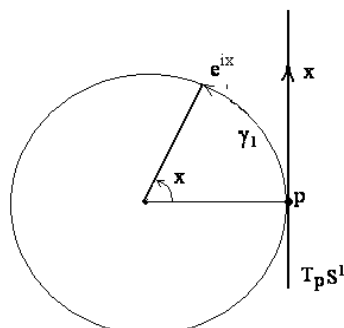
**Esempio 7.33.** Nel caso dello spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ , per  $V \in T_p \mathbb{R}^n$ , la geodetica  $\gamma_V(t) = p + tV$  è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi,

$$\exp_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, V \mapsto p + V.$$

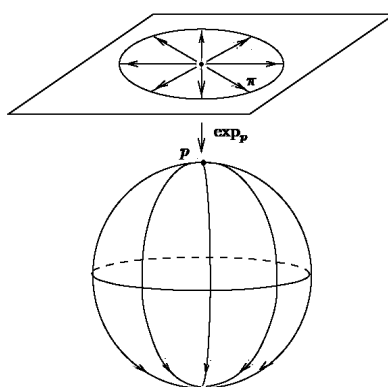
**Esempio 7.34.** Nel caso di  $M = \mathbb{S}^1$ , per  $x \in T_p \mathbb{S}^1$ , la geodetica  $\gamma_x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , è l'arco di circonferenza  $\gamma_1$  uscente da  $p$ , nel verso definito da  $x$ , con  $L(\gamma_1) = \|x\|$  (cfr. Figura 7.7). Siccome  $x$  si può pensare come la misura in radianti di un angolo, si ha:

$$\exp_p : T_p \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, x \mapsto \gamma_x(1) = e^{ix}.$$



Figura 7.7:  $\exp$  su  $\mathbb{S}^1$ 

**Esempio 7.35.** Nel caso della sfera  $\mathbb{S}^n$ , l'applicazione esponenziale, in un fissato punto  $p$  della stessa sfera, è definita su tutto lo spazio tangente  $T_p \mathbb{S}^n$

Figura 7.8:  $\exp$  su  $\mathbb{S}^n$ 

e applica la palla aperta  $B(0, \pi)$  di centro l'origine e raggio  $\pi$  di  $T_p \mathbb{S}^n$  iniettivamente su  $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$ , dove  $q$  è il punto antipodale di  $p$ . Inoltre,  $\exp_p$  applica il bordo di  $B(0, \pi)$  nel punto  $q$  (cfr. Figura 7.8).

Tornando al caso di una arbitraria  $(M, g)$ , fissato  $z_0 \in TM$ ,  $z_0 = (p_0, V_0)$ ,  $p_0 \in M$  e  $V_0 = 0 \in T_{p_0} M$ , sempre dal Teorema 2.35 applicato al campo di vettori  $\xi$ , si ha che l'applicazione

$$\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{U} \rightarrow TM, (t, z) \mapsto \Phi(t, z) = \tilde{\gamma}_z(t),$$

è differenziabile. In particolare, prendendo l'aperto  $\tilde{U}$  definito dalla Proposizione 7.29, l'applicazione

$$\Phi_1 : \tilde{U} \rightarrow TM, z \mapsto \tilde{\gamma}_z(1) = \Phi(1, z) = \tilde{\gamma}_z(1) = (\gamma_z(1), \dot{\gamma}_z(1)),$$

è differenziabile. Di conseguenza, indicata con  $f_1$  l'applicazione

$$\{p\} \times B(0, \delta_0) \rightarrow \tilde{U} = U \times B(0, \delta_0), (p, V) \mapsto (p, V),$$

e con  $\pi : TM \rightarrow M$  la proiezione, la seguente applicazione

$$\pi \circ \Phi_1 \circ f_1 : \{p\} \times B(0, \delta_0) \rightarrow M, (p, V) \mapsto \gamma_{p,V}(1),$$

è differenziabile e quindi l'applicazione  $\exp_p$  è differenziabile. In generale, l'applicazione esponenziale in un fissato punto  $p \in M$  definisce solo un diffeomorfismo locale.

**Teorema 7.36.** *Per ogni  $p \in M$  esiste un intorno aperto  $B(0)$  dell'origine in  $T_pM$  e un intorno aperto  $U(p)$  di  $p$  in  $M$  per cui*

$$\exp_p : B(0) \rightarrow U(p), V \mapsto \gamma_V(1), \text{ è un diffeomorfismo.}$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $\exp_p : B(0, \delta_0) \subset T_pM \rightarrow M$ . Indichiamo con  $f$  l'applicazione esponenziale  $\exp_p$  e consideriamo il suo differenziale nell'origine  $f_* : T_0(T_pM) \rightarrow T_pM$ . Per ogni fissato  $V$  in  $T_0(T_pM)$ , che possiamo identificare con  $T_pM$ , consideriamo la curva differenziabile  $\sigma(t) = tV$  di  $T_pM$ . Siccome  $\sigma(0) = 0$  e  $\dot{\sigma}(0) = V$ , abbiamo

$$f_*(V) = f_*(\dot{\sigma}(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_V(t))|_{t=0} = \dot{\gamma}_V(0) = V.$$

Dunque,  $f_*$  è l'identità e quindi, applicando il teorema sulle funzioni inverse, esiste un intorno  $B(0)$  dell'origine in  $T_pM$  diffeomorfo, mediante l'applicazione  $\exp_p$ , a un intorno  $U(p)$  di  $p$  in  $M$ .  $\square$

L'aperto  $U$  di  $M$  definito nel Teorema 7.36 è detto *intorno normale* del punto  $p$ . In particolare, prendendo l'aperto  $B(0)$  del tipo  $B(0, r)$ , l'intorno normale corrispondente  $U = \exp_p B(0, r)$  viene detto *palla geodetica* di  $M$  centrata in  $p$ , in tal caso le geodetiche di  $U$  uscenti da  $p$  sono dette **geodetiche radiali**. Per  $\delta < r$ , l'ipersuperficie  $S(p, \delta) = \exp_p(\partial \bar{B}(0, \delta))$ , è detta *sfera geodetica* di  $M$  centrata in  $p$ .

Nel caso dello spazio euclideo, e analogamente per lo spazio di Minkowski, un'isometria è completamente determinata dal suo valore in punto e dal suo differenziale nello stesso punto. In altre parole, se due isometrie e i loro differenziali coincidono in un punto, allora le due isometrie coincidono su tutto lo spazio. Tale risultato vale più in generale per un'arbitraria varietà riemanniana. Infatti, vale la seguente

**Proposizione 7.37.** *Siano  $f_1, f_2$  due isometrie di una varietà riemanniana che soddisfano la seguente proprietà:  $f_1(p_0) = f_2(p_0)$  e  $(f_{1*})_{p_0} = (f_{2*})_{p_0}$ . Allora  $f_1 = f_2$ .*

*Dimostrazione.* 1) Intanto proviamo che  $f_1, f_2$  coincidono in un intorno normale  $U = \exp_{p_0} B(0)$  del punto  $p_0$ . Siano  $p$  un punto di  $U$  e  $V \in B(0)$  tali che  $p = \exp_{p_0} V$ . La geodetica  $\gamma_V(t)$ , definita per  $t \in [0, 1]$ , soddisfa  $\gamma_V(0) = p_0, \gamma_V(1) = p$  e  $\dot{\gamma}_V(0) = V$ . Siccome  $f_1, f_2$  sono isometrie, le curve  $\gamma_1(t) = f_1(\gamma_V(t))$  e  $\gamma_2(t) = f_2(\gamma_V(t))$  sono geodetiche, e soddisfano (usando le ipotesi della proposizione)  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  e  $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$ . Pertanto, applicando il teorema di esistenza e unicità delle curve geodetiche con le fissate condizioni iniziali, si ha  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$  per ogni  $t \in [0, 1]$ , e in particolare si ha  $f_1(p) = f_2(p)$  con  $p$  arbitrario punto di  $U$ .

2) Sia ora  $p$  un arbitrario punto di  $M$  e sia  $\sigma(t)$  una curva differenziabile a tratti che congiunge  $p_0$  a  $p$ . Poniamo  $I = \{t \in [0, 1] : f_1(\sigma(t)) = f_2(\sigma(t))\}$ . Applicando 1), si ottiene facilmente che  $\text{Sup} I = 1$  e quindi  $f_1(p) = f_2(p)$ .  $\square$

### Osservazione 7.38. Riferimento geodetico

Sia  $U$  una palla geodetica centrata in  $p_0$ . Per ogni fissato vettore tangente  $V \in T_{p_0} M$  esiste  $X \in \mathfrak{X}(U)$  tale che

$$X(p_0) = V \quad \text{e} \quad (\nabla X)_{p_0} = 0.$$

Basta definire, per ogni  $p \in U$ ,  $X(p) = \tau_\gamma(V)$ , dove  $\gamma(t)$  è la geodetica radiale congiungente  $p_0$  a  $p$ , e  $\tau_\gamma : T_{p_0} M \rightarrow T_p M$  è lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$ . Allora, per come definito  $X$ ,  $X(p_0) = V$  e per ogni  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$(\nabla_Y X)_{p_0} = \nabla_{Y_{p_0}} X = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} X = \frac{DX}{dt}(0) = 0,$$

dove  $\gamma(t)$ ,  $-\epsilon < t < \epsilon$ , è la geodetica uscente da  $p_0$  con  $\dot{\gamma}(0) = Y_{p_0}$ . In modo analogo, una base ortonormale  $\{e_i\}$  di  $T_{p_0} M$  si può estendere a una base ortonormale  $\{E_i\}$  di  $\mathfrak{X}(U)$ .  $E_i$  è ottenuto da  $e_i$  come  $X$  da  $X(p_0)$ , e quindi

$$(\nabla_{E_i} E_j)_{p_0} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Siccome  $\nabla$  è simmetrica, abbiamo anche

$$[E_i, E_j]_{p_0} = (\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i)_{p_0} = 0.$$

Inoltre,  $g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$  in quanto  $\{e_i\}$  è una base ortonormale di  $T_{p_0} M$  e lo spostamento parallelo è una isometria. La base ortonormale  $\{E_i\}$  è detta *riferimento geodetico* (o *adattato*) in  $p_0$ .

### Raggio di iniettività

Il raggio di iniettività di un fissato punto  $p \in M$  è definito da

$$i(p) := \sup \{r > 0 : \exp_p \text{ è definita su } B(0, r) \subset T_p M \text{ ed è iniettiva}\}.$$

Il raggio di iniettività di  $M$  è definito da

$$i(M) := \inf \{i(p) : p \in M\}.$$

Ad esempio, il raggio di iniettività della sfera  $\mathbb{S}^n$  è  $\pi$ . Infatti, l'applicazione esponenziale in un fissato punto  $p \in \mathbb{S}^n$  applica la palla aperta di centro l'origine e raggio  $\pi$  di  $T_p\mathbb{S}^n$  iniettivamente sul complementare del punto antipodale di  $p$ . Nel caso dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$ , per ogni fissato punto  $p \in \mathbb{R}_+^n$ , l'applicazione esponenziale definisce un diffeomorfismo tra lo spazio tangente  $T_p\mathbb{R}_+^n$  e  $\mathbb{R}_+^n$ .

### Proprietà di geodetiche radiali

Sia  $f : N \rightarrow M$  un'applicazione differenziabile tra due varietà. Un *campo di vettori lungo  $f$*  è un'applicazione

$$V : N \rightarrow f^{-1}(TM) = \dot{\sqcup}_{p \in N} T_{f(p)}M, \quad p \mapsto V(p) \in T_{f(p)}M.$$

Consideriamo il caso particolare in cui  $N = A$  è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  ed  $f = u : A \rightarrow M, (t, s) \mapsto u(t, s)$ .  $u$  si può pensare come una *superficie parametrizzata* di  $M$ . Localmente, se  $(x_i)$  è un sistema di coordinate locali definito su  $M$ , abbiamo

$$V(t, s) = \sum V^i(t, s) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{u(t, s)}.$$

Sia  $V$  un campo differenziabile di vettori definito lungo  $u$ , ossia le funzioni componenti  $V^i(t, s)$  sono differenziabili. Le restrizioni di  $V$  alle curve

$$u_t : s \mapsto u_t(s) = u(t, s) \quad \text{e} \quad u_s : t \mapsto u_s(t) = u(t, s)$$

definiscono campi differenziabili di vettori lungo queste curve. Denotiamo con  $\frac{D}{dt}$  la derivata covariante lungo la curva  $u_s(t)$ , con  $\frac{D}{ds}$  la derivata covariante lungo la curva  $u_t(s)$ , con  $\frac{\partial u}{\partial t}$  il campo di vettori tangenti lungo la curva  $u_s(t)$  e con  $\frac{\partial u}{\partial s}$  il campo di vettori tangenti lungo la curva  $u_t(s)$ . Risulta

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(t_0, s_0)} = \left( \frac{d}{dt} u(t, s_0) \right)_{t=t_0} \in T_{u(t_0, s_0)}M$$

e

$$\left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{(t_0, s_0)} = \left( \frac{d}{ds} u(t_0, s) \right)_{s=s_0} \in T_{u(t_0, s_0)}M.$$

Quindi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} : (t, s) \mapsto \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(t, s)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial s} : (t, s) \mapsto \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_{(t, s)}$$

sono campi (differenziabili) di vettori lungo  $u$ .

**Lemma 7.39.** *Sia  $u : A \rightarrow M, (t, s) \mapsto u(t, s)$ , una superficie parametrizzata. Allora,*

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7.4)$$

*Dimostrazione.* Sia  $(x_1, \dots, x_n)$  un sistema di coordinate locali. Localmente  $u(t, s) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s))$ , quindi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i(t, s)}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{u(t, s)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i(t, s)}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{u(t, s)}.$$

Applicando la (6.4) ai campi vettoriali  $\frac{\partial u}{\partial s}$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , otteniamo

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i, j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial s} \right\} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{u(t, s)}$$

e un'analogha formula per  $\frac{D}{ds} \frac{\partial u}{\partial t}$ . Poiché  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  ( $\nabla$  è simmetrica), e  $\frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t}$ , dalla formula precedente segue la (7.4).  $\square$

Una *variazione di una curva*  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  è un'applicazione differenziabile

$$H : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad (t, s) \mapsto H(t, s) = \sigma_s(t), \text{ tale che}$$

$$H(t, 0) = \sigma_0(t) = \sigma(t).$$

**Lemma 7.40.** *Sia  $H(t, s) = \sigma_s(t)$  una variazione di una geodetica  $\sigma(t)$ . Se  $L(s)$  denota la lunghezza della curva  $\sigma_s(t)$ , allora*

$$\frac{dL}{ds}(0) = g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(1, 0), \frac{\dot{\sigma}(1)}{\|\dot{\sigma}(1)\|} \right) - g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(0, 0), \frac{\dot{\sigma}(0)}{\|\dot{\sigma}(0)\|} \right).$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di lunghezza di curva, si ha

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \frac{d}{ds} L(\sigma_s(t)) = \frac{d}{ds} \int_0^1 \|\dot{\sigma}_s(t)\| dt = \int_0^1 \frac{d}{ds} \|\dot{\sigma}_s(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2 \|\dot{\sigma}_s(t)\|} \frac{d}{ds} \|\dot{\sigma}_s(t)\|^2 dt = \int_0^1 \frac{1}{2 \|\dot{\sigma}_s(t)\|} \frac{d}{ds} g \left( \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt. \end{aligned}$$

Tenendo presente la compatibilità della connessione di Levi-Civita  $\nabla$  con la metrica  $g$ , e il Lemma 7.39, otteniamo

$$\frac{d}{ds} g \left( \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 2g \left( \frac{D}{ds} \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 2g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

e la formula precedente diventa

$$\frac{dL}{ds} = \int_0^1 \frac{1}{\|\dot{\sigma}_s(t)\|} g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt.$$

Per  $s = 0$ , risulta

$$\frac{dL}{ds}(0) = \int_0^1 g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) dt.$$

Una primitiva dell'integrando è la funzione

$$t \mapsto g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right).$$

Infatti, tenendo conto che  $\sigma(t)$  è una geodetica, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) &= g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) \\ &\quad + g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{D}{dt} \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right) \\ &= g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0), \frac{\dot{\sigma}(t)}{\|\dot{\sigma}(t)\|} \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\frac{dL}{ds}(0) = g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(1, 0), \frac{\dot{\sigma}(1)}{\|\dot{\sigma}(1)\|} \right) - g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(0, 0), \frac{\dot{\sigma}(0)}{\|\dot{\sigma}(0)\|} \right).$$

□

**Teorema 7.41.** (Lemma di Gauss) *Se  $U$  è una palla geodetica di  $M$  centrata in  $p$ , allora ogni geodetica uscente da  $p$  è ortogonale alle sfere geodetiche di  $U$  centrate in  $p$ . In altre parole, se  $U = \exp_p B(0, r)$ , ogni geodetica  $\gamma$  uscente da  $p$  incontra ortogonalmente l'ipersuperficie  $\exp_p \partial \bar{B}(0, r_0)$ ,  $r_0 < r$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma$  una geodetica uscente da  $p$ ,  $\sigma(t) = \exp t X_0$ ,  $\|X_0\| = r_0 < r$ . Consideriamo una curva  $X(s)$  di vettori tangenti in  $p$ ,  $\|X_s\| = r_0$  e con  $X(0) = X_0$ . Quindi,  $\gamma(s) = \exp_p X(s)$  è una curva dell'ipersuperficie  $\exp_p \partial \bar{B}(0, r_0)$ . L'applicazione  $H(t, s) = \exp_p t X(s)$ ,  $t \in [0, 1]$ , definisce una variazione della curva geodetica  $\sigma(t)$ . Per ogni fissato  $s$ , la curva  $\sigma_s(t) = H(t, s)$  è una geodetica di lunghezza  $r_0$ , pertanto  $L(s) = L(\sigma_s(t)) = \text{cost.}$  e quindi applicando il Lemma 7.40:

$$0 = \frac{dL}{ds}(0) = g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(1, 0), \frac{\dot{\sigma}(1)}{\|\dot{\sigma}(1)\|} \right) - g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(0, 0), \frac{\dot{\sigma}(0)}{\|\dot{\sigma}(0)\|} \right).$$

Siccome  $H(0, s) = \exp_p 0 = p$  e  $H(1, s) = \exp_p X(s) = \gamma(s)$ , si ha  $\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0) = 0$  e  $\frac{\partial H}{\partial s}(1, 0) = \left( \frac{d}{ds} \exp_p X(s) \right) (0) = \dot{\gamma}(0)$  e quindi otteniamo

$$g(\dot{\gamma}(0), \dot{\sigma}(1)) = 0$$

che mostra l'ortogonalità di  $\sigma$  con  $\exp_p \partial \bar{B}(0, r_0)$ . □

Il seguente teorema esprime la minimalità delle geodetiche radiali.

**Teorema 7.42.** *Sia  $\gamma : [0, c] \rightarrow M$  una geodetica radiale contenuta in  $U = \exp_p B(0, r)$  palla geodetica centrata in  $p = \gamma(0)$ . Allora, per ogni  $q \in \gamma([0, c])$ , l'arco geodetico radiale  $\gamma(p, q)$  è l'unica curva minimale che congiunge  $p$  e  $q$ .*

*Dimostrazione.* La metrica riemanniana  $g$  di  $M$  induce una metrica riemanniana su  $U$ , che indichiamo sempre con  $g$ . Il diffeomorfismo  $\phi = \exp_p : B(0, r) \rightarrow U$  induce una metrica  $\tilde{g} = \phi^*g$  sull'aperto  $B(0, r)$  di  $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ . Di conseguenza,  $\phi : (B(0, r), \tilde{g}) \rightarrow (U, g)$  è un'isometria. Per ogni fissato  $q \in \gamma([0, c])$ , l'arco geodetico  $\gamma = \gamma(p, q)$  si può esprimere, per come costruita l'applicazione esponenziale, con

$$\gamma(t) = \gamma_W(t) = \exp_p tW, \quad t \in [0, 1], \quad W \in B(0, r), \quad L(\gamma) = \|W\| = \delta < r.$$

Sia  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ , con  $\sigma(0) = p$  e  $\sigma(1) = q$ , un arco di curva differenziabile a tratti. Proviamo che:

$$L(\sigma) \geq L(\gamma).$$

Sia  $t = a_0 \in [0, 1]$  l'ultimo  $t$  per cui  $\sigma(a_0) = p$  e sia  $b_0$  il primo  $t \in [0, 1]$  per cui  $\sigma(b_0) \in S(p, \delta)$  sfera geodetica di centro  $p$  e raggio  $\delta$  (cfr. Figura 7.9).

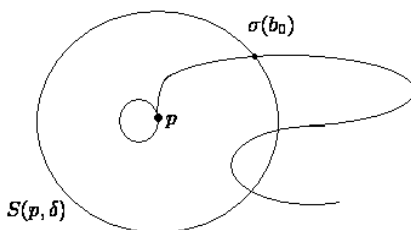


Figura 7.9: Curva uscente da  $p$ .

Allora,  $\sigma([a_0, b_0]) \subset U$ . La curva di  $B(0, r)$  (aperto di  $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ )  $\tilde{\gamma} = \phi^{-1} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow B(0, r)$ ,  $t \mapsto tW$ , congiunge  $\tilde{\gamma}(0) = 0$  con  $\tilde{\gamma}(1) = W$ . Inoltre,  $\tilde{\sigma} = \phi^{-1} \circ \sigma : [a_0, b_0] \rightarrow B(0, r)$  è una curva uscente da  $\tilde{\sigma}(a_0) = \phi^{-1}(p) = 0$  con  $\tilde{\sigma}(b_0) \in S(0, \delta)$  e quindi  $\|\tilde{\sigma}(b_0)\| = \delta = \|W\|$ . Poiché  $\phi$  è una isometria,  $L(\tilde{\sigma}) = L(\sigma) = \|W\|$  e  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ . La curva  $\tilde{\sigma}$  si può pensare come un campo di vettori lungo se stessa, consideriamo quindi il campo radiale unitario (per  $t > a_0$ )

$$\tilde{\sigma}_{rad} : t \mapsto \left( \tilde{\sigma}(t), \frac{\tilde{\sigma}(t)}{\|\tilde{\sigma}(t)\|} \right).$$

Per ogni  $t \in [a_0, b_0]$ , escludendo al più un numero finito di punti, possiamo decomporre il campo tangente  $\dot{\tilde{\sigma}}(t)$  come:

$$\dot{\tilde{\sigma}}(t) = \dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t) + N_{\tilde{\sigma}}(t),$$

dove  $\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)$  denota la componente radiale e  $N_{\tilde{\sigma}}(t)$  denota la componente normale al campo radiale (cfr. Figura 7.10).

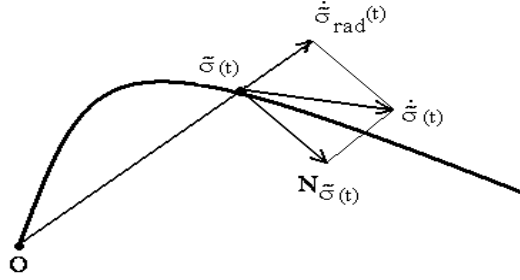


Figura 7.10: Decomposizione del vettore tangente  $\dot{\tilde{\sigma}}(t)$ .

La componente radiale è definita dal campo vettoriale

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t) : t \mapsto \left( \tilde{\sigma}(t), \frac{\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))}{\|\tilde{\sigma}(t)\|^2} \tilde{\sigma}(t) \right).$$

Quindi:

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\| = \frac{|\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))|}{\|\tilde{\sigma}(t)\|}, \quad (7.5)$$

e applicando la disuguaglianza di Schwarz:

$$|\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))| \leq \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\| \|\tilde{\sigma}(t)\|,$$

si ha

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\| \leq \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\|. \quad (7.6)$$

Inoltre,

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\| = \frac{1}{2\|\tilde{\sigma}(t)\|} \frac{d}{dt} \tilde{g}(\tilde{\sigma}(t), \tilde{\sigma}(t)) = \frac{1}{\|\tilde{\sigma}(t)\|} \tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t)). \quad (7.7)$$

Applicando nell'ordine le identità (7.6), (7.5) e (7.7), si ha

$$\begin{aligned} L(\sigma) &\geq L(\sigma|_{[a_0, b_0]}) = L(\tilde{\sigma}) = \int_{a_0}^{b_0} \|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\| dt \\ &\geq \int_{a_0}^{b_0} \|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\| dt = \int_{a_0}^{b_0} \frac{|\tilde{g}(\dot{\tilde{\sigma}}(t), \tilde{\sigma}(t))|}{\|\tilde{\sigma}(t)\|} dt \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \left| \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\| \right| dt \geq \int_{a_0}^{b_0} \left( \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\| \right) dt \\ &= \|\tilde{\sigma}(b_0)\| - \|\tilde{\sigma}(a_0)\| = \|W\| = L(\gamma). \end{aligned}$$



Ora assumiamo che  $L(\sigma) = L(\gamma)$  e proviamo che  $\sigma([0, 1]) = \gamma([0, 1])$ . Assumendo  $L(\sigma) = L(\gamma)$ , tutte le precedenti disuguaglianze diventano uguaglianze. La prima uguaglianza  $L(\sigma) = L(\sigma|_{[a_0, b_0]})$  implica che  $a_0 = 0$  e  $b_0 = 1$ , altrimenti gli archi di  $\sigma$  prima di  $t = a_0$  e dopo  $t = b_0$  dovrebbero contribuire con lunghezze positive. In particolare,  $\tilde{\sigma} = \phi^{-1} \circ \sigma$  è una curva di  $B(0, r)$  che congiunge  $\tilde{\sigma}(0) = 0$  con  $\tilde{\sigma}(1) = \phi^{-1}(\sigma(1)) = \phi^{-1}(q) = W$ . La seconda uguaglianza implica

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\| = \|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\|. \quad (7.8)$$

Siccome

$$\|\dot{\tilde{\sigma}}(t)\|^2 = \|\dot{\tilde{\sigma}}_{rad}(t)\|^2 + \|N_{\tilde{\sigma}}(t)\|^2,$$

la (7.8) implica che la componente normale  $N_{\tilde{\sigma}}(t) = 0$ . Quindi, il campo vettoriale  $\dot{\tilde{\sigma}}(t)$  ha soltanto componente radiale e di conseguenza  $\tilde{\sigma}(t)$  sarà del tipo

$$\tilde{\sigma}(t) = r(t)V_0 \quad \text{con} \quad \|V_0\| = 1.$$

In tal caso  $|\frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}(t)\|| = |r'(t)| \geq r'(t)$  e quindi la terza disuguaglianza (diventando uguaglianza) implica  $r'(t) = |r'(t)| > 0$ . D'altronde  $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\gamma}(1) = W$  implica  $V_0 = \frac{W}{\|W\|}$ . Pertanto

$$\tilde{\sigma}(t) = (r(t)/\|W\|)W \quad \text{con} \quad r'(t) > 0,$$

ossia  $\tilde{\sigma}(t)$  è ottenuta da  $\tilde{\gamma}(t)$  mediante una riparametrizzazione crescente (in generale non lineare) e quindi  $\tilde{\sigma}([0, 1]) = \tilde{\gamma}([0, 1])$ , da cui  $\sigma([0, 1]) = \gamma([0, 1])$ .  $\square$

Dal Teorema 7.42 segue che la palla geodetica  $\exp_p B(0, r)$  e la sfera geodetica  $\exp_p \partial B(0, \delta)$ ,  $\delta < r$ , si possono esprimere in termini di distanza riemanniana:

$$\exp_p B(0, r) = B(p, r) := \{q \in M : d(p, q) < r\},$$

$$\exp_p \partial B(0, \delta) = S(p, \delta) := \{q \in M : d(p, q) = \delta\}.$$

Infatti, se  $q \in \exp_p B(0, r)$ , esiste  $V \in B(0, r)$ ,  $\exp_p V = q$ ,  $\|V\| = \delta < r$ , e la geodetica radiale  $\gamma_V(t)$ , definita per  $t \in [0, 1]$ , è la geodetica minimale che congiunge  $p$  a  $q$ . Quindi

$$d(p, q) = L(\gamma_V|_{[0, 1]}) = \|V\| = \delta < r \Rightarrow q \in B(p, r).$$

Viceversa, se  $q \in B(p, r)$ , allora esiste una curva  $\sigma$  da  $p$  a  $q$  di lunghezza minore di  $r$ ; d'altronde le curve (con inizio in  $p$ ) che escono fuori da  $\exp_p B(0, r)$  devono avere lunghezza almeno uguale a  $r$ , per cui  $q \in \exp_p B(0, r)$ .

Sia  $\gamma$  una curva geodetica di  $M$  e siano  $p_1, p_2$  due punti nel sostegno di  $\gamma$ . Se  $p_2$  è abbastanza vicino a  $p_1$ , in altre parole se  $p_2$  è contenuto in una palla geodetica centrata in  $p_1$ , allora l'arco geodetico  $\gamma(p_1, p_2)$  è radiale e quindi, per il Teorema 7.42, è l'unica curva minimale che congiunge  $p_1$  e  $p_2$ . Pertanto, vale la seguente

**Proposizione 7.43.** *Ogni curva geodetica di  $(M, g)$  è localmente minimale.*

Il seguente teorema fornisce l'esistenza di intorno totalmente normali.

**Teorema 7.44.** *Per ogni  $p_0 \in M$  esiste un intorno aperto  $W$  di  $p_0$  ed esiste un  $\delta_1 > 0$  tale che per ogni  $p \in W$ , l'applicazione  $\exp_p : B(0, \delta_1) \rightarrow B(p, \delta_1)$  è un diffeomorfismo con  $W \subset B(p, \delta_1)$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $U$  e  $\delta_0$  come nella Proposizione 7.29. Possiamo quindi considerare l'applicazione

$$F : U \times B(0, \delta_0) \rightarrow M \times M, (p, V) \mapsto (p, \exp_p V).$$

In particolare,  $F(p, 0) = (p, p)$ . Siccome il differenziale  $(\exp_p)_{*0}$  è l'identità (cfr. dimostrazione della Proposizione 7.36), il differenziale  $(F_*)_{(p,0)}$  è rappresentato dalla matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & I \end{pmatrix}.$$

Allora, fissato  $p_0 \in M$ , per il teorema delle funzioni inverse si ha che  $F$  è un diffeomorfismo in un intorno di  $(p_0, 0)$ . Questo significa che esistono  $U'$  intorno di  $p_0$ ,  $U' \subset U$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_1 < \delta_0$ , ed esiste  $W'$  intorno di  $(p, p)$  in  $M \times M$ , per cui

$$F : U' \times B(0, \delta_1) \rightarrow W'$$

è un diffeomorfismo. Scegliendo  $W$  intorno di  $p_0$  tale che  $W \times W \subset W'$ , allora  $W$  e  $\delta_1$  soddisfano la proprietà del teorema. Infatti, per  $p \in W$ , siccome  $F$  è un diffeomorfismo su  $U' \times B(0, \delta_1)$  abbiamo  $F(\{p\} \times B(0, \delta_1)) \supset \{p\} \times W$  e quindi dalla definizione di  $F$  segue che  $W \subset B(p, \delta_1) = \exp_p B(0, \delta_1)$ .  $\square$

Il Teorema 7.44 implica che  $W$  è intorno normale di ogni suo punto, e tale intorno viene detto *intorno totalmente normale*.

**Osservazione 7.45.** Per ogni  $p_1, p_2 \in W$  esiste un'unica geodetica minimale, di lunghezza minore di  $\delta_1$ , congiungente  $p_1$  e  $p_2$ . Basta osservare, applicando il Teorema 7.44, che se  $p_1, p_2 \in W$ , allora  $p_2 \in B(p_1, \delta_1)$  palla geodetica centrata in  $p_1$ , e quindi, applicando il Teorema 7.42, la geodetica radiale  $\gamma(p_1, p_2)$  uscente da  $p_1$  è l'unica geodetica minimale congiungente  $p_1$  e  $p_2$ . Si noti che  $\gamma(p_1, p_2)$  è contenuta in  $B(p_1, \delta_1)$  ma può non essere contenuta in  $W$ . Tuttavia, si può provare che per ogni  $p \in M$  esiste una palla geodetica  $B(p, \delta)$  *strettamente convessa*, cioè: per ogni  $q_1, q_2 \in \bar{B}(p, \delta)$ , chiusura di  $B(p, \delta)$ , esiste un'unica geodetica minimale  $\gamma(q_1, q_2)$  il cui interno è contenuto in  $B(p, \delta)$  ([32], p.76).

Il seguente risultato caratterizza le geodetiche dal punto di vista metrico.

**Corollario 7.46.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva differenziabile (anche a tratti), parametrizzata con l'ascissa curvilinea, con  $p = \gamma(a)$  e  $q = \gamma(b)$ . Se  $\gamma$  è minimale, cioè  $L(\gamma) = d(p, q)$ , allora  $\gamma$  è una curva geodetica (come insieme di punti).*

*Dimostrazione.* Intanto osserviamo che se  $\gamma$  è minimale e  $[c, d] \subset [a, b]$ , allora anche  $\gamma_1 = \gamma|_{[c, d]}$  è minimale. Infatti, se  $\gamma_1$  non fosse minimale esisterebbe una curva  $\alpha$  congiungente  $\gamma(c)$  e  $\gamma(d)$  con  $L(\alpha) < L(\gamma_1)$ . Allora la curva  $\sigma$  definita da  $\sigma(t) = \gamma(t)$  se  $t \in [a, c] \cup [d, b]$  e  $\sigma(t) = \alpha(t)$  se  $t \in [c, d]$ , avrebbe lunghezza minore di  $\gamma$  ottenendo una contraddizione al fatto che  $L(\gamma) = d(p, q)$ . Per provare che  $\gamma$  è una curva geodetica, basta provare che  $\gamma$  è geodetica in un intorno di ogni suo punto. Dato  $p_0 = \gamma(t_0)$ , consideriamo un intorno  $W$  totalmente normale del punto  $p_0$ . Sia  $I = [t_1, t_2] \subset [a, b]$ , tale che  $t_0 \in ]t_1, t_2[$  e  $\gamma(I) \subset W$ . Poiché  $W$  è totalmente normale,  $\gamma(I) \subset B(p_1, \delta)$ , per qualche  $\delta > 0$ , dove  $p_1 = \gamma(t_1)$ . Inoltre, poiché  $\gamma(I)$  è una curva minimale, applicando il Teorema 7.42,  $\gamma|_I$  è una curva geodetica.  $\square$

Si noti che se  $\gamma$  è una curva differenziabile (a tratti) localmente minimale, cioè  $\gamma$  è minimale in un intorno di ogni suo punto, dalla dimostrazione del Corollario 7.46 segue che  $\gamma$  è localmente una geodetica e quindi una geodetica.

### Coordinate normali

Sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una fissata base ortonormale di  $T_p M$ . La corrispondenza che ad ogni  $V \in T_p M$ ,  $V = \sum_i y_i e_i$ , associa la  $n$ -pla  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , identifica  $T_p M$  con  $\mathbb{R}^n$ . Se  $U$  è un intorno normale di  $p$ , in particolare si può considerare una palla geodetica  $B(p, \delta)$ , l'applicazione

$$\varphi : U \rightarrow \exp_p^{-1}(U) = B(0, \delta),$$

$$q = \exp_p V = \exp_p \left( \sum_i y_i e_i \right) \mapsto \exp_p^{-1}(q) = (y_1, \dots, y_n),$$

è un'applicazione coordinata per  $M$ .  $(y_1, \dots, y_n)$  si dicono *coordinate normali* centrate in  $p$ , e la coppia  $(U, \varphi = \exp_p^{-1}|_U)$  si dice *carta normale*, rispetto alla base  $\{e_i\}$ . Si noti che  $y_i(p) = 0$  per ogni  $i$ .

**Proposizione 7.47.** *Sia  $(y_1, \dots, y_n)$  un sistema di coordinate normali centrate in  $p$ , rispetto alla base ortonormale  $\{e_i\}$ , definito nella palla geodetica  $B(p, \delta)$ . Allora per ogni  $V \in T_p M$ ,  $V = \sum_i v_i e_i$ , la geodetica  $\gamma_V(t)$  si rappresenta, rispetto al fissato sistema di coordinate, con equazioni parametriche lineari  $y_i(t) = tv_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $|t| < \epsilon$ . In particolare, si ha  $(\partial/\partial y_k)_p = e_k$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo il caso non banale  $V \neq 0$ . Per ogni  $t > 0$  tale che  $tV \in B(0, \delta)$ , cioè per  $|t| < \epsilon := \frac{\delta}{\|V\|}$ , abbiamo

$$\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1) = \exp_p(tV) = \exp_p \left( \sum_i tv_i e_i \right)$$

e quindi

$$y_i(t) = y_i(\gamma_V(t)) = tv_i.$$

Siccome

$$V = \dot{\gamma}_V(0) = \sum_i \frac{dy_i}{dt}(0) \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p = \sum_i v_i \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \right)_p,$$

prendendo  $V = e_k$ , si ha  $e_k = (\partial/\partial y_k)_p$ .  $\square$

**Osservazione 7.48.** Le componenti  $g_{ij}$  della metrica  $g$ , rispetto a un sistema di coordinate normali centrate in  $p$ , soddisfano:

$$g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)(p) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Quindi  $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p\right\}$  è una base ortonormale di  $T_pM$ . Usando coordinate normali  $(y_i)$ , dal sistema di equazioni differenziali che definisce la geodetica  $\gamma_V(t)$ , siccome  $y_i(t) = y_i(\gamma_V(t)) = tv_i$ , si ottiene  $\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(y(t))v_iv_j = 0$  per ogni  $k$ . Quindi, per  $t = 0$ ,  $\sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(p)v_iv_j = 0$  per ogni  $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $k$ . Poiché  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , la precedente relazione implica

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad \text{cioè} \quad (\nabla_{\partial_i} \partial_j)(p) = 0,$$

dove  $\partial_i = \partial/\partial y_i$ . Di conseguenza,

$$(\partial_k g_{ij})(p) = g(\nabla_{\partial_k} \partial_i, \partial_j)(p) + g(\partial_i, \nabla_{\partial_k} \partial_j)(p) = 0.$$

### 7.3 Varietà riemanniane complete

Concludiamo questo capitolo con il Teorema di Hopf-Rinow relativo alle varietà riemanniane geodeticamente complete.

**Definizione 7.49.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice *geodeticamente completa* se ogni geodetica massimale  $\gamma(t)$  è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

Lo spazio euclideo, la sfera canonica e lo spazio iperbolico sono varietà riemanniane geodeticamente complete in quanto le loro geodetiche massimali sono definite per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Più precisamente, indicata con  $\gamma_{p,V}(t)$  la geodetica uscente da  $p$  con vettore velocità  $V$ , si ha

per lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ :  $\gamma_{p,V}(t) = p + tV$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

per lo sfera canonica  $\mathbb{S}^n$ :  $\gamma_{p,V}(t) = (\cos t)p + (\sin t)V$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

per lo spazio iperbolico modello  $H^n$ :  $\gamma_{p,V}(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)V$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Ricordiamo che esiste anche la nozione di completezza nell'ambito degli spazi metrici: uno spazio metrico si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente. D'altronde una varietà riemanniana è uno spazio metrico rispetto alla distanza indotta dalla metrica riemanniana. L'importante teorema di Hopf-Rinow (1931) ci dice non solo che le due nozioni di completezza sono equivalenti, ma sono anche una condizione sufficiente per l'esistenza di geodetiche minimali.

**Teorema 7.50.** (di Hopf-Rinow, 1ª parte) *Se  $M$  è una varietà riemanniana geodeticamente completa, allora per ogni  $p, q \in M$  esiste una geodetica minimale (non necessariamente unica) che li congiunge.*

*Dimostrazione.* Dati  $p, q \in M$ , poniamo  $r = d(p, q)$ . Scegliamo  $\epsilon > 0$  tale che  $B(p, 2\epsilon)$  sia una palla geodetica di centro  $p$ . Se  $q \in B(p, 2\epsilon)$ , sappiamo che esiste una geodetica minimale che congiunge  $p$  a  $q$  e quindi vale quanto enunciato. Supponiamo che  $q \notin B(p, 2\epsilon)$ , siccome la funzione distanza

$$d(\cdot, q) : \partial\bar{B}(p, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, q),$$

è continua, allora esiste un punto  $x_0 \in \partial\bar{B}(p, \epsilon)$  dove  $d(x, q)$  ottiene il suo minimo. Sia  $\gamma_V(s)$ ,  $0 \leq s \leq \epsilon$ ,  $V \in T_p M$ ,  $\|V\| = 1$ , la geodetica minimale radiale che collega  $p$  a  $x_0 = \gamma_V(\epsilon)$ . Per ipotesi sappiamo che  $\gamma_V(s)$  è definita per ogni  $s \in \mathbb{R}$ . Per provare il teorema è sufficiente provare che  $\gamma_V(r) = q$ . Infatti, in tal caso:

$$L(\gamma_V|_{[0,r]}) = L(\gamma_{rV}|_{[0,1]}) = \|rV\| = r = d(p, q).$$

Proviamo quindi che  $\gamma_V(r) = q$ . Poniamo

$$S = \{s \in [0, r] : d(\gamma_V(s), q) = r - s\}.$$

Si noti che  $S$  è non vuoto in quanto  $0 \in S$ . Sia  $a = \sup S$ . Per la continuità della funzione distanza,  $S$  è un chiuso e quindi  $a \in S$ . A questo punto basta verificare che  $\sup S = r$ . Infatti, in tal caso  $d(\gamma_V(r), q) = 0$  e quindi  $\gamma_V(r) = q$ . Supponiamo che sia  $a < r$  e facciamo vedere che si ottiene una contraddizione mostrando che  $(a + \delta) \in S$  per qualche  $\delta > 0$ . Scegliamo un  $\delta > 0$  tale che  $\bar{B}(\gamma_V(a), \delta)$  sia una palla geodetica chiusa. Poniamo  $y = \gamma_V(a)$ . Il fatto che  $a \in S$  significa che

$$d(y, q) = r - a. \quad (7.9)$$

Consideriamo la funzione distanza  $d(\cdot, q) : \partial\bar{B}(y, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_1 \in \partial\bar{B}(y, \delta)$  dove  $d(\cdot, q)$  ottiene il suo minimo. Sia  $\sigma : [0, \delta] \rightarrow M$  la geodetica minimale radiale che collega  $y$  e  $x_1$  (cfr. Figura 7.11).

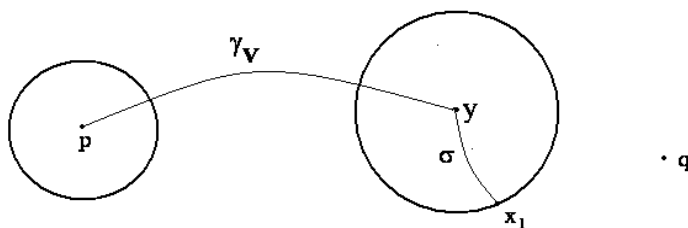


Figura 7.11: La geodetica  $\gamma_V$  e la geodetica radiale minimale  $\sigma$ .

Osserviamo che:  $d(y, q) = \delta + \min \{d(x, q) : x \in \partial\bar{B}(y, \delta)\} = \delta + d(x_1, q)$ . Questa formula e la (7.9) implicano:

$$r - a = \delta + d(x_1, q), \quad (7.10)$$

dalla quale, usando la disuguaglianza triangolare, si ottiene

$$d(p, x_1) \geq d(p, q) - d(x_1, q) = r - (r - a - \delta) = a + \delta.$$

D'altronde, la curva  $\tilde{\gamma}$  unione di  $\gamma_V|_{[0,a]}$  (di lunghezza  $a$ ) con  $\sigma$  (di lunghezza  $\delta$ ) è una curva che collega  $p$  a  $x_1$  e ha lunghezza  $L(\tilde{\gamma}) = (a + \delta)$ . Quindi  $d(p, x_1) = L(\tilde{\gamma})$ , per cui la curva  $\tilde{\gamma}$  è minimale e quindi (applicando il Corollario 7.46) è una curva geodetica e in particolare differenziabile. Di conseguenza, sarà  $x_1 = \gamma_V(a + \delta)$  e la (7.10) diventa

$$r - a = \delta + d(x_1, q) = \delta + d(\gamma_V(a + \delta), q),$$

da cui segue che  $(a + \delta) \in S$  che contraddice  $a = \sup S$ .  $\square$

Esistono varietà riemanniane complete in cui la geodetica minimale non sempre è unica. Ad esempio, se consideriamo due punti antipodali della sfera canonica, la geodetica minimale che li congiunge non è univocamente determinata. Inoltre, se consideriamo  $(\mathbb{R}_+^2, g_0)$ , ovvero il semipiano con la metrica euclidea, questa è una varietà riemanniana in cui comunque prendiamo due punti esiste una geodetica minimale che li congiunge, tuttavia non è una varietà riemanniana completa. Quindi, del Teorema 7.50 non vale il viceversa.

**Teorema 7.51.** (di Hopf-Rinow, 2<sup>a</sup> parte) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Se  $d$  è la distanza indotta dalla metrica  $g$ , allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- 1) *l'applicazione esponenziale  $\exp_p$  è definita su tutto  $T_p M$  per ogni  $p \in M$ ;*
- 2)  *$(M, g)$  è geodeticamente completa;*
- 3) *chiusi e limitati di  $(M, d)$  sono compatti;*
- 4)  *$(M, d)$  è uno spazio metrico completo.*

*Dimostrazione.* 1)  $\Rightarrow$  2). Per ipotesi  $\exp_p(tV) = \gamma_{tV}(1)$  è definita per ogni  $V \in T_p M$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Di conseguenza, la curva geodetica  $\gamma_V(t) = \gamma_{tV}(1)$  è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  quale che sia  $V \in T_p M$ . Ciò implica che  $M$  è geodeticamente completa. L'implicazione inversa 2)  $\Rightarrow$  1) è ovvia.

2)  $\Rightarrow$  3). Sia  $C$  un sottoinsieme chiuso e limitato di  $M$ . Allora  $C$ , in quanto limitato, è contenuto in una palla  $B(p, r)$ , rispetto alla distanza  $d$ , di centro  $p$ . Applicando il Teorema 7.50, se  $q \in B(p, r)$ , allora esiste una curva geodetica minimale  $\gamma_V(t), t \in [0, 1]$ , che collega  $p$  a  $q$ . Quindi,  $q = \exp_p V$  e  $\|V\| = L(\gamma_V) = d(p, q) < r$ . Di conseguenza, considerata la palla  $B(0, r)$  di  $T_p M$ , si ha  $B(p, r) \subset \exp_p \bar{B}(0, r)$ . D'altronde,  $\exp_p \bar{B}(0, r)$  è un compatto in quanto immagine continua di un compatto. Pertanto,  $C$  è un sottoinsieme chiuso di un compatto e quindi è un compatto.

3)  $\Leftrightarrow$  4). È un risultato classico di topologia generale.

4)  $\Rightarrow$  1): basta provare che per ogni  $p \in M$  e per ogni  $V \in T_p M$  la geodetica  $\gamma_V(t)$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Supponiamo per assurdo che  $[0, t_0)$ , con  $t_0$  finito,

sia il piú grande intervallo aperto a destra su cui  $\gamma_V(t)$  è definita. Sia  $(t_k) \subset [0, t_0)$  una successione crescente che converge a  $t_0$ . Siccome

$$d(\gamma_V(t_{k_1}), \gamma_V(t_{k_2})) \leq L(\gamma_V|_{[t_{k_1}, t_{k_2}]}) = \|V\| |t_{k_1} - t_{k_2}|,$$

$(\gamma_V(t_k))$  è una successione di Cauchy in  $M$  per la distanza  $d$  e quindi converge a un punto  $q \in M$  che non dipende dalla particolare successione scelta. Ponendo  $\gamma_V(t_0) = q$ , otteniamo un'applicazione continua da  $[0, t_0]$  in  $M$ . Sia  $W(q, \delta)$  un intorno totalmente normale del punto  $q$ . Fissato  $\delta_1 < \delta$ , per ogni  $k$  abbastanza grande, abbiamo  $|t_k - t_0| < \frac{\delta_1}{\|V\|}$  e  $\gamma_V(t_k) \in W$ . Siccome, le geodetiche radiali uscenti da  $\gamma_V(t_k)$  si possono prolungare di una lunghezza almeno uguale a  $\delta_1$ , e siccome  $L(\gamma_V|_{[t_k, t_0]}) = |t_k - t_0| \|V\| < \delta_1$ , la geodetica  $\gamma_V$  si può prolungare per  $t > t_0$  ottenendo quindi una contraddizione. Pertanto,  $t_0 = +\infty$  e  $\gamma_V$  è definita su  $[0, +\infty)$ . Siccome  $\gamma_{-V}(t) = \gamma_V(-t)$ , lo stesso ragionamento applicato a  $\gamma_{-V}$  prova che  $\gamma_V$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Corollario 7.52.** *Ogni sottovarietà riemanniana chiusa di una varietà riemanniana completa è completa. In particolare, le sottovarietà riemanniane chiuse dello spazio euclideo sono complete.*

*Dimostrazione.* Sia  $(M, g)$  una sottovarietà riemanniana della varietà riemanniana  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Per semplicità assumiamo  $M \subset \bar{M}$ , quindi  $g = i^* \bar{g}$  dove  $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ . Se  $\gamma$  è una curva differenziabile di  $M$ , allora  $\bar{\gamma} = i \circ \gamma$  è una curva differenziabile di  $\bar{M}$  e  $L(\bar{\gamma}) = L(\gamma)$ . Di conseguenza  $\bar{d}(p, q) \leq d(p, q)$  per ogni  $p, q \in M$ , e quindi ogni successione di Cauchy in  $M$  è di Cauchy anche in  $\bar{M}$ . Siccome  $M$  è un chiuso di  $\bar{M}$  ed  $\bar{M}$  è uno spazio metrico completo, allora anche  $M$  è completo.  $\square$

Un'altra conseguenza del Teorema 7.51 è data dal seguente

**Corollario 7.53.** *Ogni varietà riemanniana compatta è geodeticamente completa.*

**Osservazione 7.54.** In generale, non vale il viceversa del Corollario 7.53, infatti vi sono varietà riemanniane complete ma non compatte, ad esempio lo spazio iperbolico  $H^n$  è completo ma non è compatto. Tuttavia, con opportune ipotesi sulla curvatura si ottiene il viceversa. Vale infatti il Teorema di Myers (cfr. Teorema 8.58).

**Osservazione 7.55.** Varietà riemanniane complete sono l'ambiente naturale per lo studio di proprietà globali in geometria riemanniana. Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale non positiva, allora l'applicazione esponenziale è un'applicazione di rivestimento, che diventa un diffeomorfismo se  $M$  è semplicemente connessa (questo è il Teorema di Cartan-Hadamard). In particolare, per lo spazio iperbolico, l'esponenziale è un diffeomorfismo.

**Osservazione 7.56.** Si noti che se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana completa e  $X$  è un campo vettoriale che soddisfa  $\|X\|^2 = g(X, X) \leq k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , allora  $X$  è un campo vettoriale completo (cfr. [111], p.3).



Se  $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  è un rivestimento riemanniano, le geodetiche di  $(M, g)$  sono tutte e sole le proiezioni delle geodetiche di  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . Pertanto, vale la seguente

**Proposizione 7.57.** *Se  $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  è un rivestimento riemanniano, allora  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  è completa se, e solo se,  $(M, g)$  è completa. In particolare, lo spazio proiettivo con la metrica riemanniana indotta dalla metrica canonica di  $\mathbb{S}^n$  è un spazio completo.*

**Teorema 7.58.** *Ogni varietà riemanniana omogenea è completa.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  una varietà riemanniana omogenea. Ricordiamo che, applicando la Proposizione 7.29 (cfr. anche (7.3)), per ogni fissato punto  $p \in M$  esiste un  $\delta > 0$  tale che per ogni  $V \in T_p M$ ,  $\|V\| = 1$ , la geodetica  $\gamma_V(s)$  è definita per  $0 \leq s \leq r$ , per ogni fissato  $r < \delta$ , con  $s$  ascissa curvilinea. Infatti, per  $W = rV$ ,  $r < \delta$ , si ha  $\|W\| = r < \delta$ ,  $\gamma_W(s)$  è definita per  $0 \leq s \leq 1$ , e quindi  $\gamma_V(s) = \gamma_W(s/r)$  è definita per  $0 \leq s \leq r$ . Sia ora  $\sigma(s)$ ,  $-a \leq s \leq a$ ,  $\sigma(0) = p$ , un'arbitraria curva geodetica di  $M$  parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Per provare il teorema, basta provare che la geodetica  $\sigma(s)$ ,  $-a \leq s \leq a$ , si può estendere per  $-a \leq s \leq a+r$ . Poiché  $M$  è omogenea, esiste un'isometria  $f$  tale che  $f(p) = \sigma(a)$ . Sia  $V_1 = \dot{\sigma}(a) \in T_{f(p)}M$ , allora  $V = f_{*p}^{-1}V_1 \in T_p M$  e  $\|V\| = \|V_1\| = 1$ . In corrispondenza a questo vettore, consideriamo la geodetica  $\gamma_V(s)$  definita per  $0 \leq s \leq r$ . Allora, la curva  $\sigma(a+s) := f(\gamma_V(s))$ ,  $0 \leq s \leq r$ , è geodetica con  $f(\gamma_V(0)) = f(p) = \sigma(a)$ . Di conseguenza,  $\sigma(s)$  è curva geodetica per  $-a \leq s \leq a+r$ .  $\square$

**Esempi 7.59.** Applicando il Teorema 7.58, ritroviamo che la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$ , lo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  e lo spazio iperbolico  $(\mathbb{R}_+^n, g = (1/x_n^2)g_0)$  sono varietà riemanniane geodeticamente complete in quanto varietà riemanniane omogenee. Si noti che le sole varietà riemanniane complete di dimensione 1 sono  $(\mathbb{R}, g_0)$  (di lunghezza infinita) e  $(\mathbb{S}^1, g_0)$  (di lunghezza finita).

**Esempio 7.60.** La varietà riemanniana  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g_0)$  non è geodeticamente completa, ad esempio  $p = (1, 0)$  e  $q = (-1, 0)$  non si possono congiungere con una geodetica minimale oppure si può giustificare osservando che la successione  $\{p_n = (1/n, 1/n)\}_n$  è una successione di Cauchy che non è convergente in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

**Esercizio 7.61.** Siano  $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$  varietà riemanniane con distanze riemanniane  $d_1, d_2$  rispettivamente. Sia  $d$  la distanza riemanniana della varietà riemanniana prodotto  $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ . Se  $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$  sono varietà riemanniane complete, si verifichi che:

- 1) la varietà riemanniana prodotto  $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$  è completa;
- 2)  $d^2(p, q) = d_1^2(p_1, q_1) + d_2^2(p_2, q_2) \quad \forall p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2) \in M_1 \times M_2$ .

Infine, osserviamo quanto segue.

**Osservazione 7.62.** Per ogni varietà riemanniana  $(M, g)$  esiste sempre una metrica riemanniana completa conforme a  $g$  (cfr. Nomizu-Ozeki [76]).



## Capitolo 8

# La curvatura riemanniana

Secondo Robert Osserman, matematico ben noto, la curvatura è il concetto centrale della geometria riemanniana. Una metrica riemanniana  $g$  determina completamente la sua curvatura. Viceversa, spesso possiamo dedurre informazioni sulla metrica da particolari proprietà della curvatura. In alcuni casi, la conoscenza della curvatura determina completamente la metrica (almeno localmente). In generale, la curvatura influenza ma non determina la metrica. Tutte le informazioni sulla curvatura sono contenute nel *tensore di curvatura di Riemann*  $R$  associato alla varietà riemanniana  $(M, g)$ . Tale tensore è un oggetto analitico in generale non facile da maneggiare, tanto che, il famoso matematico M. Gromov chiamò il tensore di curvatura “*piccolo mostro dell'algebra multilineare, il cui pieno significato geometrico è ancora oscuro*”. Questo spiega l'esigenza di ricorrere anche ad altre forme di curvatura, come quella sezionale, di Ricci e scalare, di più semplice interpretazione geometrica e più maneggevoli rispetto al tensore di Riemann  $R$ . Tuttavia, in dimensione 2, il tensore  $R$  si riduce a una singola funzione: la curvatura gaussiana. Sebbene la definizione del tensore  $R$  si basi sulla nozione di connessione riemanniana, storicamente l'idea di connessione è postdata rispetto all'introduzione fatta da Riemann del tensore di curvatura. Egli individuò questo oggetto nel termine del secondo ordine della espressione di Taylor della metrica riemanniana  $g$ . Più precisamente, se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sono coordinate normali centrate in  $p_0$ , si ha

$$\begin{aligned}x_i(p_0) &= 0, & g_{ij}(p_0) &= g_{ij}(0) = \delta_{ij}, & (\partial g_{ij} / \partial x_k)(p_0) &= 0, \\g_{ij}(x) &= \delta_{ij} - (1/3) \sum_{h,k=1}^n R_{ihjk}(p_0) x_h x_k + o(|x|^2).\end{aligned}$$

Poiché  $(\delta_{ij})$  rappresenta la metrica euclidea,  $R$  stima di quanto una metrica differisce dall'essere piatta. Tutte le informazioni contenute in  $R$  sono anche contenute nella curvatura sezionale, la quale è la naturale generalizzazione della curvatura gaussiana. La curvatura sezionale è una funzione a valori reali definita nella grassmanniana dei 2-piani tangenti. Un ruolo fondamentale nello studio della geometria riemanniana è svolto dalle varietà a curvatura sezionale costante, anche per il loro legame con le geometrie non-euclidee.

## 8.1 Uno sguardo alla curvatura gaussiana

Prima di iniziare lo studio della curvatura di una varietà riemanniana, è opportuno esaminare alcuni aspetti e implicazioni della curvatura gaussiana di una superficie. La curvatura gaussiana è la principale nozione intrinseca di una superficie. Intuitivamente, con il termine “proprietà intrinseche” si indicano quelle proprietà di una superficie che dipendono solo da misure di lunghezze di curve che stanno sulla stessa superficie, al contrario di quelle estrinseche che dipendono dalla posizione della superficie nello spazio.

### La curvatura di una curva

Per capire la genesi del concetto di curvatura, partiamo dalla nozione di curvatura di una curva dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ . Se  $\gamma(s)$ ,  $s$  ascissa curvilinea, è un arco di curva regolare,

$$k(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$$

è la *curvatura* di  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s)$ . Nel caso di  $\gamma(s)$  curva piana, è possibile definire la curvatura con segno. Se  $(e_1, e_2)$  è la base naturale di  $\mathbb{R}^2$ , si definisce il versore normale  $\vec{n}(s)$  richiedendo che la base  $(\dot{\gamma}(s), \vec{n}(s))$  sia equiversa alla base  $(e_1, e_2)$ . Allora, la curvatura con segno è definita da  $\ddot{\gamma}(s) = k(s)\vec{n}(s)$  (cfr. Figura 8.1).

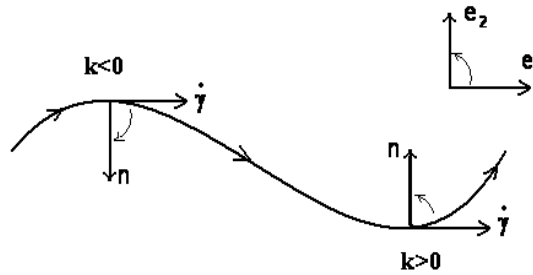


Figura 8.1: La curvatura di una curva.

Un altro modo per presentare la curvatura è il seguente. Fissato un punto  $p = \gamma(s)$  sulla curva, si considera il versore normale  $\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}$  a  $\gamma$  in quel punto, poi si considera una circonferenza unitaria e si sceglie un raggio avente la direzione del versore normale  $\vec{n}(s)$ , la scelta del raggio individua un punto  $G(p)$  sulla circonferenza. Quando  $p$  descrive un piccolo arco  $\gamma(s)$ ,  $s_0 \leq s \leq s_0 + \Delta s$ , su  $\gamma$ ,  $G(p)$  descrive un corrispondente arco, di lunghezza  $\Delta\vartheta$ , sulla circonferenza unitaria, allora la curvatura nel punto  $\gamma(s_0)$  è data da

$$k(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta s}.$$

Quindi, la curvatura di una curva dà una stima di quanto la stessa curva si allontana dalla retta tangente in quel punto. In particolare, una circonferenza di raggio  $r$  ha curvatura costante  $k = 1/r$ .

Infine, osserviamo che la curvatura e la torsione  $\tau$  (che a sua volta stima di quanto la curva si allontana dall'essere piana) caratterizzano una curva, abbiamo infatti il seguente teorema fondamentale della teoria delle curve.

**Teorema 8.1.** ([96], p.67) *Siano  $\gamma_1(s), \gamma_2(s) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $s$  ascissa curvilinea, due curve regolari. Se  $k_1(s) = k_2(s) > 0$  e  $\tau_1(s) = \pm\tau_2(s)$ , allora  $\gamma_1, \gamma_2$  sono congruenti, ossia esiste un'isometria  $f$  dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  tale che  $f(\gamma_1) = \gamma_2$ .*

### La curvatura gaussiana

Gauss nel suo articolo “*Disquisitiones generales circa superficies curvas*” del 1827, definì la curvatura di una superficie  $M$  in un punto  $p \in M$  come la misura di quanto la stessa superficie si allontana dal piano tangente in quel punto.

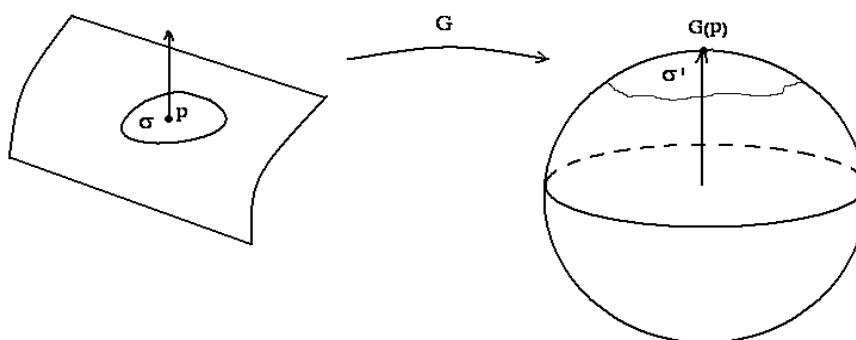


Figura 8.2: L'applicazione di Gauss.

Più precisamente, fissato un punto  $p \in M$ , si considera la normale in quel punto alla superficie, poi si considera una sfera unitaria e si sceglie un raggio avente la direzione della normale fissata; la scelta del raggio individua un punto  $G(p)$  sulla sfera. Quando  $p$  descrive una piccola regione  $\sigma$  su  $M$ ,  $G(p)$  descrive una corrispondente regione  $\sigma'$  sulla sfera unitaria (cfr. Figura 8.2). Gauss definisce la curvatura  $K(p)$  della superficie  $M$  in  $p$ , considerata a meno del segno, come il limite del rapporto tra l'area della regione  $\sigma'$  sulla sfera e l'area della corrispondente regione  $\sigma$  sulla superficie, dove il limite è fatto restringendo le regioni considerate fino a farle coincidere con i rispettivi punti di partenza. Inoltre, Gauss mostrò che  $K(p)$  è esattamente il prodotto delle due curvatures principali  $k_1(p)$  e  $k_2(p)$  introdotte da Eulero nel 1760. Ricordiamo che le curvatures principali  $k_1(p)$  e  $k_2(p)$  di una superficie sono

definite, rispettivamente, come il massimo e il minimo della curvatura  $k_n(p)$  di curve date dalle sezioni di  $M$  con piani normali ad  $M$  nel punto  $p$  (cioè con piani appartenenti al fascio di piani avente per asse la normale in  $p$  al piano tangente). Nel linguaggio moderno la definizione di Gauss può essere espressa nel modo seguente. Se si considera  $G$  come un'applicazione da  $M$  in  $S^2$ ,  $G$  è differenziabile e  $K(p) = \det G_{*p}$  dove  $G_{*p}$  denota il differenziale di  $G$  nel punto  $p$ . Quando  $M$  è orientabile, la funzione  $G$  è ben definita sull'intera superficie  $M$  (in tal caso esiste un campo differenziabile di vettori normali ad  $M$ , non nullo e definito sull'intera superficie), in generale  $G$  è definita solo localmente. Si noti che al tempo di Gauss, la nozione di orientazione non era ben nota; Möbius esibì il suo famoso esempio di superficie non orientabile, oggi noto come nastro di Möbius, solo nel 1865.

**Esercizio 8.2.** Sia  $\xi$  un campo unitario di vettori ortogonali alla superficie  $M$ . Identificato  $T_p M$  con  $T_{G(p)} S^2$ , verificare che il differenziale  $G_{*p}$  coincide, a meno del segno, con l'operatore forma (o operatore di Weingarten)

$$S_p : T_p M \rightarrow T_p M, V_p \mapsto S_p(V_p) = -\nabla_{V_p}^0 \xi,$$

dove  $\nabla^0$  è la connessione euclidea. Suggerimento: indicata con  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = V_p$ , osservare che

$$S_p(V_p) = \dots = -\xi'(0) \quad \text{e} \quad G_{*p}V_p = \dots = \xi'(0), \quad \text{dove} \quad \xi(t) = \xi(\gamma(t)).$$

Vi sono significative differenze fra superfici con curvatura positiva, nulla o negativa (cfr. Figura 8.3). Vicino al punto di tangenza, una superficie

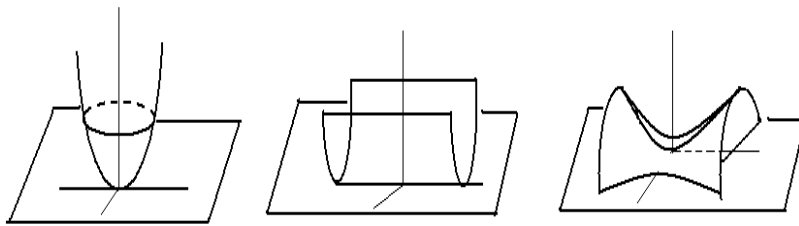


Figura 8.3: *Superfici con curvatura gaussiana  $>$ ,  $=$ ,  $<$  0.*

con curvatura positiva giace tutta da una parte rispetto al piano tangente, quelle con curvatura nulla hanno una linea lungo la quale si sovrappongono al loro piano tangente (tali superfici sono dette sviluppabili, come ad esempio piano, cono, cilindro). Le superfici con curvatura negativa invece intersecano i loro piani tangenti come in una sella. La misura precisa della curvatura dipende dal comportamento della superficie al secondo ordine. Un modo per

realizzare ciò è scegliere un sistema di coordinate in modo che il punto sulla superficie sotto lo sguardo sia l'origine e il piano tangente in quel punto sia orizzontale. Questo significa che la superficie localmente è rappresentata da  $z = f(x, y)$  tale che  $f$  e le sue derivate parziali del primo ordine  $f_x$  e  $f_y$  siano nulle nell'origine. Allora la curvatura gaussiana nell'origine è il determinante della matrice hessiana

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, la curvatura della superficie  $z = f(x, y)$ , dove  $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ , nell'origine è data da  $K_0 = 4(AC - B^2)$ . Per un paraboloide di rotazione (ad esempio  $z = -(x^2 + y^2)/2$ ) la curvatura gaussiana  $K_0$  è positiva, invece per un paraboloide iperbolico o a sella (ad esempio  $z = (x^2 - y^2)/2$ ) la curvatura gaussiana  $K_0$  è negativa. La curvatura  $K(p)$  per le superfici degli esempi non è costante: essa tende rapidamente a zero lontano dall'origine mantenendo lo stesso segno.

Ricordiamo che una nozione (o una proprietà) è detta *intrinseca* se essa dipende solo dalla prima forma fondamentale ossia se è invariante per isometrie locali, altrimenti è detta *estrinseca*. La definizione di curvatura data da Gauss sembra dipendere da nozioni estrinseche (viene considerato il vettore normale alla superficie). Egli però dimostrò che la sua definizione di curvatura dipende unicamente da come si effettuano le misure sulla superficie  $M$ , ossia dipende solo dalla prima forma fondamentale. Gauss, a partire dalle equazioni parametriche di una superficie regolare:  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$ , definì la cosiddetta *prima forma fondamentale* della superficie (come una generalizzazione del concetto di distanza tra due punti infinitamente vicini) mediante la formula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

dove  $E = g_0(\phi_u, \phi_u)$ ,  $F = g_0(\phi_u, \phi_v)$ ,  $G = g_0(\phi_v, \phi_v)$ ,  $g_0$  denota il prodotto scalare euclideo, e  $\phi_u$  e  $\phi_v$  sono i vettori tangenti alle linee coordinate  $v = \text{cost.}$  e  $u = \text{cost.}$  rispettivamente. Quindi, dimostrò il "*Theorema Egregium*": la curvatura gaussiana dipende solo dalla prima forma fondamentale, in altre parole la curvatura gaussiana è calcolabile da un essere bidimensionale che vive sulla superficie e non può abbandonarla per tracciare perpendicolari. Dunque: se  $f : M \rightarrow \bar{M}$  è un'isometria (locale) tra due superfici, allora  $\bar{K}(f(p)) = K(p)$ .

Diamo ora delle presentazioni della curvatura gaussiana che mettono in evidenza il suo carattere intrinseco. Data una superficie  $M$ , sia  $T_p M$  il piano tangente in un punto  $p \in M$ . La circonferenza  $C_E(p, \varepsilon)$  (di  $T_p M$  con centro in  $p$  e raggio  $\varepsilon$ ) ha lunghezza euclidea

$$\mathcal{L}(C_E(p, \varepsilon)) = 2\pi\varepsilon.$$

La circonferenza di  $M$  di centro  $p$  e raggio  $\varepsilon$  è definita da

$$C_M(p, \varepsilon) = \{q \in M : d(p, q) = \varepsilon\},$$

dove  $d$  è la distanza intrinseca di  $M$ .

**Teorema 8.3** (Bertrand-Diguet-Puiseux, 1848).

$$\mathcal{L}(C_M(p, \varepsilon)) = \mathcal{L}(C_E(p, \varepsilon)) \left[ 1 - \frac{K(p)}{3!} \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right] = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi}{3} K(p) \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3),$$

e quindi

$$K(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left[ \frac{2\pi\varepsilon - \mathcal{L}(C_M(p, \varepsilon))}{\varepsilon^3} \right].$$

Se  $M$  è la sfera di raggio  $R$ , il raggio della circonferenza  $C_M(p, \varepsilon)$  è  $R \sin(\varepsilon/R)$ . Di conseguenza

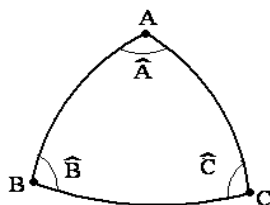
$$\mathcal{L}(C_M(p, \varepsilon)) = 2\pi R \sin \frac{\varepsilon}{R} = 2\pi\varepsilon - \frac{\pi\varepsilon^3}{3R^2} + o\left(\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^3\right),$$

e quindi  $K(p) = 1/R^2$ .

**Teorema 8.4** (elegantissimo di Gauss, 1827). *Sia  $T$  un triangolo geodetico di vertici  $A, B, C$  di una superficie  $M$  di  $\mathbb{R}^3$ . Allora*

$$\int_T K(p) d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi,$$

dove  $K(p)$  è la curvatura gaussiana della superficie  $M$  in  $p$ ,  $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$  denotano le misure (in radianti) degli angoli interni al triangolo  $T$ , e  $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$  è l'elemento d'area di  $M$ .



L'invariante

$$K(p) = \lim_{T \rightarrow p} ((\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi) / \text{area}(T))$$

misura il difetto di euclidicità della superficie nel punto. In particolare, se  $K$  è costante su  $M$ ,  $K(p) = K_0$  per ogni  $p \in M$  e quindi

$$K_0 = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi) / \text{area}(T).$$

In particolare, per  $K_0 = 1$  otteniamo esattamente la formula scoperta da A. Girard nel 1629 per un triangolo geodetico sulla sfera unitaria.

Se  $K_0 = 0$  (cioè, se  $M$  è una superficie localmente piatta), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi,$$

(fatto ben noto della geometria euclidea).

Se  $K_0 > 0$  (cioè, se  $M$  è localmente isometrica ad una sfera di raggio  $\sqrt{1/K_0}$ ), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi.$$

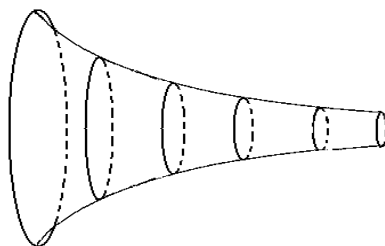
Se  $K_0 < 0$  (cioè, se  $M$  è localmente isometrica ad una pseudosfera), si ha

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \pi.$$

Al tempo di Gauss uno dei problemi fondamentali della geometria era la “*questione delle parallele*”, iniziata al tempo di Euclide e conclusasi solo con l’avvento delle geometrie non euclidee. Si trattava di decidere se il quinto postulato della geometria euclidea fosse indipendente dagli altri postulati della geometria di Euclide. Ben presto si stabilì che il quinto postulato è equivalente al fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a  $\pi$  (radianti). Dunque, la scoperta di Gauss faceva intravedere l’esistenza di geometrie diverse da quella euclidea e quindi di una geometria sulle superfici senza riferimento allo spazio ambiente.

### La pseudosfera di Beltrami

Il piano euclideo ( $K=0$ ) e la sfera  $S^2(R)$  ( $K = \frac{1}{R^2}$ ) sono due modelli della teoria delle superfici di  $\mathbb{R}^3$  a curvatura gaussiana costante. Il terzo modello è la *pseudosfera di Beltrami*:



una superficie (non completa) di curvatura gaussiana costante negativa, che non è possibile visualizzare in modo completo in  $\mathbb{R}^3$ . Nel seguito diamo una descrizione di tale superficie (cfr. M. Villa [115]). La pseudosfera di Beltrami è la superficie generata dalla rotazione di una trattrice intorno al proprio asintoto. La trattrice dal punto di vista meccanico è la curva descritta in un piano orizzontale da un punto pesante attaccato all’estremo di un filo teso, di cui l’altro estremo percorre una retta appartenente a quel piano (ciò giustifica il nome della curva). Tale curva è anche detta *curva del cane* pensando ad un uomo che, percorrendo una retta, tira per il guinzaglio un cane restio a seguirlo. Nel piano euclideo la *trattrice* è una curva per cui, se  $P$  è un punto

di essa e  $T$  è il punto in cui la tangente in  $P$  interseca una retta fissa  $a$ , il segmento  $PT$  ha lunghezza costante ( $= R$ ) al variare di  $P$  sulla curva. La retta  $a$  è l'asintoto della trattrice (cfr. Figura 8.4). Supponendo che la retta  $a$  sia l'asse  $x$ , allora la trattrice  $\gamma$  ha equazione del tipo  $y = y(x)$ . Fissato  $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$  e detto  $T$  il punto in cui la tangente in  $P_0$  incontra l'asse  $x$ , la retta  $[P_0, T]$  è la tangente in  $P_0$  a  $\gamma$ , quindi ha equazione

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{con} \quad y'(x_0) = (dy/dx)(x_0).$$

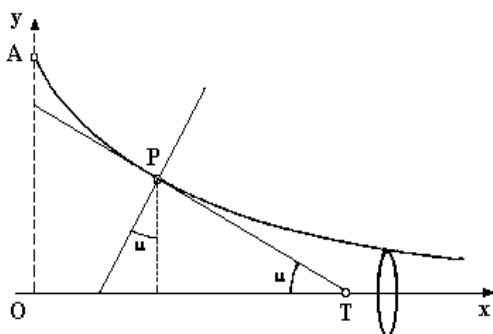


Figura 8.4: La trattrice.

Siccome  $T$  ha coordinate  $x_1 = x_0 - \frac{1}{y'(x_0)}y_0 = x_0 - \frac{dx}{dy}(y_0)y_0$  e  $y_1 = 0$ , si ha

$$\overline{P_0T} = \text{cost} = R \Leftrightarrow R^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \left(\frac{dx}{dy}(y_0)\right)^2 y_0^2 + y_0^2.$$

Considerato  $P(x, y)$  generico punto di  $\gamma$ , si ha :

$$R^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 y^2 + y^2, \quad \text{cioè} \quad \frac{R^2 - y^2}{y^2} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2, \quad y > 0.$$

Pertanto  $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}\sqrt{R^2 - y^2}$  (eq. differenziale della curva), e quindi

$$x = \int \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y} dy.$$

Indicato con  $u$  l'angolo formato dalla tangente  $PT$  con l'asse  $x$ , si ha

$$y = R \sin u, \quad x = R \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = R \left( \int \frac{du}{\sin u} - \int \sin u du \right).$$

Il punto  $A$  inizio della curva (pensando alla generazione meccanica) ha coordinate  $(0, R)$ , pertanto dovrà aversi  $x = 0$  per  $u = \pi/2$ . Dunque,  $\gamma$  ha



equazioni parametriche:

$$\gamma : \begin{cases} x = R \ln \tan u/2 + R \cos u, \\ y = R \sin u, \quad u \in ]0, \pi[. \end{cases} \quad (8.1)$$

$\gamma(u)$  è una curva regolare tranne che per  $u = \pi/2$ . Eliminando  $u$  si ottiene l'equazione cartesiana:

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2} + R \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Per  $u \in ]0, \pi/2[$  si ottiene la curva in Figura 8.4, per  $u \in [\pi/2, \pi[$  si ottiene una curva simmetrica rispetto all'asse  $y$ . Infatti, cambiando nella (8.1)  $u$  con  $\pi - u$ , la  $x$  cambia di segno mentre la  $y$  resta inalterata. Quindi,  $\gamma$  è simmetrica rispetto all'asse  $y$ . Il punto  $A$  è una cuspide per la curva e l'asse  $y$  è la relativa tangente cuspidale. La pseudosfera si ottiene ruotando  $\gamma$  intorno all'asse  $x$ . La superficie  $\Sigma$  ottenuta ha equazioni parametriche

$$\Sigma : \begin{cases} x = R(\ln \tan u/2 + \cos u), & u \in ]0, \frac{\pi}{2}[, v \in [0, 2\pi[, \\ y = R \sin u \cos v, \\ z = R \sin u \sin v. \end{cases}$$

I vettori tangenti coordinati sono

$$\begin{aligned} \phi_u &= R \left( \frac{\cos^2 u}{\sin u}, \cos u \cos v, \cos u \sin v \right), \\ \phi_v &= R(0, -\sin u \sin v, \sin u \cos v), \end{aligned}$$

e quindi la prima forma quadratica fondamentale è definita dai coefficienti

$$\begin{aligned} E &= g_0(\phi_u, \phi_u) = R^2 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}, & F &= g_0(\phi_u, \phi_v) = 0, \\ G &= g_0(\phi_v, \phi_v) = R^2 \sin^2 u. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\xi = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|} = (\sin u, -\cos u \cos v, -\cos u \sin v)$$

è un vettore ortogonale alla superficie e quindi la seconda forma quadratica fondamentale è definita dai coefficienti

$$\begin{aligned} l &= g_0(\phi_{uu}, \xi) = -R \frac{\cos u}{\sin u}, \\ m &= g_0(\phi_{uv}, \xi) = 0, \\ n &= g_0(\phi_{vv}, \xi) = R \sin u \cos u. \end{aligned}$$

Pertanto, la curvatura gaussiana della pseudosfera è una costante negativa:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{R^2}.$$

Si può verificare che la geometria sulla pseudosfera di Beltrami, assumendo come rette le geodetiche di tale superficie, coincide (limitatamente a regioni opportune) con la geometria piana iperbolica. Hilbert dimostrò che non esiste una superficie dello spazio euclideo a curvatura costante negativa in cui valga in tutta la sua estensione la geometria iperbolica. Più precisamente, vale il seguente

**Teorema 8.5.** (di Hilbert) *Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  non esiste una superficie regolare completa di curvatura gaussiana costante negativa.*

## 8.2 Il tensore di curvatura di Riemann

Sia  $M$  una varietà differenziabile munita di una connessione lineare  $\nabla$ .

**Definizione 8.6.** Il tensore  $R$  di tipo  $(1, 3)$  su  $M$  definito da

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z &:= -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= -[\nabla_X, \nabla_Y]Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \end{aligned}$$

si dice *tensore di curvatura* associato alla connessione lineare  $\nabla$ .

**Esercizio 8.7.** Si verifichi che  $R$  è effettivamente un tensore.

Poiché  $R$  è un tensore,  $(R(X, Y)Z)(p)$  dipende univocamente dai vettori  $X_p, Y_p, Z_p$ , cioè dai tre campi di vettori  $X, Y, Z$  nel punto  $p$ , e non dal loro comportamento in un intorno di  $p$ . Di conseguenza, è possibile definire un tensore di curvatura sullo spazio  $T_p M$  mediante la formula

$$R(X_p, Y_p)Z_p := (R(X, Y)Z)(p) = -\nabla_{X_p} \nabla_{Y_p} Z + \nabla_{Y_p} \nabla_{X_p} Z + \nabla_{[X, Y]_p} Z,$$

dove  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $U$  intorno di  $p$ , con  $X(p) = X_p, Y(p) = Y_p$  e  $Z(p) = Z_p$ .

Nella Sezione 6.2 si è definita per una funzione  $f \in \mathcal{F}(M)$ , rispetto a una fissata connessione lineare  $\nabla$ , la derivata seconda  $\nabla^2 f$  che è un tensore di tipo  $(0, 2)$ . Ora, per un campo vettoriale  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  vediamo che si può definire la *derivata covariante seconda*  $\nabla^2 Z$ . Se  $S$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$ ,  $\nabla S$  denota il tensore di tipo  $(1, 2)$  definito da

$$(\nabla S)(X, Y) = (\nabla_X S)Y := \nabla_X SY - S(\nabla_X Y).$$

Dato  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\nabla Z$  si può pensare come un tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $M$ ,

$$\nabla Z : X \mapsto \nabla_X Z.$$

Pertanto, possiamo definire la derivata covariante seconda  $\nabla^2 Z$ :

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) = \nabla_{X, Y}^2 Z := (\nabla_X \nabla_Y Z)(Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z \quad (8.2)$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .  $\nabla^2 Z$  è un tensore di tipo  $(1, 2)$  su  $M$ . Assumendo  $\nabla$  simmetrica e usando la nozione appena introdotta, otteniamo:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z = -\nabla_{X, Y}^2 Z + \nabla_{Y, X}^2 Z.$$

Quindi,  $R(X, Y)Z$  è la parte antisimmetrica del tensore  $\nabla^2 Z$ . Pertanto, *R stima la non invertibilità della derivata covariante seconda di un campo di vettori*. Se  $[X, Y] = 0$ , come nel caso dei campi di vettori coordinati  $X = \partial/\partial x_i$  e  $Y = \partial/\partial x_j$ , allora

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z.$$

Di conseguenza, se  $R(X, Y) = 0$ , si ha  $\nabla_X \nabla_Y = \nabla_Y \nabla_X$ .

**Osservazione 8.8.** Dati due campi vettoriali  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , è possibile definire l'operatore

$$R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), Z \mapsto R(X, Y)Z,$$

detto *operatore di curvatura*. Si tratta di un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(M)$  per il quale risulta  $R(X, Y) = -R(Y, X)$ . L'operatore di curvatura  $R(X, Y)$  si può estendere ai campi tensoriali ponendo

$$R(X, Y)S := -\nabla_X(\nabla_Y S) + \nabla_Y(\nabla_X S) + \nabla_{[X, Y]} S.$$

In questo modo si ottiene un tensore dello stesso tipo di  $S$ .  $R(X, Y)S$  è  $\mathcal{F}(M)$ -lineare in  $X, Y, S$ . Inoltre, risulta

$$\begin{aligned} (R(X, Y)S)(V_1, \dots, V_r) &= R(X, Y)S(V_1, \dots, V_r) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r S(V_1, \dots, R(X, Y)V_i, \dots, V_r). \end{aligned}$$

Si noti che se  $S$  è di tipo  $(0, r)$ , cioè se  $S(V_1, \dots, V_r) = f \in \mathcal{F}(M)$ , allora

$$R(X, Y)S(V_1, \dots, V_r) = 0$$

in quanto:

$$\begin{aligned} R(X, Y)f &= -\nabla_X \nabla_Y f + \nabla_Y \nabla_X f + \nabla_{[X, Y]} f \\ &= -X(Yf) + Y(Xf) + [X, Y](f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Esercizio 8.9.** Si verifichi che il tensore di curvatura  $R_0$  associato alla connessione lineare euclidea  $\nabla^0$  di  $\mathbb{R}^n$  è identicamente nullo.

Adesso, vediamo di quali proprietà si arricchisce il tensore  $R$  se la varietà considerata è una varietà riemanniana  $(M, g)$  e la connessione considerata

$\nabla$  è quella di Levi-Civita. In queste particolari condizioni, al tensore di curvatura  $R$  di tipo (1,3) si associa in modo naturale un tensore di tipo (0,4), che indichiamo con lo stesso simbolo  $R$ , definito da

$$R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W).$$

Il tensore di curvatura  $R$  di tipo (0,4) è detto *tensore di curvatura di Riemann* della varietà riemanniana  $(M, g)$ . Ovviamente, è anche definito il tensore di curvatura di Riemann  $R$  in un fissato punto  $p$  di  $M$ , basta porre

$$R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) := g_p(R(X_p, Y_p)Z_p, W_p).$$

**Proposizione 8.10.** *Il tensore di curvatura di Riemann  $R$  soddisfa le seguenti proprietà:*

- 1)  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$ ,
- 2)  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ ,
- 3)  $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$ ,
- 4)  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ .

La proprietà 3) è nota come *prima identità di Bianchi*.

*Dimostrazione.* La 1) segue direttamente dalla definizione di tensore di curvatura. Per la 2) basta dimostrare che  $R(X, Y, Z, Z) = 0$  per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Poiché

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= g(R(X, Y)Z, Z) \\ &= -g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) + g(\nabla_{[X, Y]} Z, Z), \end{aligned}$$

sfruttando la compatibilità della connessione di Levi-Civita  $\nabla$  con la metrica  $g$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= -Xg(\nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) + Yg(\nabla_X Z, Z) \\ &\quad - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) + \frac{1}{2} [X, Y]g(Z, Z) \\ &= -\frac{1}{2} XYg(Z, Z) + \frac{1}{2} YXg(Z, Z) + \frac{1}{2} [X, Y]g(Z, Z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Proviamo ora la 3). Usando la definizione di tensore di curvatura e la simmetria di  $\nabla$ , risulta:

$$\begin{aligned} &R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Z [X, Y] + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] + [[X, Y], Z] = 0, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è l'identità di Jacobi. Infine, proviamo la 4). Dalla prima identità di Bianchi, permutando ciclicamente gli argomenti di  $R$ , otteniamo le seguenti 4 equazioni:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) &= 0, \\ R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) &= 0, \\ R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) + R(X, Z, W, Y) &= 0, \\ R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) &= 0. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro e applicando le identità 1) e 2), si ricava:

$$2R(Z, X, Y, W) = 2R(Y, W, Z, X)$$

che equivale all'identità 4).  $\square$

**Esempio 8.11.** Sia  $M$  una ipersuperficie regolare di  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la metrica canonica  $g = i^*g_0$ . Il tensore di curvatura  $R$  di tipo  $(1, 3)$  dell'ipersuperficie  $(M, g)$  è dato da

$$R(X, Y)Z = g(SX, Z)SY - g(SY, Z)SX, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad (8.3)$$

dove  $S$  è l'operatore forma di  $M$  rispetto a un fissato campo vettoriale  $\xi$  unitario (locale) normale all'ipersuperficie. La (8.3) è detta *equazione di curvatura di Gauss* per ipersuperfici dello spazio euclideo.

Verifichiamo l'equazione (8.3). Ricordiamo che, per  $p \in M$  e  $X_p \in T_pM$ , l'operatore forma  $S$  è dato da

$$SX_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi,$$

dove  $\nabla^0$  è la connessione euclidea. Inoltre, vale l'equazione di Gauss (6.24), ovvero

$$(\nabla_X^0 Y)_p = (\nabla_X Y)_p + g_p(SX_p, Y_p)\xi_p,$$

dove  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita di  $(M, g)$ . Ora ricordiamo che il tensore di curvatura dello spazio euclideo è identicamente nullo, per cui è soddisfatta l'identità

$$-\nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z + \nabla_Y^0 \nabla_X^0 Z + \nabla_{[X, Y]}^0 Z = 0. \quad (8.4)$$

Calcolando la derivata covariante seconda, applicando l'equazione di Gauss, si ha

$$\begin{aligned} \nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z &= \nabla_X^0 (\nabla_Y Z + g(SY, Z)\xi) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + g(SX, \nabla_Y Z)\xi + X(g(SY, Z))\xi + g(SY, Z)\nabla_X^0 \xi, \end{aligned}$$

ovvero,

$$-\nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + g(SY, Z)SX - (g(SX, \nabla_Y Z) + X(g(SY, Z)))\xi.$$

In modo analogo si trova:

$$\begin{aligned}\nabla_Y^0 \nabla_X^0 Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - g(SX, Z)SY + (g(SY, \nabla_X Z) + Y(g(SX, Z)))\xi, \\ \nabla_{[X, Y]}^0 Z &= \nabla_{[X, Y]} Z + g(S[X, Y], Z)\xi.\end{aligned}$$

Sostituendo le ultime tre equazioni nella (8.4), si ottiene

$$-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z + g(SY, Z)SX - g(SX, Z)SY + (\dots)\xi = 0.$$

Da questa equazione, ponendo uguale a zero la componente tangente, e tenendo presente la definizione di  $R(X, Y)Z$ , si ottiene esattamente la (8.3).

### Componenti locali del tensore di curvatura

Consideriamo una base locale  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  di campi di vettori definiti in un intorno coordinato  $U$  (in particolare si può considerare  $e_i = \partial/\partial x_i$ ), dove  $n = \dim M$ . Il tensore di curvatura  $R$  di tipo  $(1, 3)$  è univocamente determinato, nell'intorno coordinato  $U$ , dalle funzioni  $R_{ijk}{}^l \in \mathcal{F}(U)$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ , definite da:

$$R(e_i, e_j)e_k = \sum_{h=1}^n R_{ijk}{}^l e_l.$$

Il tensore di curvatura Riemann  $R$  di tipo  $(0, 4)$  è univocamente determinato nell'intorno  $U$  dalle funzioni  $R_{ijkl} \in \mathcal{F}(U)$ , definite da:

$$R_{ijkl} := R(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l) = \sum_{l=1}^n R_{ijk}{}^l g_{lh},$$

dove  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ . In particolare, se la base  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  è ortonormale, si ha

$$R_{ijkl} = R_{ijk}{}^h.$$

Usando le funzioni componenti  $R_{ijkl}$ , le identità della Proposizione 8.10 diventano:

$$R_{ijhk} = -R_{jihk} = -R_{ijkh} = R_{hkij}, \quad R_{ijhk} + R_{jhik} + R_{hijk} = 0.$$

Da queste identità segue che le componenti indipendenti del tensore di curvatura di Riemann di una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale sono solo (!)

$$N = \frac{1}{12} n^2(n^2 - 1).$$

In particolare:

- per  $n = 2$ :  $N = 1$  ( $R_{1212}$ );
- per  $n = 3$ :  $N = 6$  ( $R_{1212}, R_{1213}, R_{1223}, R_{2323}, R_{1313}, R_{1323}$ );
- per  $n = 4$ :  $N = 20$ ; per  $n = 5$ :  $N = 50$ ; ...

Inoltre, per ogni  $p \in U$ ,

$$R(e_{ip}, e_{jp}, e_{kp}, e_{hp}) = R_{ijkh}(p)$$

sono le componenti del tensore di curvatura di Riemann definito su  $T_p M$ . Ora, esprimiamo le componenti  $R_{ij k}^h$  del tensore di curvatura, rispetto a una base coordinata  $\{\partial_i = \partial/\partial x_i\}_{i=1, \dots, n}$ , in funzione dei coefficienti  $g_{ij}$  della metrica riemanniana  $g$ . Siccome i *coefficienti di Christoffel*  $\Gamma_{ij}^k$  sono definiti da  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$ , si ha

$$\begin{aligned}
R(\partial_i, \partial_j) \partial_k &= -\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k + \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k \\
&= -\nabla_{\partial_i} \left( \sum_{h=1}^n \Gamma_{jk}^h \partial_h \right) + \nabla_{\partial_j} \left( \sum_{r=1}^n \Gamma_{ik}^r \partial_r \right) \\
&= -\sum_{h=1}^n (\partial_i \Gamma_{jk}^h \partial_h + \Gamma_{jk}^h \nabla_{\partial_i} \partial_h) + \sum_{r=1}^n (\partial_j \Gamma_{ik}^r \partial_r + \Gamma_{ik}^r \nabla_{\partial_j} \partial_r) \\
&= -\sum_{s=1}^n \partial_i \Gamma_{jk}^s \partial_s - \sum_{h,s=1}^n \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s \partial_s + \sum_{s=1}^n \partial_j \Gamma_{ik}^s \partial_s + \sum_{h,s=1}^n \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s \partial_s \\
&= \sum_{s=1}^n (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) \partial_s + \sum_{s=1}^n \left( \sum_{h=1}^n \Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s - \sum_{h=1}^n \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s \right) \partial_s \\
&= \sum_{s=1}^n \left\{ (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s) \right\} \partial_s.
\end{aligned}$$

D'altronde  $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s \partial_s$ , perciò

$$R_{ijk}^s = (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^s - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^s). \quad (8.5)$$

A questo punto basterà esprimere i coefficienti di Christoffel in funzione delle  $g_{ij}$ . Dall'equazione che definisce la connessione di Levi-Civita  $\nabla$ , posto  $X = \partial_i$ ,  $Y = \partial_j$ ,  $Z = \partial_l$  e moltiplicando ambo i membri per  $g^{lr}$ , si ottiene:

$$\left( \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} \right) g^{lr} = (1/2) (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) g^{lr} \quad \forall l, r = 1, \dots, n.$$

Sommando rispetto all'indice  $l$ , siccome  $\sum_{l=1}^n g_{kl} g^{lr} = \delta_{kr}$ , si ha:

$$\Gamma_{ij}^r = (1/2) \sum_{l=1}^n \{ \partial_j g_{il} + \partial_i g_{jl} - \partial_l g_{ij} \} g^{lr}. \quad (8.6)$$

Sostituendo la (8.6) nella (8.5), si ottiene l'espressione delle componenti del tensore  $R$  in funzione dei coefficienti  $g_{ij}$  della metrica  $g$ .

C'è un'altra importante identità soddisfatta dal tensore di curvatura  $R$ , denominata *seconda identità di Bianchi*, che coinvolge il tensore  $\nabla R$ , pensato come tensore di tipo (1,4) e definito come segue:

$$(\nabla R)(X, Y, Z, V) := (\nabla_V R)(X, Y, Z) = \nabla_V R(X, Y)Z - R(\nabla_V X, Y)Z - R(X, \nabla_V Y)Z - R(X, Y)\nabla_V Z.$$

Lo stesso  $\nabla R$ , inteso come tensore di tipo (0,5), è definito da:

$$\begin{aligned} (\nabla R)(X, Y, Z, V, W) &:= g((\nabla R)(X, Y, Z, V), W) \\ &= g((\nabla_V R)(X, Y, Z), W). \end{aligned}$$

Derivando  $R$  come tensore di tipo (0,4), si ha:

$$(\nabla_V R)(X, Y, Z, W) = g((\nabla_V R)(X, Y, Z), W),$$

dove  $R$  al secondo membro è di tipo (1,3). Tenendo conto che

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(X, Y, Z, W) &:= \nabla_V R(X, Y, Z, W) - R(\nabla_V X, Y, Z, W) \\ &\quad - R(X, \nabla_V Y, Z, W) - R(X, Y, \nabla_V Z, W) - R(X, Y, Z, \nabla_V W), \end{aligned}$$

si verifica facilmente che  $\nabla_V R$  gode delle stesse proprietà di  $R$ :

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(X, Y, Z, W) &= -(\nabla_V R)(Y, X, Z, W) \\ &= -(\nabla_V R)(X, Y, W, Z) \\ &= (\nabla_V R)(Z, W, X, Y). \end{aligned}$$

Se fissiamo una base locale  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  di  $\mathfrak{X}(M)$ , è possibile esprimere le componenti  $\nabla_h R_{ij k}^r$  del tensore  $\nabla R$  del tipo (1,4) nel modo seguente:

$$(\nabla R)(e_i, e_j, e_k, e_h) := (\nabla_{e_h} R)(e_i, e_j, e_k) = \sum_{r=1}^n (\nabla_h R_{ij k}^r) e_r, \quad (8.7)$$

mentre il tensore  $\nabla R$  di tipo (0,5) ha componenti locali  $\nabla_h R_{ij ks}$  definite da

$$\begin{aligned} \nabla_h R_{ij ks} &:= (\nabla R)(e_i, e_j, e_k, e_h, e_s) \\ &= g((\nabla R)(e_i, e_j, e_k, e_h), e_s) \\ &= g((\nabla_{e_h} R)(e_i, e_j, e_k), e_s) \\ &= \sum_{r=1}^n \nabla_h R_{ij k}^r g_{rs}. \end{aligned}$$

**Proposizione 8.12** (*2ª identità di Bianchi*). *Per ogni  $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ , la derivata covariante del tensore di curvatura soddisfa la seguente identità:*

$$(\nabla_Z R)(X, Y, V) + (\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) = 0. \quad (8.8)$$



In coordinate locali la (8.8) assume la forma:

$$\nabla_h R_{ij k}^r + \nabla_i R_{j h k}^r + \nabla_j R_{h i k}^r = 0. \quad (8.9)$$

*Dimostrazione.* Proviamo la (8.8) in ogni punto  $p$  di  $M$ . Sia  $p$  un punto della varietà  $M$  e sia  $(U, (x_i))$  un sistema di coordinate normali centrato in  $p$ . Ricordiamo che rispetto al sistema coordinato fissato, risulta (cfr. Osservazione 7.48):

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \quad \text{e} \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n.$$

Quindi, dalla (8.5) si ottiene

$$\begin{aligned} R_{ij k}^r(p) &= \{\partial_j \Gamma_{ik}^r - \partial_i \Gamma_{jk}^r\}(p), \\ (\partial_h R_{ij k}^r)(p) &= \{\partial_{hj}^2 \Gamma_{ik}^r - \partial_{hi}^2 \Gamma_{jk}^r\}(p). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Inoltre, dalla definizione di  $\nabla R$  segue che le componenti  $\nabla_h R_{ij k}^r$ , rispetto alla base  $e_i = \partial_i$ , sono date da

$$\begin{aligned} \nabla_h R_{ij k}^r &= \partial_h R_{ij k}^r + \sum_{m=1}^n \Gamma_{hm}^r R_{ij k}^m \\ &\quad - \sum_{m=1}^n \left\{ \Gamma_{hk}^m R_{ijm}^r + \Gamma_{hj}^m R_{imk}^r + \Gamma_{hi}^m R_{mjk}^r \right\}, \end{aligned}$$

e quindi

$$(\nabla_h R_{ij k}^r)(p) = (\partial_h R_{ij k}^r)(p) = \{\partial_{hj}^2 \Gamma_{ik}^r - \partial_{hi}^2 \Gamma_{jk}^r\}(p).$$

Allora, nel punto  $p$ , risulta:

$$\begin{aligned} (\nabla_h R_{ij k}^r + \nabla_i R_{j h k}^r + \nabla_j R_{h i k}^r)(p) &= (\partial_{hj}^2 \Gamma_{ik}^r - \partial_{hi}^2 \Gamma_{jk}^r + \partial_{ih}^2 \Gamma_{jk}^r \\ &\quad - \partial_{ij}^2 \Gamma_{hk}^r + \partial_{ji}^2 \Gamma_{hk}^r - \partial_{jh}^2 \Gamma_{ik}^r)(p) = 0. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 8.13.** Rispetto a un fissato sistema di coordinate normali centrato in  $p$ , vale  $(\partial_k g_{ij})(p) = 0$ . Allora, dalla (8.10) e dalla (8.6), si ricava la formula:

$$R_{ij k}^r(p) = (1/2) \{ \partial_{jk}^2 g_{ir} + \partial_{ir}^2 g_{jk} - \partial_{ik}^2 g_{jr} - \partial_{jr}^2 g_{ik} \}(p),$$

dove il tensore di curvatura appare come una sorta di “accelerazione” della metrica.

**Teorema 8.14.** *Il tensore di curvatura di Riemann e la sua derivata covariante sono invarianti per isometrie. Più precisamente, se  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  è un'isometria e  $R, \tilde{R}$  sono i rispettivi tensori di curvatura di Riemann, si ha:*

- a)  $f_*(R(X, Y)Z) = \tilde{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z$ ;
- b)  $f^*\tilde{R} = R$  ( $\tilde{R}, R$  come tensori di tipo (0.4));
- c)  $f_*((\nabla_V R)(X, Y)Z) = (\tilde{\nabla}_{f_*V}\tilde{R})(f_*X, f_*Y)f_*Z$ ;
- d)  $f^*\tilde{\nabla}\tilde{R} = \nabla R$  (come tensori di tipo (0.5)).

*Dimostrazione.* a) Basta osservare che, essendo  $f$  un'isometria, si ha

$$f_*\nabla_X\nabla_Y Z = \tilde{\nabla}_{f_*X}f_*\nabla_Y Z = \tilde{\nabla}_{f_*X}\tilde{\nabla}_{f_*Y}f_*Z.$$

b) Poiché  $f$  è un'isometria, risulta  $\tilde{g}(f_*X, f_*Y) \circ f = g(X, Y)$ , e quindi, la a) implica:

$$\begin{aligned} (f^*\tilde{R})(X, Y, Z, V) &= \tilde{R}(f_*X, f_*Y, f_*Z, f_*V) \circ f \\ &= \tilde{g}(\tilde{R}(f_*X, f_*Y)f_*Z, f_*V) \circ f \\ &= \tilde{g}(f_*R(X, Y)Z, f_*V) \circ f \\ &= g(R(X, Y)Z, V) = R(X, Y, Z, V). \end{aligned}$$

c) Questa identità si ottiene applicando, nell'ordine, la definizione di  $\nabla_V R$  e l'invarianza per isometrie della connessione di Levi-Civita e del tensore di curvatura.

d) Quest'ultima identità segue dalla c). Infatti:

$$\begin{aligned} (f^*\tilde{\nabla}\tilde{R})(X, Y, Z, V, W) &= (\tilde{\nabla}\tilde{R})(f_*X, f_*Y, f_*Z, f_*V, f_*W) \circ f \\ &= \tilde{g}((\tilde{\nabla}_{f_*V}\tilde{R})(f_*X, f_*Y)f_*Z, f_*W) \circ f \\ &= \tilde{g}(f_*((\nabla_V R)(X, Y)Z), f_*W) \circ f \\ &= g((\nabla_V R)(X, Y)Z, W) \\ &= (\nabla R)(X, Y, Z, V, W). \end{aligned}$$

□

**Osservazione 8.15.** Il Teorema 8.14 vale anche nell'ipotesi in cui  $f$  sia un'isometria locale (in tal caso si considerano campi vettoriali locali). Inoltre, anche le derivate covarianti successive di  $R$  sono invarianti per isometrie.

## 8.3 La curvatura sezionale

### Preliminari algebrici

Prima di definire il concetto di *curvatura sezionale* per una varietà riemanniana, è opportuno fare alcune considerazioni di carattere algebrico sul tensore di curvatura.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione finita  $n \geq 2$ .

**Definizione 8.16.** Si dice *tensore di curvatura* su  $V$  ogni tensore  $R$  di tipo  $(0, 4)$  su  $V$ , quindi  $R : V \times V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  multilineare, che verifica le seguenti condizioni:

- i)  $R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) = 0$ ,
- ii)  $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3)$ .

Si noti che da i) e ii) segue anche (cfr. Dim. della Proposizione 8.10):

- iii)  $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2)$ .

**Proposizione 8.17.** Siano  $R$  e  $T$  due tensori di curvatura su  $V$ . Allora,

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = T(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = T.$$

*Dimostrazione.* Senza perdere di generalità assumiamo  $T = 0$  (basterà poi considerare  $R' = R - T$  e  $T' = 0$  al posto di  $R$  e  $T$ ). In queste ipotesi, dimostrare la proposizione significa provare

$$R(v_1, v_2, v_1, v_2) = 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V \implies R = 0.$$

Per ogni  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ , si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1, v_2 + v_4, v_1, v_2 + v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_2) + 2R(v_1, v_2, v_1, v_4) + R(v_1, v_4, v_1, v_4) \\ &= 2R(v_1, v_2, v_1, v_4), \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= R(v_1 + v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_1 + v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1 + v_3, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_4) + R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4) \\ &\quad + R(v_3, v_2, v_3, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_3, v_2, v_1, v_4) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) - R(v_2, v_3, v_1, v_4). \end{aligned}$$

In definitiva, per ogni  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ :

$$(a) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_2, v_3, v_1, v_4).$$

Scambiando  $v_2, v_3, v_4$  con  $v_3, v_4, v_2$  rispettivamente, la (a) diventa:

$$(b) \quad R(v_1, v_3, v_4, v_2) = R(v_3, v_4, v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Tenendo conto delle proprietà i) e iii) del tensore  $R$ , la (a) e la (b) implicano:

$$\begin{aligned} 3R(v_1, v_2, v_3, v_4) &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_1, v_3, v_4, v_2) \\ &= R(v_1, v_2, v_3, v_4) + R(v_2, v_3, v_1, v_4) + R(v_3, v_1, v_2, v_4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Quindi,  $R = 0$ . □

Supponiamo ora che lo spazio vettoriale  $V$  sia dotato di un prodotto scalare definito positivo  $\langle, \rangle$ . Per ogni  $v_1, v_2 \in V$ , poniamo

$$\begin{aligned} A(v_1, v_2) &:= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2 \\ &= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2(\widehat{v_1, v_2})) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2(\widehat{v_1, v_2}). \end{aligned}$$

Se  $v_1, v_2$  sono due vettori non paralleli, la quantità  $(A(v_1, v_2))^{\frac{1}{2}}$  esprime la misura dell'area del parallelogramma costruito sui vettori  $v_1, v_2$ . Sia  $R$  un fissato tensore di curvatura su  $V$ . A ogni coppia  $(v_1, v_2)$  di vettori non paralleli di  $V$ , possiamo associare lo scalare

$$K(v_1, v_2) := \frac{R(v_1, v_2, v_1, v_2)}{A(v_1, v_2)}. \quad (8.11)$$

Se i vettori  $v_1, v_2$  sono ortonormali, risulta  $K(v_1, v_2) = R(v_1, v_2, v_1, v_2)$ .

**Lemma 8.18.** *Lo scalare  $K(v_1, v_2)$ , con  $v_1, v_2 \in V$ , verifica le seguenti condizioni:*

- i)  $K(v_1, v_2) = K(v_2, v_1)$ ;
- ii)  $K(v_1, v_2) = K(av_1, bv_2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ;
- iii)  $K(v_1, v_2) = K(v_1 + \lambda v_2, v_2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* La i) è ovvia. La ii) segue da:

$$R(av_1, bv_2, av_1, bv_2) = a^2 b^2 R(v_1, v_2, v_1, v_2), \quad A(av_1, bv_2) = a^2 b^2 A(v_1, v_2).$$

La iii) segue da:

$$\begin{aligned} R(v_1 + \lambda v_2, v_2, v_1 + \lambda v_2, v_2) &= R(v_1, v_2, v_1 + \lambda v_2, v_2) \\ &\quad + \lambda R(v_2, v_2, v_1 + \lambda v_2, v_2) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_2) + \lambda R(v_1, v_2, v_2, v_2) \\ &= R(v_1, v_2, v_1, v_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(v_1 + \lambda v_2, v_2) &= \|v_1 + \lambda v_2\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1 + \lambda v_2, v_2 \rangle)^2 \\
&= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 + \lambda^2 \|v_2\|^4 + 2\lambda \langle v_1, v_2 \rangle \|v_2\|^2 \\
&\quad - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2 - \lambda^2 \|v_2\|^4 - 2\lambda \langle v_1, v_2 \rangle \|v_2\|^2 \\
&= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2 = A(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

□

**Proposizione 8.19.** *Sia  $P$  un piano dello spazio vettoriale  $V$  e sia  $\{v_1, v_2\}$  una base per  $P$ . Allora, lo scalare  $K(v_1, v_2)$  dipende solo dal piano  $P$  e non dalla particolare base scelta nel piano.*

*Dimostrazione.* Consideriamo in  $P$  una nuova base  $\{w_1, w_2\}$ , allora

$$w_1 = av_1 + bv_2, \quad w_2 = cv_1 + dv_2 \quad \text{con} \quad \Delta := ad - cb \neq 0.$$

Distinguiamo i seguenti due casi.

1) Se  $a \neq 0$ , applicando il Lemma 8.18, per ogni  $\alpha \neq 0$ , si ha

$$\begin{aligned}
K(v_1, v_2) &= K(av_1, \alpha v_2) = K\left(av_1 + \frac{b}{\alpha}(\alpha v_2), \alpha v_2\right) \\
&= K(av_1 + bv_2, \alpha v_2) = K(\alpha v_2, av_1 + bv_2) \\
&= K\left(\frac{c}{a}(av_1 + bv_2) + \alpha v_2, av_1 + bv_2\right) \\
&= K\left(cv_1 + \frac{bc}{a}v_2 + \alpha v_2, w_1\right).
\end{aligned}$$

Prendendo  $\alpha := d - (bc)/a = \Delta/a$ , si ottiene

$$K(v_1, v_2) = K(w_2, w_1) = K(w_1, w_2).$$

2) Se  $a = 0$  ( $\Rightarrow b \neq 0$  e  $c \neq 0$ ), applicando il Lemma 8.18, si ha

$$\begin{aligned}
K(v_1, v_2) &= K(cv_1, bv_2) = K\left(cv_1 + \frac{d}{b}(bv_2), bv_2\right) \\
&= K(cv_1 + dv_2, bv_2) = K(w_2, w_1) = K(w_1, w_2).
\end{aligned}$$

□

Sia

$$G(V) := \{P : P \text{ sottospazio 2-dimensionale di } V\}.$$

Al tensore di curvatura  $R$  si può associare la funzione *curvatura sezionale*

$$K : G(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto K(P) := R(v_1, v_2, v_1, v_2)/A(v_1, v_2),$$

dove  $\{v_1, v_2\}$  è una base del piano  $P$ . La Proposizione 8.19 garantisce che la funzione  $K$  è ben definita, nel senso che è indipendente dalla particolare base scelta in  $P$ . In particolare prendendo una base  $\{v_1, v_2\}$  ortonormale, si ha:

$$K(P) = R(v_1, v_2, v_1, v_2).$$

L'applicazione  $R_0 : V \times V \times V \rightarrow V$ , tale che

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto R_0(v_1, v_2)v_3 := \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_2, v_3 \rangle v_1,$$

definisce un tensore di tipo  $(1, 3)$  sullo spazio vettoriale  $V$ .  $R_0$  determina un tensore di curvatura, che indicheremo ancora con il simbolo  $R_0$ , definito da

$$\begin{aligned} R_0(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \langle R_0(v_1, v_2)v_3, v_4 \rangle \\ &= \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_1, v_4 \rangle. \end{aligned} \quad (8.12)$$

La funzione curvatura sezionale  $K_0$  associata al tensore  $R_0$  è costante su  $G(V)$ , più precisamente:

$$K_0(P) = 1 \quad \text{per ogni } P \in G(V).$$

**Proposizione 8.20.** *Sia  $R$  un tensore di curvatura su  $V$  e  $K$  la funzione curvatura sezionale ad esso associata. Se  $K(P) = \text{cost} = c \quad \forall P \in G(V)$ , allora  $R = cR_0$ .*

*Dimostrazione.*  $K(P) = \text{cost} = c$  per ogni  $P \in G(V)$  implica:

$$\begin{aligned} R(v_1, v_2, v_1, v_2) &= cA(v_1, v_2) = c(\langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2) \\ &= cR_0(v_1, v_2, v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V. \end{aligned}$$

Pertanto, applicando la Proposizione 8.17, otteniamo  $R = cR_0$ .  $\square$

**Osservazione 8.21.** Dalla Proposizione 8.17 segue che *la curvatura sezionale  $K$  determina completamente il tensore di curvatura  $R$* . Per ogni  $x, y, z, w \in V$ , la formula esplicita che permette di esprimere  $R(x, y, z, w)$  in funzione della curvatura sezionale è la seguente:

$$\begin{aligned} 6R(x, y, z, w) &= R(x + w, y + z, x + w, y + z) \\ &\quad - R(y + w, x + z, y + w, x + z) \\ &\quad - R(x, y + z, x, y + z) - R(y, x + w, y, x + w) \\ &\quad - R(z, x + w, z, x + w) - R(w, y + z, w, y + z) \\ &\quad + R(x, y + w, x, y + w) + R(y, z + w, y, z + w) \\ &\quad + R(z, y + w, z, y + w) + R(w, x + z, w, x + z) \\ &\quad + R(x, z, x, z) + R(y, w, y, w) \\ &\quad - R(y, z, y, z) - R(x, y, x, y). \end{aligned}$$

**Osservazione 8.22.** Per ogni  $h$  e  $k$  tensori su  $V$  di tipo  $(0, 2)$  simmetrici, il cosiddetto *prodotto di Kulkarni-Nomizu*:

$$\begin{aligned} (h \odot k)(v_1, v_2, v_3, v_4) &= h(v_1, v_3)k(v_2, v_4) + h(v_2, v_4)k(v_1, v_3) \\ &\quad - h(v_1, v_4)k(v_2, v_3) - h(v_2, v_3)k(v_1, v_4) \\ &= (k \odot h)(v_1, v_2, v_3, v_4) \end{aligned}$$

definisce un tensore di curvatura su  $V$ . Inoltre, indicato con  $g$  il prodotto scalare  $\langle, \rangle$ , si ha:

$$R_0 = (1/2)g \odot g.$$

### La curvatura sezionale riemanniana

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale e sia  $R$  il tensore di curvatura di Riemann associato alla metrica  $g$ . Per ogni fissato punto  $p$  di  $M$ , si definisce *curvatura sezionale di  $M$  in  $p$*  l'applicazione  $K : G(T_p M) \rightarrow \mathbb{R}$  che ad ogni piano  $P$  dello spazio  $T_p M$  associa lo scalare

$$K(p, P) := R(X_1, X_2, X_1, X_2)/A(X_1, X_2), \quad (8.13)$$

dove  $\{X_1, X_2\}$  è una base di  $P$  e

$$A(X_1, X_2) := g_p(X_1, X_1)g_p(X_2, X_2) - (g_p(X_1, X_2))^2.$$

Lo scalare  $K(p, P)$ , detto *curvatura sezionale di  $M$  in  $p$  lungo il piano  $P$* , dipende solo dal piano e non dalla particolare base scelta (cfr. Proposizione 8.19). Dal Teorema 8.14 segue che la curvatura sezionale è invariante per isometrie (locali), nel senso che se  $f$  è un'isometria (locale) di  $M$ , allora per ogni  $p \in M$  e per ogni  $P \in G(T_p M)$ :

$$K(p, P) = K(f(p), f_*P).$$

**Definizione 8.23.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice che ha curvatura sezionale costante se la sua funzione curvatura sezionale  $K$  risulta costante, cioè

$$K(p, P) = k_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in M \quad \text{e} \quad \forall P \in G(T_p M).$$

**Teorema 8.24.** *La curvatura sezionale di una varietà riemanniana determina completamente il tensore di curvatura di Riemann.*

*Dimostrazione.* Per ogni punto  $p$  in  $M$  e comunque prendiamo  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , si ha  $R(X, Y, Z, W)(p) = R(X_p, Y_p, Z_p, W_p)$ . D'altronde, dall'Osservazione 8.21 segue che  $R(X_p, Y_p, Z_p, W_p)$  è completamente determinato dalla curvatura sezionale lungo piani  $P$  dello spazio  $T_p M$ . Pertanto, possiamo concludere che la curvatura sezionale di una varietà riemanniana determina in modo univoco il tensore di curvatura di Riemann.  $\square$

**Esercizio 8.25.** Si verifichi che il tensore di curvatura di Riemann  $R$  di una varietà riemanniana prodotto  $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$  è dato dalla formula:

$$R_p(X, Y, Z, W) = R_{1p_1}(X_1, Y_1, Z_1, W_1) + R_{2p_2}(X_2, Y_2, Z_2, W_2),$$

dove  $p = (p_1, p_2)$  è un punto di  $M_1 \times M_2$ ,  $X_i$  è la proiezione di  $X$  su  $M_i$  e  $R_{ip_i}$  è il tensore di curvatura di  $M_i$  nel punto  $p_i$  ( $i = 1, 2$ ). Si concluda che una metrica riemanniana prodotto ha molte curvatures sezionali nulle.

**Esempio 8.26.** Sia  $G$  un gruppo di Lie munito di una metrica bi-invariante  $g$ . Ricordiamo che la connessione di Levi-Civita associata a  $g$  è data dalla (6.10), ossia  $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Pertanto, dalla definizione di tensore di curvatura tenendo anche conto dell'identità di Jacobi, si ottiene

$$R(X, Y)Z = (1/4)[[X, Y], Z] = (1/4)ad_{[X, Y]}Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Inoltre vale la (5.3), ossia  $g([X, Y], Z) = g(X, [Y, Z])$  per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ . Di conseguenza, il tensore di curvatura di Riemann è dato da

$$R(X, Y, Z, V) = (1/4)g([X, Y], Z, V) = g([X, Y], [Z, V])$$

per ogni  $X, Y, Z, V \in \mathfrak{g}$ . In particolare, se  $X, Y \in \mathfrak{g}$  sono ortonormali, per la curvatura sezionale abbiamo

$$K(X, Y) = (1/4)\|[X, Y]\|^2 \geq 0.$$

### La curvatura nella disuguaglianza isoperimetrica

Un interessante studio in cui appare in modo naturale la curvatura è quello delle disuguaglianze isoperimetriche. Tale studio trae origine dal classico problema isoperimetrico: *“tra tutte le curve chiuse semplici  $\gamma$  del piano (euclideo) che hanno la stessa lunghezza  $L$ , qual'è quella che racchiude un dominio di area massima?”* Se  $\gamma$  ha lunghezza  $L$  e racchiude un dominio di area  $A$ , allora la classica disuguaglianza isoperimetrica è data da:

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se,  $\gamma$  è una circonferenza. In questa disuguaglianza la curvatura apparentemente non compare in quanto il piano euclideo ha curvatura gaussiana nulla. Se  $\gamma$  è una curva chiusa semplice della sfera  $\mathbb{S}^2(R)$  di raggio  $R$ , la curvatura gaussiana  $K = 1/R^2 > 0$  appare esplicitamente. Infatti, in tal caso, la disuguaglianza isoperimetrica diventa

$$(*) \quad L^2 \geq 4\pi A - A^2/R^2,$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se,  $\gamma$  è una circonferenza (e quindi un parallelo della sfera  $\mathbb{S}^2(R)$ ). Si noti che una curva chiusa semplice della sfera  $\mathbb{S}^2(R)$  delimita due domini  $D_1, D_2$  con  $A_2 = 4\pi R^2 - A_1$ , dove  $A_1 = \text{area}(D_1)$  e  $A_2 = \text{area}(D_2)$ . È interessante notare che la (\*) vale per entrambi i domini  $D_1, D_2$ . Infatti, si verifica facilmente che:

$$4\pi A_1 - A_1^2/R^2 = 4\pi(4\pi R^2 - A_1) - (4\pi R^2 - A_1)^2/R^2.$$

Quindi se (\*) vale per uno dei due domini, allora vale anche per l'altro.

Più in generale, la disuguaglianza isoperimetrica (\*) la si può estendere al caso di una varietà riemanniana  $M^2(K)$  di dimensione 2, semplicemente connessa e a curvatura sezionale costante  $K \in \mathbb{R}$ . Sia  $D$  un dominio aperto di  $M^2(K)$  la cui frontiera è una curva chiusa semplice  $\gamma$ . Se  $D$  ha area  $A$  e  $\gamma$  ha lunghezza  $L$ , allora

$$L^2 \geq 4\pi A - A^2 K,$$



dove l'uguaglianza vale se e solo se  $D$  è un disco geodetico.

Ci sono molte generalizzazioni e formulazioni geometriche di questa disuguaglianza (cfr. [21], [80]).

Chiudiamo questa sezione enunciando tre importanti teoremi che evidenziano l'influenza della curvatura sulla topologia della varietà (cfr. [32], p. 206, 262, 149).

• **Teorema** [di Synge] *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n$  compatta e con curvatura sezionale positiva.*

- a) *Se  $M$  è orientabile e  $n$  è pari, allora  $M$  è semplicemente connessa.*  
 b) *Se  $n$  è dispari, allora  $M$  è orientabile.*

• **Teorema** [di Preissman] *Una varietà riemanniana di dimensione  $n$  compatta con curvatura sezionale negativa ha gruppo fondamentale  $\pi_1(M)$  non abeliano. In particolare, il toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$  (il cui gruppo fondamentale è  $\mathbb{Z}^n$ ) non ammette metriche con curvatura sezionale  $< 0$ .*

• **Teorema** [di Hadamard] *Una varietà riemanniana  $(M, g)$  completa semplicemente connessa di dimensione  $n$  e con curvatura sezionale non positiva è diffeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Più precisamente, l'applicazione esponenziale  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  è un diffeomorfismo.*

## 8.4 Il tensore di curvatura di sottovarietà riemanniane

In questa sezione usiamo le notazioni introdotte nella Sezione 6.7. Sia quindi  $(M, g)$  una sottovarietà riemanniana di  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Indichiamo con  $\bar{R}$  il tensore di curvatura di  $(\bar{M}, \bar{g})$  e con  $R$  il tensore di curvatura di  $(M, g)$ . Siano  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Applicando l'equazione di Gauss (6.19) e l'equazione di Weingarten (6.23), otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= -\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) + \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z) \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z - \alpha(X, \nabla_Y Z) - \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + S_{\alpha(Y, Z)} X \\ &\quad + \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) - S_{\alpha(X, Z)} Y \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + S_{\alpha(Y, Z)} X - S_{\alpha(X, Z)} Y \\ &\quad + (\nabla'_Y \alpha)(X, Z) - (\nabla'_X \alpha)(Y, Z), \end{aligned} \tag{8.14}$$

dove

$$(\nabla'_X \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

è la derivata covariante di  $\alpha$  (la derivata di Bortolotti di  $\alpha$ ). Dall'equazione (8.14), considerando le componenti tangenti, si ottiene l'equazione di curvatura di Gauss:

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + S_{\alpha(X, Z)}Y - S_{\alpha(Y, Z)}X, \quad (8.15)$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \bar{R}(X, Y, Z, W) \\ &+ \bar{g}(S_{\alpha(X, Z)}Y, W) - \bar{g}(S_{\alpha(Y, Z)}X, W). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Troviamo ora la relazione tra le curvatures sezionali di  $M$  e  $\bar{M}$ . Dalla (8.16), si ha

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y) &= \bar{R}(X, Y, X, Y) + \bar{g}(S_{\alpha(X, X)}Y, Y) - \bar{g}(S_{\alpha(Y, X)}X, Y) \\ &= \bar{R}(X, Y, X, Y) + \bar{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)) - \|\alpha(X, Y)\|^2. \end{aligned}$$

Fissata una base ortonormale locale  $\{\xi_a\}_{a=1, \dots, k=\bar{n}-n}$  di  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  e posto  $S_a = S_{\xi_a}$ , si ha

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) &= \sum_a \bar{g}(\alpha(X, Y), \xi_a) \xi_a = \sum_a \bar{g}(S_a X, Y) \xi_a, \\ \|\alpha(X, Y)\|^2 &= \sum_a (\bar{g}(S_a X, Y))^2, \\ \bar{g}(\alpha(X, X), \alpha(Y, Y)) &= \sum_a \bar{g}(S_a X, X) \bar{g}(S_a Y, Y). \end{aligned}$$

Quindi, se  $p \in M$  e  $P \in G(T_p M)$  con  $\{X_p, Y_p\}$  base ortonormale di  $P$ , si ha

$$\begin{aligned} K(p, P) &= \bar{K}(p, P) + \sum_a \bar{g}(S_a X_p, X_p) \bar{g}(S_a Y_p, Y_p) \\ &- \sum_a (\bar{g}(S_a X_p, Y_p))^2. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Se  $M$  è una ipersuperficie di  $\bar{M}$ ,  $\{E_i\}_{i=1, \dots, n}$  una base ortonormale locale di autovettori per  $S_\xi$ ,  $S_\xi E_i = \lambda_i E_i$ , allora la (8.17) implica

$$K_{ij}(p) = \bar{K}_{ij}(p) + \lambda_i(p) \lambda_j(p), \quad (8.18)$$

dove  $K_{ij}(p)$  (rispettivamente  $\bar{K}_{ij}(p)$ ) è la curvatura sezionale di  $M$  (rispettivamente di  $\bar{M}$ ) in  $p$  lungo il piano generato dai vettori  $E_i, E_j$ . In particolare, dall'equazione (8.18) segue il

**Teorema 8.27.** (Theorema Egregium di Gauss) *Sia  $M$  una superficie di  $\mathbb{R}^3$  con la metrica indotta. Allora, la curvatura sezionale è data da  $K(p) = \lambda_1(p) \lambda_2(p)$  (prodotto delle curvatures principali).*

Infatti, il prodotto delle curvature principali è la curvatura gaussiana della superficie, e quindi la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie.

**Osservazione 8.28.** Nel caso di una ipersuperficie regolare  $M$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la metrica indotta, l'equazione di curvatura di Gauss (8.15) diventa la (8.3). Infatti, in questo caso particolare: il tensore di curvatura dello spazio euclideo è nullo,  $\alpha(X, Z) = g(SX, Z)\xi$ ,  $S = S_\xi$  e

$$S_{\alpha(X,Z)}Y = -(\nabla_Y^0 g(SX, Z)\xi)^\top = g(SX, Z)SY.$$

### Interpretazione geometrica della curvatura sezionale

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale. Fissato un punto  $p \in M$ , consideriamo un piano  $P$  dello spazio  $T_pM$  e un intorno normale  $U$  del punto  $p$  del tipo  $U = \exp_p(B(0, \delta))$ , con  $B(0, \delta)$  intorno sferico dell'origine in  $T_pM$ . L'insieme  $\Sigma_p := \exp_p(B(0, \delta) \cap P)$  costituito da tutte le geodetiche  $\gamma$  di  $M$  uscenti dal punto  $p$  e tangenti ai vettori  $X_p \in P$ , cioè tali che  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) \in P \subset T_pM$ , è una sottovarietà 2-dimensionale di  $M$  contenente  $p$ . Su  $\Sigma_p$  si considera la metrica riemanniana  $h$  indotta da  $g$ , ossia  $h = i^*g$ , dove  $i : \Sigma_p \hookrightarrow M$ . Le geodetiche  $\gamma$  di  $M$  uscenti dal punto  $p$  e tangenti ai vettori  $X_p \in P$  sono curve di  $\Sigma_p$  e quindi geodetiche di  $\Sigma_p$ , di conseguenza la seconda forma fondamentale di  $\Sigma_p$  si annulla nel punto  $p$  (cfr. Proposizione 6.67). Allora, la (8.16) implica che

$$K(p, P) = \text{curvatura gaussiana di } \Sigma_p \text{ in } p,$$

ossia: *la curvatura gaussiana della superficie  $\Sigma_p$  nel punto  $p$  è esattamente la curvatura sezionale della varietà riemanniana  $M$  in  $p$  lungo il piano  $P$ .* Questo è il modo in cui Riemann introdusse la curvatura sezionale per varietà di dimensione maggiore di due.

La curvatura sezionale ha anche la seguente interpretazione geometrica. Fissato  $p \in M$ , se  $V, W \in T_pM$  sono vettori unitari con angolo convesso  $\vartheta$ , allora vale la seguente formula (cfr., ad esempio, [36] p.180)

$$d(\exp_p(tV), \exp_p(tW)) = \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}t \left( 1 - \frac{\kappa \cos^2(\vartheta/2)}{6}t^2 + O(t^4) \right),$$

dove  $\kappa$  è la curvatura sezionale in  $p$  lungo il piano  $P = \text{span}(V, W)$ . Quindi, se la curvatura sezionale è positiva le geodetiche tendono a convergere (come nel caso della sfera), mentre se la curvatura sezionale è negativa le geodetiche tendono a divergere (come nel caso dello spazio iperbolico). Inoltre, siccome l'applicazione esponenziale in un fissato punto commuta con le isometrie locali (cfr. Proposizione 7.31), dalla precedente formula segue in particolare il *Theorema Egregium di Gauss*, ossia la curvatura gaussiana è invariante per isometrie locali.

## 8.5 La curvatura determina la metrica?

Nella Sezione 8.2 abbiamo visto che la metrica riemanniana  $g$  determina completamente la sua curvatura, vogliamo ora analizzare la questione inversa, cioè stabilire se la conoscenza della curvatura di una varietà riemanniana determina la metrica. Consideriamo due varietà riemanniane  $n$ -dimensionali  $M$  e  $\tilde{M}$  e due punti  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$ . Sia inoltre  $F : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  un'isometria lineare (trasformazione ortogonale) e  $U \subset M$  un intorno normale di  $p$ , tale che  $\exp_{\tilde{p}}$  sia definita su  $F(\exp_p^{-1}(U))$ . Definiamo l'applicazione

$$f : U \xrightarrow{\exp_p^{-1}} T_p M \xrightarrow{F} T_{\tilde{p}} \tilde{M} \xrightarrow{\exp_{\tilde{p}}} \tilde{M}, \quad q \mapsto f(q) := (\exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1})(q).$$

In particolare risulta  $\tilde{p} = f(p)$ . Problema: quando  $f$  (indotta da  $F$ ) è un'isometria (locale)?

Per ogni fissato  $q \in U$ , consideriamo la geodetica normalizzata  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  tale che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(t) = q$ . Indichiamo con  $\tau_t$  lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$  da  $p$  a  $q$ , con  $\tilde{\tau}_t$  lo spostamento parallelo lungo la geodetica normalizzata  $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow \tilde{M}$ , tale che  $\tilde{\gamma}(0) = f(p) = \tilde{p}$  e  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = F(\dot{\gamma}(0))$ , e consideriamo l'applicazione

$$\Phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \tilde{M}, \quad \Phi_t(v) := \tilde{\tau}_t \circ F \circ \tau_t^{-1}(v) \quad \forall v \in T_q M,$$

che, per come è stata definita, è un'isometria lineare. Siano infine  $R$  e  $\tilde{R}$  i tensori di curvatura di  $M$  e  $\tilde{M}$  rispettivamente. Con le notazioni appena introdotte possiamo enunciare il seguente teorema (cfr. [32], p.156).

**Teorema 8.29** (di E. Cartan). *Se  $\Phi_t$  conserva la curvatura, cioè se per ogni punto  $q$  di  $U$  e per ogni  $V_1, V_2, V_3, V_4 \in T_q M$  risulta*

$$g_q(R(V_1, V_2)V_3, V_4) = \tilde{g}_{f(q)}(\tilde{R}(\Phi_t(V_1), \Phi_t(V_2))\Phi_t(V_3), \Phi_t(V_4)),$$

*allora:  $f : U \rightarrow f(U) \subset \tilde{M}$  è un'isometria e  $f_{*p} = F$ .*

Il Teorema di Cartan implica che la metrica è in un certo senso determinata localmente dalla curvatura. Se  $\exp_p$  e  $\exp_{\tilde{p}}$  sono diffeomorfismi definiti globalmente, allora  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  è un'isometria.

**Corollario 8.30.** (cfr. [32], p. 158) *Siano  $M$  e  $\tilde{M}$  due varietà riemanniane aventi stessa curvatura sezionale costante  $c$  e stessa dimensione  $n$ . Siano inoltre  $p$  e  $\tilde{p}$  due punti di  $M$  e  $\tilde{M}$  rispettivamente. Scegliamo  $\{e_i\}$  base ortonormale di  $T_p M$  e  $\{\tilde{e}_i\}$  base ortonormale di  $T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . Allora, esistono  $U$  intorno di  $p$  in  $M$ ,  $\tilde{U}$  intorno di  $\tilde{p}$  in  $\tilde{M}$  e un'isometria  $f : U \rightarrow \tilde{U}$  tale che  $f_{*p} e_i = \tilde{e}_i$ .*

*Dimostrazione.* Scegliamo l'isometria  $F$  del Teorema di Cartan definita da  $F(e_i) = \tilde{e}_i$  per ogni  $i$ . Siccome  $M$  e  $\tilde{M}$  hanno entrambe curvatura sezionale costante  $c$ , la condizione sulla curvatura è immediata e la conclusione segue dallo stesso Teorema di Cartan.  $\square$

Il corollario seguente, che è un caso particolare del Corollario 8.30, evidenzia il fatto che gli spazi a curvatura sezionale costante sono ricchi di isometrie.

**Corollario 8.31.** *Sia  $M$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale a curvatura sezionale costante e siano  $p$  e  $\tilde{p}$  due fissati punti di  $M$ . Indichiamo con  $\{e_i\}$  e  $\{v_i\}$  due basi ortonormali rispettivamente dello spazio  $T_pM$  e dello spazio  $T_{\tilde{p}}M$ . Allora, esistono  $U$  intorno di  $p$ ,  $\tilde{U}$  intorno di  $\tilde{p}$  e  $f : U \rightarrow \tilde{U}$  isometria tale che  $f_{*p}e_i = v_i$  per ogni  $i$ .*

Siano  $(M, g)$  e  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  due varietà riemanniane e siano  $K$  e  $\tilde{K}$  le corrispondenti curvatures sezionali. Strettamente connesso al Teorema di Cartan è il problema di stabilire se un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  che conserva la curvatura, cioè tale che per ogni punto  $p$  di  $M$  e per ogni sezione piana  $P$  di  $T_pM$  risulti  $K(p, P) = \tilde{K}(f(p), f_*P)$ , è un'isometria. La risposta a tale questione è, in generale, non affermativa, ad esempio un diffeomorfismo tra due varietà riemanniane aventi la stessa curvatura sezionale costante, conserva la curvatura pur non essendo un'isometria. Il seguente esempio mostra che, nel caso 2-dimensionale, la questione precedente non ha risposta positiva anche qualora lo spazio fosse compatto. Consideriamo la superficie  $M_a = \{x^2 + y^2 = 1, -a \leq z \leq a\} \cup \{x^2 + y^2 + (z - a)^2 = 1, z \geq a\} \cup \{x^2 + y^2 + (z + a)^2 = 1, z \leq -a\}$ , dove  $a > 0$ , e la superficie  $M_b$  con  $b > a$ . La superficie  $M_b$  è ottenuta da  $M_a$  dilatando il tratto cilindrico. Le superfici considerate sono varietà riemanniane compatte 2-dimensionali (aventi stesso diametro ma diversa lunghezza), diffeomorfe e con la medesima curvatura in punti corrispondenti, ma chiaramente non sono isometriche (infatti, nel tratto dilatato le distanze non vengono conservate, cfr. Figura 8.5).

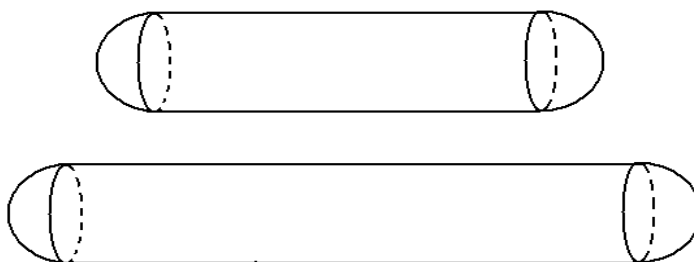


Figura 8.5: Le superfici  $M_a$  e  $M_b$ .

Tuttavia, i casi precedenti sono casi eccezionali. Infatti, R.S. Kulkarni [61] mostrò il seguente teorema.

**Teorema 8.32.** *Sia  $M$  è una varietà riemanniana analitica di dimensione  $n \geq 4$ . Allora, o  $M$  ha curvatura sezionale costante oppure ogni diffeomorfismo che conserva la curvatura è un'isometria.*

Se  $\dim M = n \geq 3$ , abbiamo anche il seguente risultato di S.T. Yau [127].

**Teorema 8.33.** *Sia  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  un diffeomorfismo tra due varietà riemanniane di dimensione  $n \geq 3$ , che conserva la curvatura sezionale. Se  $M$  non ha punti a curvatura sezionale costante, allora  $f$  è un'isometria.*

Il seguente esempio mostra che nel caso 2-dimensionale, la curvatura non determina la metrica (nemmeno localmente).

**Esempio 8.34.** Siano date le seguenti superfici di  $\mathbb{R}^3$ , entrambe munite della metrica riemanniana indotta da quella euclidea, e parametrizzate da

$$\begin{aligned} M_1 : \phi_1(t, \vartheta) &= (t \cos \theta, t \sin \theta, \log t), \\ M_2 : \phi_2(t, \vartheta) &= (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta), \end{aligned}$$

con  $t > 0$  e  $\theta \in ]0, 2\pi[$ . L'applicazione

$$\phi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : (t \cos \theta, t \sin \theta, \log t) \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta),$$

è un diffeomorfismo che, pur conservando la curvatura, non è un'isometria.

## 8.6 Spazi a curvatura sezionale costante

Ricordiamo che una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice che ha curvatura sezionale costante se la sua funzione curvatura sezionale  $K(p, P) = \text{cost.} = k_0 \in \mathbb{R}$  per ogni  $p \in M$  e per ogni  $P \in G(T_p M)$ .

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione delle varietà riemanniane a curvatura sezionale costante.

**Proposizione 8.35.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n$ . Allora,  $M$  ha curvatura sezionale costante  $k_0$  se, e solo se, le componenti del tensore di curvatura di Riemann  $R$ , rispetto a una base locale  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ , sono date da:*

$$R_{ij kh} = k_0 \{g_{ik} g_{jh} - g_{ih} g_{kj}\} = k_0 R_{0ij kh}, \quad (8.19)$$

dove  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$  e  $R_0$  è il tensore di curvatura definito dalla (8.12). In particolare, se  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  è una base ortonormale, dalla (8.19) segue che

$$R_{ij ij} = k_0,$$

$$R_{ij kh} = 0 \quad \text{quando almeno 3 dei 4 indici } i, j, k, h \text{ sono distinti.}$$

*Dimostrazione.* Sia  $(M, g)$  a curvatura sezionale costante  $k_0$ . Allora, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ , risulta:

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y)(p) &= k_0 A(X, Y)(p) \\ &= k_0 \{g(X, X)(p) g(Y, Y)(p) - g(X, Y)^2(p)\} \\ &= k_0 R_0(X, Y, X, Y)(p). \end{aligned}$$

Applicando la Proposizione 8.17, si ha:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W)(p) &= k_0 R_0(X, Y, Z, W)(p) \\ &= k_0 \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\}(p), \end{aligned}$$

e quindi 
$$R_{ijkh} = k_0 \{g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}\}.$$

Viceversa, se  $R_{ijkh} = R(e_i, e_j, e_h, e_k) = k_0 R_{0ijkh}$  con  $k_0$  costante, si ottiene facilmente che  $M$  ha curvatura sezionale costante  $k_0$ .  $\square$

A priori, si potrebbe pensare che esistono varietà riemanniane a curvatura sezionale puntualmente costante ma non costante, cioè tali che per ogni fissato punto  $p \in M$  risulti  $K(p, P) = k(p)$  per ogni piano  $P \in G(T_p M)$ , dove  $k \in \mathcal{F}(M)$ . Ciò però non è possibile come risulta dal seguente teorema.

**Teorema 8.36.** (di Schur) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana (connessa) di dimensione  $n \geq 3$ . Se  $(M, g)$  ha curvatura sezionale puntualmente costante, cioè se per ogni punto  $p$  di  $M$ :*

$$K(p, P) = k(p) \quad \forall P \in G(T_p M),$$

*allora  $(M, g)$  ha curvatura sezionale  $K(p, P) = \text{cost} = k_0$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(M, g)$  a curvatura sezionale puntualmente costante  $k(p)$ . Allora, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ :

$$\begin{aligned} R(X, Y, X, Y)(p) &= k(p) A(X, Y)(p) \\ &= k(p) \{g(X, X)g(Y, Y)(p) - g(X, Y)^2(p)\}. \end{aligned}$$

Applicando la Proposizione 8.17, per ogni  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , si ha

$$R(X, Y, Z, W)(p) = k(p) \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\}(p),$$

e quindi

$$R(X, Y)Z = k \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\}. \quad (8.20)$$

Dalla (8.20), tenendo conto della compatibilità della connessione di Levi-Civita  $\nabla$  con la metrica  $g$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} (\nabla_V R)(X, Y, Z) &= \nabla_V R(X, Y)Z - R(\nabla_V X, Y)Z - R(X, \nabla_V Y)Z \\ &\quad - R(X, Y)\nabla_V Z \\ &= \nabla_V (kg(X, Z)Y - kg(Y, Z)X) - kg(\nabla_V X, Z)Y \\ &\quad + kg(Y, Z)\nabla_V X - k \{g(X, Z)\nabla_V Y - g(\nabla_V Y, Z)X\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -kg(X, \nabla_V Z)Y + kg(Y, \nabla_V Z)X \\
= & V(k)\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} \\
& + k\{g(\nabla_V X, Z)Y + g(X, \nabla_V Z)Y\} \\
& + kg(X, Z)\nabla_V Y - k\{g(\nabla_V Y, Z)X + g(Y, \nabla_V Z)X\} \\
& - kg(Y, Z)\nabla_V X - k\{g(\nabla_V X, Z)Y + g(X, \nabla_V Z)Y\} \\
& + k\{g(\nabla_V Y, Z)X + g(Y, \nabla_V Z)X\} \\
& + kg(Y, Z)\nabla_V X - kg(X, Z)\nabla_V Y \\
= & V(k)\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} = V(k)R_0(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

Quindi, applicando la seconda identità di Bianchi :

$$(\nabla_V R)(X, Y, Z) + (\nabla_X R)(Y, V, Z) + (\nabla_Y R)(V, X, Z) = 0,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
V(k)\{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} + X(k)\{g(Y, Z)V - g(V, Z)Y\} \\
+ Y(k)\{g(V, Z)X - g(X, Z)V\} = 0. \quad (8.21)
\end{aligned}$$

Fissato  $X$  arbitrario campo di vettori su  $M$ , scegliamo  $Y$  e  $Z = V$  in modo che risultino unitari, ortogonali tra loro e ortogonali a  $X$ . Tali campi esistono in quanto  $M$  è una varietà di dimensione  $n \geq 3$ . Sostituendo questa scelta nella (8.21), abbiamo  $-X(k)Y + Y(k)X = 0$  e quindi

$$0 = -X(k)g(Y, Y) + Y(k)g(X, Y) = -X(k).$$

Pertanto,  $X(k) = 0$ , cioè  $(dk)(X) = 0$ , con  $X$  arbitrario. Essendo  $M$  connessa,  $k = \text{cost} = k_0$  su  $M$ .  $\square$

**Teorema 8.37.** *Una varietà riemanniana omogenea e isotropa ha curvatura sezionale costante. In particolare: la sfera canonica  $S^n$ , lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  e lo spazio iperbolico  $H^n$  sono varietà riemanniane a curvatura sezionale costante.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  uno spazio omogeneo e isotropo (cfr. Definizione 5.13). Siano  $p, q$  punti di  $M$ ,  $P$  un piano, che supponiamo generato dalla base ortonormale  $\{e_1, e_2\}$ , dello spazio tangente  $T_p M$ , e  $Q$  un piano, che supponiamo generato dalla base ortonormale  $\{e'_1, e'_2\}$ , di  $T_q M$ . Inoltre, siano  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  basi ordinate ortonormali di  $T_p M$  e  $T_q M$  rispettivamente. Poiché  $M$  è omogenea, esiste un'isometria  $f_1$  di  $M$  tale che  $f_1(p) = q$ . Indichiamo con  $\bar{\mathcal{B}} = \{v_1, \dots, v_n\}$  la base ordinata ortonormale di  $T_q M$  ottenuta da  $\mathcal{B}$  mediante il differenziale  $(f_1)_{*p}$ . Essendo  $M$  isotropa, esiste un'isometria  $f_2$  di  $M$  tale che  $f_2(q) = p$  e  $(f_2)_{*q}v_i = e'_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . L'applicazione  $f := f_2 \circ f_1$  è un'isometria che verifica le condizioni:

$$f(p) = f_2(f_1(p)) = f_2(q) = p,$$



$$f_{*p}(e_i) = (f_2)_{*q}((f_1)_{*p}(e_i)) = (f_2)_{*q}v_i = e'_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

In particolare,  $f(p) = q$  e  $f_{*p}(P) = Q$ . Di conseguenza, applicando il Teorema 8.14 all'isometria  $f$ , risulta:  $K(q, Q) = R_q(e'_1, e'_2, e'_1, e'_2)$  e quindi  $K(q, Q) = R_{f(p)}(f_{*p}e_1, f_{*p}e_2, f_{*p}e_1, f_{*p}e_2) = R_p(e_1, e_2, e_1, e_2) = K(p, P)$ .  $\square$

Il teorema seguente ci fornisce esplicitamente il valore della curvatura sezionale (costante) per gli spazi  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $H^n$ .

**Teorema 8.38.** *Lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , lo spazio iperbolico  $H^n$  e la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  hanno curvatura sezionale costante  $k_0 = 0, -1, +1$  rispettivamente.*

*Dimostrazione.* Lo spazio euclideo ha chiaramente curvatura sezionale nulla in quanto il suo tensore di curvatura è identicamente nullo. Per la sfera canonica il risultato si può ottenere come conseguenza dell'equazione di curvatura di Gauss (8.3) e dell'equazione (6.25):

$$S_{\xi_p}X_p = -\nabla_{X_p}^0 \xi = -X_p.$$

Per lo spazio iperbolico  $H^n$ , consideriamo il modello  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  munito della metrica iperbolica  $g = (1/x_n^2)(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$ . In questo caso, come già osservato nell'Esempio 6.41, i campi vettoriali  $V_i = x_n \partial_i = x_n \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , costituiscono una base ortonormale. Inoltre, per  $i, j = 1, \dots, n-1$ , risulta

$$[V_n, V_j] = [x_n \partial_n, x_n \partial_j] = V_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = [x_n \partial_i, x_n \partial_j] = 0 \quad .$$

Di conseguenza, la connessione di Levi-Civita associata a questa metrica è determinata, applicando la (6.9), da

$$\nabla_{V_i} V_i = V_n, \quad \nabla_{V_i} V_n = -V_i \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \nabla_{V_j} V_i = 0 \quad (\text{rimanenti casi}).$$

Pertanto, se  $P_{in}$  è il piano generato dai vettori  $V_i$  e  $V_n$ , la curvatura sezionale  $K(p, P_{in}) = g(R(V_i, V_n)V_i, V_n)$  e quindi

$$\begin{aligned} K(p, P_{in}) &= g(-\nabla_{V_i} \nabla_{V_n} V_i + \nabla_{V_n} \nabla_{V_i} V_i + \nabla_{[V_i, V_n]} V_i, V_n) \\ &= g(-\nabla_{V_i} V_i, V_n) = -g(V_n, V_n) = -1. \end{aligned}$$

Questo ci permette di concludere, tenendo anche conto del Teorema 8.37, che lo spazio iperbolico ha curvatura costante  $k_0 = -1$ .  $\square$

**Osservazione 8.39.** Con la stessa dimostrazione del teorema precedente, si ottiene che la sfera di raggio  $R$ , con la metrica canonica, ha curvatura sezionale costante  $k_0 = 1/R^2$  (basta osservare che in tal caso, l'operatore forma  $SX_p = -(1/R)X_p$ ). Se consideriamo il semispazio  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  con la metrica iperbolica  $g = (1/k^2 x_n^2)(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$ ,  $k \neq 0$ , i campi vettoriali  $V_i = kx_n \partial_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , costituiscono una base ortonormale. Inoltre, per  $i, j = 1, \dots, n-1$ , risulta

$$[V_n, V_j] = kV_j \quad \text{e} \quad [V_i, V_j] = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Quindi, procedendo come sopra, tenendo conto che metriche omotetiche hanno stessa connessione di Levi-Civita, si trova che lo spazio iperbolico  $(\mathbb{R}_+^n, g)$  ha curvatura sezionale costante  $-k^2$ .

Un altro modo di procedere per calcolare la curvatura dello spazio iperbolico e della sfera canonica, è applicare il seguente lemma.

**Lemma 8.40.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  munito della metrica  $g = \frac{1}{F^2}(dx_1^2 + \dots + x_n^2)$ , quindi  $g_{ij} = \frac{1}{F^2} \delta_{ij}$ , con  $F$  funzione differenziabile positiva definita su  $\Omega$ . Poniamo  $f := \log F$ ,  $f_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}$  e  $f_{kj} := \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ . Allora, le componenti  $R_{ijkh} = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_h)$  del tensore di curvatura di  $(\Omega, g)$  sono date da:*

- 1)  $R_{ijkh} = 0$  se tutti e quattro gli indici sono distinti;
- 2)  $F^2 R_{ijki} = -f_k f_j - f_{kj}$  se i tre indici sono distinti;
- 3)  $F^2 R_{ijij} = f_{ii} + f_{jj} - \sum_{l \neq i, j} f_l^2$ ,  $K(\partial_i, \partial_j) = \frac{R_{ijij}}{g_{ii} g_{jj}} = F^4 R_{ijij}$  ( $i \neq j$ ).

*Dimostrazione.* Siccome  $g_{ij} = \frac{1}{F^2} \delta_{ij}$ , la matrice inversa di  $(g_{ij})$  è definita da  $g^{ij} = F^2 \delta_{ij}$ . Allora:

$$\partial g_{ik} / \partial x_j = -2(F_j / F^3) \delta_{ik} = -2(f_j / F^2) \delta_{ik}$$

e i simboli di Christoffel, applicando la (8.6), sono dati da:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \} g^{lk} \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} F^2 \\ &= -f_i \delta_{jk} - f_j \delta_{ki} + f_k \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Pertanto, risulta:

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}^k = 0, & \text{se i tre indici } i, j, k \text{ sono distinti;} \\ \Gamma_{ij}^i = -f_j, \Gamma_{ii}^k = f_k, \Gamma_{ij}^j = -f_i, & \text{se solo due indici sono distinti;} \\ \Gamma_{ii}^i = -f_i. \end{cases}$$

Inoltre, le componenti  $R_{ijk}{}^s$ , sono date da (cfr. (8.5)):

$$R_{ijk}{}^s = (\partial_j \Gamma_{ik}^s - \partial_i \Gamma_{jk}^s) + \sum_{l=1}^n (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s).$$

Di conseguenza, si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{ijks} &= \sum_{r=1}^n R_{ijk}{}^r g_{rs} = \frac{1}{F^2} \sum_{r=1}^n R_{ijk}{}^r \delta_{rs} = \frac{1}{F^2} R_{ijk}{}^s \\ &= 0 \quad \text{se tutti e quattro gli indici sono distinti;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijk} &= \sum_{r=1}^n R_{ijk}{}^r g_{ri} = \frac{1}{F^2} R_{ijk}{}^i \\
&= \frac{1}{F^2} (\partial_j \Gamma_{ik}^i - \partial_i \Gamma_{jk}^i) + \frac{1}{F^2} \sum_{h=1}^n (\Gamma_{ik}^h \Gamma_{jh}^i - \Gamma_{jk}^h \Gamma_{ih}^i) \\
&= \frac{1}{F^2} (\partial_j \Gamma_{ik}^i + \Gamma_{ik}^i \Gamma_{ji}^i + \Gamma_{ik}^j \Gamma_{jj}^i + \Gamma_{ik}^k \Gamma_{ji}^k + \sum_{h=1}^n \Gamma_{jk}^h f_h) \\
&= \frac{1}{F^2} (-f_{kj} + f_k f_j - 2f_k f_j) \\
&= \frac{1}{F^2} (-f_{kj} - f_k f_j) \quad \text{se i tre indici } i, j, k \text{ sono distinti;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijj} &= \sum_{s=1}^n R_{ijj}{}^s g_{sj} = \frac{1}{F^2} \sum_{s=1}^n R_{ijj}{}^s \delta_{sj} = \frac{1}{F^2} R_{ijj}{}^j \\
&= \frac{1}{F^2} \sum_{l=1}^n (\Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j) + \frac{1}{F^2} (\partial_j \Gamma_{ii}^j - \partial_i \Gamma_{ji}^j) \\
&= \frac{1}{F^2} \left( \sum_{l \neq i, j} \Gamma_{ii}^l \Gamma_{jl}^j + \Gamma_{ii}^i \Gamma_{ji}^j + \Gamma_{ii}^j \Gamma_{jj}^j - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ji}^l \Gamma_{il}^j + f_{ii} + f_{jj} \right) \\
&= \frac{1}{F^2} \left( - \sum_{l \neq i, j} f_l^2 + f_i^2 - f_j^2 - \Gamma_{ji}^i \Gamma_{ii}^j - \Gamma_{ji}^j \Gamma_{ij}^j + f_{ii} + f_{jj} \right) \\
&= \frac{1}{F^2} \left( - \sum_{l \neq i, j} f_l^2 + f_i^2 - f_j^2 + f_j^2 - f_i^2 + f_{ii} + f_{jj} \right) \\
&= \frac{1}{F^2} (f_{ii} + f_{jj} - \sum_{l \neq i, j} f_l^2) \quad \text{se i due indici } i, j \text{ sono distinti.}
\end{aligned}$$

Per la seconda parte di 3), basta osservare che i vettori  $\partial_i, \partial_j$  ( $i \neq j$ ) sono ortogonali.  $\square$

Per lo spazio iperbolico  $(\mathbb{R}_+^n, g = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + x_n^2))$ ,  $F^2 = x_n^2$ , per cui

$$f = \log x_n, \quad f_i = 0 \quad \forall i \neq n, \quad f_n = \frac{1}{x_n}, \quad f_{nn} = -\frac{1}{x_n^2}.$$

Applicando la 3) del Lemma 8.40, per  $i \neq j$  e  $i, j \neq n$ :

$$F^2 R_{ijij} = -f_n^2, \quad K(\partial_i, \partial_j) = (-f_n^2) F^2 = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1,$$

$$F^2 R_{in in} = f_{ii} + f_{nn} = f_{nn}, \quad K(\partial_i, \partial_n) = f_{nn} F^2 = -\frac{1}{x_n^2} x_n^2 = -1.$$

Applicando la 1) e la 2) del Lemma 8.40, risulta  $R_{ij\,kh} = 0$  quando almeno tre indici sono distinti. Pertanto, la Proposizione 8.35 (o il Teorema 8.37) permette di concludere che lo spazio iperbolico ha curvatura sezionale costante  $k_0 = -1$ .

Consideriamo ora la sfera (unitaria)  $\mathbb{S}^n$  munita della metrica canonica  $g = i^*g_0$ , dove  $g_0$  è la metrica euclidea di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Ricordiamo che, rispetto al sistema di coordinate locali  $(y_i)$  definite dalla proiezione stereografica dal polo sud, la metrica  $g$  ha la seguente espressione:

$$g = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} (dy_1^2 + \cdots + dy_n^2)$$

ed è quindi del tipo di metrica considerata nel Lemma 8.40 :

$$g_{ij} = \frac{1}{F^2} \delta_{ij}, \quad F = \frac{1 + \|y\|^2}{2} = \frac{1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2}{2}, \quad f = \log F.$$

In questo caso:

$$f_i = y_i/F, \quad f_{ii} = (F - y_i^2)/F^2, \quad f_{ij} = -y_i y_j/F^2 \quad \text{per } i \neq j.$$

Applicando le formule del Lemma 8.40, si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{ij\,kh} &= 0 && \text{se almeno tre indici sono distinti;} \\ F^2 R_{ij\,ij} &= f_{ii} + f_{jj} - \sum_{r \neq i,j} f_r^2 = (2F - \|y\|^2)/F^2 = 1/F^2; \\ R_{ij\,ij} &= 1/F^4 = g_{ii} g_{jj}; \quad K(\partial_i, \partial_j) = F^4 R_{ij\,ij} = 1. \end{aligned}$$

Anche in questo caso, la Proposizione 8.35 (o il Teorema 8.37) permette di concludere che  $\mathbb{S}^n$  ha curvatura sezionale costante  $k_0 = +1$ .

Un'interessante proprietà delle varietà riemanniane a curvatura sezionale costante ( $\neq 0$ ) è che non ammettono campi vettoriali paralleli. Abbiamo infatti la seguente

**Proposizione 8.41.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Se  $V \in \mathfrak{X}(M)$  è un campo di vettori parallelo (non nullo), allora  $V$  ha lunghezza costante e la curvatura sezionale lungo piani contenenti  $V$  è nulla. Più precisamente:  $(M, g)$  è localmente un prodotto riemanniano del tipo  $(M_1 \times \mathbb{R}, g_1 \times dt)$  con  $V$  tangente al fattore euclideo. In particolare: su una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante  $\neq 0$  non esistono campi di vettori paralleli.*

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un campo di vettori parallelo (rispetto alla connessione di Levi-Civita).  $V$  ha lunghezza costante in quanto:

$$X(\|V\|^2) = 2g(\nabla_X V, V) = 0.$$

Inoltre,

$$R(V, X, V, X) = g(-\nabla_V \nabla_X V + \nabla_X \nabla_V V + \nabla_{[V, X]} V, X) = 0$$

ci dice che la curvatura sezionale lungo piani contenenti  $V$  è nulla. Ora, proviamo che  $(M, g)$  è localmente un prodotto riemanniano. Sia  $S_1$  la distribuzione  $(n-1)$ -dimensionale definita da  $V^\perp$  e sia  $S_2$  la distribuzione 1-dimensionale definita da  $V$ . Per ogni  $X, Y \in V^\perp$  si ha  $\nabla_X Y \in V^\perp$ , infatti  $g(Y, V) = 0$  implica  $Xg(Y, V) = 0$  e quindi  $g(\nabla_X Y, V) = 0$ . Di conseguenza, la distribuzione  $S_1$  è involutiva (cioè,  $[X, Y] \in S_1$  per ogni  $X, Y \in S_1$ ) e quindi, per il Teorema di Frobenius, integrabile. Ovviamente, anche la distribuzione 1-dimensionale  $S_2$  è integrabile. Siccome le distribuzioni  $S_1$  e  $S_2$  sono ortogonali, se  $M_1$  è la varietà  $(n-1)$ -dimensionale, varietà integrale di  $S_1$ , allora  $(M, g)$  è localmente un prodotto riemanniano del tipo  $(M_1 \times \mathbb{R}, g_1 \times dt)$  con  $V$  tangente al fattore euclideo e  $g_1$  restrizione di  $g$  alla varietà  $M_1$ .  $\square$

**Esercizio 8.42.** Siano  $g$  e  $\bar{g}$  due metriche omotetiche su  $M$ :  $\bar{g} = cg$ ,  $c = \text{cost.} > 0$ . Osservato che le connessioni di Levi-Civita  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  ad esse associate coincidono (cfr. Esercizio 6.50), verificare che

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z, & \bar{R}(X, Y, Z, W) &= cR(X, Y, Z, W), \\ \bar{K}(p, P) &= (1/c)K(p, P) \quad \forall p \in M \text{ e } \forall P \in G(T_p M). \end{aligned}$$

Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante  $k_0 \neq 0$ , la varietà riemanniana  $(M, \bar{g})$ , ottenuta ponendo  $\bar{g} = cg$  con  $c = k_0$  se  $k_0 > 0$  e  $c = -k_0$  se  $k_0 < 0$ , ha curvatura sezionale costante uguale a  $+1$  oppure  $-1$  (cfr. Esercizio 8.42). Pertanto, per ogni varietà riemanniana a curvatura sezionale costante  $k_0$  non nulla, si può assumere, a meno di un cambio omotetico di metrica, che sia  $k_0 = +1$  oppure  $k_0 = -1$ .

**Definizione 8.43.** Chiamiamo *spazio forma* ogni varietà riemanniana completa a curvatura sezionale costante  $k_0$ .

A seconda del valore della costante  $k_0$  possiamo distinguere tre tipologie di spazi forma: lo *spazio forma ellittico* (o *sferico*) se  $k_0 > 0$ , lo *spazio forma euclideo* se  $k_0 = 0$  ed infine lo *spazio forma iperbolico* se  $k_0 < 0$ . Il teorema che segue classifica i diversi spazi forma riconducendo la questione ad un problema che rientra nella teoria dei gruppi (cfr. [120]). Individuare gli spazi forma significa infatti determinare sottogruppi  $G$  del gruppo delle isometrie che agiscono in modo propriamente discontinuo su ciascuno degli spazi semplicemente connessi  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $H^n$ . In questo caso, l'applicazione

$$p: M \rightarrow M/G, x \mapsto p(x) = Gx,$$

(con lo spazio  $M/G$  munito della topologia quoziente), è un'applicazione di rivestimento (cfr. Sezione 5.7).

**Teorema 8.44.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n$  completa a curvatura sezionale costante  $k_0 \in \{-1, 0, +1\}$ . Allora, il rivestimento universale riemanniano  $\tilde{M}$  di  $M$  è isometrico a uno dei seguenti spazi:

$$\mathbb{R}^n (\text{se } k_0 = 0), \quad \mathbb{S}^n (\text{se } k_0 = +1), \quad H^n (\text{se } k_0 = -1).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo prima il caso di  $M$  a curvatura sezionale costante  $k_0 = +1$ . Sia  $\tilde{M}$  il rivestimento universale riemanniano di  $M$ . Consideriamo  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  e un'isometria lineare  $F : T_p \mathbb{S}^n \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . L'applicazione  $\exp_p : T_p \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  è definita sull'intero spazio  $T_p \mathbb{S}^n$ , applica iniettivamente  $B(0, \pi)$  su  $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$  e la frontiera di  $B(0, \pi)$  è applicata in  $q$ , dove  $q$  è il punto antipodale di  $p$ . Definiamo

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q\} \rightarrow \tilde{M}.$$

Siccome  $\mathbb{S}^n$  e  $\tilde{M}$  hanno entrambe curvatura sezionale costante  $+1$ , la condizione sulla curvatura nel Teorema 8.29 (di Cartan) è verificata, per cui applicando lo stesso Teorema 8.29 si ha che  $f$  è un'isometria locale e  $f_{*p} = F$ . Fissiamo ora un punto  $p' \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$ . Poniamo  $\tilde{p}' = f(p')$ ,  $F' = f_{*p'}$  e definiamo

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ F' \circ \exp_{p'}^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q'\} \rightarrow \tilde{M},$$

dove  $q'$  è il punto antipodale di  $p'$ . In particolare,  $f'(p') = \tilde{p}'$ . Applicando il Teorema 8.29, otteniamo che  $f'$  è un'isometria locale e  $f'_{*p'} = F'$ . Osserviamo che  $W = \mathbb{S}^n \setminus \{q, q'\}$  è connesso,  $p' \in W$ ,  $f(p') = \tilde{p}' = f'(p')$  e  $f_{*p'} = F' = f'_{*p'}$ . Applicando il risultato riportato nell'Esercizio 7.37, si ha che  $f = f'$  su  $W$ . Di conseguenza, possiamo definire l'applicazione

$$\phi : \mathbb{S}^n \longrightarrow \tilde{M}, \quad x \longmapsto \phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^n \setminus \{q\}, \\ f'(x) & \text{se } x \in \mathbb{S}^n \setminus \{q'\}. \end{cases}$$

Chiaramente  $\phi$  è un'isometria locale, quindi un diffeomorfismo locale. Dalla compattezza di  $\mathbb{S}^n$  segue che  $\phi$  è un'applicazione di rivestimento (cfr. Proposizione 5.48) ed essendo  $\tilde{M}$  semplicemente connesso,  $\phi$  è un diffeomorfismo e quindi un'isometria. Consideriamo ora gli altri due casi. Sia  $M \in \{R^n, H^n\}$  e  $\tilde{M}$  il rivestimento universale riemanniano di  $M$  varietà riemanniana completa a curvatura sezionale costante  $k_0 \leq 0$ . Fissiamo i punti  $p \in M$ ,  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  e un'isometria lineare  $F : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ . Siccome  $M$  e  $\tilde{M}$  sono varietà riemanniane complete a curvatura sezionale costante  $k_0 \leq 0$ , applicando il Teorema 8.3 (di Hadamard), le applicazioni  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  e  $\exp_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}} \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  sono diffeomorfismi globali. Consideriamo l'applicazione

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1} : M \rightarrow \tilde{M}.$$

Siccome  $M$  e  $\tilde{M}$  hanno entrambe curvatura sezionale costante  $k_0$ , dal Teorema 8.29 segue che  $f$  è un'isometria. In questo caso  $f$  è un'isometria globale in quanto  $f$  è un diffeomorfismo globale.  $\square$

Ricordiamo che, se  $\tilde{M}$  è il rivestimento universale di  $M$  con proiezione  $p : \tilde{M} \rightarrow M$ , dalla teoria degli spazi di rivestimento (cfr., ad esempio, [57] pp.163-169) sappiamo che  $M = \tilde{M}/\Gamma$ , dove  $\Gamma = \{f : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M} : p \circ f = p\}$ , gruppo delle trasformazioni di rivestimento, è isomorfo a

$$\pi_1(M)/p_*(\pi_1(\tilde{M})) = \pi_1(M)$$

e agisce in modo propriamente discontinuo su  $\tilde{M}$ . In particolare, se il rivestimento è riemanniano :  $\tilde{g} := p^*g$ , dove  $g$  è la metrica di  $M$ , allora

$$f \in \Gamma \Rightarrow p \circ f = p \Rightarrow f^*\tilde{g} = f^*p^*g = (p \circ f)^*g = p^*g = \tilde{g},$$

cioè  $\Gamma$  è un sottogruppo del gruppo  $\text{Iso}(\tilde{M}, \tilde{g})$  delle isometrie di  $\tilde{M}$ . Quindi, il Teorema 8.44 si può riformulare nel modo seguente.

**Teorema 8.45.** (Classificazione degli spazi a curvatura costante) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale completa a curvatura sezionale costante  $k_0 \in \{-1, 0, +1\}$ . Allora,  $M$  è isometrica a  $\tilde{M}/\Gamma$ , dove  $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$  (se  $k_0 = 0$ ),  $\tilde{M} = \mathbb{S}^n$  (se  $k_0 = +1$ ),  $\tilde{M} = H^n$  (se  $k_0 = -1$ ) e  $\Gamma$  è un gruppo propriamente discontinuo di isometrie di  $\tilde{M}$  isomorfo a  $\pi_1(M)$ .*

In particolare, se  $k_0 > 0$  e  $n$  è pari, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 8.46.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana completa di dimensione  $n$  pari e a curvatura sezionale costante  $k = 1$ . Allora,  $M$  è isometrica alla sfera  $\mathbb{S}^n$  oppure allo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm I_d\}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $n = 2m$ . Dal Teorema 8.45 segue che  $M = \mathbb{S}^n/\Gamma$ , dove  $\Gamma$  è un sottogruppo propriamente discontinuo del gruppo  $\text{Iso}(\mathbb{S}^n) = O(2m+1)$ . Sia  $f \in \Gamma$ , allora  $\det f = \pm 1$ . Esaminiamo le due diverse possibilità.

Caso a):  $\det f = +1$ . Poiché  $f$  è rappresentata da una matrice di ordine dispari, ammetterà un autovalore  $\lambda$  reale e dovrà essere  $\lambda = \pm 1$ . Se  $p$  è la molteplicità di  $\lambda = +1$  e  $q$  è quella di  $\lambda = -1$ , dalla struttura delle matrici ortogonali segue che  $2m+1 = p+q+2r$  e  $\det f = (-1)^q$ . Siccome  $\det f = +1$ , allora si ha  $q = 0$  oppure  $q$  pari. In entrambi i casi,  $2m+1 = p+q+2r$  implica che  $p > 0$  e quindi  $\lambda = +1$  è autovalore per  $f$ . Sia  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $x \neq 0$ , tale che  $f(x) = x$ . In particolare, esiste  $x_0 \in \mathbb{S}^n$ ,  $x_0 = \frac{x}{|x|}$ , per il quale si ha  $f(x_0) = x_0$ . Poiché l'azione del gruppo  $\Gamma$  è propriamente discontinua, i suoi elementi, tranne l'identità, non possono avere punti fissi per cui  $f = I_d$  e  $\Gamma = \{I_d\}$ . Pertanto, in questo caso abbiamo  $M = \mathbb{S}^n$ .

Caso b):  $\det f = -1$ . Allora,  $f \neq I_d$  e  $\det f^2 = (\det f)^2 = 1$ . Poiché  $f^2 \in \text{Iso}(\mathbb{S}^n)$  e  $\det f^2 = 1$ , dal caso a) segue che  $f^2 = I_d$  ( $I_d \in \Gamma$ ). D'altro canto, essendo  $f$  ortogonale, risulta  $f \cdot f^T = I_d$  e quindi  $f$  è un endomorfismo simmetrico. Poiché  $f$  è simmetrico,  $f$  ammette  $n$  autovalori  $\lambda_i$  reali. Inoltre  $f$  è ortogonale, quindi gli autovalori di  $f$  sono  $\pm 1$ . Questi due fatti implicano che  $\lambda_i = +1$  oppure  $\lambda_i = -1$ . Ma  $f$  non può avere un autovalore uguale a  $+1$  (in quanto se così fosse,  $f$  avrebbe un punto fisso e dovrebbe essere  $f = I_d$ , contro l'ipotesi secondo cui  $\det f = -1$ ). Allora, sarà  $\lambda_i = -1$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , per cui  $f = -I_d$ ,  $\Gamma = \{I_d, -I_d\}$  e quindi  $M = \mathbb{S}^n/\Gamma = \mathbb{S}^n/\{\pm I_d\} = \mathbb{P}^n$ .  $\square$

**Corollario 8.47.** *Uno spazio forma  $M = \mathbb{S}^n/\Gamma$  con  $\Gamma \neq \{I\}$  e  $\Gamma \neq \{\pm I\}$ , ha necessariamente dimensione dispari.*

Una varietà riemanniana compatta  $(M, g)$  di curvatura sezionale costante positiva e di dimensione dispari  $n = 2m - 1$  è del tipo  $\mathbb{S}^{2m-1}/\Gamma$ , dove  $\Gamma$ , sottogruppo di  $SO(2m)$ , è un gruppo ciclico finito di ordine  $q > 2$ ,  $\Gamma = \langle T \rangle$ , e  $T^k$  ( $1 \leq k \leq q - 1$ ) è un'isometria di  $\mathbb{S}^{2m-1}$  priva di punti fissi ([100], p.139-140). L'isometria  $T$  è definita dalla matrice ortogonale  $(T_{i,j})$ , dove :

$$T_{1,1} = \cos \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{1,2} = -\sin \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{1,3} = \dots = T_{1,2m} = 0$$

$$T_{2,1} = \sin \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{2,2} = -\cos \frac{2\pi p_1}{q}, \quad T_{2,3} = \dots = T_{2,2m} = 0$$

$$T_{3,1} = T_{3,2} = 0, \quad T_{3,3} = \cos \frac{2\pi p_2}{q}, \quad T_{3,4} = -\sin \frac{2\pi p_2}{q},$$

$$T_{3,5} = \dots = T_{3,2m} = 0,$$

$$T_{4,1} = T_{4,2} = 0, \quad T_{4,3} = \sin \frac{2\pi p_2}{q}, \quad T_{4,4} = -\cos \frac{2\pi p_2}{q},$$

$$T_{4,5} = \dots = T_{4,2m} = 0,$$

così procedendo .....

$$T_{2m-1,1} = \dots = T_{2m-1,2m-2} = 0,$$

$$T_{2m-1,2m-1} = \cos \frac{2\pi p_m}{q}, \quad T_{2m-1,2m} = -\sin \frac{2\pi p_m}{q},$$

$$T_{2m,1} = \dots = T_{2m,2m-2} = 0,$$

$$T_{2m,2m-1} = \sin \frac{2\pi p_m}{q}, \quad T_{2m,2m} = -\cos \frac{2\pi p_m}{q},$$

con  $p_1 = 1$  e gli  $p_i$  ( $i = 2, \dots, m$ ) interi naturali relativamente primi rispetto al fissato intero naturale  $q > 2$  (cioè il  $M.C.D.(p_i, q) = 1$ ). Lo spazio  $M = \mathbb{S}^{2m-1}/\Gamma$  è anche detto spazio lenticolare (*lens space*).

Quanto visto sinora ci permette di osservare che non tutte le varietà di dimensione  $n$  possiedono una metrica riemanniana con curvatura sezionale costante, al contrario di quanto accade per le varietà 2-dimensionali per le quali vale il seguente teorema (cfr., ad esempio, [62] p. 7).

**Teorema 8.48** (di uniformizzazione di Poincaré). *Ogni 2-varietà differenziabile (connessa)  $M^2$  è diffeomorfa ad una delle seguenti varietà:  $\mathbb{S}^2/\Gamma$ ,  $\mathbb{R}^2/\Gamma$ ,  $H^2/\Gamma$ , dove  $\Gamma$  è un gruppo discreto propriamente discontinuo di isometrie del corrispondente spazio modello. Pertanto, ogni varietà differenziabile di dimensione 2 ammette una metrica riemanniana completa a curvatura (gaussiana) costante.*



**Esercizio 8.49.** Usando il teorema di uniformizzazione, si verifichi che ogni 2-varietà connessa compatta orientabile di genere  $p > 1$ , oppure non orientabile di genere  $q > 2$ , ammette una metrica riemanniana a curvatura sezionale costante negativa. Cosa si può dire per la bottiglia di Klein? Suggestione: Esprimere la caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi(M)$  di tali superfici in funzione del loro genere, quindi utilizzare il Teorema di Gauss-Bonnet.

Chiudiamo questa Sezione con un cenno alle

### Varietà semi-riemanniane a curvatura sezionale costante

Siano  $(M, g)$  una varietà semi-riemanniana,  $R$  il tensore di curvatura associato alla connessione di Levi-Civita di  $(M, g)$  e  $p$  è un punto di  $M$ . Per ogni  $V_p, W_p \in T_p M$ , poniamo

$$A_p(V_p, W_p) = g_p(V_p, V_p)g_p(W_p, W_p) - (g_p(V_p, W_p))^2.$$

Ricordiamo che un piano di uno spazio semi-euclideo in generale non è detto che sia non degenerare. Più precisamente, un sottospazio 2-dimensionale  $P$  di  $T_p M$  è non degenerare se  $A_p(V_p, W_p) \neq 0$  dove  $(V_p, W_p)$  è una base di  $P$ . Se  $P$  è un piano non degenerare di  $T_p M$ , come nel caso riemanniano, la *curvatura sezionale di  $M$  in  $p$  lungo il piano  $P$*  è definita da

$$K(p, P) = \frac{R(V_p, W_p, V_p, W_p)}{A(V_p, W_p)},$$

dove  $(V_p, W_p)$  è una base di  $P$ . Anche nel caso semi-riemanniano, lo scalare  $K(p, P)$  dipende solo dal piano  $P$  e non dalla base scelta.

Una varietà semi-riemanniana  $(M, g)$  si dice che ha *curvatura sezionale costante* se la sua funzione curvatura sezionale  $K$  risulta costante, ovvero se per ogni  $p \in M$  e per ogni piano non degenerare  $P$  di  $T_p M$

$$K(p, P) = k_0 \text{ (costante).}$$

Una varietà semi-riemanniana si dice che è *completa* se è geodeticamente completa, ovvero ogni geodetica massimale è definita su tutto l'asse reale. Valgono i seguenti risultati (cfr. [79] per dettagli).

- La pseudosfera  $\mathbb{S}_\nu^n(r)$ ,  $0 \leq \nu \leq n$ , è una varietà semi-riemanniana completa a curvatura sezionale costante positiva  $K = 1/r^2$ .
- Lo spazio pseudoiperbolico  $H_\nu^n(r)$ ,  $0 \leq \nu \leq n$ , è una varietà semi-riemanniana completa a curvatura sezionale costante negativa  $K = -1/r^2$ .
- Due varietà semi-riemanniane complete semplicemente connesse che hanno stessa curvatura sezionale costante  $k_0$  sono isometriche se, e sole se, hanno stessa dimensione e stesso indice.

Infine, ricordiamo che in relatività generale la pseudosfera  $\mathbb{S}_1^4(r)$  è nota col nome di *spaziotempo di de Sitter*, e il rivestimento universale  $\widetilde{H}_1^4(r)$  col nome di *spaziotempo anti-de Sitter*.

## 8.7 Tensore di Ricci e curvatura scalare

Un tensore più semplice da maneggiare, rispetto al tensore di curvatura di Riemann  $R$ , e che riassume in sé molte delle informazioni contenute in  $R$ , è il *tensore di Ricci* da cui seguono le nozioni di: *curvatura di Ricci*, *curvatura scalare* e *varietà di Einstein*. La curvatura di Ricci dà meno informazioni rispetto alla curvatura sezionale, tuttavia essa gioca un ruolo fondamentale in geometria riemanniana. Grigori Perelman usando e sviluppando la teoria del flusso di Ricci introdotta da R. S. Hamilton (cfr. Sezione 8.10), è riuscito a dimostrare la *congettura di Poincaré* all'inizio di questo millennio ([82], [83],[84]). Per la soluzione della congettura di Poincaré, Perelman è stato insignito della medaglia Fields nel congresso internazionale dei matematici a Madrid nell'agosto del 2006 (medaglia poi clamorosamente rifiutata).

Inoltre, notiamo che ci sono profondi legami tra la curvatura di Ricci e il trasporto ottimale (cfr., ad esempio, A. Figalli e C. Villani [36]). Alessio Figalli ha vinto la medaglia Fields nel 2018, il premio gli è stato conferito per i suoi contributi al trasporto ottimale, alla teoria delle equazioni derivate parziali e alla probabilità. Figalli è stato il secondo italiano a ricevere il prestigioso riconoscimento, il primo italiano fu Enrico Bombieri nel 1974.

### Il tensore di Ricci

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale. Se  $p$  è un arbitrario punto di  $M$ , per ogni coppia di vettori  $X_p, Y_p \in T_pM$ , l'applicazione

$$R(X_p, \cdot)Y_p : T_pM \rightarrow T_pM, \quad Z_p \mapsto R(X_p, Z_p)Y_p,$$

è un endomorfismo dello spazio vettoriale reale  $T_pM$ , dove  $R$  è il tensore di curvatura di Riemann di  $M$ . Quindi, è possibile definire su  $T_pM$  la forma bilineare

$$Ric_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X_p, Y_p) \mapsto Ric_p(X_p, Y_p) := \text{tr } R(X_p, \cdot)Y_p.$$

Se  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  è una base ortonormale dello spazio tangente  $T_pM$ , si ha:

$$\begin{aligned} Ric_p(X_p, Y_p) &= \text{tr} (R(X_p, \cdot)Y_p) = \sum_{i=1}^n g(R(X_p, e_i)Y_p, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n R(X_p, e_i, Y_p, e_i) = \sum_{i=1}^n R(Y_p, e_i, X_p, e_i) \\ &= Ric_p(Y_p, X_p). \end{aligned}$$

Quindi,  $Ric_p$  è un tensore simmetrico di tipo  $(0, 2)$  su  $T_pM$ .

**Definizione 8.50.** Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni punto  $p$  di  $M$ , ponendo:

$$Ric(X, Y)(p) := \text{tr} \{R(X, \cdot)Y\}_p = \text{tr} R(X_p, \cdot)Y_p = Ric_p(X_p, Y_p),$$

si ottiene un tensore  $Ric$  covariante simmetrico del secondo ordine su  $M$  che è detto *tensore di Ricci* associato al tensore di Riemann  $R$ .

Rispetto a una base ortonormale locale  $\{e_i\}$  di campi vettoriali, le componenti  $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$  del tensore di Ricci  $Ric$ , sono date da:

$$Ric_{ij} = \sum_{k=1}^n R(e_i, e_k, e_j, e_k) = \sum_{k=1}^n R_{ikjk}.$$

Sia ora  $\{\partial_i\}$  una base coordinata locale. Siccome  $R(\partial_i, \partial_k)\partial_j$  è dato da  $\sum_{r=1}^n R_{ikj}{}^r \partial_r$ , allora è rappresentato rispetto alla base coordinata  $\{\partial_i\}$  dalla matrice  $(a_{rk} := R_{ikj}{}^r)$ , per cui le componenti  $Ric_{ij}$  del tensore di Ricci rispetto alla base  $\{\partial_i\}$  sono date da:

$$Ric_{ij} := Ric(\partial_i, \partial_j) = \sum_{k=1}^n R_{ikj}{}^k.$$

Inoltre, posto  $g_{ks} = g(\partial_k, \partial_s)$ , si ha  $Ric_{ij} = \sum_{s,k=1}^n R_{ikjs} g^{ks}$ . Infatti,

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= \sum_{k=1}^n R_{ikj}{}^k = \sum_{k,r=1}^n R_{ikj}{}^r \delta_{kr} = \sum_{k,r,s=1}^n R_{ikj}{}^r g^{ks} g_{sr} \\ &= \sum_{s,k=1}^n \left( \sum_{r=1}^n R_{ikj}{}^r g_{rs} \right) g^{ks} = \sum_{s,k=1}^n R_{ikjs} g^{ks}. \end{aligned}$$

L'operatore di Ricci è il tensore  $Q$  di tipo  $(1, 1)$  definito, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , da:

$$g(QX, Y) := Ric(X, Y).$$

**Esercizio 8.51.** Si verifichi che i tensori derivati  $\nabla_X Ric$  e  $\nabla_X Q$  sono simmetrici e soddisfano:

$$(\nabla_X Ric)(Y, Z) = g((\nabla_X Q)Y, Z).$$

Sia  $v \in T_p M$  un vettore unitario e  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, v\}$  base ortonormale di  $T_p M$ . La curvatura di Ricci in  $p$  nella direzione di  $v$  è lo scalare

$$Ric_p(v) := \frac{1}{n-1} Ric_p(v, v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n R_p(v, e_i, v, e_i),$$

e quindi

$$Ric_p(v) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n K(v, e_i).$$

Per come è stata definita, la curvatura di Ricci  $Ric_p(v)$  rappresenta esattamente la media delle curvatures sezionali lungo i piani per il vettore  $v$ .

### Un significato geometrico della curvatura di Ricci

Consideriamo un sistema di coordinate normali  $(x_i)$  centrato in  $p$  e definito in  $U$ . Rispetto alle coordinate normali, lo sviluppo di Taylor dei coefficienti  $g_{ij}(x) = g(\partial_i, \partial_j)(x)$  è dato da

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - (1/3) \sum_{k,h=1}^n R_{ikjh}(p) x_k x_h + o(|x|^2).$$

Ricordiamo che per ogni  $q \in U$  esiste un'unica geodetica minimale  $\gamma(t)$  congiungente  $p$  a  $q$ , detta geodetica radiale. Rispetto alle coordinate normali,

$\gamma(t)$  è parametrizzata da  $x_i(t) = ta_i$ . Indicato con  $u \in T_p M$  il vettore unitario tangente per  $t = 0$  a  $\gamma$ , e posto  $r = L(\gamma) = d(p, q)$ , si ha  $\dot{\gamma}(0) = ru$ . D'altronde,  $\dot{x}_i(t) = a_i = \dot{x}_i(0) = ru_i$  e quindi  $\dot{\gamma}(t) = ru$  e  $x_i(t) = tr u_i$ . Di conseguenza,  $x_i(q) = x_i(\gamma(1)) = ru_i$ . Pertanto, ogni punto  $q$  di  $U$  ha coordinate normali del tipo  $x_i = ru_i$ , e la formula precedente diventa:

$$g_{ij}(q) = g_{ij}(ru) = \delta_{ij} - (r^2/3) \sum_{k,h=1}^n R_{ikjh}(p) u_k u_h + o(r^2),$$

da cui segue (cfr. [100], p. 45):

$$\det(g_{ij})(q) = 1 - (r^2/3) \sum_{i,k,h=1}^n R_{ikih}(p) u_k u_h + o(r^2). \quad (8.22)$$

Siccome  $(x_i)$  è un sistema di coordinate normali centrato in  $p$ , la base  $\{(\partial_i)_p\}$  è ortonormale e quindi, posto  $u = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i$ , si ha:

$$Ric(u, u)(p) = \sum_{i=1}^n R((\partial_i)_p, u, (\partial_i)_p, u) = \sum_{i,k,h=1}^n R_{ikih}(p) u_k u_h,$$

e la (8.22) diventa

$$\det(g_{ij}(q)) = 1 - (r^2/3) Ric_p(u, u) + o(r^2).$$

La funzione  $\det(g_{ij})$  interviene nella definizione dell'elemento di volume (cfr. Appendice A). In particolare, se prendiamo  $U = \mathcal{B}_R(p) = \exp_p \mathcal{B}_R(0)$  dove  $\mathcal{B}_R(0) \subset T_p M$ , allora (cfr. [100] p. 66, [37] p. 139):

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{B}_R(p)) &= \int_{\mathcal{B}_R(0)} \sqrt{\det(g_{ij}(q))} \circ \exp_p dx_1 \dots dx_n \\ &= \text{vol}_e(\mathcal{B}_R(0)) \left( 1 - \frac{\text{tr } Ric_p}{6(n+2)} R^2 + o(R^2) \right), \end{aligned}$$

dove  $\text{vol}_e(\mathcal{B}_R(0))$  denota il volume euclideo di  $\mathcal{B}_R(0)$ , palla di centro 0 e raggio  $R$  di  $\mathbb{R}^n$ . Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbb{S}_1^{2k}) &= \frac{2(2\pi)^k}{(2k-1)(2k-3)\dots 3 \cdot 1}, & \text{vol}(\mathbb{S}_1^{2k+1}) &= \frac{2\pi^{k+1}}{k!}, \\ \text{vol}(\mathbb{S}_R^2) &= 4\pi R^2, & \text{vol}(\mathbb{S}_R^{n-1}) &= R^{n-1} \text{vol}(\mathbb{S}_1^{n-1}), & \mathbb{S}_1^{n-1} &= \partial \mathcal{B}_1^n, \\ \text{vol}(\mathcal{B}_1^n) &= \frac{\text{vol}(\mathbb{S}_1^{n-1})}{n}, & \text{vol}(\mathcal{B}_R^n) &= R^n \text{vol}(\mathcal{B}_1^n), & \text{vol}(\mathcal{B}_R^3) &= \frac{4}{3}\pi R^3, \end{aligned}$$

dove  $\mathbb{S}_1^n$  denota la  $n$ -sfera di raggio 1 e  $\mathbb{S}_R^n$  la  $n$ -sfera di raggio  $R$ .

### La curvatura scalare

La funzione  $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$r(p) := \text{tr } Q_p = \text{tr } Ric_p,$$

si dice *curvatura scalare* della varietà riemanniana  $M$ .

Se  $\{e_i\}$  è una base ortonormale locale di campi vettoriali, allora:

$$r = \sum_{i=1}^n g(Q(e_i), e_i) = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) = \sum_{i,k=1}^n R_{ikik},$$

dove  $R_{ikik}$  sono le componenti di  $R$  rispetto alla stessa base  $\{e_i\}$ . Quindi, la curvatura scalare in un punto  $p$  è la somma di tutte le curvatures sezionali in  $p$  rispetto ad una base ortonormale. Siano  $\{e_i\}$  e  $\{\partial_j\}$  rispettivamente una base ortonormale locale e una base coordinata locale di campi vettoriali, definite entrambe nello stesso dominio. Sia  $A = (a_{ij})$  la matrice del cambiamento di base definita da:  $e_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} \partial_k$ . La matrice  $G = (g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j))$  rappresenta la metrica riemanniana  $g$  rispetto alla base  $\{\partial_j\}$ , e  $I_n = (\delta_{ij})$  rappresenta la metrica riemanniana  $g$  rispetto alla base  $\{e_i\}$ . Siccome  $G$  e  $I_n$  sono congruenti (cfr. Lemma 12.5):  $I_n = A^T G A$ , e quindi  $G^{-1} = A A^T$ , cioè

$$g^{ks} = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{is}^T = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{si} \quad \forall k, s = 1, \dots, n.$$

Inoltre, posto  $Ric_{ij} := Ric(\partial_i, \partial_j)$  e  $R_{ij kh} := R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_h)$ , usando la precedente formula, si ottiene:

$$r = \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) = \sum_{k,h,i=1}^n Ric_{kh} a_{ki} a_{hi} = \sum_{k,h=1}^n Ric_{kh} \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{hi}.$$

Quindi

$$r = \sum_{k,h=1}^n Ric_{kh} g^{kh} = \sum_{i,k,h,j=1}^n R_{kijh} g^{ij} g^{kh}. \quad (8.23)$$

**Esercizio 8.52.** Siano  $\bar{g}$  e  $g$  due metriche omotetiche su  $M$ :  $\bar{g} = cg$ ,  $c = \text{cost} > 0$ . Si verifichi che per i tensori di Ricci, gli operatori di Ricci e le curvatures scalari si ha:

$$\bar{Ric} = Ric, \quad \bar{Q} = (1/c)Q \quad \text{e} \quad \bar{r} = (1/c)r.$$

Ricordiamo che la divergenza del tensore di Ricci è definita da (cfr. anche Appendice B.2):

$$(\text{div} Ric)(X) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} Ric)(e_i, X) = \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Q)e_i, X),$$

dove  $(e_i)$  è una base ortonormale locale di campi di vettori.

**Proposizione 8.53.** *Il tensore di Ricci  $Ric$  e la curvatura scalare  $r$  verificano, per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , le seguenti identità:*

- $\nabla_X \text{tr} Ric = \text{tr} \nabla_X Ric$ , cioè  $X(r) = \text{tr} \nabla_X Ric$ ;
- $(\nabla_Z Ric)(X, Y) = \text{tr}(\nabla_Z R)(X, \cdot)Y$ ;
- $\text{div} Ric = (1/2)dr$ ;
- $(\text{div} R)(X, Y, Z) = (\nabla_Y Ric)(X, Z) - (\nabla_X Ric)(Y, Z)$ .

*Dimostrazione.* In generale, se  $S$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$ ,  $\nabla_X \text{tr } S = \text{tr } \nabla_X S$  (cfr. Sezione 6.9). Quindi, vale in particolare la prima identità di cui diamo comunque una verifica diretta. Siccome  $Ric$  è simmetrico, possiamo considerare una base ortonormale  $\{e_i\}$  di autovettori per  $Q$ . Pertanto,

$$g(Qe_i, \nabla_X e_i) = \lambda_i g(e_i, \nabla_X e_i) = 0$$

e quindi,

$$\begin{aligned} X(r) &= \sum_{i=1}^n Xg(Qe_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \{g(\nabla_X Qe_i, e_i) + g(Qe_i, \nabla_X e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_X Qe_i, e_i) = \sum_{i=1}^n g((\nabla_X Q)e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\nabla_X Ric)(e_i, e_i) = \text{tr } \nabla_X Ric. \end{aligned}$$

Per provare la seconda identità, fissiamo un punto  $p$  di  $M$  e consideriamo un riferimento geodetico in  $p$  (cfr. Osservazione 7.38), cioè una base ortonormale locale  $\{e_i\}$  definita in un intorno di  $p$  e tale che  $(\nabla e_i)_p = 0$ . Allora,

$$\begin{aligned} (\nabla_Z Ric)(X, Y)(p) &= \sum_{i=1}^n \left( \nabla_Z R(X, e_i, Y, e_i) \right. \\ &\quad \left. - R(\nabla_Z X, e_i, Y, e_i) - R(X, e_i, \nabla_Z Y, e_i) \right)(p) \\ &= \sum_{i=1}^n ((\nabla_Z R)(X, e_i, Y, e_i))(p). \end{aligned}$$

Per provare la c), usiamo la stessa base di prima e la seconda identità di Bianchi. Infatti, per ogni fissato indice  $k$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} e_k(r)(p) &= \left\{ e_k \left( \sum_{i=1}^n Ric(e_i, e_i) \right) \right\}(p) = \left\{ e_k \left( \sum_{i,j=1}^n g(R(e_i, e_j)e_i, e_j) \right) \right\}(p) \\ &= \left\{ \sum_{i,j=1}^n g((\nabla_{e_k} R)(e_i, e_j)e_i, e_j) \right\}(p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left\{ -g((\nabla_{e_i} R)(e_j, e_k)e_i, e_j) - g((\nabla_{e_j} R)(e_k, e_i)e_i, e_j) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_i} R)(e_j, e_i, e_j, e_k) + \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_j} R)(e_i, e_j, e_i, e_k) \right\}(p), \\ &= 2 \left\{ \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_i} R)(e_j, e_i, e_j, e_k) \right\}(p) \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ \sum_{i,k=1}^n e_i \left( \sum_{j=1}^n R(e_j, e_i, e_j, e_k) \right) \right\} (p),$$

e quindi

$$\begin{aligned} e_k(r)(p) &= 2 \left\{ \sum_{i,k=1}^n e_i Ric(e_i, e_k) \right\} (p) = 2 \left\{ \sum_{i,k=1}^n (\nabla_{e_i} Ric)(e_i, e_k) \right\} (p) \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} Ric)(e_k, e_i) \right\} (p) = 2(\operatorname{div} Ric)(e_k)(p) \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Q)e_i, e_k) \right\} (p). \end{aligned}$$

Pertanto, indicata con  $\{\theta^i\}$  la base (locale) duale di  $\{e_i\}$ , si ha

$$dr = \sum_{k=1}^n (dr)(e_k) \theta^k = \sum_{k=1}^n e_k(r) \theta^k = 2 \sum_{k=1}^n (\operatorname{div} Ric)(e_k) \theta^k = 2 \operatorname{div} Ric.$$

Infine, tenendo conto della b), si ha:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} R)(X, Y, Z) &= \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} R)(X, Y, Z), e_i) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} R)(X, Y, Z, e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n (\nabla_X R)(Y, e_i, Z, e_i) - \sum_{i=1}^n (\nabla_Y R)(e_i, X, Z, e_i) \\ &= -(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(X, Z). \end{aligned}$$

□

**Corollario 8.54.** *Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana (connessa) localmente simmetrica (i.e.,  $\nabla R = 0$ ), oppure con tensore di Ricci parallelo, allora  $r = \operatorname{cost}$ .*

**Definizione 8.55.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana ed  $S$  un tensore su  $M$  di tipo  $(0, 2)$  simmetrico.  $S$  si dice che è un *tensore di Codazzi* se

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Y S)(X, Z).$$

**Esercizio 8.56.** Si verifichi che se il tensore di Ricci di  $(M, g)$  è di Codazzi, allora la curvatura scalare  $r$  è costante.

**Esercizio 8.57.** Si verifichi che per il tensore di Ricci  $Ric$  e per la curvatura scalare  $r$  di una varietà riemanniana prodotto  $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ , valgono le formule:

$$Ric(X, Y) = Ric_1(X_1, Y_1) + Ric_2(X_2, Y_2) \quad \text{e} \quad r = r_1 + r_2,$$

dove  $X_i, Y_i$  sono le proiezioni di  $X, Y$  su  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ). Il tensore di Ricci di un (*doubly*) *warped product* si può trovare in [97], p. 71,74.

### Curvatura di Ricci e topologia

Ogni varietà differenziabile di dimensione  $n \geq 3$  ammette una metrica riemanniana con curvatura di Ricci negativa (cfr. [53] p. 2). Di conseguenza, la curvatura di Ricci negativa non implica restrizioni topologiche. Ci limitiamo di seguito a enunciare un importante teorema che mostra come la positività della curvatura di Ricci influenza la topologia di  $M$ . Premettiamo la seguente definizione di *diametro di una varietà riemanniana*:

$$\text{diam}(M) = \sup\{d(p, q) : p, q \in M\}.$$

Se  $M$  è compatta, la funzione distanza  $d$  (che è continua) è definita sul compatto  $M \times M$ , e quindi il  $\text{diam}(M)$  è finito. In particolare, nel caso della sfera  $\mathbb{S}_R^n$  di raggio  $R$ ,

$$\text{diam}(\mathbb{S}_R^n) = \pi R \quad (\text{e non } 2R)$$

in quanto la distanza tra punti antipodali è  $\pi R$ .

**Teorema 8.58.** (Myers [71]) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana completa,  $\dim = n$ . Se, il tensore di Ricci soddisfa la disuguaglianza:*

$$\text{Ric} \geq \frac{(n-1)}{R^2} g, \quad \text{dove } R = \text{cost} > 0,$$

*allora  $M$  è compatta con gruppo fondamentale finito e  $\text{diam}(M) \leq \pi R$ .*

**Osservazione 8.59.** Si noti che una varietà riemanniana completa con tensore di Ricci definito positivo può non essere compatta. Ad esempio, l'iperboloide ellittico

$$M_0 : x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0,$$

con la metrica canonica  $g$  (ovvero, con la metrica indotta) è una varietà riemanniana completa ma non compatta. Tuttavia, il suo tensore di Ricci

$$\text{Ric} = Kg,$$

dove  $K$ , curvatura gaussiana di  $M_0$ , è strettamente positiva. Infatti,  $M_0$  si può rappresentare con l'equazione

$$z = f(x, y), \quad \text{dove } f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2},$$

e quindi la curvatura gaussiana nel generico punto di  $M_0$  è data dalla formula (cfr. [96] p.169)

$$K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2} = \dots = \frac{1}{(1 + 2x^2 + 2y^2)^2} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} > 0.$$

Dunque, il tensore di Ricci  $\text{Ric} = Kg$  è definito positivo e tende a zero quando  $(x^2 + y^2)$  tende a  $+\infty$ .



## 8.8 Varietà di Einstein

Per uno studio approfondito sulle varietà di Einstein si rinvia al testo di Besse [10].

**Definizione 8.60.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice *varietà di Einstein* se il tensore di Ricci  $Ric$  soddisfa:

$$Ric = \lambda g, \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{equivalentemente, } Q = \lambda I).$$

Una varietà di Einstein  $n$ -dimensionale ha curvatura scalare (costante)

$$r = \text{tr} Ric = \lambda \text{tr} g = n\lambda.$$

Pertanto, la condizione di Einstein si può riscrivere nella forma equivalente:

$$Ric = (r/n)g \quad (\text{equivalentemente, } Q = (r/n)I). \quad (8.24)$$

In particolare, una varietà di Einstein ha tensore di Ricci parallelo (non vale il viceversa). La proposizione seguente rappresenta, in un certo senso, l'analogo del Teorema di Schur per la condizione di Einstein.

**Proposizione 8.61.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana connessa di dimensione  $n \geq 3$ . Se  $Ric = \lambda g$ , con  $\lambda$  funzione differenziabile su  $M$ , allora  $\lambda = \text{cost} = r/n$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\{e_i\}$  una base ortonormale locale di campi vettoriali ed  $X$  un arbitrario campo vettoriale. Dalla c) della Proposizione 8.53, si ha:

$$\begin{aligned} X(r) &= 2 \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} Q)e_i, X) = 2 \sum_{i=1}^n g((\nabla_{e_i} \lambda I)e_i, X) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n e_i(\lambda)g(e_i, X) = 2 \sum_{i=1}^n e_i(\lambda)X^i = 2X(\lambda). \end{aligned}$$

D'altronde,  $Ric = \lambda g$  implica che  $r = \text{tr} Ric = \lambda n$ , e quindi

$$n X(\lambda) = 2X(\lambda).$$

Essendo  $n \geq 3$  ed  $M$  connessa, si ottiene  $\lambda = \text{costante}$ , e quindi  $\lambda = r/n$ .  $\square$

**Proposizione 8.62.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n$  a curvatura sezionale costante  $k_0$ . Allora,  $M$  è una varietà di Einstein:*

$$Ric = k_0(n-1)g, \quad r = n(n-1)k_0.$$

*Dimostrazione.* Le componenti locali  $R_{ijkh} = R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_h)$  del tensore di curvatura di Riemann di una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante  $k_0$ , sono date da:  $R_{ijkh} = k_0(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})$ . Di conseguenza, per le componenti di  $Ric$  rispetto alla stessa base coordinata, si ha:

$$Ric_{ik} = \sum_{j,h=1}^n R_{ijkh} g^{jh} = k_0 \sum_{j,h=1}^n (g_{ik} g_{jh} g^{jh} - g_{ih} g_{jk} g^{jh}),$$

e quindi

$$Ric_{ik} = k_0 \sum_{h=1}^n (g_{ik} \delta_{hh} - g_{ih} \delta_{kh}) = (n-1)k_0 g_{ik}.$$

Di conseguenza,  $M$  è uno spazio di Einstein con curvatura scalare costante  $r = n(n-1)k_0$ .  $\square$

Il viceversa della Proposizione 8.62 vale solo nelle dimensioni 2 e 3.

**Proposizione 8.63.** *Sia  $(M, g)$  una varietà di Einstein di dimensione  $n$  con  $n = 2$  oppure  $n = 3$ . Allora,  $(M, g)$  ha curvatura sezionale costante.*

*Dimostrazione.* Se  $M$  ha dimensione 2, ogni base ortonormale locale di campi vettoriali  $(e_1, e_2)$  diagonalizza il tensore di Ricci. Infatti:

$$\begin{aligned} Ric_{12} &= Ric_{21} = R_{2111} + R_{2212} = 0, \\ Ric_{11} &= R_{1212} = R_{2121} = Ric_{22} \Rightarrow Ric_{11} = Ric_{22} = K, \end{aligned}$$

dove  $K$  è la curvatura gaussiana di  $M$ . In particolare,  $Ric = Kg$ . Inoltre:

$$2K = 2R_{1212} = Ric_{11} + Ric_{22} = r = \text{cost.}$$

Quindi, varietà riemanniane 2-dimensionali di Einstein sono a curvatura sezionale costante. Sia ora  $M$  una varietà di Einstein 3-dimensionale:  $Ric = \lambda g$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Fissato  $p \in M$ , sia  $P$  un generico piano di  $T_p M$ . Consideriamo in  $T_p M$  una base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  con  $\{e_1, e_2\}$  base di  $P$ . Allora:

$$\begin{aligned} Ric_{11} &= R_{1212} + R_{1313} = a + b = \lambda, \\ Ric_{22} &= R_{2121} + R_{2323} = a + c = \lambda, \\ Ric_{33} &= R_{3131} + R_{3232} = b + c = \lambda. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\lambda = Ric_{11} + Ric_{22} - Ric_{33} = 2a = 2R_{1212} = 2K(p, P)$$

e quindi,  $M$  ha curvatura sezionale  $K(p, P) = \lambda/2 = \text{cost.}$   $\square$

**Esercizio 8.64.** Siano  $(M_1, g_1)$  e  $(M_2, g_2)$  due varietà di Einstein,  $\dim M_1 = n_1$  e  $\dim M_2 = n_2$ . Si verifichi che la varietà riemanniana prodotto  $(M, g) = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$  è di Einstein se e solo se  $n_1 r_2 = n_2 r_1$ , dove  $r_i$  è la curvatura scalare di  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Suggerimento: usare la caratterizzazione, data nella Proposizione D.2, delle varietà di Einstein.

Dall'Esercizio 8.64 segue che, in dimensione  $n > 3$ , esistono varietà di Einstein che non sono a curvatura sezionale costante. Ad esempio,  $M = \mathbb{S}^n(1) \times \mathbb{S}^n(1)$  è una varietà di Einstein che non è a curvatura sezionale costante.  $M = \mathbb{S}^n(1) \times \mathbb{R}$  è un esempio di varietà riemanniana con tensore di Ricci parallelo che non è di Einstein. Più in generale: una varietà riemanniana con tensore di Ricci parallelo è di Einstein se è irriducibile, altrimenti è localmente un prodotto riemanniano di varietà di Einstein (cfr. [97], p. 227).

**Osservazione 8.65.** Varietà di Einstein complete con curvatura scalare  $r$  (costante) positiva soddisfano le ipotesi del Teorema 8.58 (di Myers). Pertanto: *varietà di Einstein complete e non compatte hanno necessariamente curvatura scalare  $r \leq 0$*  (in quanto se fosse  $r > 0$ , per il Teorema di Myers, la varietà dovrebbe essere compatta).

**Osservazione 8.66.** Una caratterizzazione variazionale delle metriche di Einstein è data nel Capitolo 11 (cfr. Teorema 11.4).

## L'equazione di Einstein

L'origine della terminologia “varietà di Einstein” va cercata in Fisica, nella teoria della relatività generale di Einstein (teoria relativistica della gravitazione). L'aspetto centrale di questa teoria è che lo spazio-tempo è modellato come una varietà 4-dimensionale munita di una metrica di Lorentz  $g$  (cfr. Osservazione 4.9). La geometria di tale varietà è determinata dall'*equazione di Einstein*, anche detta *equazione di campo di Einstein* ([20], p. 158):

$$\text{Ric} - (r/2)g = 8\pi GT, \quad (8.25)$$

dove  $G$  è la costante gravitazionale universale di Newton e  $T$  è il *tensore energia-impulso* ( $T$  è un tensore di tipo  $(0, 2)$  simmetrico).

Il termine a sinistra dell'equazione (8.25) è anche detto “tensore gravitazionale di Einstein”. In generale, se  $S$  è un tensore simmetrico di tipo  $(0, 2)$ , il tensore

$$\mathcal{G}(S) := S - (1/2)(\text{tr}S)g$$

si dice *tensore gravitazionale associato ad  $S$* . Applicando la (2.9) della Appendice B.2, si ha

$$\text{div}(\mathcal{G}(S)) = \text{div}(S) - (1/2) d(\text{tr}S).$$

In particolare, applicando la c) della Proposizione 8.53 alla (8.25), la formula precedente implica

$$\text{div}T=0.$$

In una regione dello spazio privo di materia, il tensore  $T = 0$  e l'equazione (8.25) diventa

$$\text{Ric} = (r/2)g.$$

Considerando le tracce di ambo i membri e ricordando che  $\text{tr}g = \dim M = 4$ , otteniamo  $r = 2r$ , da cui  $r = 0$ . Pertanto, la (8.25) diventa  $\text{Ric} = 0$ , e ciò significa che  $g$  è una metrica di Einstein nel senso matematico del termine con curvatura scalare nulla.

Nel 1917, subito dopo aver formulato la relatività generale, Einstein cercò di trovare un modello cosmologico statico dell'universo, in accordo con le osservazioni astronomiche di quel periodo. A tal fine decise di modificare l'equazione (8.25) nella seguente formulazione

$$\text{Ric} - (r/2)g + \Lambda g = 8\pi GT, \quad (8.26)$$

dove  $\Lambda$  è una costante nota come *costante cosmologica*. Più di dieci anni dopo, nel 1929, l'astronomo Edwin Hubble scoprì che l'universo si stava espandendo. La costante cosmologica era stata introdotta per poter spiegare l'esistenza di un universo statico. Con la scoperta dell'espansione dell'universo, la costante cosmologica non era più necessaria. Einstein stesso ritrattò la propria modifica (che in seguito chiamò il suo più grande errore). Ma nel 1998 una serie di osservazioni su oggetti astrofisici denominati supernovae indicano che non solo l'universo si sta espandendo, ma lo fa in maniera accelerata. Questa accelerazione nell'espansione dell'universo non era compatibile con i modelli privi di costante cosmologica. La costante cosmologica viene quindi reintrodotta nell'equazione di Einstein per giustificare la presenza di una *energia oscura* responsabile dell'accelerazione nell'espansione dell'universo.

L'equazione di Einstein nella formulazione (8.26) in una regione dello spazio-tempo con il tensore  $T = 0$ , diventa

$$Ric = \left(\frac{r}{2} - \Lambda\right) g.$$

In tal caso, siccome  $\dim M = 4 > 2$ , dalla Proposizione 8.61 si ottiene

$$\left(\frac{r}{2} - \Lambda\right) = \text{cost.} = \frac{r}{4}$$

e quindi

$$Ric = \Lambda g.$$

Di conseguenza, anche in questo caso, lo spazio-tempo della relatività generale con  $T = 0$  è un esempio di varietà di Einstein (nel senso matematico del termine) con curvatura scalare  $r = 4\Lambda$ .

In generale, dall'equazione (8.26) si ottiene

$$r - (r/2)4 + 4\Lambda = 8\pi G \text{tr}(T), \quad \text{ossia} \quad r = 4\Lambda - 8\pi G \text{tr}(T).$$

Quindi, l'equazione (8.26) si può esprimere anche nella seguente forma

$$Ric = 8\pi GT + (\Lambda - 4\pi G \text{tr}(T))g.$$

## 8.9 Curvatura di gruppi di Lie 3D

Sia  $G$  un gruppo di Lie  $n$ -dimensionale con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Se  $(e_1, \dots, e_n)$  è una base di campi vettoriali invarianti a sinistra, possiamo definire una metrica riemanniana invariante a sinistra  $g$  ponendo  $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ . Ricordiamo che un *gruppo di Lie Riemanniano* è una coppia  $(G, g)$ , dove  $G$  è gruppo di Lie e  $g$  è una fissata metrica riemanniana invariante a sinistra. In particolare: un gruppo di Lie riemanniano è una varietà riemanniana omogenea, e in generale non vale il viceversa. In dimensione tre, ad eccezione del prodotto riemanniano  $S^2 \times \mathbb{R}$ , ogni varietà riemanniana omogenea semplicemente connessa è un gruppo di Lie riemanniano semplicemente connesso (cfr. Sezione 10.2).

Nel seguito esaminiamo la curvatura dei gruppi di Lie riemanniani semplicemente connessi 3D.

### Caso unimodulare

Sia  $(G, g)$  un gruppo di Lie Riemanniano unimodulare 3D con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ . Allora, esiste una base  $(e_1, e_2, e_3)$  di  $\mathfrak{g}$ , ortonormale rispetto alla metrica invariante a sinistra  $g$ , ed esistono  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ , tali che

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2, \quad [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3. \quad (8.27)$$

Poniamo

$$\mu_1 = \frac{(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)}{2}, \quad \mu_2 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2)}{2}, \quad \mu_3 = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)}{2}.$$

Usando la (8.27) e la formula di Koszul (6.8), si ottiene che la connessione di Levi-Civita  $\nabla$ , associata alla metrica invariante a sinistra  $g$ , è data dalla seguente tabella:

$$\begin{cases} \nabla_{e_1} e_1 = 0, & \nabla_{e_1} e_2 = \mu_1 e_3, & \nabla_{e_1} e_3 = -\mu_1 e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = -\mu_2 e_3, & \nabla_{e_2} e_2 = 0, & \nabla_{e_2} e_3 = \mu_2 e_1, \\ \nabla_{e_3} e_1 = \mu_3 e_2, & \nabla_{e_3} e_2 = -\mu_3 e_1, & \nabla_{e_3} e_3 = 0. \end{cases} \quad (8.28)$$

Di conseguenza, si può determinare il tensore di curvatura:

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_3 &= -\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_3 + \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_3 + \nabla_{[e_1, e_2]} e_3 = 0, \\ R(e_1, e_2)e_2 &= -\nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_2 + \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_2 + \nabla_{[e_1, e_2]} e_2 = (\mu_1 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3) e_1, \\ R(e_1, e_3)e_3 &= -\nabla_{e_1} \nabla_{e_3} e_3 + \nabla_{e_3} \nabla_{e_1} e_3 + \nabla_{[e_1, e_3]} e_3 = (\mu_1 \mu_3 - \lambda_2 \mu_2) e_1, \\ R(e_2, e_3)e_3 &= -\nabla_{e_2} \nabla_{e_3} e_3 + \nabla_{e_3} \nabla_{e_2} e_3 + \nabla_{[e_2, e_3]} e_3 = (\mu_2 \mu_3 - \lambda_1 \mu_1) e_2. \end{aligned}$$

Pertanto, si ottengono facilmente le componenti del tensore di Ricci  $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$ :

$$\begin{cases} Ric_{11} = R_{1313} + R_{1212} = 2\mu_2 \mu_3, \\ Ric_{12} = R_{1323} = -R_{2331} = 0, \\ Ric_{13} = R_{1232} = 0, \\ Ric_{22} = R_{2323} + R_{1212} = 2\mu_1 \mu_3, \\ Ric_{23} = R_{2131} = -R_{1231} = 0, \\ Ric_{33} = R_{1313} + R_{2323} = 2\mu_1 \mu_2. \end{cases} \quad (8.29)$$

Ricordiamo che una varietà riemanniana 3D è a curvatura sezionale costante  $\kappa$  se è di Einstein, ossia il tensore di Ricci  $Ric = \lambda g$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $\kappa = \lambda/2$  (cfr. Proposizione 8.63). Per i gruppi di Lie riemanniani unimodulari che stiamo esaminando, tale condizione è equivalente alle condizioni

$$\mu_1\mu_2 = \mu_1\mu_3 = \mu_2\mu_3.$$

Di conseguenza, si hanno i seguenti casi:

- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \neq 0$ , ossia  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ , e quindi  $\kappa = \lambda_1^2/4$ .
- due  $\mu_i$  nulli e l'altro non nullo; senza perdere in generalità possiamo assumere  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  e  $\mu_3 \neq 0$ , ossia  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 \neq 0$ , e quindi  $\kappa = 0$ .
- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ , ossia  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , e quindi  $\kappa = 0$ .

Tenendo conto della classificazione dei gruppi Lie unimodulari 3D (cfr. Sottosezione 3.6.1), si ottiene il seguente risultato.

**Teorema 8.67.** *I gruppi di Lie semplicemente connessi unimodulari 3D che ammettono metriche riemanniane invarianti a sinistra e a curvatura sezionale costante  $\kappa$  sono esattamente:*

$SU(2) = \mathbb{S}^3$  ( $\kappa = \lambda_1^2/4 > 0$ ), il gruppo abeliano  $\mathbb{R}^3$  ( $\kappa = 0$ ) e  $\tilde{E}(2)$  ( $\kappa = 0$ ).

*In particolare, i gruppi di Lie  $\mathbb{R}^3$  e  $\tilde{E}(2)$ , i quali non sono isomorfi, ammettono metriche (piatte) invarianti a sinistre isometriche.*

### Metriche di Berger sul gruppo di Lie $SU(2)$

Sia  $(G, g)$  un gruppo di Lie semplicemente connesso unimodulare 3D definito dalla (8.27) con le costanti  $\lambda_i$  che soddisfano

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0, \lambda_1 > 0.$$

Quindi,  $G$  è il gruppo di Lie  $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$  e la metrica  $g$  non ha curvatura sezionale costante. Poniamo

$$\xi_1 = \mu e_1, \text{ dove } \mu = \sqrt{(\lambda_1/\lambda)} > 0, \quad \xi_2 = e_2 \quad \text{e} \quad \xi_3 = e_3.$$

Allora

$$[\xi_2, \xi_3] = \sqrt{\lambda\lambda_1} \xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = \sqrt{\lambda\lambda_1} \xi_2, \quad [\xi_1, \xi_2] = \sqrt{\lambda\lambda_1} \xi_3.$$

Di conseguenza, la metrica invariante a sinistra  $g_0$  definita da

$$g_0(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}$$

è la metrica canonica con curvatura sezionale costante  $\kappa = (\lambda\lambda_1)/4 > 0$  (cfr. Teorema 8.67). Ora, per  $\varepsilon > 0$ , consideriamo la metrica invariante a sinistra

$$g_\varepsilon = g_0 + (\varepsilon - 1)\eta \otimes \eta,$$

dove  $\eta = g_0(\xi_1, \cdot)$ . La metrica riemanniana  $g_\varepsilon$  è nota in letteratura col nome di metrica di Berger sulla sfera  $\mathbb{S}^3$  (cfr. Sezione 9.4). In tal caso, i campi vettoriali

$$\tilde{\xi}_1 = (1/\sqrt{\varepsilon})\xi_1, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2 \quad \text{e} \quad \tilde{\xi}_3 = \xi_3,$$

sono  $g_\varepsilon$ -ortonormali e soddisfano

$$[\tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3] = \sqrt{\varepsilon\lambda\lambda_1} \tilde{\xi}_1, \quad [\tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_1] = \sqrt{(\lambda\lambda_1)/\varepsilon} \tilde{\xi}_2, \quad [\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2] = \sqrt{(\lambda\lambda_1)/\varepsilon} \tilde{\xi}_3.$$

In particolare, prendendo  $\varepsilon = \lambda_1/\lambda$ , si ha

$$\sqrt{\varepsilon\lambda\lambda_1} = \lambda_1 \quad \text{e} \quad \sqrt{(\lambda\lambda_1)/\varepsilon} = \lambda = \lambda_2 = \lambda_3,$$

e quindi la corrispondente metrica  $g_\varepsilon$  è la metrica  $g$  di partenza. Pertanto, abbiamo la seguente

**Proposizione 8.68.** *Se le costanti  $\lambda_i$  che definiscono il gruppo di Lie  $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$ , soddisfano  $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ , allora la corrispondente metrica invariante a sinistra  $g$  è una metrica di Berger.*

**Osservazione 8.69.** Consideriamo i gruppi di Lie unimodulari con  $\lambda_1 = 2$  della Proposizione 4.46:  $SU(2)$ ,  $SL(2, \mathbb{R})$  e  $Nil^3$ . Sappiamo che tali gruppi ammettono una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra con campo vettoriale di Reeb  $\xi = e_1$ , e con il tensore  $h$  che soddisfa

$$2he_2 = (\lambda_3 - \lambda_2)e_2, \quad 2he_3 = -(\lambda_3 - \lambda_2)e_3,$$

e quindi  $\text{tr}h^2 = -(\lambda_3 - \lambda_2)^2/2$ . Dalla (8.29) segue che

$$\text{Ric}(\xi, \xi) = \text{Ric}_{11} = 2\mu_2\mu_3 = 2 - (\lambda_3 - \lambda_2)^2/2 = 2 - \text{tr}h^2 \leq 2,$$

e quindi  $\text{Ric}(\xi, \xi) = 2$  se e solo se  $h = 0$  (ovvero, la struttura è sasakiana). Inoltre, quando la struttura è sasakiana, ossia quando  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ , dalla (8.29) segue che la curvatura scalare  $r$  è data da

$$r = \text{Ric}_{11} + \text{Ric}_{22} + \text{Ric}_{33} = 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_2) = -2 + 4\lambda.$$

Pertanto, in tal caso i gruppi in esame sono caratterizzati dalla loro curvatura scalare, più precisamente si ha:

- $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$  se  $r > -2$  ;
- $SL(2, \mathbb{R})$  se  $r < -2$  ;
- $Nil^3$  se  $r = -2$  .

**Osservazione 8.70.** Dalla tabella delle derivate covarianti (8.28), segue che

$$\text{div}e_i := \text{tr}\nabla e_i = \sum_j g(\nabla_{e_j}e_i, e_j) = 0 \text{ per ogni } i = 1, 2, 3.$$

D'altronde, ogni campo vettoriale  $X$  invariante a sinistra è dato da  $\sum_i a_i e_i$  con  $a_i$  costanti. Pertanto, possiamo affermare che: *ogni campo vettoriale invariante a sinistra su un gruppo di Lie 3D unimodulare ha divergenza nulla.*

## Caso non-unimodulare

Iniziamo esaminando due Esempi.

**Esempio 8.71. Il gruppo di Lie riemanniano  $H^3(-k^2)$**

Consideriamo lo spazio iperbolico  $H^3(-k^2)$  con la struttura naturale di gruppo di Lie riemanniano, così come richiamata nell'Esempio 4.53, quindi con la metrica iperbolica  $g$  di curvatura sezionale costante  $-k^2 < 0$  come metrica invariante a sinistra. Inoltre, con le notazioni usate nella Sottosezione 3.6.2,  $H^3(-k^2)$  è il gruppo di Lie riemanniano non unimodulare definito dal prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ , dove  $A$  è la matrice  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k I_2$ . Quindi, l'invariante di Milnor  $\mathcal{D} = 4(\det A)/(\text{tr}A)^2 = 1$ .

**Esempio 8.72. Il gruppo di Lie riemanniano**  $H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$ 

Consideriamo il gruppo di Lie riemanniano  $\mathcal{G}_H = H^2(-k^2) \times \mathbb{R}$  con la metrica riemanniana prodotto  $g$  come metrica invariante a sinistra. Come visto nell'Esempio 4.52,  $\mathcal{G}_H$  è il gruppo di Lie riemanniano non unimodulare definito dal prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$ , dove  $A$  è la matrice  $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , quindi con l'invariante di Milnor  $\mathcal{D} = 0$ . In questo caso, siccome  $g$  è la metrica prodotto, la base ortonormale  $(e_1, e_2, e_3) = (V_1, V_2, V_3)$  (considerata nell'Esempio 4.52) diagonalizza il tensore di Ricci con  $Ric_{22} = 0$ ,  $Ric_{11} = Ric_{33} = -k^2$ . Inoltre, la curvatura scalare  $r = -2k^2 < 0$ .

Consideriamo ora un arbitrario gruppo di Lie semplicemente connesso  $\mathcal{G}$  non-unimodulare  $3D$ . Dalla Sottosezione 3.6.2 segue che esiste una base di campi vettoriali invarianti a sinistra  $(e_1, e_2, e_3)$  tale che

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_3, e_1] = ae_1 + ce_2, \quad [e_3, e_2] = be_1 + de_2, \quad a + d \neq 0. \quad (8.30)$$

La metrica riemanniana invariante a sinistra  $g$  definita da  $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$  si dice *metrica canonica invariante a sinistra* su  $\mathcal{G}$ .

La connessione di Levi-Civita  $\nabla$  associata a questa metrica riemanniana  $g$ , usando la (8.30) e la formula di Koszul (6.8), è data da

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{e_1} e_1 = ae_3, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \frac{b+c}{2} e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = -ae_1 - \frac{b+c}{2} e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = \frac{b+c}{2} e_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = de_3, \quad \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{b+c}{2} e_1 - de_2, \\ \nabla_{e_3} e_1 = \frac{c-b}{2} e_2, \quad \nabla_{e_3} e_2 = \frac{b-c}{2} e_1, \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0. \end{array} \right. \quad (8.31)$$

Di conseguenza, si può determinare il tensore di curvatura:

$$R(e_1, e_2)e_3 = \dots = 0; \quad R(e_1, e_2)e_2 = \dots = \left( ad - \frac{(b+c)^2}{4} \right) e_1;$$

$$R(e_1, e_3)e_3 = \dots = \left( a^2 + \frac{(b+c)c}{2} + \frac{c^2 - b^2}{2} \right) e_1 + (ab + cd)e_2;$$

$$R(e_2, e_3)e_3 = \dots = (ab + cd)e_1 + \left( d^2 + \frac{(b+c)c}{2} - \frac{c^2 - b^2}{2} \right) e_2.$$

Pertanto, le componenti  $Ric_{ij} = Ric(e_i, e_j)$  del tensore di Ricci sono date da:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ric_{11} = -R_{1221} - R_{1331} = -a(a+d) + (b^2 - c^2)/2, \\ \quad \quad \quad Ric_{12} = R_{1323} = -(ab + cd), \\ \quad \quad \quad Ric_{13} = R_{1232} = 0, \quad Ric_{23} = R_{2131} = 0, \\ Ric_{22} = -R_{1221} - R_{2332} = -d(a+d) - (b^2 - c^2)/2, \\ Ric_{33} = -R_{2332} - R_{1331} = -(a^2 + d^2) - (b+c)^2/2, \end{array} \right. \quad (8.32)$$



e la curvatura scalare

$$r = Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} = -(a+d)^2 - (a^2 + d^2) - (b+c)^2/2 < 0.$$

Se  $(ab + cd) \neq 0$ , mediante un'opportuna rotazione nel nucleo unimodulare  $\mathfrak{u} = \text{span}(e_1, e_2)$ , possiamo sostituire la base ortonormale  $(e_1, e_2)$  con una nuova base ortonormale di  $\mathfrak{u}$  in corrispondenza della quale si ha  $(ab + cd) = 0$ . Pertanto, senza perdere in generalità, possiamo assumere che la base  $(e_1, e_2, e_3)$  diagonalizzi il tensore di Ricci. Allora,  $(\mathcal{G}, g)$  è a curvatura sezionale costante se e solo se  $Ric_{11} = Ric_{22} = Ric_{33}$ , ossia

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = ad - bc. \quad (8.33)$$

Esaminando le condizioni (8.33), insieme alle condizioni  $ab + cd = 0$  e  $a + d \neq 0$ , si ottiene che necessariamente  $a \neq 0$ . Inoltre, distinguendo i casi  $b = 0$  e  $b \neq 0$  si ha quanto segue.

- Se  $b = 0$ , si ottiene  $c = b = 0$  e  $d = a \neq 0$ , e quindi

$$Ric_{11} = Ric_{22} = Ric_{33} = -2a^2.$$

In questo caso la metrica  $g$  ha curvatura sezionale costante  $-a^2$ , l'invariante di Milnor  $\mathcal{D} = 1$  e  $(\mathcal{G}, g)$  è isomorfo e isometrico al gruppo di Lie dell'Esempio 8.71 con  $k = a$ . Sostituendo  $e_3$  con  $-e_3$ , se necessario, possiamo assumere  $a > 0$ . Di conseguenza, al variare di  $a > 0$ , si ottengono gruppi di Lie riemanniani isomorfi con metriche omotetiche (ma non isometriche).

- Se  $b \neq 0$ , si ottiene facilmente  $c = -b \neq 0$  e  $d = a \neq 0$ . Anche in questo caso, la metrica  $g$  ha curvatura sezionale costante negativa  $-a^2$  e la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  con l'invariante di Milnor  $\mathcal{D} = (a^2 + b^2)/a^2 > 1$ .

Sostituendo  $e_3$  con  $-e_3$ , se necessario, possiamo assumere  $a, b > 0$ . Fissato  $a > 0$ , al variare di  $b > 0$ , si hanno infiniti gruppi di Lie riemanniani non isomorfi ma con metriche isometriche.

Pertanto, tenendo anche conto della classificazione dei gruppi Lie non-unimodulari 3D (cfr. Sottosezione 3.6.2), si ha il seguente

**Teorema 8.73.** *Sia  $(\mathcal{G}, g)$  un gruppo di Lie riemanniano non-unimodulare semplicemente connesso 3D. Allora,  $g$  ha curvatura scalare costante negativa. Inoltre,  $g$  ha curvatura sezionale costante se, e solo se, tale costante è negativa e  $(\mathcal{G}, g)$  è un prodotto semidiretto, con  $g$  metrica canonica invariante a sinistra, definito da uno dei seguenti casi:*

$$1) \quad \mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R} \text{ con } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a > 0, \text{ ossia } \mathcal{G} = H^3(-a^2) \text{ e } g$$

*è una metrica iperbolica. In questo caso  $\mathcal{D} = 1$  ed esistono infiniti gruppi di Lie riemanniani, isomorfi come gruppi di Lie e con metriche invarianti a sinistra omotetiche (ma non isometriche).*

2)  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  con  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b > 0$ . In questo caso  $\mathcal{D} > 1$  e, fissato  $a > 0$ , esistono infiniti gruppi di Lie riemanniani, non isomorfi come gruppi di Lie e con metriche invarianti a sinistra isometriche.

**Osservazione 8.74.** Consideriamo il gruppo di Lie semplicemente connesso non-unimodulare  $\mathcal{G}$  definito dal prodotto semidiretto  $\mathbb{R}^2 \rtimes_A \mathbb{R}$  dove  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a \neq 0$ . Nella Proposizione 4.49 abbiamo visto che tale gruppo di Lie ammette una struttura riemanniana di contatto invariante a sinistra  $(\eta, g)$  con campo vettoriale di Reeb  $\xi = e_2$ , e con il tensore  $h$  che soddisfa

$$2he_1 = be_1, 2he_3 = -be_3,$$

e quindi  $\text{tr}h^2 = -b^2/2$ . D'altronde, dalla (8.32) segue che

$$\begin{aligned} Ric(\xi, \xi) = Ric_{22} &= -d(a+d) - (b^2 - c^2)/2 = 2 - b^2/2 = 2 - \text{tr}h^2 \leq 2, \quad e \\ Ric(\xi, \xi) &= 2 \text{ se, e solo se, } h = 0 \text{ (ovvero, la struttura è sasakiana)}. \end{aligned}$$

Quando la struttura è sasakiana, ossia quando  $b = 0$ , dalla (8.32) segue che il gruppo di Lie in esame ha curvatura scalare

$$r = Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} = 2 - a^2 - 2 - a^2 - 2 = -2a^2 - 2 < -2.$$

Inoltre, in tal caso, il gruppo di Lie non-unimodulare  $\mathcal{G}$  è isomorfo al gruppo di Lie  $H^2(-a^2) \times \mathbb{R}$  (cfr. Proposizione 3.33). Tuttavia, il gruppo di Lie riemanniano  $(\mathcal{G}, g)$  non è isometrico al prodotto riemanniano  $H^2(-a^2) \times \mathbb{R}$ . Infatti, la metrica canonica  $g$  di  $\mathcal{G}$  ha curvatura scalare  $r = -2a^2 - 2$ , mentre la metrica prodotto ha curvatura scalare  $r = -2a^2$ .

**Osservazione 8.75.** Nel caso dei gruppi di Lie unimodulari  $3D$ , abbiamo osservato che ogni campo vettoriale invariante a sinistra ha divergenza nulla. Nel caso dei gruppi di Lie non-unimodulari  $3D$ , dalla (8.31) segue che

$$\text{dive}_3 = g(\nabla_{e_1} e_3, e_1) + g(\nabla_{e_2} e_3, e_2) + g(\nabla_{e_3} e_3, e_3) = -(a+d) \neq 0.$$

Pertanto, nel caso dei gruppi di Lie non-unimodulari  $3D$ , *esistono campi vettoriali invarianti a sinistra con divergenza non nulla.*

## 8.10 Solitoni di Ricci

I solitoni di Ricci sono importanti per il loro legame con il flusso di Ricci e la comprensione delle sue singolarità. Iniziamo con una breve presentazione del flusso di Ricci introdotto da Hamilton [45].

### Flusso di Ricci

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e sia  $g(t)$  una famiglia differenziabile di metriche riemanniane su  $M$  con  $g(0) = g_0$  e  $t$  variabile in

qualche intervallo di  $\mathbb{R}$ . La curva di metriche  $g(t)$  si dice flusso di Ricci se soddisfa l'equazione tensoriale

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(t) \quad (8.34)$$

dove  $Ric(t)$  è il tensore di Ricci che corrisponde alla metrica  $g(t)$ . L'equazione (8.34) è detta *equazione del flusso di Ricci* e descrive l'evoluzione nel tempo della metrica  $g(t)$ . In coordinate locali, l'equazione (8.34) corrisponde a un sistema non lineare di  $n(n-1)/2$  equazioni differenziali (alle derivate parziali):

$$\frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = -2Ric_{ij}(t) \quad (8.35)$$

dove  $g_{ij}(t) = g(t)(\partial_i, \partial_j)$  e  $Ric_{ij}(t) = Ric(t)(\partial_i, \partial_j)$ ,  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Hamilton [45] provò esistenza e unicità del flusso di Ricci:

*se  $(M, g_0)$  è una varietà riemanniana compatta, allora esiste un'unica soluzione  $g(t)$ ,  $t \in [0, T_{max})$ , con  $g(0) = g_0$ , dell'equazione (8.34).*

Un'importante osservazione sull'equazione (8.34) del flusso di Ricci è la seguente e riguarda la sua presentazione in termini di coordinate armoniche. Ricordiamo che le componenti del tensore di Ricci di una metrica riemanniana  $g$ , rispetto a un sistema di coordinate locali, sono date da (cfr. [10] p.144):

$$Ric_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{r,s} g^{rs} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} + \frac{1}{2} \sum_r \left( g^{ri} \frac{\partial \Gamma^r}{\partial x_j} + g^{rj} \frac{\partial \Gamma^r}{\partial x_i} \right) + \mathcal{Q}(g, \partial g),$$

dove

$$\Gamma^r := \sum_{i,j} g^{ij} \Gamma_{ij}^r = \Delta x_r \quad (\Delta \text{ è il laplaciano})$$

e  $\mathcal{Q}(g, \partial g)$  è un termine quadratico in  $g$  e nelle sue derivate parziali prime (quindi di ordine inferiore rispetto al laplaciano). In particolare, rispetto a coordinate armoniche (cfr. Osservazione B.3),  $\Gamma^r = \Delta x_r = 0$ , e quindi l'equazione precedente diventa

$$Ric_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{r,s} g^{rs} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s} + \mathcal{Q}(g, \partial g). \quad (8.36)$$

D'altronde, rispetto a coordinate armoniche, il laplaciano è dato dalla (2.8) dell'Appendice B e quindi

$$\Delta g_{ij} = - \sum_{r,s} g^{rs} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_r \partial x_s}. \quad (8.37)$$

Tenendo conto della (8.36) e della (8.37), il sistema (8.35) di equazioni alle derivate parziali del flusso di Ricci, rispetto a un sistema di coordinate locali armoniche, è dato da

$$\frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = -\Delta g_{ij} - 2\mathcal{Q}_{ij}(g, \partial g).$$

Pertanto, l'equazione del flusso di Ricci è formalmente simile all'*equazione del calore* (a meno del termine  $\mathcal{Q}(g, \partial g)$  di ordine inferiore rispetto al laplaciano). Questa osservazione in qualche modo è una giustificazione per la scelta della (8.34) come evoluzione della  $g$ .

**Esempio 8.76.** Sia  $(M, g_0)$  una varietà riemanniana compatta di Einstein,  $Ric(g_0) = \lambda_0 g_0$ ,  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Sapendo che si ha esistenza e unicità del flusso, possiamo considerare metriche omotetiche e trovare una soluzione per questa curva di metriche. Sia quindi  $g(t) = \lambda(t)g_0$  una curva differenziabile di metriche riemanniane su  $M$  con  $\lambda(0) = 1$ , quindi  $\lambda(t)$  è differenziabile e  $\lambda(t) > 0$ . Assumiamo che  $g(t)$  sia soluzione dell'equazione (8.34), quindi:

$$-2Ric(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \lambda'(t)g_0.$$

D'altronde sappiamo che metriche omotetiche, come sono  $g(t)$  e  $g_0$ , hanno stesso tensore di Ricci:  $Ric(t) = Ric(0) = \lambda_0 g_0$ , per cui l'equazione precedente diventa

$$\lambda'(t) = -2\lambda_0.$$

Pertanto, si ha  $\lambda(t) = 1 - 2\lambda_0 t$ , e quindi

$$g(t) = (1 - 2\lambda_0 t)g_0$$

è soluzione dell'equazione del flusso di Ricci. Tale soluzione presenta una singolarità per  $t = 1/2\lambda_0$ , ed è definita:

per  $t \in [0, 1/2\lambda_0)$  se  $\lambda_0 > 0$  e per  $t \in [0, +\infty)$  se  $\lambda_0 < 0$ .

Esaminiamo ora i seguenti casi particolari.

- Se  $(M, g_0)$  è Ricci piatta, e in particolare se  $(M, g_0)$  è piatta, il flusso di Ricci è stazionario :  $g(t) = g_0$ .
- Se  $(M, g_0)$  è la sfera canonica  $\mathbb{S}^n(1)$  di raggio  $R = 1$ ,  $Ric(g_0) = (n-1)g_0$ , e lungo il flusso

$$g(t) = (1 - 2(n-1)t)g_0, \quad t \in [0, \frac{1}{2(n-1)}),$$

$\lambda(t) = (1 - 2(n-1)t) \leq 1$ . Quindi durante il flusso la metrica  $g(t)$  contrae il raggio  $R(t) = \sqrt{\lambda(t)}$ , la curvatura  $K(t) = 1/R^2(t)$  aumenta, e il volume decresce. Al tempo finale  $T_{max} = 1/2(n-1)$  il flusso si estingue, ossia si ha una singolarità, e per  $t \rightarrow T_{max}$  raggio e volume vanno a zero, e la curvatura va all'infinito, in ogni punto.

• Se  $(M, g_0)$  è una varietà riemanniana iperbolica compatta con curvatura sezionale  $K = -1$ ,  $Ric(g_0) = -(n-1)g_0$ , e lungo il flusso

$$g(t) = (1 + 2(n-1)t)g_0, \quad t \in [0, +\infty).$$

In questo caso il flusso esiste indefinitamente ossia per ogni  $t \geq 0$ , e per  $t \rightarrow +\infty$  la curvatura tende a zero e il volume tende all'infinito.

R. S. Hamilton, usando il flusso di Ricci, dimostrò il seguente risultato.

**Teorema 8.77.** ([45]) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta di dimensione 3. Se il tensore di Ricci è definito positivo, ossia  $Ric(X, X) > 0$  per ogni  $X \neq 0$ , allora la metrica  $g$  si può deformare a una metrica riemanniana a curvatura sezionale costante  $> 0$ . In particolare, se  $M$  è anche semplicemente connessa, allora  $M$  è omeomorfa alla sfera  $\mathbb{S}^3$ .*

Questo risultato di Hamilton portava credibilità alla *congettura di Poincaré* formulata nel 1904: “ogni varietà compatta semplicemente connessa di dimensione 3 è omeomorfa alla sfera  $\mathbb{S}^3$ ”. In effetti, come accennato all'inizio della Sezione 8.7, Grigori Perelman usando e sviluppando la teoria del flusso di Ricci introdotta da Hamilton [45], è riuscito a dimostrare la congettura di Poincaré. Più precisamente, Perelman usando la teoria del flusso di Ricci ha dimostrato la congettura di geometrizzazione di Thurston (formulata dallo stesso Thurston nel 1982) che è un pò più complicata da enunciare rispetto a quella di Poincaré, e che contiene come caso particolare la stessa congettura di Poincaré.

**Osservazione 8.78.** È ben noto che una varietà  $M$ , compatta orientabile e di dimensione 3, ammette una 1-forma di contatto  $\eta$ , e quindi ammette una struttura riemanniana di contatto  $(\xi, \eta, g, \varphi)$ . Se la metrica associata  $g$  ha curvatura scalare  $r$  sufficientemente grande, allora  $g$  ha curvatura di Ricci positiva (cfr. [41]). Pertanto, applicando il Teorema 8.77 di Hamilton,  $g$  si può deformare a una metrica di curvatura sezionale costante positiva. Inoltre, se il campo vettoriale di Reeb  $\xi$  è di Killing e la curvatura scalare  $r > -2$ ,  $M$  ammette una struttura riemanniana di contatto con curvatura sezionale positiva.

Per una presentazione di tecniche e idee che si sono sviluppate intorno alla risoluzione della congettura di Poincaré si possono vedere gli articoli [4], [6] e [70].

## Solitoni di Ricci

Il concetto di solitone di Ricci fu introdotto da Hamilton [46] come una naturale generalizzazione delle metriche di Einstein. Per uno studio approfondito sui solitoni di Ricci si può consultare, ad esempio, [27], [109].

**Definizione 8.79.** Siano  $(M, g)$  una varietà riemanniana e  $X$  un campo vettoriale su  $M$ . La terna  $(M, g, X)$  si dice *solitone di Ricci* se esiste una costante  $\lambda$  tale che :

$$(1/2)\mathcal{L}_X g + Ric = \lambda g, \quad (8.38)$$

dove  $\mathcal{L}_X$  denota la derivata di Lie (cfr. Sezione 2.7).

Un solitone di Ricci si dice *expanding, steady o shrinking*, a seconda che sia  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  oppure  $\lambda > 0$  rispettivamente. Se il campo vettoriale  $X$  è nullo oppure è di Killing, e quindi la metrica è di Einstein, il *solitone di Ricci* si dice *banale*.

I solitoni di Ricci si possono anche definire come soluzioni auto-similari del flusso di Ricci. Abbiamo visto che per una metrica di Einstein il flusso di Ricci è definito da metriche omotetiche. Generalizzando il comportamento delle metriche di Einstein, diamo la seguente definizione senza assumere  $M$  compatta. Data una varietà riemanniana  $(M, g_0)$ , una soluzione  $g(t)$  con  $g(0) = g_0$ , dell'equazione del flusso di Ricci, si dice *autosimilare* se esiste una funzione positiva  $\sigma(t)$  e una famiglia a un parametro  $\psi_t$  di diffeomorfismi di  $M$ , con  $\sigma(0) = 1$  e  $\psi_0 = I_d$ , tali che:

$$g(t) = \sigma(t)\psi_t^* g_0.$$

In altre parole, tale metrica rappresenta un punto fisso del flusso di Ricci nel quoziente dello spazio delle metriche su  $M$  rispetto alla relazione di equivalenza che abbiamo descritta.

Dato un solitone di Ricci  $(M, g_0, X)$ , quindi con  $X$  (che assumiamo completo) e  $g_0$  che soddisfano la (8.38), consideriamo una famiglia a un parametro di diffeomorfismi  $\psi_t$  di  $M$ , con  $\psi_0 = I_d$ , indotta dal campo vettoriale tempo-dipendente  $Y_t = \sigma^{-1}(t)X$ , dove  $\sigma(t) = (1 - 2\lambda t) > 0$ , ossia

$$Y_t(\psi_t(p)) = \partial_t \psi_t(p).$$

Allora

$$g(t) = \sigma(t)\psi_t^* g_0$$

è un flusso di Ricci con  $g(0) = g_0$ . Infatti, derivando si ha (cfr. anche [109], p.9):

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \sigma'(t)\psi_t^* g_0 + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_Y g_0),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} &= \psi_t^*(-2\lambda g_0 + \mathcal{L}_X g_0) = -2\psi_t^* Ric(g_0) \\ &= -2Ric(\psi_t^* g_0) = -2Ric(\sigma(t)\psi_t^* g_0) \\ &= -2Ric(g(t)). \end{aligned}$$

Pertanto: *i solitoni di Ricci sono soluzioni autosimilari del flusso di Ricci.* Il procedimento precedente si può invertire, ossia *una soluzione autosimilare del flusso di Ricci definisce un solitone di Ricci.* Per verificare ciò, data una soluzione autosimilare  $g(t) = \sigma(t)\psi_t^*g_0$ , consideriamo il campo vettoriale tempo-dipendente  $Y_t = Y(t)$  definito dalla famiglia a un parametro di diffeomorfismi  $\psi_t$ . Derivando si ha

$$\begin{aligned} -2Ric(g(t)) &= \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \sigma'(t)\psi_t^*g_0 + \sigma(t)\psi_t^*(\mathcal{L}_Y g_0) \\ &= \sigma'(t)\psi_t^*g_0 + \psi_t^*(\mathcal{L}_X g_0), \quad X = X(t) = \sigma(t)Y(t). \end{aligned}$$

Siccome  $Ric(g(t)) = Ric(\sigma(t)\psi_t^*g_0) = Ric(\psi_t^*g_0) = \psi_t^*Ric(g_0)$ , la precedente equazione implica

$$-2Ric(g_0) = \sigma'(t)g_0 + (\mathcal{L}_{X_t}g_0),$$

e quindi per  $t = 0$ , posto  $2\lambda = -\sigma'(0)$  e  $X_0 = X(0)$ , si ottiene

$$Ric(g_0) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{X_0}g_0) = \lambda g_0.$$

Quindi  $(M, g_0, X_0)$  è un solitone di Ricci.

**Osservazione 8.80.** Sia  $(M, g, X)$  un solitone di Ricci con costante  $\lambda$ :  $(1/2)L_X g + Ric = \lambda g$ . Siccome metriche omotetiche hanno lo stesso tensore di Ricci, allora

$$(M, \tilde{g} = \mu g, \tilde{X} = (1/\mu)X), \quad \mu > 0,$$

è un solitone di Ricci con costante  $\tilde{\lambda} = \lambda/\mu$ .

**Osservazione 8.81.** Siano  $(M, g, X_1)$ ,  $(M, g, X_2)$  due solitoni di Ricci con costanti  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Allora, il campo vettoriale  $X = X_2 - X_1$  è omotetico:

$$L_X g = 2(\lambda_2 - \lambda_1)g.$$

**Osservazione 8.82.** Il prodotto riemanniano di due solitoni di Ricci che hanno la stessa costante,  $(M_1, g_1, X_1, \lambda)$ ,  $(M_2, g_2, X_2, \lambda)$ , è ancora un solitone di Ricci. Basta tener presente la connessione di Levi-Civita e il tensore di Ricci di un prodotto riemanniano.

### Solitoni di Ricci tipo gradiente

Un *solitone di Ricci*  $(M, g, X)$  è detto di *tipo gradiente* se il campo vettoriale  $X$  è il gradiente di qualche funzione  $f \in \mathcal{F}(M)$ :  $X = \nabla f$ , dove  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita. Dall'Osservazione 9.3 :

$$(1/2)(\mathcal{L}_{\nabla f}g) = Hess f \quad (\text{hessiano di } f).$$

Pertanto, un solitone di Ricci tipo gradiente si può esprimere con l'equazione

$$Ric + Hessf = \lambda g.$$

G. Perelman [82] provò che: *ogni solitone di Ricci compatto è di tipo gradiente.*

Infine, osserviamo che nelle dimensioni  $n = 2, 3$ , ogni solitone di Ricci compatto è di Einstein, e quindi a curvatura sezionale costante. Questo risultato è dovuto a Hamilton [46] per  $n = 2$  e a Ivey [50] per  $n = 3$ . Inoltre, è noto che non esistono solitoni di Ricci compatti tipo expanding e steady [27]. Di seguito esaminiamo alcuni classici esempi di solitoni di Ricci non compatti.

### Esempio 8.83. Il solitone gaussiano

Consideriamo lo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  e la funzione  $f(x) = (\lambda/2)\|x\|^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Allora, il campo vettoriale  $V = \nabla^0 f = \lambda(x_1, \dots, x_n)$  e il suo derivato  $\nabla_X^0 V = \lambda X$ , dove  $\nabla^0$  è la connessione euclidea. Di conseguenza,

$$(\mathcal{L}_V g_0)(X, Y) = g_0(\nabla_X^0 V, Y) + g_0(X, \nabla_Y^0 V) = 2\lambda g_0(X, Y),$$

ossia

$$\mathcal{L}_V g_0 = 2\lambda g_0.$$

Pertanto, siccome il tensore di Ricci della metrica euclidea è nullo,  $(\mathbb{R}^n, g_0, V)$  è un non-steady solitone di Ricci tipo gradiente, detto *solitone gaussiano*.

### Esempio 8.84. Cylinder shrinking soliton

Sia  $(M, g)$  la varietà riemanniana prodotto  $\mathbb{S}_R^{n-1} \times \mathbb{R}$ ,  $n \geq 3$ , dove  $\mathbb{S}_R^{n-1}$  è la sfera di raggio  $R = \sqrt{2(n-1)}$ . Quindi,

$$g = g_0 + dt \otimes dt \quad \text{con } g_0 \text{ metrica canonica di } \mathbb{S}_R^{n-1}.$$

La  $g$  è una metrica riemanniana prodotto, per cui il suo tensore di Ricci

$$Ric(g) = Ric(g_0) = (1/2)g_0.$$

Consideriamo la funzione  $f$  definita da

$$f(x, t) = t^2/4 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{S}_R^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

$Hessf$  è dato da (cfr. Appendice B.1)

$$(Hessf)(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

Tenendo conto di come è definita la connessione di Levi-Civita di una metrica prodotto (cfr. Esercizio 6.52), si ha che il gradiente  $\nabla f = (1/2)t\partial_t$  e

$$(Hessf)(X, Y) = (1/2)(dt \otimes dt)(X, Y).$$



Allora,

$$\text{Ric}(g) + \text{Hess}f = \frac{1}{2}(g_0 + dt \otimes dt) = \frac{1}{2}g.$$

Pertanto,  $(M, g, f)$  è un solitone di Ricci tipo gradiente con la costante  $\lambda > 0$ , che viene detto *cylinder shrinking soliton*.

### Esempio 8.85. Hamilton's cigar soliton

Questo esempio, anche noto in Fisica come **Witten's black hole**, è dovuto a Hamilton. Consideriamo  $\mathbb{R}^2$  con la metrica riemanniana (*the cigar metric*)

$$g = f(dx^2 + dy^2), \text{ dove } f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2),$$

e la funzione

$$F(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2).$$

Facciamo vedere che  $(\mathbb{R}^2, g, F)$  è un steady solitone di Ricci di tipo gradiente con funzione potenziale  $F$ .

- La curvatura gaussiana.

Dall'Esercizio 6.54 sappiamo che

$$(E_1 = (1/\sqrt{f})\partial_x, E_2 = (1/\sqrt{f})\partial_y)$$

è una base  $g$ -ortonormale di campi vettoriali e la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  soddisfa:

$$\nabla_{E_1}E_1 = (y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_2, \quad \nabla_{E_1}E_2 = (-y/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_1.$$

$$\nabla_{E_2}E_1 = (-x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_2, \quad \nabla_{E_2}E_2 = (x/\sqrt{(1+x^2+y^2)})E_1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_1 &= -\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 + \nabla_{[E_1, E_2]}E_1 \\ &= E_1\left(\frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\right)E_2 + \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\nabla_{E_1}E_2 \\ &\quad + E_2\left(\frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\right)E_2 + \frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\nabla_{E_2}E_2 \\ &\quad - \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}E_2, \end{aligned}$$

e quindi la curvatura gaussiana

$$K = g(R(E_1, E_2)E_1, E_2) = 2/(1 + x^2 + y^2).$$

Poiché la varietà è 2-dimensionale, abbiamo  $\text{Ric} = Kg$ , ossia

$$\text{Ric} = \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)}g.$$

- La derivata di Lie  $\mathcal{L}_V g$ ,  $V = \nabla F$ .

Consideriamo la funzione  $F(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2)$  è il campo vettoriale  $V = \nabla F$ . Rispetto alla base ortonormale  $E_1, E_2$ , il campo vettoriale gradiente è definito da

$$\begin{aligned}\nabla F &= E_1(F)E_1 + E_2(F)E_2 = \frac{1}{f} \left( \partial_x(F)\partial_x + \partial_y(F)\partial_y \right) \\ &= (1 + x^2 + y^2) \left( \partial_x(F)\partial_x + \partial_y(F)\partial_y \right) \\ &= -2(x\partial_x + y\partial_y).\end{aligned}$$

Quindi

$$V = -2(x\partial_x + y\partial_y) = -2W,$$

dove  $W$  è il campo vettoriale radiale che si può anche esprimere con

$$W = \frac{x}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}} E_1 + \frac{y}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)}} E_2.$$

Ora, preso  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ ,  $X = X^1 E_1 + X^2 E_2$ , calcoliamo  $\nabla_X V$ . Usando proprietà di  $\nabla$  e la tabella delle derivate covarianti  $\nabla_{E_i} E_j$ , con facili calcoli si ottiene

$$\nabla_X V = -2\nabla_X W = \frac{-2}{(1 + x^2 + y^2)} X.$$

D'altronde

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) = -\frac{4}{1 + x^2 + y^2} g.$$

Pertanto, possiamo concludere che

$$(1/2)\mathcal{L}_V g + Ric = 0$$

e quindi  $(\mathbb{R}^2, g, V)$  è un steady solitone di Ricci tipo gradiente.

**Osservazione 8.86.** Questo solitone, introdotto da Hamilton in [46], è il primo esempio di solitone di Kähler-Ricci su varietà non compatte. Usando la coordinata complessa  $z = x + iy$ , la cigar metric su  $\mathbb{C}$  è  $g = dzd\bar{z}/(1 + |z|^2)$ .

# Capitolo 9

## Campi vettoriali di Killing e di Hopf

I campi vettoriali di Killing su una varietà riemanniana, e in particolare quelli di Hopf sulla sfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$  (che sono esattamente i campi unitari di Killing, cfr. Sezione 9.5) sono i più importanti campi vettoriali in geometria riemanniana. Ad esempio, essi giocano un ruolo fondamentale in geometria sasakiana, nello studio dell'armonicità dei campi vettoriali  $V$  pensati come applicazioni da  $(M, g)$  in  $(TM, G_s)$ , dove  $G_s$  è la metrica di Sasaki, oppure da  $(M, g)$  in  $(T^1M, G_s)$  se  $V$  è unitario, e nello studio dei campi vettoriali unitari di volume minimo (problema di H. Gluck – W. Ziller, cfr. Sezione 9.6). Inoltre, l'esistenza di campi vettoriali di Killing è intimamente legata alla curvatura della varietà.

### 9.1 Campi vettoriali di Killing

**Definizione 9.1.** Un campo di vettori  $V$  su una varietà riemanniana  $(M, g)$  è detto campo di vettori di *Killing*, oppure *isometria infinitesimale*, se il gruppo (locale) a 1-parametro di diffeomorfismi  $\phi(t, p)$  associato a  $V$  consiste di isometrie (locali).

Siccome la derivata di Lie

$$(\mathcal{L}_V g)_p := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* g_{\phi_t(p)} - g_p),$$

allora  $\mathcal{L}_V g = 0$  se e solo se  $\phi_t^* g_{\phi_t} = g$ , cioè se e solo se  $V$  è di Killing. Ricordiamo che se  $S$  è un tensore di tipo  $(0, 2)$ ,

$$(\mathcal{L}_V S)(X, Y) = VS(X, Y) - S([V, X], Y) - S(X, [V, Y]). \quad (9.1)$$

Se  $S = g$ , siccome  $\nabla g = 0$ , si ha

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V).$$

Pertanto,  $V$  è di Killing se e solo se è soddisfatta l'equazione (di Killing)

$$g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) = 0,$$

ovvero l'operatore  $\nabla V$  è antisimmetrico. In particolare, i campi vettoriali paralleli sono di Killing e inoltre hanno lunghezza costante (cfr. Proposizione 8.41). Usando la (9.1), si ha che

$$\mathcal{L}_{[V,W]}g = \mathcal{L}_V \circ \mathcal{L}_W g - \mathcal{L}_W \circ \mathcal{L}_V g.$$

Pertanto, l'insieme  $\mathcal{K}(M)$  dei campi vettoriali di Killing su  $M$ , oltre ad essere uno spazio vettoriale reale, è un'algebra di Lie.

**Osservazione 9.2.** Sia  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  un rivestimento riemanniano. È noto che per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  esiste un unico  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$  tale che  $\pi_{*\tilde{p}}\tilde{X}_{\tilde{p}} = X_{\pi(\tilde{p})}$  per ogni  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  (cfr. Proposizione 2.31). Siccome  $\pi$  è un'isometria locale, dall'equazione di Killing segue che  $X$  è di Killing se e solo se  $\tilde{X}$  è di Killing.

**Osservazione 9.3.** Data  $f \in \mathcal{F}(M)$ , se consideriamo il campo vettoriale  $\nabla f$  (gradiente di  $f$ ), tenendo conto della (2.5) dell'Appendice B.1, si ha

$$(\mathcal{L}_{(\nabla f)}g)(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) + g(X, \nabla_Y \nabla f) = 2g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

Quindi, dalla definizione di hessiano di  $f$  (cfr. Appendice B.1) si ha

$$(1/2)(\mathcal{L}_{(\nabla f)}g) = \nabla^2 f = Hess f \quad (\text{hessiano di } f).$$

**Osservazione 9.4.** Sia  $\xi$  un campo vettoriale di Killing su  $(M, g)$ . Siccome  $\xi$  genera un gruppo (locale) ad un parametro di isometrie e il tensore di Ricci  $Ric$  è invariante per isometrie (locali), allora  $\mathcal{L}_\xi Ric = 0$ .

**Osservazione 9.5.** Se  $V$  è un campo vettoriale geodetico, ossia  $\nabla_V V = 0$ , e di lunghezza costante, dall'espressione di  $(\mathcal{L}_V g)$  segue che  $(\mathcal{L}_V g)(V, \cdot) = 0$ .

La seguente proposizione è la versione infinitesimale della Proposizione 7.37.

**Proposizione 9.6.** *Un campo vettoriale  $V \in \mathcal{K}(M)$  è univocamente determinato da  $V_p$  e  $(\nabla V)(p)$  per un fissato punto  $p \in M$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $\mathcal{K}(M)$  è uno spazio vettoriale, basta provare che se  $V_p = 0$  e  $(\nabla V)(p) = 0$ , allora  $V = 0$  su  $M$ . Intanto proviamo che  $V_p = 0$  e  $(\nabla V)(p) = 0$  implicano la seguente proprietà:

$$\text{“}V \text{ è nullo in un intorno del punto } p\text{.”} \quad (9.2)$$

Sia  $\phi_t$ ,  $|t| < \epsilon$ , il flusso locale di  $V$  definito in un intorno  $U$  di  $p$ , quindi  $\phi_t : U \rightarrow \phi_t(U)$ ,  $q \mapsto \sigma(t) = \phi(t, q)$ , è una isometria per ogni  $t$ ; inoltre, per

ogni  $q \in U$  la curva  $\sigma(t) = \phi(t, q)$  è l'unica curva che soddisfa  $\sigma(0) = q$  e  $\dot{\sigma}(t) = V_{\sigma(t)} = V_{\phi(t, q)}$  (cfr. Teorema 2.35). Allora  $(d\phi(t, p)/dt)(0) = V_p = 0$  implica  $\phi(t, p) = p$  per ogni  $t$ . Proviamo che  $\phi_t : U \rightarrow \phi_t(U)$  è l'identità su tutto  $U$ . Dato  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , consideriamo il differenziale  $(\phi_t)_{*p} : T_p M \rightarrow T_p M$  e poniamo  $y(t) = (\phi_t)_{*p} Y_p$ . Siccome

$$\dot{y}(0) = \left( \frac{d}{dt} (\phi_t)_{*p} Y_p \right)_0 = - \left( \frac{d}{dt} (\phi_{-t})_{*p} Y_{\phi(t, p)} \right)_0 = -\mathcal{L}_{V_p} Y = -[V, Y]_p$$

e

$$[V, Y]_p = \nabla_{V_p} Y - \nabla_{Y_p} V = 0 \quad (\text{tenendo conto che } V_p = (\nabla V)_p = 0),$$

otteniamo  $\dot{y}(0) = 0$ . Di conseguenza, per ogni  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \left( \frac{d}{dt} (\phi_t)_{*p} Y_p \right)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\phi_{t+h})_{*p} Y_p - (\phi_t)_{*p} Y_p}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\phi_t)_{*p} (\phi_h)_{*p} Y_p - (\phi_t)_{*p} Y_p}{h} \\ &= (\phi_t)_{*p} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\phi_h)_{*p} Y_p - Y_p}{h} = (\phi_t)_{*p} \dot{y}(0) = (\phi_t)_{*p} 0 = 0, \end{aligned}$$

dunque  $y(t)$  è costante e quindi  $(\phi_t)_{*p} Y_p = Y_p$ . Pertanto, l'isometria  $\phi_t$  soddisfa  $\phi_t(p) = p$  e  $(\phi_t)_{*p} = I_{T_p M}$  per ogni  $t$ , e quindi (cfr. Esercizio 7.37)  $\phi_t = I_U$  da cui segue che  $V$  è nullo su  $U$ , ossia la proprietà (9.2). Di conseguenza l'insieme  $A = \{p \in M : V(p) = 0, (\nabla V)(p) = 0\}$  è un aperto, ovviamente è anche un chiuso, ed essendo  $M$  connessa possiamo concludere che  $A = M$  e quindi  $V$  è nullo su  $M$ .  $\square$

**Proposizione 9.7.** *L'algebra di Lie  $\mathcal{K}(M)$  ha dimensione  $\leq n(n+1)/2$ , dove  $n = \dim M$ .*

*Dimostrazione.* Fissato un punto  $p \in M$ , denotiamo con  $\mathcal{A}_p$  l'insieme delle trasformazioni antisimmetriche di  $T_p M$  e consideriamo l'applicazione lineare

$$\Phi : \mathcal{K}(M) \rightarrow T_p M \times \mathcal{A}_p, X \mapsto (X_p, (\nabla X)(p)).$$

Dalla dimostrazione della Proposizione 9.6 segue che il nucleo di  $\Phi$  è banale, quindi

$$\dim \mathcal{K}(M) \leq \dim T_p M + \dim \mathcal{A}_p = n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2. \quad \square$$

**Osservazione 9.8.** Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana completa, allora ogni campo vettoriale di Killing è completo, inoltre l'algebra di Lie  $\mathcal{K}(M)$  è isomorfa all'algebra di Lie del gruppo di Lie  $\text{Iso}(M, g)$  ([100], p.118). Quindi, posto  $\dim M = n$ ,  $\dim \mathcal{K}(M) = n(n+1)/2$  se e solo se  $M$  è isometrica a una delle seguenti varietà a curvatura sezionale costante: lo spazio euclideo

$\mathbb{R}^n$ , lo spazio iperbolico  $H^n$ , la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$ , lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{R}P^n$  ([100], p.120; [56] vol I, p.239). Inoltre, se una varietà riemanniana compatta ha tensore di Ricci nullo, lo spazio dei campi vettoriali di Killing ha dimensione uguale al primo numero di Betti  $b_1(M)$  ([10], p.41).

Il seguente risultato di K. Yano [125] si è rivelato molto utile nello studio dei campi vettoriali di Killing.

**Proposizione 9.9.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  soddisfa l'equazione*

$$\begin{aligned} Ric(X, X) &= \|\nabla X\|^2 - (1/2)\|\mathcal{L}_X g\|^2 + (\operatorname{div} X)^2 \\ &\quad + \operatorname{div}(\nabla_X X) - \operatorname{div}((\operatorname{div} X) X). \end{aligned} \quad (9.3)$$

In particolare, se  $M$  è compatta:

$$\int_M (Ric(X, X) - \|\nabla X\|^2 + (1/2)\|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\operatorname{div} X)^2) v_g = 0. \quad (9.4)$$

*Dimostrazione.* Proviamo le seguenti formule:

$$\begin{aligned} Ric(X, X) &= -\operatorname{tr} \{(\nabla X) \circ (\nabla X)\} + (\operatorname{div} X)^2 \\ &\quad + \operatorname{div}(\nabla_X X) - \operatorname{div}((\operatorname{div} X) X), \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$\operatorname{tr} \{(\nabla X) \circ (\nabla X)\} = (1/2)\|\mathcal{L}_X g\|^2 - \|\nabla X\|^2. \quad (9.6)$$

Dato  $p \in M$ , sia  $\{E_1, \dots, E_n\}$  una base ortonormale di campi vettoriali definiti su un aperto  $U$  di  $M$  con  $p \in U$  tale che  $(\nabla E_i)_p = 0$ , cioè  $(\nabla_X E_i)_p = 0$ , per ogni  $1 \leq i \leq n$ . Allora, nel punto  $p$ , si ottiene

$$\begin{aligned} Ric(X, X) &= \sum_i R(X, E_i, X, E_i) = \sum_i g(R(X, E_i)X, E_i) \\ &= -\sum_i g(\nabla_X \nabla_{E_i} X - \nabla_{E_i} \nabla_X X - \nabla_{[X, E_i]} X, E_i) \\ &= -\sum_i \{X(g(\nabla_{E_i} X, E_i)) - g(\nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i)\} + \operatorname{div}(\nabla_X X) \\ &\quad - \sum_i g(\nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i) \\ &= -X(\operatorname{div} X) + \operatorname{div}(\nabla_X X) - \operatorname{tr} \{(\nabla X) \circ (\nabla X)\}, \end{aligned}$$

e quindi la (9.5), tenendo anche conto dell'identità

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + X(f).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_X g\|^2 &= \sum_{i,j} ((\mathcal{L}_X g)(E_i, E_j))^2 = \sum_{i,j} (g(\nabla_{E_i} X, E_j) + g(E_i, \nabla_{E_j} X))^2 \\
&= \sum_{i,j} \left( g(\nabla_{E_i} X, E_j)^2 + 2g(\nabla_{E_i} X, E_j)g(E_i, \nabla_{E_j} X) \right. \\
&\quad \left. + g(E_i, \nabla_{E_j} X)^2 \right) \\
&= \sum_i g \left( \sum_j g(\nabla_{E_i} X, E_j) E_j, \nabla_{E_i} X \right) \\
&\quad + \sum_i g \left( E_i, \nabla_{\sum_j g(\nabla_{E_i} X, E_j) E_j} X \right) \\
&\quad + \sum_j g \left( \nabla_{\sum_i g(\nabla_{E_j} X, E_i) E_i} X, E_j \right) \\
&\quad + \sum_j g \left( \sum_i g(\nabla_{E_j} X, E_i) E_i, \nabla_{E_j} X \right) \\
&= \sum_i g(\nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X) + \sum_i g(E_i, \nabla_{\nabla_{E_i} X} X) \\
&\quad + \sum_j g(\nabla_{\nabla_{E_j} X} X, E_j) + \sum_j g(\nabla_{E_j} X, \nabla_{E_j} X) \\
&= 2(\|\nabla X\|^2 + \text{tr}\{(\nabla X) \circ (\nabla X)\}),
\end{aligned}$$

e quindi la (9.6). Le formule (9.5) e (9.6) implicano la (9.3).  $\square$

L'operatore

$$\bar{\Delta} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), X \mapsto \bar{\Delta} X = -\text{tr}_g \nabla^2 X,$$

è detto “*rough Laplacian*”, dove  $\nabla^2 X$  è il tensore di tipo  $(1, 2)$  definito dalla (8.2) (cfr. anche Sezione 12.7). Sia  $p \in M$  e sia  $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$  una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su un aperto  $U$  di  $M$ ,  $p \in U$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , dalla definizione di  $\bar{\Delta}$  segue che

$$(\bar{\Delta} X)(p) = - \sum_{i=1}^n \left( \nabla_{E_i} \nabla_{E_i} X - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} X \right)_p. \quad (9.7)$$

**Proposizione 9.10.** *Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , abbiamo*

$$g(\bar{\Delta} X, X) = \frac{1}{2} \Delta(\|X\|^2) + \|\nabla X\|^2 \quad (9.8)$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace-Beltrami che opera sulle funzioni (cfr. Appendice B).

*Dimostrazione.* Sia  $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$  una base ortonormale locale di campi di vettori definiti su un aperto  $U$  di  $M$ . Allora

$$\begin{aligned} g(\bar{\Delta}X, X) &= - \sum_i \{g(\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} X, X) - g(\nabla_{\nabla_{E_i} E_i} X, X)\} \\ &= - \sum_i \{E_i(g(\nabla_{E_i} X, X)) - \|\nabla_{E_i} X\|^2 - \frac{1}{2}(\nabla_{E_i} E_i)(\|X\|^2)\} \\ &= - \sum_i \{\frac{1}{2}E_i(E_i(\|X\|^2)) - \|\nabla_{E_i} X\|^2 - \frac{1}{2}(\nabla_{E_i} E_i)(\|X\|^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\Delta(\|X\|^2) + \|\nabla X\|^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso dell'espressione locale (rispetto alla base ortonormale locale  $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ ) dell'operatore di Laplace-Beltrami sulle funzioni (cfr. Appendice B):  $\Delta f = -\text{tr}_g \nabla^2 f = -\sum_{i=1}^n \{E_i(E_i f) - (\nabla_{E_i} E_i) f\}$ .  $\square$

**Osservazione 9.11.** Il rough laplaciano  $\bar{\Delta}$  è legato al laplaciano  $\Delta_1$  operante sulle 1-forme (cfr. Appendice B). Intanto  $\Lambda^1(M)$  e  $\mathfrak{X}(M)$  si identificano in modo naturale mediante l'isomorfismo:

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Lambda^1(M), \quad X \longmapsto X^\flat = g(X, \cdot).$$

Con questa identificazione, possiamo considerare il laplaciano  $\Delta_1$  definito anche sui campi vettoriali, ossia

$$\Delta_1 : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad X \longmapsto \Delta_1 X, \quad \text{dove} \quad g(\Delta_1 X, \cdot) = \Delta_1 X^\flat.$$

Allo stesso modo, anche il rough laplaciano  $\bar{\Delta}$  si può definire sulle 1-forme. Allora gli operatori  $\bar{\Delta}$  e  $\Delta_1$  sono legati dalla formula di Weitzenböck (cfr., ad esempio, [126] p. 56):

$$\Delta_1 = \bar{\Delta} + Q \tag{9.9}$$

dove  $Q$  è l'operatore di Ricci. Un campo vettoriale  $X$  si dice Hodge-armonico se la 1-forma  $g$ -duale  $X^\flat$  è Hodge-armonica, cioè  $\Delta_1 X^\flat = 0$ . Se  $M$  è compatta, il teorema di Hodge-de Rham afferma che  $H_1(M, \mathbb{R})$  è isomorfo allo spazio vettoriale dei campi vettoriali Hodge-armonici.

**Teorema 9.12.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana.*

a) *Se  $V \in \mathcal{K}(M)$ , allora*

$$\text{div} V = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\Delta} V = Q V.$$

b) *Se  $M$  è compatta,  $\text{div} V = 0$  e  $\bar{\Delta} V = Q V$ , allora  $V \in \mathcal{K}(M)$ .*

c) *Se  $V \in \mathcal{K}(M)$ , allora*

$$\text{Ric}(V, V) = \|\nabla V\|^2 + \text{div}(\nabla_V V) = \|\nabla V\|^2 + \frac{1}{2}\Delta\|V\|^2$$

e



$$\|V\| = \text{cost.} \iff V \text{ è geodetico.}$$

In particolare, se  $V \in \mathcal{K}(M)$ , abbiamo

$c_1)$  se  $\|V\| = \text{cost.}$ , si ha

$Ric(V, V) = \|\nabla V\|^2 \geq 0$ , e  $Ric(V, V) = 0$  se e solo se  $V$  è parallelo;

$c_2)$  se  $Ric(V, V) \leq 0$ ,  $\|V\| = \text{cost.} \Rightarrow V$  parallelo;

$c_3)$  se  $Ric(V, V) \leq 0$  ed  $M$  è compatta, allora  $V$  parallelo e  $\|V\| = \text{cost.}$

*Dimostrazione.* a) Fissato  $p \in M$ , consideriamo una base ortonormale locale definita in un intorno  $U$  di  $p$  tale che  $(\nabla E_i)_p = 0$ . Poniamo per semplicità  $e_i = E_i(p)$ . Inoltre fissato  $v \in T_p M$ , possiamo considerare  $X \in \mathfrak{X}(U)$  tale che  $X_p = v$  e  $(\nabla X)_p = 0$ . Siccome  $V$  è di Killing,  $\mathcal{L}_V g = 0$  e quindi

$$\text{div} V = \sum_i g(\nabla_{E_i} V, E_i) = 0.$$

Siccome  $(\nabla_{E_i} E_i)_p = 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} g_p((\bar{\Delta} V)_p, v) &= g(\bar{\Delta} V, X)_p = - \sum_i g(\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} V, X)_p \\ &= - \sum_i g(\nabla_{E_i} \nabla_{E_i} V, X)_p \\ &= - \sum_i \{e_i(g(\nabla_{E_i} V, X)) - g(\nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} X)_p\} \\ &= - \sum_i e_i(g(\nabla_{E_i} V, X)). \end{aligned}$$

Di conseguenza, siccome  $[X, E_i]_p = (\nabla_X E_i)_p - (\nabla_{E_i} X)_p = 0$ , si ha

$$\begin{aligned} Ric(V, X)_p &= \sum_i R(V, E_i, X, E_i)_p = \sum_i g(R(X, E_i)V, E_i)_p \\ &= \sum_i g(-\nabla_X \nabla_{E_i} V + \nabla_{E_i} \nabla_X V + \nabla_{[X, E_i]} V, E_i)_p \\ &= \sum_i g(-\nabla_X \nabla_{E_i} V + \nabla_{E_i} \nabla_X V, E_i)_p \\ &= - \sum_i \{X(g(\nabla_{E_i} V, E_i)) - g(\nabla_{E_i} V, \nabla_X E_i) - E_i(g(\nabla_X V, E_i)) \\ &\quad + g(\nabla_X V, \nabla_{E_i} E_i)\}_p \\ &= - \sum_i \{X(g(\nabla_{E_i} V, E_i)) - E_i(g(\nabla_X V, E_i))\}_p \\ &= -X_p(\text{div}(V)) + \sum_i e_i((\mathcal{L}_V g)(X, E_i) - g(\nabla_{E_i} V, X)) \\ &= -e_i(g(\nabla_{E_i} V, X)) = g(\bar{\Delta} V, X)_p. \end{aligned}$$

Pertanto,  $QV = \bar{\Delta}V$ .

b) Se  $M$  è compatta, la formula (9.8) insieme con  $QV = \bar{\Delta}V$  e il Teorema di Green implicano:  $\int_M Ric(V, V) v_g = \int_M \|\nabla V\|^2 v_g$ . Quest'ultima formula,  $\operatorname{div}V = 0$  e la formula integrale (9.4) implicano che  $V$  è di Killing.

c) Se  $V$  è di Killing, tenendo conto che  $\operatorname{div}V = 0$  e  $\nabla V$  è antisimmetrico, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((\nabla V) \circ (\nabla V)) &= \sum_i g(\nabla V(\nabla_{E_i} V), E_i) \\ &= - \sum_i g(\nabla_{E_i} V, \nabla_{E_i} V) \\ &= -\|\nabla V\|^2. \end{aligned}$$

Per cui dalla (9.5) si ottiene  $Ric(V, V) = \|\nabla V\|^2 + \operatorname{div}(\nabla_V V)$ . Inoltre, per  $V$  di Killing abbiamo visto che  $QV = \bar{\Delta}V$  e quindi applicando la (9.8) si ha  $Ric(V, V) = \|\nabla V\|^2 + \frac{1}{2}\Delta\|V\|^2$ . Inoltre, siccome  $V$  è di Killing, abbiamo

$$g(\nabla_V V, E_i) = -g(\nabla_{E_i} V, V) = -\frac{1}{2}E_i\|V\|^2.$$

Per cui  $\|V\|$  è costante se e solo se  $V$  è geodetico. Infine,  $(c_1), (c_2), (c_3)$  seguono facilmente. In particolare per la  $(c_3)$ , applicando il Teorema B.5 si ottiene che  $V$  è parallelo, e quindi applicando il Teorema B.7 si ottiene che  $V$  ha lunghezza costante.  $\square$

**Proposizione 9.13.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana e sia  $V \in \mathcal{K}(M)$ . Se  $p \in M$  è un punto critico della funzione*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f(p) = \|V_p\|^2,$$

si ha

$$R(V_p, X_p, V_p, X_p) + \frac{1}{2}X^2(g(V, V))(p) = \|\nabla_{X_p} V\|^2.$$

In particolare, se  $\|V\|$  è costante, le curvature sezionali lungo piani che contengono  $V$  sono sempre non negative.

*Dimostrazione.* Sia  $V \in \mathcal{K}(M)$ . Consideriamo la funzione  $f = \|V\|^2$ . Sia  $p \in M$  un punto critico per  $f$ , cioè  $f_{*p} = 0$ . Siccome  $V$  è di Killing, da  $0 = f_{*p}(X_p) = X_p(f) = X_p g(V, V)$  per ogni  $X_p \in T_p M$ , si ottiene

$$g(\nabla_{V_p} V, X_p) = -g(\nabla_{X_p} V, V_p) = 0 \quad \text{e quindi} \quad (\nabla_V V)_p = 0. \quad (9.10)$$

Poniamo  $F(X) = R(V, X, V, X) + \frac{1}{2}X(X(g(V, V)))$ . Allora,

$$\begin{aligned} F(X) &= g(\nabla_{[V, X]} V, X) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) \\ &\quad + g(\nabla_X \nabla_V V, X) + Xg(\nabla_X V, V) \\ &= g(\nabla_{[V, X]} V, X) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) + g(\nabla_X \nabla_V V, X) \\ &\quad + g(\nabla_X \nabla_X V, V) + \|\nabla_X V\|^2. \end{aligned}$$

Derivando rispetto a  $X$  l'equazione di Killing

$$g(\nabla_X V, V) = -g(\nabla_V V, X),$$

si ottiene

$$g(\nabla_X \nabla_X V, V) + \|\nabla_X V\|^2 + g(\nabla_X \nabla_V V, X) = -g(\nabla_V V, \nabla_X X),$$

e quindi

$$\begin{aligned} F(X) &= g(\nabla_{[V, X]} V, X) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) - g(\nabla_V V, \nabla_X X) \\ &= -g(\nabla_X V, [V, X]) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) - g(\nabla_V V, \nabla_X X) \\ &= -g(\nabla_X V, \nabla_V X) + g(\nabla_X V, \nabla_X V) - g(\nabla_V \nabla_X V, X) \\ &\quad - g(\nabla_V V, \nabla_X X). \end{aligned}$$

Derivando  $g(\nabla_X V, X) = (\mathcal{L}_V g)(X, X) = 0$ , si ha

$$g(\nabla_V \nabla_X V, X) = -(\nabla_X V, \nabla_V X),$$

e la precedente formula diventa

$$F(X) = \|\nabla_X V\|^2 - g(\nabla_V V, \nabla_X X).$$

Applicando poi la (9.10) si ottiene  $F(X)(p) = \|\nabla_X V\|^2(p)$ , ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Per campi vettoriali di Killing di lunghezza costante abbiamo la seguente caratterizzazione

**Proposizione 9.14.** *Se  $V \in \mathfrak{X}(M)$  ha  $\|V\| = \text{cost.}$ , allora  $V$  è di Killing se e solo se*

$$\text{div}V = 0, \quad \nabla_V V = 0, \quad g(QV, V) = \|\nabla V\|^2. \quad (9.11)$$

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un campo vettoriale di Killing di lunghezza costante. Allora, come è stato già osservato  $\text{div}V = 0$ , inoltre  $0 = (1/2)X(\|V\|^2) = g(\nabla_X V, V) = -g(\nabla_V V, X)$  e quindi  $\nabla_V V = 0$ . Infine, dal Teorema 9.12 segue che  $\text{Ric}(V, V) = \|\nabla V\|^2$ . Viceversa, se assumiamo la (9.11), dalla (9.3) si ottiene che  $\|\mathcal{L}_V g\| = 0$  e quindi  $V$  è di Killing.  $\square$

**Proposizione 9.15.** *Sia  $V \in \mathfrak{X}(M)$  con  $M$  compatta. Allora,*

*$V$  è di Killing e Hodge-armonico se e solo se  $V$  è parallelo.*

*Dimostrazione.* Se  $\nabla V = 0$ , allora  $V$  di Killing e dalla definizione di  $\bar{\Delta}$  segue che  $\bar{\Delta}V = 0$ . Inoltre, dalla Teorema 9.12 abbiamo  $QV = \bar{\Delta}V = 0$  e quindi  $\Delta_1 V = QV + \bar{\Delta}V = 0$ . Dunque,  $V$  è anche Hodge-armonico. Viceversa, assumiamo che  $V$  sia di Killing e Hodge-armonico. Allora,  $\Delta_1 V = 0$  e quindi  $\bar{\Delta}V = -QV$ . Applicando la (9.4), siccome  $V$  è di Killing, si ha

$$\int_M \|\nabla V\|^2 v_g = \int_M \text{Ric}(V, V) v_g = \int_M g(QV, V) v_g = - \int_M g(\bar{\Delta}V, V) v_g,$$

e quindi applicando la (9.8) si ha  $\int_M \|\nabla V\|^2 v_g = 0$ . Pertanto,  $V$  è parallelo.  $\square$

Ricordiamo che ogni campo vettoriale  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n})$  ha uno zero in quanto la caratteristica di Eulero-Poincaré di  $\mathbb{S}^{2n}$  è 2 ( $\neq 0$ ). Nel caso di varietà riemanniane compatte con curvatura positiva di dimensione pari, ogni campo di Killing ha uno zero. Infatti, abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 9.16.** (di M. Berger, 1965)

a) *Se una varietà riemanniana compatta  $(M, g)$  con tensore di Ricci definito positivo ammette un campo vettoriale di Killing privo di zeri, allora  $M$  ha dimensione dispari.*

b) *Se una varietà riemanniana  $(M, g)$  di Einstein (i.e.,  $Ric = \lambda g$ ,  $\lambda$  costante) con  $\lambda \neq 0$ , ammette un campo vettoriale  $V$  di Killing di lunghezza costante, allora  $\lambda > 0$  ed  $M$  ha dimensione dispari.*

*Dimostrazione.* a) Sia  $V$  di Killing e privo di zeri. Siccome  $M$  è compatta, la funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \|V_p\|^2$  ammette un punto  $p \in M$  di minimo. In particolare, il differenziale  $f_{*p} = 0$  in quanto:

$$f_{*p}(X_p) = f_{*\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = \left( \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right) (0) = 0.$$

Nel corso della dimostrazione della Proposizione 9.13, abbiamo visto che  $\nabla_{V_p} V = 0$  e  $g(\nabla_{X_p} V, V_p) = -g(\nabla_{V_p} V, X_p) = 0$ . Quindi,  $(\nabla V)_p : X_p \mapsto \nabla_{X_p} V$  è un endomorfismo di  $V_p^\perp$ . Questo endomorfismo è iniettivo, e quindi un isomorfismo, cioè  $\nabla_{X_p} V = 0$  implica  $X_p = 0$ . Infatti, essendo  $p$  un punto di minimo si ha  $X_p(X(f)) \geq 0$  e quindi, considerata una base ortonormale locale di campi vettoriali  $(E_1, \dots, E_n)$  definita in un intorno di  $p$ ,  $(E_i)_p(E_i f) \geq 0$ . Allora, applicando la Proposizione 9.13 tenendo anche conto che  $M$  ha curvatura di Ricci positiva e  $V$  è privo di zeri, si può concludere che  $X_p = 0$ . Poiché  $(\nabla V)_p$  è anche antisimmetrico, deve essere  $\dim V_p^\perp$  pari e quindi  $\dim M = (\dim V_p^\perp + 1)$  è dispari.

b) Segue da a) e dalla Proposizione 9.13.  $\square$

**Corollario 9.17.** *Se una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale ha curvatura sezionale costante  $k \neq 0$  e ammette un campo vettoriale unitario di Killing, allora  $k > 0$  ed  $n$  è dispari.*

**Proposizione 9.18.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana con tensore di Ricci definito negativo.*

i) *Se  $V \in \mathcal{K}(M)$  ha lunghezza costante oppure è geodetico, allora  $V = 0$ .*

j) *Se  $M$  è compatta, allora  $\mathcal{K}(M) = \{0\}$ . Inoltre, il gruppo delle isometrie  $\text{Iso}(M, g)$  è finito.*

*Dimostrazione.* Segue dalla c) del Teorema 9.12. In particolare, per la prima parte della j), tenere conto del Teorema di Green:  $\int_M (\text{div} X) v_g = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Siccome  $\mathcal{K}(M) = \{0\}$ , il gruppo delle isometrie  $\text{Iso}(M, g)$  è discreto; d'altronde per un Teorema di Myers-Steenrod il gruppo  $\text{Iso}(M, g)$  è un gruppo di Lie compatto (rispetto alla topologia compatta-aperta), per cui sarà necessariamente finito.  $\square$

## 9.2 Campi vettoriali di Killing su $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^n$

Consideriamo lo spazio Euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ . Sia  $V$  un campo di vettori lineare su  $\mathbb{R}^n$ , cioè pensato come un'applicazione da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  è lineare e quindi rappresentato da una matrice  $A = (a_{ij})$  di ordine  $n$ :

$$V_p = Ap = \left( \sum_j a_{1j}x_j(p), \dots, \sum_j a_{nj}x_j(p) \right), \quad \text{equivalentemente:}$$

$$V_p = \sum_i \left( \sum_j a_{ij}x_j(p) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p. \quad (9.12)$$

Sia  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  del tipo  $X_p = V_p + v$ , con  $V$  campo di vettori del tipo (9.12) e  $v$  un fissato vettore di  $\mathbb{R}^n$ . Allora

$$X_p = \sum_i \left( \sum_j a_{ij}x_j(p) + v^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p,$$

per cui

$$(\nabla_{\partial_k}^0 X)(p) = (\nabla_{\partial_k}^0 V)(p) = \sum_i a_{ik} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

e

$$g_0 \left( \nabla_{\partial_k}^0 X, \frac{\partial}{\partial x_h} \right)(p) = a_{hk},$$

dove  $\nabla^0$  è la connessione euclidea. Di conseguenza,  $X$  è di Killing se e solo se  $a_{hk} + a_{kh} = 0$  per ogni  $h, k$ , ossia se e solo se la matrice  $A$  è antisimmetrica. Proviamo che i campi vettoriali così costruiti sono tutti e soli i campi di Killing su  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $X$  un arbitrario campo di vettori di Killing su  $\mathbb{R}^n$ , e sia

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p),$$

il gruppo globale a 1-parametro generato da  $X$ . Siccome  $X$  è di Killing, le trasformazioni  $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  date da  $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$ , sono isometrie di  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Di conseguenza,  $\Phi_t(p) = A(t)p + v(t)$ , dove  $A(t)$  è una curva del gruppo ortogonale  $O(n)$  e  $v(t)$  è una curva di  $\mathbb{R}^n$  con  $A(0) = I$  e  $v(0) = 0$ . Siccome  $A'(0) = A \in \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  (algebra di Lie delle matrici antisimmetriche di ordine  $n$ ) e  $v'(0) = v \in \mathbb{R}^n$ , otteniamo che  $X_p = \frac{d}{dt} \Phi(t, p)|_{t=0}$  e quindi

$$X_p = A'(0)p + v'(0) = Ap + v$$

con  $A$  matrice antisimmetrica. Pertanto:  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  è lo spazio dei campi vettoriali  $X$  del tipo  $X = V + v$ , dove  $V$  è un campo vettoriale lineare determinato da una matrice antisimmetrica e  $v$  è un fissato vettore di  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre,

$$\dim \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

In particolare, un campo vettoriale di Killing  $X = V + v$  è parallelo (equivalentemente ha lunghezza costante) se e solo se il campo lineare  $V = 0$ .

Determiniamo ora lo spazio  $\mathcal{K}(\mathbb{S}^n)$  dei campi vettoriali di Killing sulla sfera canonica. Sia  $V \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$  lineare, quindi

$$V_p = \sum_{i=1}^{n+1} \left( \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} x_j(p) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Siccome  $V$  è determinato da una matrice antisimmetrica, abbiamo  $g_0(V_p, p) = 0$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^n$  e quindi la restrizione di  $V$  a  $\mathbb{S}^n$  definisce un campo di vettori su  $\mathbb{S}^n$ . Inoltre, siccome  $V$  è di Killing su  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $V$  sarà di Killing anche su  $\mathbb{S}^n$ :

$$g_0(\nabla_X V, Y) = g_0(\nabla_X^0 V, Y) = -g_0(\nabla_Y^0 V, X) = -g_0(\nabla_X V, Y)$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ . Dunque, ogni elemento di  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1})$  definisce un elemento di  $\mathcal{K}(\mathbb{S}^n)$ . D'altronde, vale anche il viceversa in quanto ogni isometria di  $\mathbb{S}^n$  è la restrizione a  $\mathbb{S}^n$  di una trasformazione ortogonale di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pertanto,

$$\mathcal{K}(\mathbb{S}^n) = \{V|_{\mathbb{S}^n} : V \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{n+1}), V \text{ lineare}\}$$

e

$$\dim \mathcal{K}(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Esempio 9.19.** Esaminiamo per  $n = 3$  un esempio specifico di campo vettoriale di Killing. Consideriamo il campo vettoriale lineare

$$V(p) = ax_3(p)(\partial_2)_p - ax_2(p)(\partial_3)_p$$

il quale corrisponde alla matrice antisimmetrica  $A = (a_{ij})$ , dove  $a_{23} = -a_{32} = a$  e  $a_{ij} = 0$  negli altri casi. La curva integrale di  $V$  uscente da  $p$  è la curva

$$\gamma_p(t) = (e^{tA})p, \quad \text{dove} \quad e^{tA} = I + tA + (t^2/2!)A^2 + \dots + (t^k/k!)A^k + \dots$$

Siccome

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^3 \\ 0 & a^3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^5 \\ 0 & -a^5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^6 & 0 \\ 0 & 0 & -a^6 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \text{abbiamo}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

dove

$$\alpha = 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \frac{(at)^6}{6!} + \dots, \quad \beta = at - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \frac{(at)^7}{7!} + \dots$$

Quindi,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(at) & \sin(at) \\ 0 & -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}$$

e il gruppo ad un parametro generato da  $V$  è formato dalle isometrie

$$\Phi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto \Phi_t(p) = \gamma_p(t) = e^{tA}p,$$

che sono rotazioni intorno all'asse  $x_1$ .  $\Phi_t(p)$  è dato dalla seguente terna

$$(x_1(p), x_2(p) \cos(at) + x_3(p) \sin(at), -x_2(p) \sin(at) + x_3(p) \cos(at)).$$

**Esercizio 9.20.** Sia  $X \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , quindi  $X = V + v$ . Data un'isometria  $f = A + a$  di  $\mathbb{R}^n$ , si verifichi che  $X$  è  $f$ -invariante, cioè  $f_{*p}X_p = X_{f(p)}$ , se e solo se  $[A, V] = 0$  e  $Av = V(a) + v$ . Suggerimento: basta osservare che  $f_* = A$ ,  $f_{*p}X_p = A(V_p + v)$  e  $X_{f(p)} = VA(p) + V(a) + v$ .

## Campo vettoriale gradiente su $\mathbb{S}^n$

Consideriamo lo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$ . Dato un punto (vettore)  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $a \neq 0$ , l'applicazione lineare  $\bar{\lambda}_a : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto g_0(x, a)$ , ristretta alla sfera unitaria  $\mathbb{S}^n$  definisce una applicazione differenziabile  $\lambda_a = \bar{\lambda}_a \circ i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  sulla stessa sfera. Denotiamo con  $g = i^*g_0$  la metrica canonica di  $\mathbb{S}^n$ . Il campo vettoriale gradiente  $\nabla\lambda_a$  è dato da

$$\nabla\lambda_a = a - \lambda_a \nu, \quad \text{dove} \quad \nu_p = \vec{p} = \sum_k x_k(p) (\partial_k)_p. \quad (9.13)$$

Infatti, il gradiente  $\nabla\lambda_a$  è definito da  $g(\nabla\lambda_a, X) = (d\lambda_a)(X)$  dove  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ , quindi

$$\begin{aligned} \nabla\lambda_a &= \sum_j g(\nabla\lambda_a, E_j) E_j = \sum_j (d\lambda_a)(E_j) E_j = \sum_j (d\bar{\lambda}_a)(i_* E_j) E_j \\ &= \sum_j g_0(\nabla\bar{\lambda}_a, i_* E_j) E_j, \end{aligned}$$

dove  $E_i (i = 1, \dots, n)$  è una base ortonormale locale di campi vettoriali su  $\mathbb{S}^n$ . Pertanto,  $\nabla\lambda_a$  è la componente di  $\nabla\bar{\lambda}_a$  tangente a  $\mathbb{S}^n$ :  $\nabla\lambda_a = (\nabla\bar{\lambda}_a)^\top$ . Siccome  $\nabla\bar{\lambda}_a = a$ , per ogni  $p \in \mathbb{S}^n$ , si ha

$$(\nabla\lambda_a)_p = a - g_0(a, \nu_p)\nu_p = a - g_0(a, p)\nu_p$$

e quindi la (9.13). Di conseguenza, posto  $V_a := \nabla\lambda_a$ , siccome

$$\nabla_X^0 V_a = \nabla_X^0(a - \lambda_a \nu) = -X(\lambda_a)\nu - \lambda_a \nabla_X^0 \nu = -X(\lambda_a)\nu - \lambda_a X,$$

il derivato del campo gradiente  $V_a$  è dato da

$$\nabla_X V_a = -\lambda_a X \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n). \quad (9.14)$$

Dalla (9.14) segue che i campi gradienti  $V_a$  sono conformi (ma non di Killing) su  $\mathbb{S}^n$ :

$$(\mathcal{L}_{V_a}g)(X, Y) = g(\nabla_X V_a, Y) + g(\nabla_Y V_a, X) = -2\lambda_a g(X, Y).$$

Denotiamo con  $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n)$  lo spazio di tutti i campi conformi su  $\mathbb{S}^n$ . Inoltre, poniamo  $\mathcal{G}_r(\mathbb{S}^n) := \{V_a : a \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ . Siccome  $\dim \mathcal{K}(\mathbb{S}^n) = \frac{n(n+1)}{2}$ , e (cfr. [56] vol.I, p. 310)

$$\dim \mathcal{C}(\mathbb{S}^n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

allora

$$\mathcal{C}(\mathbb{S}^n) = \mathcal{K}(\mathbb{S}^n) \oplus \mathcal{G}_r(\mathbb{S}^n).$$

Si noti che questi campi gradienti  $V_a$  sono importanti anche nella teoria delle applicazioni armoniche, essi sono i responsabili della instabilità, per  $n \geq 3$ , delle applicazioni armoniche non costanti  $f : (\mathbb{S}^n, g = i^*g_0) \rightarrow (M, g')$  (cfr. Capitolo 12).

**Esercizio 9.21.** Si verifichino le seguenti formule:

$$\|V_a\|^2 = \|a\|^2 - \lambda_a^2, \quad \operatorname{div} V_a = -n\lambda_a, \quad \|\nabla V_a\|^2 = n\lambda_a^2, \\ \bar{\Delta} V_a := -\operatorname{tr} \nabla^2 V_a = V_a.$$

### 9.3 La fibrazione di Hopf

Consideriamo la sfera unitaria  $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  e l'azione della circonferenza unitaria  $\mathbb{S}^1$  su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ :  $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$ . Tale azione (nota come azione di Hopf) avviene mediante isometrie, ossia per ogni  $\lambda \in \mathbb{S}^1$ , l'applicazione  $f_\lambda : z \mapsto \lambda z$  è un'isometria di  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Se  $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , l'orbita di  $z$  sotto l'azione di Hopf è  $\{\lambda z : \lambda \in \mathbb{S}^1\}$  che è una circonferenza unitaria di  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \varphi = \mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$  e, siccome l'azione avviene con isometrie che agiscono transitivamente sulle fibre, la metrica canonica di  $\mathbb{S}^{2n+1}$  induce una metrica su  $\mathbb{C}P^n$ , detta metrica di Study-Fubini, rispetto alla quale la proiezione quoziente  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1} / \mathbb{S}^1$  risulta una sommersione riemanniana. Per  $n = 1$ , abbiamo la *fibrazione di Hopf*

$$\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 / \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2(1/2)$$



che adesso esaminiamo in dettaglio, dove  $\mathbb{S}^2(1/2)$  denota la 2-sfera di raggio  $1/2$ . Prima di procedere, si noti che anche per  $n > 1$  la sommersione riemanniana  $\pi$  è nota in letteratura col nome di fibrazione di Hopf, e il campo di vettori unitario  $\xi$  tangente alle fibre della sommersione è detto *campo di vettori di Hopf* (standard). Nella Sezione 9.4 vedremo che  $\xi$  è un *campo vettoriale di Killing*. Torniamo adesso al caso  $n = 1$  e osserviamo che

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{S}^3 \Leftrightarrow z_1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\vartheta_2}, \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 = 1.$$

Quindi, i punti di  $\mathbb{S}^3$  sono del tipo  $z = (\cos(t)e^{i\vartheta_1}, \sin(t)e^{i\vartheta_2})$ . La sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$  si può pensare ottenuta ruotando, intorno all'asse  $x$ , la curva  $\gamma : x = (1/2)\cos(2t), y = (1/2)\sin(2t), z = 0, t \in \mathbb{R}$ , e quindi  $\mathbb{S}^2(1/2)$  ha equazioni parametriche

$$x = (1/2)\cos(2t), \quad y = (1/2)\sin(2t) \cos \vartheta, \quad z = (1/2)\sin(2t) \sin \vartheta.$$

L'applicazione

$$\phi : [\lambda z] = [z] = [(\cos(t)e^{i\vartheta_1}, \sin(t)e^{i\vartheta_2})] \mapsto \left(\frac{1}{2}\cos(2t), \frac{1}{2}\sin(2t)e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}\right)$$

è un diffeomorfismo che identifica la retta proiettiva complessa  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$  e la sfera  $\mathbb{S}^2(1/2)$ . Possiamo quindi rappresentare la fibrazione di Hopf con l'applicazione  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2)$  definita da

$$\pi : (\cos t e^{i\vartheta_1}, \sin t e^{i\vartheta_2}) \mapsto \left(\frac{1}{2}\cos(2t), \frac{1}{2}\sin(2t)e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}\right),$$

la quale risulta chiaramente invariante per l'azione di  $\mathbb{S}^1$ . Si noti che, posto  $(z_1, z_2) = (\cos t e^{i\vartheta_1}, \sin t e^{i\vartheta_2})$ , si ha

$$\pi(z_1, z_2) = (1/2)(|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2) \in \mathbb{S}^2(1/2) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}.$$

Tale applicazione si può anche pensare definita da  $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$  identificando  $\mathbb{S}^2(1/2)$  con  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  piano complesso compattificato. Infatti, mediante la proiezione stereografica dal polo nord, il punto  $(z_1/z_2) = \frac{\cos t}{\sin t} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$  corrisponde sulla sfera al punto di coordinate cartesiane

$$\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2), \frac{1}{2}\sin(2t)\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2), \frac{1}{2}\cos(2t)\right).$$

In termini di quaternioni la fibrazione di Hopf si può esprimere nel modo seguente. Ricordiamo che il corpo dei quaternioni  $\mathbb{H} = \{q = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$  e la sfera  $\mathbb{S}^3(1) = \{q \in \mathbb{H} : \|q\| = 1\}$ . Per ogni  $q \in \mathbb{S}^3(1)$ , l'applicazione  $\varphi_q(z) := \bar{q}zq$  definisce una trasformazione ortogonale di  $\mathbb{H}$  che trasforma  $\mathbb{R}^3 = \{q \in \mathbb{H} : q = a_2i + a_3j + a_4k\}$  in sè. Più precisamente, l'applicazione  $\Phi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow SO(3), q \mapsto \varphi_q$ , è un'applicazione di rivestimento ( $\mathbb{S}^3(1)$  è il rivestimento universale di  $SO(3)$ ). Allora l'applicazione di Hopf è data da  $\pi : \mathbb{S}^3(1) \rightarrow \mathbb{S}^2(1/2), q \mapsto \frac{1}{2}\varphi_q(i)$ , dove

$$\varphi_q(i) = (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2)i + 2(a_2a_3 - a_1a_4)j + 2(a_1a_3 + a_2a_4)k.$$

Infatti, posto  $z_1 = a_1 + ia_2$  e  $z_2 = a_3 + ia_4$ , si ha  $\varphi_q(i) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\bar{z}_2)$ .

Adesso, proviamo che  $\pi$  è una sommersione riemanniana. In coordinate locali,  $\pi : (t, \vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto (t, \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2)$ . Pertanto, il suo differenziale è dato

dalla matrice

$$\pi_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi  $\pi$  è chiaramente di rango 2, ossia è una sommersione. Il *campo di Hopf* è il campo di vettori unitario  $\xi$  tangente alle fibre della sommersione e quindi, siccome è definito dal  $\ker \pi_*$ , è dato da

$$\xi = \partial/\partial\vartheta_1 + \partial/\partial\vartheta_2.$$

Si noti che dato  $w_0 \in \mathbb{S}^2(1/2)$ ,  $w_0 = (\frac{1}{2} \cos(2t_0), \frac{1}{2} \sin(2t_0) e^{i\vartheta_0})$ , la fibra  $\pi^{-1}\{w_0\}$  è la circonferenza

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos t_0 e^{i(\vartheta_0+\vartheta)}, \sin t_0 e^{i\vartheta}) \in \mathbb{S}^3 : \vartheta \in \mathbb{R}\}.$$

Resta da vedere che la sommersione  $\pi$  è riemanniana. Rispetto alle coordinate locali  $(t, \vartheta_1, \vartheta_2)$ ,  $\mathbb{S}^3$  ha equazioni parametriche

$$x = \cos(t)\cos\vartheta_1, \quad y = \cos(t)\sin\vartheta_1, \quad u = \sin(t)\cos\vartheta_2, \quad v = \sin(t)\sin\vartheta_2,$$

che definiscono l'immersione locale in  $\mathbb{R}^4$ , di conseguenza la metrica canonica di  $\mathbb{S}^3$  è data da

$$g = dt \otimes dt + \cos^2(t)d\vartheta_1 \otimes d\vartheta_1 + \sin^2(t)d\vartheta_2 \otimes d\vartheta_2.$$

Rispetto alle coordinate  $(t, \vartheta)$ , la metrica canonica di  $\mathbb{S}^2(1/2)$  è

$$g = dt \otimes dt + \frac{\sin^2(2t)}{4} d\vartheta \otimes d\vartheta.$$

Dall'espressione della metrica  $g$  di  $\mathbb{S}^3$ , segue che i campi vettoriali

$$\xi_1 = \xi = \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} + \frac{\partial}{\partial\vartheta_2}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_3 = \frac{\sin t}{\cos t} \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} - \frac{\cos t}{\sin t} \frac{\partial}{\partial\vartheta_2}$$

costituiscono una base ortonormale. Su  $\mathbb{S}^2(1/2)$  i campi vettoriali

$$\xi'_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi'_3 = \frac{2}{\sin(2t)} \frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

costituiscono una base ortonormale. Siccome  $\pi_*(\xi_1) = 0$ ,  $\pi_*(\xi_2) = \xi'_2$  e  $\pi_*(\xi_3) = \xi'_3$ , possiamo concludere che la sommersione è riemanniana. Per esprimere il campo di Hopf in termini di coordinate cartesiane  $(x, y, u, v)$  di  $\mathbb{R}^4$ , consideriamo l'inclusione  $i : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  che in coordinate locali è data da:

$$(t, \vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto (\cos(t)\cos\vartheta_1, \cos(t)\sin\vartheta_1, \sin(t)\cos\vartheta_2, \sin(t)\sin\vartheta_2).$$

Siccome

$$i_* \left( \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} \right) = -(\cos(t)\sin\vartheta_1) \frac{\partial}{\partial x} + (\cos(t)\cos\vartheta_1) \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

e

$$i_* \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \right) = -(\sin(t)\sin\vartheta_2) \frac{\partial}{\partial u} + (\sin(t)\cos\vartheta_2) \frac{\partial}{\partial v} = -v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v},$$

si ottiene

$$\xi_1 = \xi = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v} \quad (9.15)$$

(cfr. anche Sezione 9.4). La (9.15) permette di presentare il campo di Hopf usando la struttura complessa standard

$$J_0 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, u, v) \mapsto J_0(x, y, u, v) = (-y, x, -v, u).$$

Il differenziale di  $J_0$ , che denotiamo con lo stesso simbolo, è rappresentato dalla matrice

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi la struttura quasi complessa  $J_0 : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$  definita da

$$J_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}, \quad J_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}, \quad J_0\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}, \quad J_0\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = -\frac{\partial}{\partial u}.$$

Naturalmente  $J_0$  soddisfa  $J_0^2 = -I$ . Inoltre,  $J_0$  è compatibile con la metrica euclidea:  $g_0(J_0X, J_0Y) = g_0(X, Y)$ . Il campo vettoriale unitario  $\nu$  ortogonale alla sfera  $\mathbb{S}^3$  è definito da

$$\nu(p) = x(p)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + y(p)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + u(p)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p + v(p)\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p.$$

Pertanto, dalla (9.15) segue che il campo di Hopf standard  $\xi$ , che adesso denotiamo con  $\xi_0$  per la corrispondenza con la struttura complessa standard  $J_0$ , è dato da  $J_0(\nu)$ .

## 9.4 Le metriche di Berger sulla sfera $\mathbb{S}^3$

In questa sezione vedremo che la sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  ammette delle interessanti metriche, note in letteratura col nome di metriche di Berger, di curvatura sezionale non costante e ottenute deformando la metrica canonica nella direzione del campo di Hopf. Tali metriche risultano omotetiche a metriche sasakiane.

Consideriamo la sfera  $\mathbb{S}^3$  rappresentata dal gruppo unitario speciale 3-dimensionale

$$SU(2) = \{A \in \mathbb{C}^{2,2} : \bar{A}^T \cdot A = I, \det A = 1\}.$$

Quindi, le matrici di  $SU(2)$  sono del tipo

$$A = \begin{pmatrix} x + iy & -u + iv \\ u + iv & x - iy \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1.$$

Se  $\gamma(t)$  è una curva di  $SU(2)$  con  $\gamma(0) = I$ , la matrice  $X = \dot{\gamma}(0)$ , che è un vettore tangente nell'identità a  $SU(2)$ , soddisfa  $X^T + \bar{X} = 0$  e  $\text{tr}X = 0$ . Pertanto, l'algebra di Lie di  $SU(2)$  è  $\mathfrak{su}(2) \equiv T_I SU(2) = \{X \in \mathbb{C}^{2,2} : X^T + \bar{X} = 0, \text{tr}X = 0\}$  la quale è generata dalle matrici

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Applicando il differenziale delle traslazioni sinistre  $L_A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} x + iy & -u + iv \\ u + iv & x - iy \end{pmatrix},$$

alle matrici  $X_i (i = 1, 2, 3)$ , si ottengono i campi di vettori invarianti a sinistra  $\xi_i = (L_A)_* X_i (i = 1, 2, 3)$  (cfr. (3.1)). Identificando la matrice  $A$  con il punto  $(x, y, u, v)$  di  $\mathbb{R}^4$ , con semplici calcoli si trova che

$$\begin{cases} \xi_1 = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}, \\ \xi_2 = u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v}, \\ \xi_3 = -v \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial u} + x \frac{\partial}{\partial v}. \end{cases} \quad (9.16)$$

Si noti che  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$  anche se espressi in termini di coordinate di  $\mathbb{R}^4$ . Inoltre, sono ortonormali rispetto alla metrica canonica di  $\mathbb{S}^3$ . D'altronde, se consideriamo la metrica riemanniana  $g$  su  $SU(2)$  ottenuta imponendo che  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  siano ortonormali,  $g$  è una metrica invariante a sinistra su  $SU(2)$  (cfr. Sezione 5.3) e chiaramente l'applicazione

$$z = (\cos(t)e^{i\vartheta_1}, \sin(t)e^{i\vartheta_2}) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t)e^{i\vartheta_1} & -\sin(t)e^{-i\vartheta_2} \\ \sin(t)e^{i\vartheta_2} & \cos(t)e^{-i\vartheta_1} \end{pmatrix}$$

definisce una isometria tra la sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  e  $(SU(2), g)$ . Inoltre,  $\xi_1$  corrisponde al campo di Hopf su  $\mathbb{S}^3$ . Infatti, in termini di coordinate locali  $(t, \vartheta_1, \vartheta_2)$  su  $\mathbb{S}^3$ , il campo di Hopf è dato da  $\xi = \partial/\partial\vartheta_1 + \partial/\partial\vartheta_2$  (cfr. Sezione 9.3) e quindi  $i_*\xi = \xi_1$  dove  $i : \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$i : (t, \vartheta_1, \vartheta_2) \mapsto (\cos(t)\cos\vartheta_1, \cos(t)\sin\vartheta_1, \sin(t)\cos\vartheta_2, \sin(t)\sin\vartheta_2).$$

Adesso, per  $\varepsilon > 0$ , sia  $g_\varepsilon$  la metrica su  $\mathbb{S}^3$  ottenuta deformando la metrica canonica  $g$  nella direzione del campo di Hopf, più precisamente  $g_\varepsilon$  si ottiene imponendo che  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  siano ortogonali,  $\xi_2, \xi_3$  unitari e  $\xi_1$  di lunghezza  $\sqrt{\varepsilon}$  :

$$g_\varepsilon = g + (\varepsilon - 1)\eta \otimes \eta = g|_D + \varepsilon\eta \otimes \eta, \quad \varepsilon > 0, \quad (9.17)$$

dove  $\eta = g(\xi_1, \cdot)$  è la 1-forma duale al campo di Hopf e  $D = \ker \eta$ . Chiaramente  $g_\varepsilon$  è una metrica invariante a sinistra su  $\mathbb{S}^3$ . Le metriche  $g_\varepsilon$  definiscono una famiglia a un parametro di metriche riemanniane sulla sfera  $\mathbb{S}^3$  note in letteratura con il nome di *metriche di Berger*.

**Teorema 9.22.** *Valgono le seguenti proprietà.*

*i) Il campo di Hopf  $\xi_1$  è di Killing rispetto alle metriche di Berger  $g_\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .  $\xi_2, \xi_3$  sono di Killing rispetto alla metrica canonica.*

*j) Le curvature sezionali di  $(\mathbb{S}^3, g_\varepsilon)$  assumono valori appartenenti all'intervallo  $[\varepsilon, (4 - 3\varepsilon)]$  se  $\varepsilon \leq 1$ , mentre assumono valori nell'intervallo con estremi invertiti se  $\varepsilon \geq 1$ . In particolare, per  $\varepsilon \rightarrow 0$  la curvatura lungo la sezione ortogonale alla fibra di Hopf tende a 4 che è la curvatura sezionale della base  $\mathbb{S}^2(1/2)$  della fibrazione di Hopf.*

*Dimostrazione.* Usando la (9.16), semplici calcoli mostrano che i campi vettoriali  $\xi_i$  soddisfano:

$$[\xi_1, \xi_2] = 2\xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = 2\xi_2. \quad (9.18)$$

Di conseguenza, applicando la formula di Koszul, ossia la formula (6.8), si ottengono le seguenti formule che determinano completamente la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  della metrica di Berger  $g_\varepsilon$ :

$$\begin{cases} \nabla_{\xi_1} \xi_2 = (2 - \varepsilon)\xi_3, & \nabla_{\xi_2} \xi_3 = \xi_1, & \nabla_{\xi_3} \xi_1 = \varepsilon \xi_2, \\ \nabla_{\xi_i} \xi_i = 0, & \nabla_{\xi_2} \xi_1 = \nabla_{\xi_1} \xi_2 - [\xi_1, \xi_2] = -\varepsilon \xi_3, \\ \nabla_{\xi_3} \xi_2 = -\xi_1, & \nabla_{\xi_1} \xi_3 = (\varepsilon - 2)\xi_2. \end{cases} \quad (9.19)$$

Il campo di Hopf  $\xi_1$  è di Killing rispetto a  $g_\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ . Infatti, dalla (9.19), si ottiene

$$(\mathcal{L}_{\xi_1} g_\varepsilon)(\xi_i, \xi_j) = g_\varepsilon(\nabla_{\xi_1} \xi_i, \xi_j) + g_\varepsilon(\nabla_{\xi_j} \xi_i, \xi_1) = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

Analogamente si vede che, per  $\varepsilon = 1$ , anche  $\xi_2, \xi_3$  sono di Killing. Calcoliamo ora la curvatura delle metriche di Berger. Denotiamo con  $R$  il tensore di curvatura di  $(\mathbb{S}^3, g_\varepsilon)$ . Usando la (9.19), si ottiene

$$R(\xi_1, \xi_2)\xi_3 = -\nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \xi_3 + \nabla_{\xi_2} \nabla_{\xi_1} \xi_3 + \nabla_{[\xi_1, \xi_2]} \xi_3 = 0,$$

e analogamente si trova che  $R(\xi_i, \xi_j)\xi_k = 0$  quando i tre indici sono distinti. Poi,

$$\begin{aligned} R(\xi_1, \xi_2)\xi_2 &= -\nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{[\xi_1, \xi_2]} \xi_2 \\ &= -0 + (2 - \varepsilon)\nabla_{\xi_2} \xi_3 + 2\nabla_{\xi_3} \xi_2 \\ &= -\varepsilon \xi_1, \\ R(\xi_1, \xi_3)\xi_3 &= -\nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_3} \xi_3 + \nabla_{\xi_3} \nabla_{\xi_1} \xi_3 + \nabla_{[\xi_1, \xi_3]} \xi_3 = \dots \\ &= -\varepsilon \xi_1, \\ R(\xi_1, \xi_2)\xi_1 &= -\nabla_{\xi_1} \nabla_{\xi_2} \xi_1 + \nabla_{\xi_2} \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{[\xi_1, \xi_2]} \xi_1 = \varepsilon \nabla_{\xi_1} \xi_3 + 2\nabla_{\xi_3} \xi_1 \\ &= \varepsilon^2 \xi_2, \\ R(\xi_1, \xi_3)\xi_1 &= \varepsilon^2 \xi_3. \end{aligned}$$

Più in generale,

$$R(\xi_1, Z)Z = -\varepsilon \xi_1 \quad e \quad R(\xi_1, Z)\xi_1 = \varepsilon^2 Z \quad (9.20)$$

per ogni  $Z = a \xi_2 + b \xi_3$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ , da cui segue che le curvatures sezionali verticali sono date da

$$K(\xi_1, Z) = -\frac{1}{\varepsilon} g_\varepsilon(R(\xi_1, Z)Z, \xi_1) = \varepsilon, \quad (9.21)$$

per ogni  $Z = a \xi_2 + b \xi_3$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ . Inoltre,

$$\begin{aligned} R(\xi_2, \xi_3)\xi_3 &= -\nabla_{\xi_2} \nabla_{\xi_3} \xi_3 + \nabla_{\xi_3} \nabla_{\xi_2} \xi_3 + \nabla_{[\xi_2, \xi_3]} \xi_3 \\ &= -0 + \nabla_{\xi_3} \xi_1 + 2\nabla_{\xi_1} \xi_3 \\ &= \varepsilon \xi_2 + 2(\varepsilon - 2)\xi_2 = (3\varepsilon - 4)\xi_2, \\ R(\xi_3, \xi_2)\xi_2 &= \dots = (3\varepsilon - 4)\xi_3, \end{aligned}$$

e di conseguenza la curvatura sezionale orizzontale

$$K(Z, W) = K(\xi_2, \xi_3) = -g_\varepsilon(R(\xi_2, \xi_3)\xi_3, \xi_2) = (4 - 3\varepsilon) \quad (9.22)$$

per ogni  $Z, W \in \xi_1^\perp$ . Posto  $\xi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \xi_1$ , consideriamo una arbitraria base ortonormale  $X, Y$ , quindi del tipo

$$X = a_1 \xi + b_1 Z, \quad Y = a_2 \xi + b_2 W,$$

dove  $Z$  e  $W$  sono vettori unitari orizzontali, quindi ortogonali a  $\xi$ , e

$$a_1^2 + b_1^2 = 1, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 g_\varepsilon(Z, W) = 0. \quad (9.23)$$

Dalla (9.23), si ottiene

$$(1 - b_1^2)(1 - b_2^2) = a_1^2 a_2^2 = b_1^2 b_2^2 g_\varepsilon(Z, W)^2,$$

da cui

$$(1 - b_1^2 - b_2^2) = b_1^2 b_2^2 (g_\varepsilon(Z, W)^2 - 1) \leq 0 \quad (9.24)$$

e quindi anche

$$a_1^2 + a_2^2 - 1 = 1 - b_1^2 - b_2^2 \leq 0. \quad (9.25)$$

La curvatura sezionale  $K(X, Y)$ , usando le formule (9.20), (9.21) e (9.22), è data da

$$\begin{aligned} K(X, Y) &= h(R(X, Y)X, Y) = R(X, Y, X, Y) \\ &= R(a_1 \xi + b_1 Z, a_2 \xi + b_2 W, a_1 \xi + b_1 Z, a_2 \xi + b_2 W) \\ &= a_1^2 b_2^2 K(\xi, W) - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \varepsilon g_\varepsilon(Z, W) + b_1^2 a_2^2 K(\xi, Z) \\ &\quad + b_1^2 b_2^2 K(Z, W)(1 - g_\varepsilon(Z, W)^2) \\ &= a_1^2 b_2^2 \varepsilon - 2a_1 a_2 b_1 b_2 \varepsilon g_\varepsilon(Z, W) + b_1^2 a_2^2 \varepsilon \\ &\quad + b_1^2 b_2^2 (4 - 3\varepsilon)(1 - g_\varepsilon(Z, W)^2). \end{aligned}$$

Infine, applicando le formule (9.23), (9.24), (9.25), si ha

$$K(X, Y) = (a_1^2 + a_2^2) \varepsilon + (4 - 3\varepsilon)(1 - a_1^2 - a_2^2)$$

e quindi la formula che esprime la curvatura sezionale per una metrica di Berger è la seguente

$$K(X, Y) = 4(\varepsilon - 1)(a_1^2 + a_2^2) + (4 - 3\varepsilon). \quad (9.26)$$

Dalla (9.26) segue che tutte le curvatures sezionali assumono valori nell'intervallo  $[\varepsilon, (4 - 3\varepsilon)]$  se  $\varepsilon \leq 1$ , mentre assumono valori nell'intervallo con estremi invertiti se  $\varepsilon \geq 1$ . Notiamo che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  la curvatura lungo la sezione ortogonale alla fibra di Hopf tende a 4 che è la curvatura sezionale della base  $\mathbb{S}^2(1/2)$  della fibrazione di Hopf.  $\square$

**Osservazione 9.23.** Rispetto alla base  $(\xi = (1/\sqrt{\varepsilon})\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , la quale è  $g_\varepsilon$ -ortonormale, il tensore di Ricci è diagonalizzato e le curvatures di Ricci sono

$$Ric_{11} = 2\varepsilon, \quad Ric_{22} = Ric_{33} = 2(2 - \varepsilon).$$

### Strutture sasakiane su $\mathbb{S}^3$

Sia  $(\eta_1 = \eta, \eta_2, \eta_3)$  la base di 1-forme duali dei vettori della base ortonormale  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ , dove la sfera unitaria  $\mathbb{S}^3$  è munita della metrica canonica  $g$ . Usando la (9.18), e la definizione di  $d\eta$  col coefficiente  $(1/2)$ , si trova che

$$(d\eta)(\xi_2, \xi_3) = -(d\eta)(\xi_3, \xi_2) = -1 \quad \text{e} \quad (d\eta)(\xi_1, \xi_2) = (d\eta)(\xi_1, \xi_3) = 0.$$

Quindi,

$$\eta \wedge d\eta \quad \text{è una forma di volume su } \mathbb{S}^3, \quad \eta(\xi_1) = 1 \quad \text{e} \quad (d\eta)(\xi_1, \cdot) = 0 \quad (9.27)$$

Definiamo un tensore  $\phi$  di tipo  $(1, 1)$  ponendo

$$\phi(\xi_1) = 0, \quad \phi(\xi_2) = \xi_3, \quad \phi(\xi_3) = -\xi_2,$$

allora

$$d\eta = g(\cdot, \phi) \quad \text{e} \quad \phi^2 = -I + \eta \otimes \xi_1. \quad (9.28)$$

Dalla *i*) del Teorema 9.22 abbiamo che  $\xi_1$  è di Killing, per cui le proprietà (9.27) e (9.28) ci dicono che i tensori  $(\eta, \xi_1, \phi, g)$  definiscono una *struttura sasakiana* su  $\mathbb{S}^3$ , dove  $\xi_1$  svolge il ruolo del campo di Reeb (cfr. Sezione 4.6). Se consideriamo la struttura deformata  $(\eta_t, \bar{g}_t, \phi_t, \xi_{1_t})$  definita, per  $t > 0$ , da:

$$\eta_t = t \eta, \quad \bar{g}_t = tg + (t^2 - t)\eta \otimes \eta, \quad \phi_t = \phi, \quad \xi_{1_t} = (1/t)\xi_1, \quad (9.29)$$

questa definisce ancora una struttura sasakiana su  $\mathbb{S}^3$ . Questo tipo di deformazione è nota col nome di “*deformazione  $\mathcal{D}$ -omotetica*” (cfr. Sezione 4.6), dove  $\mathcal{D} = \ker \eta$ . Osserviamo che la metrica sasakiana  $\bar{g}_t$  non è una metrica di Berger, tuttavia  $\bar{g}_t$  è omotetica alla metrica di Berger  $g_\varepsilon$  con  $\varepsilon = t$ . Infatti, confrontando la (9.17) con la (9.29) si ha

$$g_t = g + (t - 1)\eta \otimes \eta = (1/t)\bar{g}_t.$$

## 9.5 Campi vettoriali di Hopf

La presentazione del campo di Hopf standard su  $\mathbb{S}^3$ , che denotiamo con  $\xi_0$ , si estende in modo naturale per presentare il campo di Hopf standard su  $\mathbb{S}^{2n+1}$  per ogni  $n \geq 1$ . Sullo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^{2n+2}, g_0)$ , la struttura complessa standard  $J_0 : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  è definita da

$$J_0(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) = (-y_1, x_1, \dots, -y_{n+1}, x_{n+1}),$$

per ogni  $(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ .  $J_0$  si può pensare anche come un tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $\mathbb{R}^{2n+2}$ ,

$$J_0 : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2}),$$

$$J_0\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J_0\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

il quale soddisfa  $J_0^2 = -I$  e  $g_0(J_0X, J_0Y) = g_0(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2})$ . Sia  $\nu$  il campo vettoriale unitario ortogonale alla sfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , cioè

$$\nu(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ x_j(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p + y_j(p) \left( \frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \right\} \in T_p(\mathbb{R}^{2n+2})$$

per ogni  $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$ . Anche in questo caso

$$\xi_0 = J_0\nu$$

è il campo di vettori di Hopf standard su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , cioè tangente alle fibre della fibrazione di Hopf  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Nel seguito con  $g_0$  denotiamo anche la metrica indotta su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$  denotiamo con  $-\varphi X$  la componente tangente di  $J_0X$ , dunque

$$J_0X = -\varphi X + g_0(J_0X, \nu)\nu = -\varphi X - g_0(X, \xi_0)\nu. \quad (9.30)$$

Dalla (9.30) segue che  $\varphi$  è un endomorfismo di  $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$  che soddisfa

$$\varphi(\xi_0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi X = -JX \quad \text{per ogni } X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}) \cap \xi_0^\perp.$$

Inoltre,

$$g_0(\varphi X, Y) = -g_0(J_0X, Y) = g_0(X, J_0Y) = -g_0(X, \varphi Y)$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ , quindi  $\varphi$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$  antisimmetrico.

**Proposizione 9.24.** *Il campo di Hopf standard  $\xi_0 \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$  è un campo vettoriale unitario di Killing.*



*Dimostrazione.* La formula di Gauss per l'inclusione  $\mathbb{S}^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$  è data da:

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y + g_0(\nabla_X^0 Y, \nu)\nu, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}),$$

dove  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita di  $(\mathbb{S}^{2n+1}, g)$ . Siccome

$$\nabla_X^0 \nu = X, \tag{9.31}$$

la formula di Gauss diventa

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y - g_0(X, Y)\nu, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}).$$

In particolare (per  $Y = \xi_0$ )

$$\nabla_X^0 \xi_0 = \nabla_X \xi_0 - g_0(X, \xi_0)\nu. \tag{9.32}$$

Le identità (9.30)-(9.31) e  $(\nabla_X^0 J_0)\nu = 0$  implicano

$$\nabla_X^0 \xi_0 = \nabla_X^0 J_0 \nu = J_0 \nabla_X^0 \nu = J_0 X = -\varphi X - g_0(X, \xi_0)\nu,$$

e quindi, usando la (9.32),

$$\nabla_X \xi_0 = -\varphi X, \quad X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1}). \tag{9.33}$$

Come osservato prima  $\varphi$  è antisimmetrico, pertanto  $\xi_0$  è di Killing.  $\square$

**Osservazione 9.25.** Dall'Esempio 4.37 segue che il campo di Hopf standard  $\xi_0$ , la metrica  $g$  (restrizione di  $g_0$  a  $\mathbb{S}^{2n+1}$ ), la 1-forma  $\eta_0 = g(\xi_0, \cdot)$  e il tensore  $\varphi$  (indotto da  $J_0$ ) definiscono una struttura riemanniana di quasi contatto su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . D'altronde, dalla Proposizione 9.24 e dalla sua dimostrazione segue che  $\xi_0$  è di Killing e vale la (9.33). Di conseguenza,

$$\begin{aligned} 2(d\eta_0)(X, Y) &= X\eta_0(Y) - Y\eta_0(X) - \eta_0([X, Y]) \\ &= Xg(\xi, Y) - Yg(\xi, X) - g(\xi, \nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) = g(-\varphi X, Y) + g(\varphi Y, X), \end{aligned}$$

e quindi

$$(d\eta_0)(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

Pertanto,  $(\eta_0, \xi_0, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di contatto. Inoltre,  $g$  è la metrica canonica di  $\mathbb{S}^{2n+1}$  che ha curvatura sezionale costante  $+1$  e quindi il tensore di curvatura  $R$  soddisfa

$$R(X, Y)\xi = g(X, \xi)Y - g(\xi, Y)X = \eta_0(X)Y - \eta_0(Y)X.$$

Di conseguenza, dalla Proposizione 4.36 segue che la struttura  $(\eta_0, \xi_0, \varphi, g)$  è sasakiana, la *struttura sasakiana standard* di  $\mathbb{S}^{2n+1}$ .

**Definizione 9.26.** Una *struttura complessa ortogonale* su  $\mathbb{R}^{2n+2}$  è una matrice ortogonale  $J \in O(2n+2)$  tale che  $J^2 = -I$ .

Si noti che se  $A$  è una matrice quadrata di ordine pari, due delle seguenti tre proprietà implica la terza:

$$1) A^t A = I, \quad 2) A^t = -A, \quad 3) A^2 = -I.$$

Una struttura complessa ortogonale  $J$  su  $\mathbb{R}^{2n+2}$  determina un tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $\mathbb{R}^{2n+2}$ , che denotiamo con lo stesso simbolo  $J$ , tale che  $J^2 = -I$  e  $g_0(JX, JY) = g_0(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2})$ . Se  $J = (J_i^j)$ , il corrispondente tensore è definito da

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_{j=1}^{2n+2} J_i^j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p,$$

dove  $(x_1, \dots, x_{2n+2})$  sono le coordinate cartesiane su  $\mathbb{R}^{2n+2}$ .

**Definizione 9.27.** Un campo di vettori  $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$  è detto *campo di Hopf* su  $\mathbb{S}^{2n+1}$  se  $\xi = J\nu$  per qualche struttura complessa ortogonale  $J$  su  $\mathbb{R}^{2n+2}$ .

**Teorema 9.28.** (Wiegmann, [118]) *I campi di Hopf su  $\mathbb{S}^{2n+1}$  sono tutti e soli i campi unitari di Killing su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\xi$  un campo vettoriale unitario di Killing su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Mostriamo che  $\xi$  è un campo di Hopf. Sia

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p),$$

il gruppo globale a 1-parametro generato da  $\xi$ . Siccome  $\xi$  è di Killing, le trasformazioni  $\Phi_t : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$  date da  $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , sono isometrie di  $(\mathbb{S}^{2n+1}, g_0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Di conseguenza, se  $\{e_j : 1 \leq j \leq 2n+2\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^{2n+2}$  e  $\Phi_t(e_j) = a_j^i(t)e_i$ , allora  $(a_j^i(t)) \in O(2n+2)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Possiamo quindi considerare la curva

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow O(2n+2), \quad \gamma(t) = (a_j^i(t))_{1 \leq i, j \leq 2n+2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Siccome  $\Phi_0 = I_{\mathbb{S}^{2n+1}}$ , la curva  $\gamma(t)$  soddisfa

$$\gamma(0) = (\delta_j^i) = I_{2n+2}, \quad \dot{\gamma}(0) \in T_{I_{2n+2}}O(2n+2) = \mathfrak{so}(2n+2, \mathbb{R}),$$

dove  $\mathfrak{so}(2n+2, \mathbb{R})$  (spazio delle matrici antisimmetriche di ordine  $(2n+2)$ ) è l'algebra di Lie di  $O(2n+2)$  (cfr. Sezione 3.4). Definiamo

$$J : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}, \quad p \mapsto J(p) = Ap, \quad \text{ossia} \quad J \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2n+2} A_i^j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

dove  $A = (A_i^j)$  è la matrice antisimmetrica definita da

$$A_i^j = \frac{da_i^j}{dt}(0), \quad 1 \leq i, j \leq 2n+2.$$

Inoltre, per ogni  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$

$$\xi_p = \frac{d}{dt} \Phi(t, p)|_{t=0} = \dot{\gamma}(0) p = J(p) = \sum_{ij} x_j(p) A_j^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = J\nu_p.$$

Infine,  $J$  è una trasformazione ortogonale in quanto

$$g_0(J(p), J(p)) = g_0(J\nu_p, J\nu_p) = g_0(\xi_p, \xi_p) = 1 = g_0(p, p)$$

per ogni  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , e quindi  $g_0(J(p), J(p)) = g_0(p, p)$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$ . Viceversa, sia  $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$  un campo vettoriale di Hopf su  $\mathbb{S}^{2n+1}$  e sia  $J$  la struttura complessa ortogonale su  $\mathbb{R}^{2n+2}$  tale che  $J\nu = \xi$ . Siccome  $J$  è una isometria di  $(\mathbb{R}^{2n+2}, g_0)$ , abbiamo

$$g_0(\xi, \xi) = g_0(J\nu, J\nu) = g_0(\nu, \nu) = 1$$

cioè  $\xi$  è unitario. Poniamo

$$J \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i J_j^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (J_j^i) \in O(2n+2) \cap \mathfrak{so}(2n+2, \mathbb{R}).$$

Allora, per ogni  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$

$$\xi_p = J\nu_p = \sum_{ij} x_j(p) J_j^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_i \xi^i(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p,$$

dove  $\xi^i(p) = \sum_j x_j(p) J_j^i$ ,  $1 \leq i \leq 2n+2$ . Di conseguenza, per ogni  $X$  elemento di  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n+2})$ , risulta

$$X(\xi^i) = \sum_j X^j J_j^i + \sum_i x_j X(J_j^i) = \sum_i X^j J_j^i \quad \text{e} \quad \nabla_X^0 \xi = X(\xi^i) \frac{\partial}{\partial x_i} = JX.$$

Pertanto, per ogni  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$

$$(\nabla_X^0 J)\nu = \nabla_X^0 J\nu - J\nabla_X^0 \nu = \nabla_X^0 \xi - JX = 0. \quad (9.34)$$

A questo punto si prova che  $\xi$  è di Killing come nella dimostrazione della Proposizione 9.24.  $\square$

**Osservazione 9.29.** Osserviamo quanto segue.

i) Sia  $\xi = J\nu$  un campo di Hopf su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n+1})$ , usando la (9.34) e la formula di Gauss, si ha

$$\begin{aligned} JX &= \nabla_X^0 \xi = \nabla_X \xi + g_0(\nabla_X^0 \xi, \nu)\nu = \nabla_X \xi + g_0(JX, \nu)\nu \\ &= \nabla_X \xi - g_0(X, \xi)\nu, \end{aligned}$$

quindi

$$\nabla_X \xi = JX, \quad X \in \xi^\perp.$$

ii) Per una sfera  $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$  di raggio  $r$ , la nozione di campo di Hopf standard  $\xi_0$  e quella di un arbitrario campo di Hopf  $\xi$  possono essere definite come per la sfera unitaria. Nel caso di  $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$  si considera  $\nu_p = (1/r)\vec{p}$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}(r)$ . Inoltre, il risultato di Wiegman vale anche su  $\mathbb{S}^{2n+1}(r)$  (la dimostrazione si ottiene adattando quella del Teorema 9.28).

## 9.6 Campi vettoriali di volume minimo

In questa sezione faremo uso di notazioni e risultati delle Appendici A, B e C. Consideriamo una varietà riemanniana  $(M', g')$  e una varietà differenziabile compatta  $M$  immersa in  $M'$  con immersione  $f : M \rightarrow M'$ . Allora,  $(M, \bar{g} = f^*g')$  è una sottovarietà riemanniana di  $(M', g')$ . Per definizione

$$\text{vol}(f) := \text{vol}(M, \bar{g}).$$

Se  $g$  è una fissata metrica riemanniana su  $M$ , il tensore  $L_f$  di tipo  $(1, 1)$  che corrisponde, rispetto a  $g$ , al tensore  $\bar{g}$  di tipo  $(0, 2)$ , è determinato da

$$g(L_f X, Y) = \bar{g}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Fissato un sistema di coordinate locali  $(x_i)$ , poniamo  $G = (g_{ij})$ ,  $\bar{G} = (\bar{g}_{ij})$  e  $C = (c_{ij})$ , dove la matrice  $C$  è definita da  $L_f \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$ , e quindi  $\det C = \det L_f$ . Siccome  $\bar{G} = CG$ , abbiamo:

$$v_{\bar{g}} = \sqrt{\det \bar{G}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \sqrt{\det L_f} v_g,$$

e quindi

$$\text{vol}(f) = \int_M v_{\bar{g}} = \int_M \sqrt{\det L_f} v_g.$$

Ora, sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta  $n$ -dimensionale, e sia  $(T_1 M, G_s)$  il relativo fibrato sferico unitario tangente, munito della metrica di Sasaki. Denotiamo con  $\mathfrak{X}^1(M)$  l'insieme dei campi vettoriali unitari. Assumiamo  $\mathfrak{X}^1(M)$  non vuoto, equivalentemente la caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi(M)$  di  $M$  è nulla (cfr. Teorema 2.18). Una varietà riemanniana

compatta orientabile di dimensione dispari, per la dualità di Poincarè, ha caratteristica di Eulero-Poincarè  $\chi(M) = 0$ .

Definiamo il volume di un campo di vettori. Più precisamente, vogliamo definire il funzionale volume:

$$\text{vol} : \mathfrak{X}^1(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad U \mapsto \text{vol}(U).$$

Un campo di vettori  $U \in \mathfrak{X}^1(M)$  determina un'immersione

$$U : M \rightarrow T_1M, \quad p \mapsto z = (p, U_p).$$

Possiamo quindi definire il volume di  $U$  ponendo

$$\text{vol}(U) = \text{vol}(M, U^*G_s) = \int_M \sqrt{\det L_U} v_g. \quad (9.35)$$

Dalla definizione di metrica di Sasaki (cfr. Appendice C), si ha:

$$L_U = I + (\nabla U)^T \circ \nabla U, \quad (9.36)$$

dove  $(\nabla U)^T$  denota l'operatore trasposto di  $\nabla U$ . Infatti, il differenziale  $U_* : T_pM \rightarrow T_zT_1M$ ,  $z = (p, U_p)$ , soddisfa

$$U_*(X_p) = (X_p)_z^H + (\nabla_{X_p} U)_z^V \quad \forall X_p \in T_pM.$$

Pertanto, per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $p \in M$ :

$$\begin{aligned} g(L_U X, Y)(p) &= (U^*G_s)(X, Y)(p) = G_s(U_*X_p, U_*Y_p) \\ &= G_s((X_p)_z^H + (\nabla_{X_p} U)_z^V, (Y_p)_z^H + (\nabla_{Y_p} U)_z^V) \\ &= g(X_p, Y_p) + g(\nabla_{X_p} U, \nabla_{Y_p} U) \\ &= g(X, Y)(p) + g((\nabla U)^T \circ \nabla U)X, Y)(p) \\ &= g((I + (\nabla U)^T \circ \nabla U)X, Y)(p). \end{aligned}$$

In particolare,  $U$  definisce un'immersione isometrica, cioè  $U^*G_s = g$ , se e solo se  $\nabla U = 0$ . Dalla (9.35) e dalla (9.36) segue che (cfr. [51])

$$\begin{aligned} \text{vol}(U) &= \int_M \left( 1 + \sum_j \|\nabla_{E_j} U\|^2 + \sum_{j_1 < j_2} \|\nabla_{E_{j_1}} U \wedge \nabla_{E_{j_2}} U\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \sum_{j_1 < \cdots < j_{n-1}} \|\nabla_{E_{j_1}} U \wedge \cdots \wedge \nabla_{E_{j_{n-1}}} U\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} v_g, \end{aligned} \quad (9.37)$$

dove  $\{E_1, \dots, E_n\}$  è una base ortonormale locale. Da questa formula segue che

$$\text{vol}(U) \geq \text{vol}(M, g),$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $U$  è parallelo. Quindi, se esiste un campo di vettori unitario parallelo, allora questo sicuramente minimizza il volume. Si noti che l'esistenza di un campo vettoriale parallelo implica che la varietà è localmente riducibile (cfr. Proposizione 8.41). Pertanto, il problema diventa interessante se  $M$  non ammette alcun campo unitario parallelo. La sfera canonica  $\mathbb{S}^{2n+1}$  è il classico esempio di varietà riemanniana priva di campi di vettori paralleli. Nel 1986 Gluck e Ziller [40] posero il seguente problema:

*“esistono campi di vettori unitari (non paralleli)  
che minimizzano il volume?”.*

Nello stesso articolo [40] gli autori dimostrarono il seguente risultato, che è stato il primo di un lungo elenco di risultati, ottenuti da altri autori, ma sempre relativi al suddetto problema.

**Teorema 9.30.** (di Gluck e Ziller) *Sulla sfera canonica  $\mathbb{S}^3$  i campi vettoriali unitari di volume minimo sono tutti e soli i campi vettoriali di Hopf.*

La dimostrazione del Teorema 9.30 fornita da Gluck e Ziller usa il metodo delle geometrie calibrate, di seguito riportiamo una dimostrazione più semplice così come data in [89]. Più precisamente, dimostriamo il Teorema di Gluck-Ziller nella seguente più generale formulazione.

**Teorema 9.31.** ([89]) *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana compatta di dimensione 3 e di curvatura sezionale costante  $c \geq 0$ . Allora, i campi di vettori unitari di volume minimo sono tutti e soli i campi vettoriali unitari di Killing.*

*Dimostrazione.* Sia  $U$  un fissato campo di vettori unitario e sia  $\{E_1, E_2, E_3 = U\}$  una base ortonormale locale. Poniamo

$$V = \nabla_U U = \sum_i V^i E_i \quad \text{dove } V^i = g(V, E_i),$$

$$S_{ij} = g(\nabla_{E_i} U, E_j), \quad \|S\|^2 = \sum_{i,j} S_{ij}^2 = \|\nabla U\|^2.$$

Osserviamo che  $V^3 = S_{i3} = 0$  per ogni  $i$ . Nel caso 3-dimensionale, la formula (9.37) si esplicita come segue

$$\text{vol}(U) = \int_M \left[ (1 + \sigma)^2 + (\|S\|^2 - 2\sigma) + \|V\|^2 + (S_{11}V^2 - S_{12}V^1)^2 \right. \\ \left. + (S_{21}V^2 - S_{22}V^1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} v_g,$$

dove  $2\sigma := (\text{div}U)^2 - \text{tr}(\nabla U \circ \nabla U)$ . Dalla (9.5), siccome nel nostro caso  $\text{Ric}(U, U) = 2c$ , segue la seguente formula

$$\int_M \sigma v_g = \frac{1}{2} \int_M \text{Ric}(U, U) v_g = c \text{vol}(M, g).$$

Poiché:

$$\begin{aligned}\|S\|^2 &= S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{21}^2 + S_{22}^2, \\ (\operatorname{div}U)^2 &= \left(\sum_i g(\nabla_{E_i}U, E_i)\right)^2 = (S_{11} + S_{22})^2, \\ \operatorname{tr}(\nabla U \circ \nabla U) &= \sum_i g((\nabla_U \circ \nabla_U)E_i, E_i) \\ &= \sum_{i,j} g(\nabla_{E_i}U, E_j)g(\nabla_{E_j}U, E_i) \\ &= S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}S_{21},\end{aligned}$$

otteniamo

$$2\sigma = (S_{11} + S_{22})^2 - S_{11}^2 - S_{22}^2 - 2S_{12}S_{21},$$

e quindi

$$\|S\|^2 - 2\sigma = (S_{11} - S_{22})^2 + (S_{12} + S_{21})^2 \geq 0.$$

Pertanto,

$$\operatorname{vol}(U) \geq \int_M (1 + \sigma)v_g = (1 + c)\operatorname{vol}(M, g) \quad (9.38)$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se

$$V = \nabla_U U = 0, \quad S_{11} = S_{22}, \quad S_{12} + S_{21} = 0. \quad (9.39)$$

Se  $U_0 \in \mathfrak{X}^1(M)$  è di Killing, allora  $S_{11} = S_{22} = 0$  e  $S_{12} + S_{21} = 0$ , e quindi nella (9.38) vale l'uguaglianza. Pertanto,  $U_0$  minimizza il volume:

$$\operatorname{vol}(U_0) = (1 + c)\operatorname{vol}(M, g) \leq \operatorname{vol}(U) \quad \forall U \in \mathfrak{X}^1(M).$$

Viceversa, supponiamo che  $U \in \mathfrak{X}^1(M)$  minimizzi il volume e quindi vale la (9.39). Siccome  $S_{12} + S_{21} = 0$ , per provare che  $U$  è di Killing, ovvero che  $\mathcal{L}_U g = 0$ , resta da verificare che  $S_{11} = S_{22} = 0$ . Poniamo

$$\begin{aligned}f_1 &= S_{11} = S_{22} = (1/2)\operatorname{div}U, & f_2 &= S_{12} = -S_{21}; \\ \alpha &= g(\nabla_U E_1, E_2), & \beta &= g(\nabla_{E_1}E_2, E_1), & \gamma &= g(\nabla_{E_2}E_2, E_1).\end{aligned}$$

Allora, valgono

$$\begin{aligned}\nabla_{E_1}U &= f_1E_1 + f_2E_2, & \nabla_{E_2}U &= -f_2E_1 + f_1E_2, & \nabla_U U &= 0, \\ \nabla_{E_1}E_1 &= -f_1U - \beta E_2, & \nabla_{E_2}E_2 &= -f_1U + \gamma E_1, & \nabla_U E_1 &= \alpha E_2, \\ \nabla_{E_1}E_2 &= -f_2U + \beta E_1, & \nabla_{E_2}E_1 &= f_2U - \gamma E_2, & \nabla_U E_2 &= -\alpha E_1,\end{aligned} \quad (9.40)$$

e quindi

$$[E_1, U] = f_1 E_1 + (f_2 - \alpha) E_2, \quad [E_2, U] = (\alpha - f_2) E_1 + f_1 E_2,$$

$$[E_1, E_2] = -2f_2 U + \beta E_1 + \gamma E_2. \quad (9.41)$$

Utilizzando tutte queste formule, si ottiene

$$R(E_2, U)U = -(U(f_2) + 2f_1 f_2) E_1 + (U(f_1) + f_1^2 - f_2^2) E_2, \quad (9.42)$$

$$R(E_1, E_2)U = (E_1(f_2) + E_2(f_1)) E_1 + (-E_1(f_1) + E_2(f_2)) E_2. \quad (9.43)$$

La (9.42) implica

$$(U(f_1) + f_1^2 - f_2^2) = -c. \quad (9.44)$$

Inoltre, la (9.43) implica

$$E_1(f_2) + E_2(f_1) = E_2(f_2) - E_1(f_1) = 0. \quad (9.45)$$

Le equazioni (9.44), (9.45) e (9.41) implicano

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 E_i(E_i(f_1)) &= E_1 E_2(f_2) - E_2 E_1(f_2) + U(f_2^2 - f_1^2 - c) \\ &= [E_1, E_2](f_2) + 2f_2 U(f_2) - 2f_1 U(f_1) \\ &= \beta E_1(f_2) + \gamma E_2(f_2) - 2f_1 U(f_1). \end{aligned}$$

Inoltre, usando la (9.39) e la (9.40), si ottiene

$$\begin{aligned} (\nabla_U U)(f_1) &= 0, \\ (\nabla_{E_1} E_1)(f_1) &= -f_1 U(f_1) - \beta E_2(f_2), \\ (\nabla_{E_2} E_2)(f_1) &= -f_1 U(f_1) + \gamma E_1(f_1). \end{aligned}$$

Di conseguenza, calcolando il laplaciano di  $f_1$  si trova

$$\Delta f_1 = -\text{tr} \nabla^2 f_1 = \sum_i (E_i E_i(f_1) - (\nabla_{E_i} E_i)(f_1)) = 0,$$

quindi  $f_1$  è una funzione armonica. D'altro canto,  $f_1$  è un'applicazione differenziabile definita globalmente su  $M$  (in quanto  $2f_1 = \text{div} U$ ) ed  $M$  è connessa e compatta, per cui  $f_1$  è costante. Inoltre, siccome  $f_1$  è una divergenza, dal Teorema di Green (cfr. Appendice B, Teorema B.5) segue che  $f_1$  dev'essere necessariamente nulla. Di conseguenza  $U$  è di Killing.  $\square$

**Osservazione 9.32.** Come caso particolare del Teorema 9.31 ritroviamo esattamente il Teorema di Gluck–Ziller. Infatti: la sfera canonica  $(\mathbb{S}^3, g)$  è una varietà riemanniana compatta a curvatura sezionale costante 1, quindi i campi di vettori unitari che minimizzano il volume sono tutti e soli quelli di Killing. Inoltre, per il Teorema 9.28 (di Wiegman) questi campi vettoriali sono tutti e soli quelli di Hopf.



**Osservazione 9.33.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta orientata e di dimensione 2. Assumiamo che esista  $U \in \mathfrak{X}^1(M)$ , quindi  $\chi(M) = 0$  ed  $M$  è topologicamente una superficie torica. Poniamo  $E_1 = U$  e  $E_2 = JE_1$ , dove  $J$  è la struttura complessa definita dalla metrica riemanniana  $g$  (cfr. Sezione 4.5). Allora,  $\{E_1, E_2\}$  è una base ortonormale globale positiva e

$$\begin{aligned} (\nabla E_1)(E_1) &= k_1 E_2, \quad k_1 = g(\nabla_{E_1} E_1, E_2), \\ (\nabla E_1)(E_2) &= -k_2 E_2, \quad k_2 = -g(\nabla_{E_2} E_1, E_2) = g(\nabla_{E_2} E_2, E_1), \end{aligned}$$

dove  $k_1$  è la curvatura geodetica della fogliazione generata da  $U$  e  $k_2$  è la curvatura geodetica della fogliazione generata da  $E_2$ . Inoltre,

$$(\nabla E_1)^T(E_1) = 0, \quad (\nabla E_1)^T(E_2) = k_1 E_1 - k_2 E_2.$$

Quindi,

$$\det(I + (\nabla E_1)^T(\nabla E_1)) = 1 + k_1^2 + k_2^2.$$

La stessa formula vale per  $\det(I + (\nabla E_2)^T(\nabla E_2))$ . Pertanto,

$$\text{vol}(U) = \text{vol}(JU) = \int_M \sqrt{1 + k_1^2 + k_2^2} v_g. \quad (9.46)$$

Con facili calcoli si ottiene

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_1 &= -\nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_1 + \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_1 + \nabla_{[E_1, E_2]} E_1 \\ &= \{E_1(k_2) + E_2(k_1) - (k_1^2 + k_2^2)\} E_2. \end{aligned}$$

Di conseguenza, la curvatura gaussiana  $K$  è data da

$$K = E_1(k_2) + E_2(k_1) - (k_1^2 + k_2^2)$$

e la (9.46) diventa

$$\text{vol}(U) = \text{vol}(JU) = \int_M \sqrt{1 - K + E_1(k_2) + E_2(k_1)} v_g.$$

Inoltre, dal Teorema di Gauss-Bonnet, si ottiene

$$\int_M (E_1(k_2) + E_2(k_1)) v_g = \int_M (k_1^2 + k_2^2) v_g.$$

In particolare se  $k_1$  e  $k_2$  sono costanti, allora le stesse curvatures  $k_1$ ,  $k_2$  e la curvatura gaussiana  $K$  sono nulle, e  $\text{vol}(U) = \text{vol}(M, g)$ .



# Capitolo 10

## Varietà riemanniane omogenee e varietà conformemente piatte

Scopo di questo capitolo è dare una breve presentazione di alcuni aspetti di due importanti classi di varietà riemanniane, molto studiate in differenti contesti geometrici: la classe delle varietà riemanniane omogenee (che contiene in particolare quella delle varietà riemanniane simmetriche) e la classe delle varietà conformemente piatte. L'ultima sezione contiene una breve presentazione del Teorema di Gauss-Bonnet-Chern nelle dimensioni 2, 4, 6.

### 10.1 Varietà riemanniane omogenee

Per maggiori dettagli e approfondimenti sulle varietà riemanniane omogenee e sugli spazi simmetrici si rinvia ai testi di Tricerri-Vanhecke [111] e Kobayashi-Nomizu [56] vol. II, oltre che agli articoli citati nel corso della presentazione.

Ricordiamo la seguente definizione già introdotta nel Capitolo 5. Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale. Diciamo che  $M$  è *omogenea* se il gruppo delle isometrie di  $M$ ,  $\text{Iso}(M, g)$ , è *transitivo* su  $M$ , cioè se per ogni coppia di punti  $p$  e  $q$  di  $M$  esiste una isometria  $f$  tale che  $f(p) = q$ . Poiché  $\text{Iso}(M, g)$  è un *gruppo di Lie* che opera differenziabilmente su  $M$ , la precedente definizione è equivalente a quella che segue.

**Definizione 10.1.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  è detta *varietà riemanniana omogenea* se esiste un gruppo di Lie  $G$  e un'applicazione differenziabile

$$G \times M \rightarrow M, (a, p) \mapsto ap = L_a(p),$$

che gode delle seguenti proprietà:

- i)  $L_{ab}(p) = L_a(L_b p) \quad \forall a, b \in G, \quad \forall p \in M;$
- ii)  $L_e = I_M$  (dove  $e$  è l'elemento neutro di  $G$  e  $I_M$  è l'identità su  $M$ );

iii)  $L_a \in \text{Iso}(M, g)$ ;

iv) per ogni coppia di punti  $p, q \in M$  esiste un elemento  $a$  del gruppo  $G$  per il quale si ha  $L_a p = q$ .

Osserviamo che le condizioni i) e ii) della Definizione 10.1 esprimono il fatto che  $G$  è un gruppo di trasformazioni di Lie, o che  $G$  opera differenziabilmente su  $M$  (a sinistra). La condizione iv) equivale a dire che  $G$  opera in modo transitivo su  $M$  e la iii) è esattamente la condizione di compatibilità tra l'azione del gruppo  $G$  e la metrica  $g$  definita su  $M$ . In generale, si è soliti aggiungere alle condizioni precedenti la condizione che  $G$  sia *effettivo*, cioè:

$$L_a = I_M \iff a = e.$$

Questa condizione, che non è restrittiva, nel senso che si può passare dal gruppo  $G$  a un gruppo quoziente mediante un suo sottogruppo normale, permette di identificare  $G$  con un sottogruppo di  $\text{Iso}(M, g)$  (naturalmente  $\text{Iso}(M, g)$  è esso stesso effettivo).

Ora, supposto che la varietà riemanniana  $(M, g)$  sia omogenea, consideriamo  $p \in M$  e il sottogruppo  $K$  di  $G$  così definito:

$$K := \{a \in G : L_a p = p\}.$$

$K$ , detto *sottogruppo di isotropia* (di  $p$ ), è un chiuso di  $G$  e, in quanto tale, è un *sottogruppo di Lie* di  $G$ . Lo spazio quoziente  $G/K$  delle classi laterali sinistre  $aK$  è dotato di una struttura naturale di varietà differenziabile tale che la proiezione canonica

$$\pi : G \rightarrow G/K, \quad a \mapsto \pi(a) = aK,$$

sia differenziabile. Inoltre,  $G/K$  con questa struttura è diffeomorfo a  $M$  mediante l'applicazione  $aK \mapsto L_a(p) = ap$ . Dunque, ogni varietà riemanniana  $(M, g)$  omogenea si può pensare come uno spazio omogeneo  $G/K$  dotato di una metrica riemanniana che è  $G$ -invariante, cioè tale che le traslazioni sinistre  $L_a : bK \mapsto abK$  siano delle isometrie per ogni  $a \in G$ . Con questa identificazione, lo studio delle varietà riemanniane omogenee si può ricondurre nell'ambito della teoria dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie.

## Esempi di varietà riemanniane omogenee

I gruppi di Lie riemanniani  $(G, g)$  sono chiaramente varietà riemanniane omogenee: per ogni  $a, b \in G$ , posto  $x = ba^{-1}$ , la traslazione sinistra  $L_x$ , la quale è una isometria, soddisfa  $L_x a = b$ .

Dopo i gruppi di Lie riemanniani, gli esempi più semplici di spazi omogenei sono: lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  e lo spazio iperbolico  $H^n$  (l'omogeneità di tali spazi è stata dimostrata nelle Sezioni 5.4, 5.5). Per la sfera unitaria  $\mathbb{S}^n$ , pensando i suoi punti come vettori colonna di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , il gruppo delle rotazioni  $SO(n+1)$  agisce su  $\mathbb{S}^n$ :

$$SO(n+1) \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad (A, p) \longmapsto Ap,$$

e tale azione è transitiva: per ogni  $p, q \in \mathbb{S}^n$  esiste  $A \in SO(n+1)$  tale che  $q = Ap$ . Posto  $p_0 = (0, \dots, 0, 1)^t$ :

$Ap_0 = p_0 \iff a_{n+1, n+1} = 1$  e  $a_{i, n+1} = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , e tenendo conto che le colonne di  $A$  sono vettori ortonormali, si ha  $a_{n+1, i} = 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Pertanto, il sottogruppo di isotropia del punto  $p_0$  è dato da

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in SO(n), 0 \in \mathbb{R}^n \right\} \cong SO(n),$$

e quindi

$$\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n).$$

Analogamente si vede che

$$H^n = SO_+(n, 1)/SO(n).$$

Inoltre, sempre procedendo come nel caso di  $SO(n+1)$ , si può vedere che  $SU(n+1)$  (rispettivamente  $Sp(n+1)$ ) agisce in modo transitivo sulla sfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$  (rispettivamente  $\mathbb{S}^{4n+3}$ ) e il gruppo di isotropia nel punto  $p_0$  è isomorfo a  $SU(n)$  (rispettivamente  $Sp(n)$ ). Quindi,

$$\mathbb{S}^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n) \quad \text{e} \quad \mathbb{S}^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n).$$

Gli spazi  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$ ,  $H^n$  sono le sole varietà riemanniane complete semplicemente connesse per le quali vale il terzo criterio di congruenza dei triangoli (cfr., ad esempio, [9]): se  $(p, q, r)$  e  $(p', q', r')$  sono due terne di punti della varietà  $M$  che soddisfano

$$d(p, q) = d(p', q'), \quad d(q, r) = d(q', r') \quad \text{e} \quad d(r, p) = d(r', p'),$$

allora esiste una isometria  $f$  della varietà tale che

$$f(p) = p', \quad f(q) = q' \quad \text{e} \quad f(r) = r'.$$

Tali spazi sono anche detti 3-punti omogenei. Una generalizzazione di questi spazi è data dagli spazi 2-punti omogenei. Uno spazio riemanniano è detto 2-punti omogeneo se per ogni  $(p, q)$  e  $(p', q')$  coppie di punti di  $M$  con  $d(p, q) = d(p', q')$ , esiste una isometria  $f$  della varietà tale che

$$f(p) = p' \quad \text{e} \quad f(q) = q'.$$

Gli spazi 2-punti omogenei sono stati completamente classificati. Infatti, uno spazio 2-punti omogeneo è uno spazio euclideo oppure uno spazio simmetrico di rango 1 (cfr. [116],[106]). In [13] è data una caratterizzazione degli spazi 2-punti omogenei mediante proprietà della struttura riemanniana di contatto naturale del loro fibrato sferico unitario tangente.

## 10.2 Varietà riemanniane omogenee 3D

Ricordiamo la seguente

**Definizione 10.2.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice localmente omogenea se per ogni  $p, q \in M$  esiste un  $\varepsilon = \varepsilon(p, q) > 0$  e una isometria  $f : B(p, \varepsilon) \rightarrow B(q, \varepsilon)$  con  $f(p) = q$ .

Se una varietà riemanniana  $(M, g)$  localmente omogenea è completa, allora il suo rivestimento universale con la metrica indotta è una varietà riemanniana omogenea. In particolare, una varietà riemanniana  $(M, g)$  completa localmente omogenea è localmente isometrica a una varietà riemanniana omogenea semplicemente connessa. In generale, in dimensione  $n \leq 4$ , ogni varietà riemanniana  $(M, g)$  localmente omogenea è localmente isometrica a una varietà riemanniana omogenea semplicemente connessa (cfr.[81]).

Per varietà riemanniane omogenee  $3D$ , abbiamo il seguente

**Teorema 10.3.** ([67], Teorema 2.4) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana omogenea semplicemente connessa  $3D$ . Allora,  $(M, g)$  è un gruppo di Lie riemanniano semplicemente connesso  $3D$ , oppure è la varietà riemanniana prodotto  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , dove  $\mathbb{S}^2$  è la sfera canonica di curvatura sezionale costante  $k > 0$ .*

Riguardo a questo Teorema, osserviamo che in dimensione tre esistono gruppi di Lie riemanniani non isomorfi come gruppi di Lie ma con metriche invarianti a sinistra isometriche, ed esistono gruppi di Lie riemanniani isomorfi come gruppi di Lie ma con metriche invarianti a sinistra non isometriche (cfr. Teoremi 8.67 e 8.73).

### Le otto geometrie $3D$ di Thurston

Una geometria nel senso di Thurston consiste di una varietà riemanniana completa semplicemente connessa  $M_0$  (detta spazio modello) insieme a un gruppo di isometrie  $G$  la cui azione è effettiva e transitiva e inoltre ammette un sottogruppo discreto  $\Gamma$  per cui il quoziente  $M_0/\Gamma$  è una varietà differenziabile compatta. Dal Teorema 8.48 segue che in dimensione due esistono tre geometrie modello. In dimensione tre esistono esattamente otto geometrie modello, esse sono date dalle seguenti otto varietà riemanniane complete semplicemente connesse omogenee ([108] p. 179-184):

$$\mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3, H^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, H^2 \times \mathbb{R}, Nil^3, Sol^3, \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}). \quad (10.1)$$

L'importanza di questi spazi è dovuta al fatto che svolgono un ruolo fondamentale nella congettura di geometrizzazione di Thurston (risolta, come accennato nella Sezione 8.10, da Perelman). Tale congettura, la cui formulazione con dettagli richiederebbe nozioni non contenute in questo libro, in sostanza afferma che ogni varietà compatta orientabile di dimensione tre si può costruire usando le otto geometrie di Thurston (per una dettagliata presentazione delle otto geometrie di Thurston si consiglia [65] Cap.12, e [70]). Si noti che solo i primi tre spazi della (10.1) sono omogenei e isotropi, quindi a curvatura sezionale costante. Inoltre, solo il prodotto riemanniano  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  non è un gruppo di Lie.

Diciamo che una varietà riemanniana  $(M, g)$  è modellata su una varietà omogenea  $(M_0, g_0)$  se ogni punto di  $M$  possiede un intorno isometrico a un aperto di  $M_0$  (cfr. [70] p.60). Ogni varietà localmente omogenea di volume finito 3-dimensionale è modellata su una delle otto varietà modello (cfr. [108], [70]). Sia  $M_0$  una delle otto varietà modello elencate nella (10.1).

- $M_0 = \mathbb{S}^3$ . Ogni varietà localmente omogenea  $M$  modellata su  $\mathbb{S}^3$  è una varietà riemanniana completa a curvatura sezionale costante positiva, quindi è uno spazio forma di tipo sferico  $\mathbb{S}^3/\Gamma$  dove  $\Gamma$  è un sottogruppo ciclico finito di  $SO(4)$  (cfr. anche Sezione 8.5 p.281,282). Notiamo che ogni spazio forma sferico è compatto.

- $M_0 = \mathbb{R}^3$ . Ogni varietà localmente omogenea modellata su  $\mathbb{R}^3$  ha una metrica piatta. Il Toro piatto è il classico esempio di varietà compatta piatta.

- $M_0 = H^3$ . Ogni varietà localmente omogenea  $M$  modellata su  $H^3$  è una varietà riemanniana completa iperbolica, ovvero a curvatura sezionale costante negativa. Esistono esempi compatti e non compatti.

- $M_0 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  (con la metrica prodotto). La curvatura sezionale lungo piani orizzontali (ovvero piani tangenti a  $\mathbb{S}^2$ ) è una costante positiva, e quella lungo piani verticali (ovvero lungo piani che contengono il fattore  $\mathbb{R}$ ) è nulla. Ogni varietà localmente omogenea di volume finito modellata su  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  è compatte ed è isometrica a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$  oppure a una somma connessa di due spazi proiettivi  $\mathbb{R}P^3$ .

- $M_0 = H^2 \times \mathbb{R}$  è un gruppo di Lie non-unimodulare semplicemente connesso.  $M_0$  si considera con la metrica prodotto che è una metrica invariante a sinistra rispetto alla struttura standard di gruppo di Lie non-unimodulare. In questo caso, la curvatura sezionale lungo piani orizzontali è una costante negativa, e quella lungo piani verticali è nulla. Varietà localmente omogenee di volume finito modellate su  $H^2 \times \mathbb{R}$  sono del tipo  $\Sigma \times \mathbb{S}^1$ , dove  $\Sigma$  è una superficie iperbolica, oppure hanno tali varietà come rivestimento finito.

- $M_0 = Nil^3$  è un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso con una metrica invariante a sinistra. In tal caso, dalla (8.29) segue che il tensore di Ricci ha componenti  $Ric_{11} = Ric_{22} < 0$ ,  $Ric_{33} > 0$  e  $Ric_{ij} = 0$  per  $i \neq j$ . Varietà localmente omogenee modellate su  $Nil^3$  sono dette *nil-varietà*. In particolare, nil-varietà di volume finito sono compatte.

- $M_0 = Sol^3 = E(1, 1)$  è un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso con una metrica invariante a sinistra. In tal caso, dalla (8.29) segue che la forma quadratica di Ricci ha segnatura  $(-, 0, 0)$ ,  $(+, -, -)$ . Varietà localmente omogenee modellate su  $Sol^3$  sono dette *solv-varietà*. Solv-varietà di volume finito sono compatte.

- $M_0 = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  è un gruppo di Lie unimodulare semplicemente connesso con una metrica invariante a sinistra. Questa varietà può essere considerata come il rivestimento universale del fibrato sferico tangente  $T_1H^2$  con la metrica indotta (cfr. Appendice C.4). Il gruppo lineare speciale proiettivo  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$  è isomorfo a  $SO_+(2, 1)$ , gruppo di isometrie di  $H^2$  che agisce transitivamente (cfr. Sezioni 5.5, 5.6), inoltre  $PSL(2, \mathbb{R})$  si può identificare con  $T_1H^2$ . Varietà localmente omogenee di volume finito modellate su  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  sono  $S^1$ -fibrati su superfici iperboliche.

## Strutture riemanniane di contatto omogenee

Ricordiamo la seguente

**Definizione 10.4.** Una varietà riemanniana di contatto  $(M, \eta, g, \xi, \varphi)$  si dice *omogenea* se esiste un gruppo di Lie  $G$  di isometrie di  $(M, g)$  che opera in modo transitivo su  $M$  e la forma di contatto  $\eta$  è invariante rispetto a  $G$ :

$$f^*\eta = \eta \quad \forall f \in G, \quad \text{ovvero} \quad \eta(f_*X) \circ f = \eta(X) \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } \forall f \in G.$$

Si noti che per una varietà riemanniana di contatto omogenea  $(M, \eta, g, \xi, \varphi)$ , anche il campo vettoriale di Reeb  $\xi$  e il tensore  $\varphi$  sono invarianti rispetto a  $G$ . Più precisamente, se  $f$  è un diffeomorfismo di  $M$ , allora:

- a)  $f^*\eta = \eta$  implica  $f_*\xi = \xi$ ;
- b)  $f^*\eta = \eta$  e  $f^*g = g$  implicano  $f_* \circ \varphi = \varphi \circ f_*$ .

Infatti:

$$\text{a) } 0 = (d\eta)(\xi, \cdot) = (df^*\eta)(\xi, \cdot) = (f^*d\eta)(\xi, \cdot) = (d\eta)(f_*\xi, f_*\cdot) \circ f \quad \text{e} \\ \eta(f_*\xi) \circ f = (f^*\eta)(\xi) = \eta(\xi) = 1 \quad \text{implicano} \quad f_*\xi = \xi.$$

b) Assumiamo  $f^*\eta = \eta$ ,  $f^*g = g$  e quindi  $f_*\xi = \xi$ . Per  $Y \in \ker \eta$ , si ha

$$\eta(f_*Y) \circ f = g(\xi, f_*Y) \circ f = g(f_*\xi, f_*Y) \circ f = g(\xi, Y) = 0,$$

e quindi

$$\begin{aligned} (d\eta)(f_*X, \varphi f_*Y) \circ f &= g(f_*X, \varphi^2 f_*Y) \circ f = g(f_*X, -f_*Y + \eta(f_*Y)\xi) \circ f \\ &= -g(X, Y) = (d\eta)(X, \varphi Y) = (df^*\eta)(X, \varphi Y) \\ &= (f^*d\eta)(X, \varphi Y) = (d\eta)(f_*X, f_*\varphi Y) \circ f. \end{aligned}$$

Pertanto, siccome  $d\eta$  è non degenere,  $\varphi f_*Y = f_*\varphi Y$ . Se  $Y = \xi$ ,

$$f_* \circ \varphi \xi = 0 = \varphi \xi = \varphi \circ f_*\xi.$$

In [88] (cfr. anche [94]) è data una completa classificazione delle varietà riemanniane di contatto omogenee semplicemente connesse di dimensione tre. Per enunciare tale classificazione ricordiamo che, in dimensione tre, la *curvatura scalare di Webster* è definita da (cfr. [26], p.284)

$$W = \frac{1}{8}(r - Ric(\xi, \xi) + 4) = \frac{1}{8}(r + 2 + tr h^2), \quad (10.2)$$

dove  $r$  è l'usuale curvatura scalare. Ricordiamo che il tensore  $h = (1/2)\mathcal{L}_\xi\varphi$  gioca un ruolo fondamentale nello studio della geometria riemanniana di contatto (cfr. Sezione 4.6). In particolare, in dimensione tre, una struttura riemanniana di contatto è sasakiana se e solo se il campo di Reeb  $\xi$  è di Killing, equivalentemente il tensore  $h$  è nullo. Sempre in dimensione tre, nel caso non sasakiano, consideriamo l'invariante

$$p = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{tr h^2}}W.$$



Quindi, il Teorema di classificazione di [88] può essere riformulato nella seguente forma.

**Teorema 10.5.** *Sia  $(M, \eta, g, \xi, \varphi)$  una varietà riemanniana di contatto omogenea semplicemente connessa di dimensione tre. Allora,  $M$  è un gruppo di Lie e  $(\eta, g, \xi, \varphi)$  è una struttura riemanniana di contatto invariante sinistra. Più precisamente, abbiamo la seguente classificazione:*

- *Caso sasakiano (ovvero, il tensore  $h = 0$ ).*

(1) *Se  $G$  è unimodulare, allora*

- (i)  *$G$  è il gruppo  $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$  se la curvatura di Webster  $W > 0$ ;*
- (ii)  *$G$  è il gruppo di Heisenberg  $Nil^3$  se la curvatura di Webster  $W = 0$ ;*
- (iii)  *$G$  è il gruppo  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  se la curvatura di Webster  $W < 0$ ;*

(2) *Se  $G$  è non-unimodulare, allora la sua algebra di Lie è definita da*

$$[e_3, e_1] = \alpha e_1 + 2e_2, \quad [e_3, e_2] = [e_1, e_2] = 0, \quad e_2 = \xi,$$

dove  $\alpha \neq 0$ . In questo caso, la curvatura scalare di Webster  $W = -\alpha^2/4 < 0$ , e il gruppo di Lie  $G$  è isomorfo a  $H^2(-\alpha^2) \times \mathbb{R}$ .

- *Caso non Sasakian (ovvero, il tensore  $h \neq 0$ ).*

(1) *Se  $G$  è unimodulare, allora*

- (i)  *$G$  è il gruppo di  $SU(2)$  se l'invariante  $p > 1$ ;*
- (ii)  *$G$  è il gruppo  $\widetilde{E}(2)$  se l'invariante  $p = 1$ ;*
- (iii)  *$G$  è il gruppo  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  se l'invariante  $-1 \neq p < 1$ ;*
- (iv)  *$G$  è il gruppo  $Sol^3 = E(1, 1)$  se l'invariante  $p = -1$ .*

(2) *Se  $G$  è non-unimodulare, allora la sua algebra di Lie è definita da*

$$[e_3, e_1] = \alpha e_1 + 2e_2, \quad [e_3, e_2] = \gamma e_1, \quad [e_1, e_2] = 0, \quad e_2 = \xi,$$

dove  $\alpha, \gamma \neq 0$ . In questo caso, l'invariante  $p = -(\alpha^2 + \gamma)/|\gamma| < 1$ .

**Osservazione 10.6.** Dal Teorema 10.5 segue che le varietà modello  $\mathbb{S}^3$ ,  $Nil^3$ ,  $Sol^3$ ,  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$  delle otto geometrie di Thurston, ammettono una struttura riemanniana di contatto compatibile con la loro struttura di gruppo di Lie. Di queste quattro varietà, soltanto per  $Sol^3 = E(1, 1)$  tale struttura non può essere sasakiana, ed è caratterizzata dall'invariante  $p = -1$  nell'ambito dei gruppi di Lie unimodulari. Inoltre, osserviamo che  $H^2 \times \mathbb{R}$  ammette una struttura sasakiana omogenea  $(\eta, g)$ , ma  $g$  non è la metrica prodotto.

Le varietà modello date dai gruppi di Lie  $H^3$  e  $H^2 \times \mathbb{R}$ , ammettono una speciale struttura metrica di quasi contatto invariante a sinistra (cfr. Esempi 4.52, 4.53 e [92]). Di seguito vediamo che anche la varietà modello  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , che non è un gruppo di Lie, ammette una speciale struttura omogenea di quasi contatto.

**Esempio 10.7. La struttura cokähleriana standard su  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ .**

Consideriamo  $\mathbb{R}$  con la metrica euclidea  $g_0$ ,  $\xi_0$  un campo di vettori su  $\mathbb{R}$  tale che  $g_0(\xi_0, \xi_0) = 1$  e  $\eta_0$  la 1-forma definita da  $\eta_0 = g_0(\xi_0, \cdot)$ . Sia  $\mathbb{S}^2$  la sfera con la metrica riemanniana canonica e con la struttura complessa canonica  $J$ . Sia  $g$  la metrica riemanniana prodotto su  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Se  $(X_1, X_2)$  è un campo vettoriale tangente a  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , dove  $X_1$  è tangente a  $\mathbb{S}^2$  e  $X_2$  è tangente a  $\mathbb{R}$ , possiamo definire i tensori  $\xi, \varphi, \eta$  su  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  ponendo

$$\xi = (0, \xi_0), \quad \varphi(X_1, X_2) = (JX_1, 0), \quad \eta(X_1, X_2) = \eta_0(X_2).$$

Allora,  $(\eta, \xi, \varphi)$  è una struttura di quasi contatto e  $g$  è una metrica compatibile.

Ricordiamo che se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana orientata (da  $\Omega$ ),  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\vartheta = i_X \Omega$ , allora dalla Proposizione B.2 segue

$$nd\vartheta = (\operatorname{div} X)\Omega, \tag{10.3}$$

dove  $n = \dim M$ . Nel caso di una varietà riemanniana di quasi contatto  $3D$ , con tensori di struttura  $(\eta, \xi, \varphi, g)$ , posto  $\Omega = \eta \wedge \Phi$ , si ha

$$i_\xi \Omega = \Phi.$$

Pertanto dalla formula (10.3), si ottiene

$$3d\Phi = (\operatorname{div} \xi)\Omega = (\operatorname{div} \xi)\eta \wedge \Phi. \tag{10.4}$$

Ora, tornando al caso della struttura riemanniana di quasi contatto definita su  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Siccome  $\nabla \xi = 0$ , dove  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita di  $g$  che è una metrica prodotto, si ha

$$(d\eta)(X, Y) = \dots = g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) = 0.$$

Inoltre  $\operatorname{div} \xi = \operatorname{tr} \nabla \xi = 0$ , e quindi, dalla (10.4) si ottiene  $d\Phi = 0$ . Pertanto,  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura cokähleriana su  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  (cfr. Definizione 4.43). Infine, osserviamo che il gruppo di isometrie  $\operatorname{Iso}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) = \operatorname{Iso}(\mathbb{S}^2) \times \operatorname{Iso}(\mathbb{R})$ , di conseguenza  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  è una struttura riemanniana di quasi contatto omogenea.

Una completa classificazione, in dimensione tre, di una speciale classe di varietà di quasi-contatto omogenee, che include gli Esempi 4.52, 4.53, 10.7, è data in [92].

## 10.3 Varietà riemanniane simmetriche

La classe degli *spazi simmetrici* che introduciamo in questa sezione è una particolare sottoclasse di spazi riemanniani omogenei.

**Definizione 10.8.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice *simmetrica* (o *spazio riemanniano simmetrico*) se per ogni punto  $p \in M$ , esiste un'isometria  $\sigma_p : M \rightarrow M$  tale che:

i)  $\sigma_p^2 = I_M$  (cioè,  $\sigma_p$  è involutiva); ii)  $p$  è punto fisso isolato di  $\sigma_p$ .

**Proposizione 10.9.** *L'isometria  $\sigma_p$  di una varietà riemanniana simmetrica  $(M, g)$  soddisfa:*

$$(\sigma_p)_{*p} = -I \quad e \quad \sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(-t),$$

dove  $\gamma(t)$  è una geodetica con  $\gamma(0) = p$ .

*Dimostrazione.* La condizione i)  $\sigma_p^2 = I_M$  implica:  $(\sigma_p)_{*p}^2 = I_{T_p M}$ , quindi gli autovalori  $\lambda$  del differenziale  $(\sigma_p)_{*p}$  possono essere  $+1, -1$ . Se  $\lambda = +1$ , allora dovrebbe esistere  $v \in T_p M, v \neq 0$ , tale che:

$$(\sigma_p)_{*p} v = v \quad \text{con} \quad \sigma_p(p) = p.$$

Di conseguenza, indicata con  $\gamma$  la geodetica uscente dal punto  $p$  con velocità iniziale  $v$ , la geodetica  $\tilde{\gamma} := \sigma_p \circ \gamma$  verificherebbe:

$$\tilde{\gamma}(0) = \sigma_p(\gamma(0)) = \sigma_p(p) = p = \gamma(0),$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = (\sigma_p)_{*p}(\dot{\gamma}(0)) = (\sigma_p)_{*p}(v) = v = \dot{\gamma}(0),$$

e quindi, per l'unicità della geodetica  $\gamma$  con le fissate condizioni iniziali, si avrebbe:

$$\sigma_p \circ \gamma(t) = \gamma(t),$$

contro l'ipotesi secondo cui  $p$  è punto fisso isolato. Dunque  $\lambda = -1$  è l'unico autovalore di  $(\sigma_p)_{*p}$ , per cui  $(\sigma_p)_{*p} = -I$ . Di conseguenza, se  $\gamma(t)$  è una geodetica con  $\gamma(0) = p$ , allora le geodetiche  $\tilde{\gamma}(t) := \sigma_p \circ \gamma(t)$  e  $\gamma(-t)$  coincidono. Infatti:

$$\tilde{\gamma}(0) = \sigma_p(\gamma(0)) = p = \gamma(-0),$$

e

$$\dot{\tilde{\gamma}}(0) = (\sigma_p)_{*p}(\dot{\gamma}(0)) = -\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(-t)(0).$$

□

La b) della Proposizione 10.9 ci dice che “l'isometria  $\sigma_p$  inverte le geodetiche passanti per  $p$ ”. Ciò si esprime dicendo che l'isometria  $\sigma_p$  è una *simmetria geodetica* rispetto al punto  $p$ . L'esistenza delle simmetrie  $\sigma_p$  comporta che le geodetiche  $\gamma(t)$ ,  $t \in (-\epsilon, +\epsilon)$ , si possono prolungare per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Infatti: poiché  $\sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ , allora si possono considerare le simmetrie geodetiche rispetto ai punti  $q_1 = \gamma(t_0)$ ,  $q_2 = \gamma(-t_0)$  per ogni  $t_0 \in (-\epsilon, +\epsilon)$ . Procedendo in questo modo, si ottiene la seguente proposizione.

**Proposizione 10.10.** *Una varietà riemanniana simmetrica è completa.*

In aggiunta a questa proprietà, abbiamo un'altra proprietà che permette di includere gli spazi simmetrici nella famiglia più ampia degli spazi omogenei.

**Proposizione 10.11.** *Una varietà riemanniana simmetrica  $(M, g)$  è omogenea.*

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 10.10,  $(M, g)$  è uno spazio simmetrico completo. Pertanto, applicando il Teorema 7.50, se  $p_1$  e  $p_2$  sono due punti distinti di  $M$ , esiste sempre un arco di geodetica (minimale) che li congiunge. Se indichiamo con  $p$  il punto medio di questo arco geodetico, per la Proposizione 10.9 si ha:  $\sigma_p(p_1) = p_2$ . Poiché  $\sigma_p$  è un'isometria,  $(M, g)$  è omogenea.  $\square$

Lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio simmetrico, la simmetria geodetica  $\sigma_p$  è la riflessione rispetto al punto  $p$ . Anche la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  è uno spazio simmetrico, in tal caso la simmetria geodetica  $\sigma_p$  è l'applicazione che a un punto  $q \in \mathbb{S}^n$  associa il punto  $q' = \sigma_p(q)$  della circonferenza  $\gamma$  di raggio massimo, individuata da  $p$  e  $q$ , tale che  $L(\gamma(p, q)) = L(\gamma(p, q'))$ .

**Esercizio 10.12.** Si verifichi che la  $\sigma_p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  precedentemente definita è un'isometria di  $\mathbb{S}^n$ .

Nel caso della sfera, abbiamo  $\sigma_p(p) = p$  e  $\sigma_p(-p) = -p$ . Quindi, in generale,  $\sigma_p$  può avere altri punti fissi oltre al punto  $p$ . Anche lo spazio iperbolico  $H^n$  è un esempio di spazio simmetrico. Lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  con la metrica di Fubini è un esempio di spazio simmetrico a curvatura sezionale non costante. Se un gruppo di Lie  $G$  ammette una metrica bi-invariante  $g$ , allora  $(G, g)$  è uno spazio simmetrico ([28], p.345). Di conseguenza, i gruppi di Lie compatti sono esempi di spazi simmetrici.

**Definizione 10.13.** Una varietà riemanniana  $(M, g)$  si dice *localmente simmetrica* se per ogni punto  $p$  di  $M$  esiste una isometria  $\sigma_p$  (simmetria geodetica) definita su un intorno  $U$  di  $p$ , che soddisfa le condizioni:

$$\text{i) } \sigma_p^2 = I_U ; \quad \text{ii) } p \text{ è punto fisso isolato di } \sigma_p.$$

Un aspetto interessante delle varietà riemanniane (localmente) simmetriche è che possono essere caratterizzate mediante il tensore di curvatura di Riemann  $R$ . Vale infatti la seguente caratterizzazione degli spazi localmente simmetrici (Teorema di E. Cartan).

**Teorema 10.14.** *Una varietà riemanniana  $(M, g)$  è localmente simmetrica se e solo se il tensore di curvatura  $R$  è parallelo ( $\nabla R = 0$ ).*

*Dimostrazione.* Assumiamo  $(M, g)$  localmente simmetrica. Ricordiamo che  $\nabla R$ , come tensore del tipo  $(0, 5)$ , è definito da:

$$(\nabla R)(X, Y, Z, V, W) = g((\nabla R)(X, Y, Z, V), W) = g((\nabla_V R)(X, Y)Z, W).$$

Poiché la connessione di Levi-Civita  $\nabla$  e il tensore di curvatura sono invarianti per isometrie (cfr. Teorema 8.14), si ha

$$(\nabla R)(f_*X, f_*Y, f_*Z, f_*V, f_*W) \circ f = (\nabla R)(X, Y, Z, V, W)$$

per ogni isometria (locale)  $f$  di  $M$ . In particolare, scegliendo come isometria  $f$  la simmetria geodetica  $\sigma_p$ , si ha:  $f_*X_p = -X_p$  e  $f(p) = p$ . Di conseguenza,

$$\begin{aligned} (\nabla R)_{f(p)}(f_*X_p, f_*Y_p, f_*Z_p, f_*V_p, f_*W_p) \\ = (-1)^5 (\nabla R)_p(X_p, Y_p, Z_p, V_p, W_p), \end{aligned}$$

e quindi

$$(\nabla R)_p = -(\nabla R)_p, \quad \text{cioè} \quad (\nabla R)_p = 0.$$

Per l'arbitrarietà del punto  $p \in M$ , si ha  $\nabla R = 0$ .

Viceversa, assumiamo  $\nabla R = 0$ . Fissato  $p \in M$ , consideriamo  $U$  intorno normale sferico centrato in  $p$ , quindi  $\exp_p : B(0, \delta) \rightarrow U = B(p, \delta)$  è un diffeomorfismo. Intanto, proviamo che le componenti di  $R$  sono costanti lungo le curve geodetiche  $\gamma(t)$  di  $U$  uscenti da  $p$ , cioè: per ogni fissata base  $\{e_i\}$  di  $T_pM$ ,  $p = \gamma(0)$ , posto  $e_i(t) = \tau_t(e_i)$ , risulta

$$\begin{aligned} R_{ijkh}(t) &= g_{\gamma(t)}(R_{\gamma(t)}(e_i(t), e_j(t))e_k(t), e_h(t)) = \text{cost.} \\ &= g_p(R_p(e_i, e_j)e_k, e_h). \end{aligned}$$

Infatti, siccome  $\nabla_X R = 0$ , abbiamo  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} R = 0$  e quindi

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\dot{\gamma}(t)} R)(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_h(t)) = \frac{d}{dt} R_{\gamma(t)}(e_i(t), e_j(t), e_k(t), e_h(t)) \\ &\quad - R_{\gamma(t)}\left(\frac{De_i(t)}{dt}, e_j(t), e_k(t), e_h(t)\right) - R_{\gamma(t)}\left(e_i(t), \frac{De_j(t)}{dt}, e_k(t), e_h(t)\right) \\ &\quad - R_{\gamma(t)}\left(e_i(t), e_j(t), \frac{De_k(t)}{dt}, e_h(t)\right) - R_{\gamma(t)}\left(e_i(t), e_j(t), e_k(t), \frac{De_h(t)}{dt}\right) \\ &= \frac{d}{dt} R_{ijkh}(t). \end{aligned}$$

Per ogni fissato  $q \in U$ , indichiamo con  $\gamma(t)$  la geodetica (radiale) di  $U$ , quindi con  $\gamma(0) = p$ , passante per  $q$ ; poniamo  $\gamma(t) = q$  per un fissato  $t$ . Per provare che  $(M, g)$  è localmente simmetrica, basta provare che l'applicazione

$$f : U \rightarrow U, \quad q = \gamma(t) \mapsto f(q) = \gamma(-t),$$

è un'isometria. Indichiamo con  $\tau_t$  lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$  da  $p$  a  $q$ , con  $\tilde{\tau}_t$  lo spostamento parallelo lungo  $\gamma$  da  $p$  a  $\gamma(-t)$ , e consideriamo l'isometria lineare

$$\Phi_t = \tilde{\tau}_t \circ F \circ \tau_t^{-1} : T_qM \rightarrow T_{f(q)}M,$$

dove  $F$  è l'isometria lineare di  $T_pM$  definita da  $F : V \mapsto F(V) = -V$ . Proviamo che  $\Phi_t$  conserva la curvatura. Sia  $\{v_i\}$  una base di  $T_qM$ , che

possiamo sempre scrivere nella forma  $v_i = e_i(t) = \tau_t(e_i)$ , dove  $\{e_i\}$  è una base di  $T_pM$ . Allora:

$$\Phi_t(v_i) = (\tilde{\tau}_t \circ F \circ \tau_t^{-1})(v_i) = \tilde{\tau}_t(-e_i) = -\tilde{\tau}_t e_i,$$

e tenendo conto che  $R$  ha componenti costanti lungo  $\gamma$ , si ha:

$$\begin{aligned} g_{f(q)}(R_{f(q)}(\Phi_t(v_i), \Phi_t(v_j))\Phi_t(v_k), \Phi_t(v_h)) \\ &= g_{\gamma(-t)}(R_{\gamma(-t)}(\tilde{\tau}_t(e_i), \tilde{\tau}_t(e_j))\tilde{\tau}_t(e_k), \tilde{\tau}_t(e_h)) \\ &= \text{cost.} = g_{\gamma(-0)}(R_{\gamma(-0)}(e_i, e_j)e_k, e_h) \\ &= g_{\gamma(0)}(R_{\gamma(0)}(e_i, e_j)e_k, e_h) \\ &= g_{\gamma(t)}(R_{\gamma(t)}(\tau_t(e_i), \tau_t(e_j))\tau_t(e_k), \tau_t(e_h)) \\ &= g_q(R_q(v_i, v_j)v_k, v_h). \end{aligned}$$

D'altronde, siccome  $q = \gamma(t) = \exp_p tV = \gamma_V(t)$  con  $V \in B(0, \delta)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} (\exp_p \circ F \circ \exp_p^{-1})(q) &= (\exp_p \circ F)(tV) = \exp_p(-tV) \\ &= \gamma_V(-t) = \gamma(-t) = f(q). \end{aligned}$$

Applicando il Teorema 8.29 (di Cartan), si ha che  $f$  è una isometria con  $f_{*p} = F$ .  $\square$

Da un Teorema di W. Ambrose (cfr. Sasaki [100], p. 112,176), si ottiene il seguente

**Teorema 10.15.** *Una varietà riemanniana completa e semplicemente connessa, è localmente simmetrica se e solo se è simmetrica.*

Dal teorema precedente segue in particolare che il rivestimento riemanniano di uno spazio localmente simmetrico completo è uno spazio simmetrico. In generale, uno spazio localmente simmetrico non è uno spazio simmetrico. Ad esempio, una superficie riemanniana (connessa) compatta orientabile a curvatura sezionale costante negativa è uno spazio localmente simmetrico ma non è uno spazio simmetrico. Infatti, tali 2-varietà hanno necessariamente genere  $p > 1$  (ad esempio come conseguenza del Teorema di Gauss-Bonnet) e quindi gruppo fondamentale non abeliano (cfr., ad esempio, [57]), mentre è noto che uno spazio simmetrico ha gruppo fondamentale abeliano ([100], p. 183). Più in generale, ogni varietà riemanniana compatta a curvatura sezionale costante negativa è localmente simmetrica ma non è uno spazio simmetrico, infatti per il Teorema (di Preissman) (cfr. Osservazione 8.3) una tale varietà ha gruppo fondamentale non abeliano. Anche gli spazi lenticolari muniti di una metrica a curvatura sezionale positiva sono esempi di spazi localmente simmetrici che non sono simmetrici ([100], p. 177). Inoltre, per uno spazio simmetrico si verifica una sola delle seguenti proprietà (cfr. [100], pp. 177,183,184):

- i) la curvatura sezionale è  $\geq 0$  e la curvatura di Ricci  $Ric(u, u) > 0$ ;  
 j) la curvatura sezionale è  $\leq 0$  e la curvatura di Ricci  $Ric(u, u) < 0$ .

Nella sezione precedente abbiamo osservato che uno spazio 2-punti omogeneo è uno spazio euclideo oppure uno *spazio simmetrico di rango 1*. Ricordiamo che il rango di uno spazio simmetrico  $M$  è la dimensione massima delle sottovarietà totalmente geodetiche piatte di  $M$  (cfr. [100], p. 188). Gli spazi simmetrici di rango 1 sono:

- a) gli spazi a curvatura sezionale costante  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{P}^n$  e  $H^n$ ;  
 b) lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , lo spazio proiettivo quaternionico  $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ , il piano proiettivo di Cayley  $\mathbb{C}_{ay}P^2$ ;  
 c) lo spazio iperbolico complesso  $\mathbb{C}H^n$ , lo spazio iperbolico quaternionico  $\mathbb{Q}H^n$ , il piano iperbolico di Cayley  $\mathbb{C}_{ay}H^2$ .

Gli spazi classificati in b) sono di tipo compatto e con curvatura sezionale (non costante) positiva, mentre quelli classificati in c) sono di tipo non compatto e con curvatura sezionale (non costante) negativa. Si noti che  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q}) = 4(n-1)$  per  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{S}^4$  e  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{ay}P^2 = 16$ .

Gli spazi simmetrici compatti di rango 1 si possono esprimere come spazi quozienti:

- $\mathbb{S}^n = SO(n+1)/SO(n)$ ;
- $\mathbb{P}^{2n-1} = \mathbb{S}^{2n-1}/\{\pm I\} = SO(2n)/O(2n-1)$ ;
- $\mathbb{P}^{2n} = \mathbb{S}^{2n}/\{\pm I\} = SO(2n+1)/SO(2n) \times O(1)$ ;
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U(n+1)/U(n) \times U(1)$ ;
- $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{Q}) = Sp(n)/Sp(n-1) \times Sp(1)$ ,  $n \geq 2$ ;
- $\mathbb{C}_{ay}P^2 = F_4/Spin(9)$ .

**Esercizio 10.16.** Si verifichi che per una varietà riemanniana a curvatura sezionale costante si ha:  $\nabla R = 0$ .

**Esercizio 10.17.** Si verifichi che per una varietà riemanniana localmente simmetrica si ha:

$$R(X, Y)R = 0,$$

dove  $R(X, Y)$  è pensato come un operatore sui tensori (cfr. Osservazione 8.8). Una varietà riemanniana che soddisfa  $R(X, Y)R = 0$  si dice *semisimmetrica*.

## 10.4 Varietà conformemente piatte

Per maggiori dettagli e approfondimenti su questa sezione si rinvia ai testi e agli articoli citati nel corso della presentazione.

**Definizione 10.18.** Una varietà riemanniana (localmente) conformemente piatta è una varietà riemanniana  $(M, g)$  che verifica la seguente proprietà: per ogni punto  $p \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $p$  e una funzione differenziabile  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$  per cui  $(U, \tilde{g} = e^{2\sigma}g)$  è piatta.

Dalla definizione segue facilmente che, oltre allo spazio euclideo, anche la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  (basta considerare le carte locali definite dalle proiezioni stereografiche) e lo spazio iperbolico  $H^n$  (basta considerare i modelli di Poincaré) sono varietà conformemente piatte. La nozione di varietà conformemente piatta è puramente locale, tuttavia esiste un teorema che globalizza tale nozione per una classe di varietà. Abbiamo infatti il seguente teorema.

**Teorema 10.19.** (Kuiper [59]) *Sia  $(M, g)$  una varietà conformemente piatta. Se  $M$  è compatta e semplicemente connessa, allora esiste un diffeomorfismo tra  $(M, g)$  e la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  che è una trasformazione conforme.*

Osserviamo che ogni varietà riemanniana di dimensione 2 è conformemente piatta. Infatti, rispetto a un sistema di coordinate isoterme  $(x_1, x_2)$ , la metrica  $g$  si esprime con  $g = e^{2\sigma}(dx_1^2 + dx_2^2)$ . Sia ora  $M$  di dimensione  $n > 2$ . Siano  $g$  e  $\tilde{g}$  due metriche conformi su  $M$ :  $\tilde{g} = e^{2\sigma}g$ . Dalla formula di Koszul segue che le corrispondenti connessioni di Levi-Civita sono legate da:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\sigma)Y + Y(\sigma)X - g(X, Y)\nabla\sigma,$$

dove  $\nabla\sigma$  è il gradiente di  $\sigma$ . Si noti che se  $\tilde{g} = \lambda g$ ,  $\lambda$  funzione positiva, allora  $\sigma = \frac{1}{2} \ln \lambda$  e quindi la formula precedente diventa

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2\lambda} \{X(\lambda)Y + Y(\lambda)X - g(X, Y)\nabla\lambda\}. \quad (10.5)$$

Per i tensori di curvatura di tipo  $(0, 4)$ , abbiamo la relazione

$$\tilde{R} = e^{2\sigma} \left[ R - \left( \nabla^2\sigma - d\sigma \otimes d\sigma + \frac{1}{2}g(\nabla\sigma, \nabla\sigma)g \right) \odot g \right],$$

dove  $\odot$  denota il prodotto di Kulkarni-Nomizu (cfr. Osservazione 8.22) e  $\nabla^2\sigma$  denota l'hessiano di  $\sigma$  (cfr. Sezione 6.2).

Il tensore di curvatura conforme  $C$  di una varietà riemanniana  $(M, g)$ , introdotto da H. Weyl, è definito da:

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{r}{(n-1)(n-2)} \{g(X, Z)Y - g(Y, Z)X\} \\ - \frac{1}{n-2} \{g(X, Z)QY + Ric(X, Z)Y - g(Y, Z)QX - Ric(Y, Z)X\}$$



e quindi

$$\begin{aligned} C(X, Y, Z, W) &= g(C(X, Y)Z, W) \\ &= R - \frac{1}{(n-2)}g \odot Ric + \frac{r}{2(n-1)(n-2)}g \odot g, \end{aligned} \quad (10.6)$$

dove  $r$  è la curvatura scalare,  $Ric$  il tensore di Ricci e  $Q$  l'operatore di Ricci. Se  $g$  e  $\tilde{g}$  sono due metriche conformi su  $M$ :  $\tilde{g} = e^{2\sigma}g$ , allora (cfr. Eisenhart [35])

$$\tilde{C}(X, Y)Z = C(X, Y)Z \quad \text{e} \quad \tilde{C}(X, Y, Z, W) = e^{2\sigma}C(X, Y, Z, W).$$

**Proposizione 10.20.** *Se  $(M, g)$  è piatta oppure di dimensione 3, allora il tensore di curvatura conforme  $C = 0$ .*

*Dimostrazione.* Il caso piatto è ovvio. Consideriamo il caso 3-dimensionale. Fissato  $p \in M$ , consideriamo una base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  di  $T_pM$ , di autovettori per l'operatore di Ricci in  $p$ , quindi  $Ric_{ij}(p) = 0$  per  $i \neq j$ . Siccome la dimensione di  $M$  è 3, le componenti  $R_{ijkh}(p)$  che possono essere non nulle sono quelle con tre oppure con due indici distinti. Nel caso di tre indici distinti:

$$R_{1232}(p) = Ric_{13}(p) = 0, \quad R_{1213}(p) = Ric_{23}(p) = 0, \quad R_{1323}(p) = Ric_{12}(p) = 0.$$

Posto  $C_{ijkh}(p) = C(e_i, e_j, e_k, e_h)$ , dalla definizione di  $C$  segue che anche  $C_{ijkh}(p) = 0$  se tre indici sono distinti. Se abbiamo solo due indici distinti:

$$\begin{aligned} C_{ijij}(p) &= R_{ijij}(p) - (Ric_{ii}(p) + Ric_{jj}(p)) + \frac{r(p)}{2}(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}g_{ij})(p) \\ &= \frac{1}{2}(2R_{ijij}(p) - 2Ric_{ii}(p) - 2Ric_{jj}(p) + r(p)) \\ &= \frac{1}{2}(2R_{ijij}(p) + Ric_{kk}(p) - Ric_{ii}(p) - Ric_{jj}(p)) = 0. \end{aligned}$$

□

Sia ora  $(M, g)$  di dimensione  $n \geq 4$ . Se  $M$  è conformemente piatta, allora  $g$  è localmente conforme alla metrica piatta e quindi  $C_g = e^{2\sigma}C_{g_0} = 0$ ; viceversa se  $C_g = 0$ , allora  $(M, g)$  è conformemente piatta (cfr. [35], p. 92). Inoltre per  $(M, g)$  conformemente piatta di dimensione  $n \geq 4$ :

$$(\nabla_X Ric)(Y, Z) - (\nabla_Y Ric)(X, Z) = \frac{g(Y, Z)X(r) - g(X, Z)Y(r)}{2(n-1)}. \quad (10.7)$$

In dimensione 3, la (10.7) caratterizza le varietà conformemente piatte (cfr. [35], p. 91-92). Pertanto vale il seguente

**Teorema 10.21.** (di Weyl, 1921) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $> 3$ , allora  $(M, g)$  è conformemente piatta se e solo se il tensore  $C = 0$ . Se  $\dim M = 3$ ,  $(M, g)$  è conformemente piatta se e solo se vale l'identità (10.7).*

Tenendo presente che  $Ric$  di Codazzi implica  $r$  costante (cfr. Sezione 8.7), si ottiene il seguente corollario.

**Corollario 10.22.** a) Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana conformemente piatta di dimensione  $n \geq 4$ , allora  $r = \text{cost.}$  se e solo se  $Ric$  è di Codazzi.  
b) Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana di dimensione  $n = 3$ , allora  $(M, g)$  è conformemente piatta e  $r = \text{cost.}$  se e solo se  $Ric$  è di Codazzi.

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione di varietà conformemente piatte in termini di curvatures sezionali.

**Teorema 10.23.** (Kulkarni [60]) Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 4$ . Allora,  $(M, g)$  è conformemente piatta se e solo se per ogni punto  $p \in M$  e comunque si considerano quattro vettori ortonormali  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  di  $T_p M$  si ha

$$K(p, P_{12}) + K(p, P_{34}) = K(p, P_{13}) + K(p, P_{24}),$$

dove  $K(p, P_{ij})$  denota la curvatura sezionale in  $p$  lungo il piano generato dai due vettori  $e_i, e_j$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo  $M$  conformemente piatta e quindi  $C = 0$ . Poniamo  $K_{ij} = K(p, P_{ij}) = R_{ijij}$ . Da  $C_{1212} = C_{2424} = C_{1313} = C_{3434} = 0$ , tenendo presente la (10.6), si ottengono le seguenti formule

$$\frac{Ric_{11} + Ric_{22}}{n-2} = K_{12} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

$$\frac{Ric_{22} + Ric_{44}}{n-2} = K_{24} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

$$\frac{Ric_{11} + Ric_{33}}{n-2} = K_{13} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

$$\frac{Ric_{33} + Ric_{44}}{n-2} = K_{34} + \frac{r}{(n-1)(n-2)},$$

e quindi  $K_{12} + K_{34} = K_{24} + K_{13}$ . Viceversa, fissato  $p \in M$ , consideriamo una base ortonormale  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e poniamo  $K_{ij} = K(p, P_{ij})$ . Per ipotesi:

$$K_{ij} + K_{kh} = K_{ik} + K_{jh} \quad (10.8)$$

comunque si scelgono quattro indici  $i, j, k, h$  distinti. Dalla (10.8), fissati gli indici  $i, j, k$ , e sommando su  $h$  si ottiene

$$\sum_{h \neq i, j, k} (K_{ij} + K_{kh}) = \sum_{h \neq i, j, k} (K_{ik} + K_{jh})$$

che si può anche scrivere nella forma

$$(n-3)K_{ij} + Ric_{kk} - K_{ki} - K_{kj} = (n-3)K_{ik} + Ric_{jj} - K_{ji} - K_{jk},$$

e quindi

$$(n-2)K_{ij} + Ric_{kk} = (n-2)K_{ik} + Ric_{jj}. \quad (10.9)$$

Dalla (10.9), sommando su  $k$ , con  $k \neq i, j$ , si ottiene

$$(n-2)^2 K_{ij} + r - Ric_{ii} - Ric_{jj} = (n-2)Ric_{jj} + (n-2)Ric_{ii} - (n-2)K_{ij}$$

e quindi

$$(n-1)(n-2)K_{ij} = -r + (n-1)(Ric_{ii} + Ric_{jj}).$$

Di conseguenza,

$$R_{ijij} = K_{ij} = \frac{1}{n-2}(Ric_{ii} + Ric_{jj}) - \frac{r}{(n-1)(n-2)}.$$

e quindi  $C_{ijij} = 0$  per ogni  $i, j$ . Siccome  $C$  è un tensore di curvatura, la condizione  $C_{ijij} = 0$  per ogni  $i, j$  implica  $C_{ijkh} = 0$  per ogni  $i, j, k, h$  (cfr. Proposizione 8.17).  $\square$

Abbiamo osservato che lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , la sfera canonica  $\mathbb{S}^n(k)$  di curvatura sezionale costante  $k > 0$  e lo spazio iperbolico  $H^n(-k)$  di curvatura sezionale costante  $-k < 0$ , sono esempi di spazi conformemente piatti e di Einstein. Vale anche il viceversa, nel senso che: una varietà riemanniana conformemente piatta e di Einstein ha curvatura sezionale costante (cfr. Appendice D). Inoltre, usando la teoria esposta nella suddetta appendice, non è difficile provare che le seguenti varietà riemanniane prodotto:  $\mathbb{S}^{n-p}(k) \times H^p(-k)$ ,  $p \geq 2$ ,  $\mathbb{S}^{n-1}(k) \times \mathbb{R}$  e  $H^{n-1}(-k) \times \mathbb{R}$  sono conformemente piatte. Si può vedere che tali spazi soddisfano anche la condizione  $\nabla R = 0$ , cioè sono anche localmente simmetrici. In effetti, ogni spazio conformemente piatto e localmente simmetrico è localmente isometrico a uno degli esempi precedenti. Più precisamente abbiamo il seguente risultato di Ryan (cfr. [99])

**Teorema 10.24.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 3$ , conformemente piatta e localmente simmetrica. Allora, il rivestimento riemanniano universale  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  è una delle seguenti varietà:*

$$\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n(k), H^n(-k), \mathbb{S}^{n-p}(k) \times H^p(-k), \mathbb{S}^{n-1}(k) \times \mathbb{R}, H^{n-1}(-k) \times \mathbb{R}.$$

Si noti che per una varietà riemanniana conformemente piatta le condizioni  $\nabla R = 0$  e  $\nabla Ric = 0$  sono equivalenti.

## 10.5 Il Teorema di Gauss-Bonnet-Chern

### Il Teorema di Gauss-Bonnet in dimensione 2

Topologia e curvatura sono due nozioni a priori molto distanti tra loro. Il Teorema di Gauss-Bonnet, il pi  elegante teorema di geometria differenziale globale, evidenzia un sorprendente legame tra le due nozioni. Iniziamo questa sezione con una breve presentazione di tale teorema nel caso delle superfici connesse compatte di  $\mathbb{R}^3$  (per una dettagliata descrizione di questo teorema si rinvia a [30] e [78]).

**Teorema 10.25.** (di Gauss-Bonnet) *Sia  $M$  una superficie (connessa) compatta di  $\mathbb{R}^3$ . Allora*

$$\int_M K d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

dove  $\chi(M)$  denota la caratteristica di Eulero-Poincar  di  $M$ . In particolare, la curvatura totale  $\int_M K d\sigma$    un invariante topologico.

*Dimostrazione.* (sunto) Ricordiamo che ogni superficie (connessa) compatta di  $\mathbb{R}^3$    orientabile. Inoltre, una 2-variet  connessa compatta orientabile   somma connessa della sfera  $\mathbb{S}^2$  con superfici toriche  $\mathbb{T}^2$ . Siccome  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{T}^2$  sono superfici triangolabili, allora ogni 2-variet  connessa compatta orientabile  $M$    triangolabile. Pi  precisamente, fissata una orientazione su  $M$ , si pu  considerare una triangolazione  $T = \{T_1, \dots, T_f\}$  di  $M$  nella quale i triangoli  $T_i = (A_i, B_i, C_i)$  sono tutti orientati positivamente.

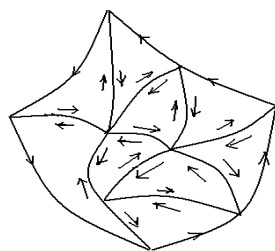


Figura 10.1: Una triangolazione di  $M$ .

La caratteristica di Eulero-Poincar  di  $M$ , la quale   un invariante topologico (e quindi non dipende dalla particolare triangolazione considerata)   data da

$$\chi(M) = v - l + f,$$

dove  $v$  (numero di vertici),  $l$  (numero di lati), ed  $f$  (numero di triangoli), sono riferiti alla triangolazione considerata. Ricordiamo ora la nozione di curvatura geodetica con segno. Sia  $\gamma(s)$  una curva differenziabile parametrizzata a

velocità unitaria. Poiché  $M$  è orientabile esiste un campo unitario  $\xi$  ortogonale alla superficie. Allora, lungo la curva  $\gamma$ ,  $\{E_1(s) = \dot{\gamma}(s), E_2(s) = \xi(s) \wedge \dot{\gamma}(s)\}$  è una base ortonormale positiva del piano tangente  $T_{\gamma(s)}M$ , dove  $\wedge$  denota l'usuale prodotto vettoriale di  $\mathbb{R}^3$ . Da  $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$  segue che il vettore accelerazione (intrinseca)  $\frac{D\dot{\gamma}}{ds}$  è parallelo a  $E_2(s)$ . La curvatura geodetica (con segno) di  $\gamma(s)$  è la funzione  $k_g(s)$  definita da

$$\frac{D\dot{\gamma}}{ds} = k_g(s) E_2(s).$$

L'estensione del Teorema 8.4 (elegantissimo di Gauss) al caso di una regione limitata da una curva chiusa semplice (non geodetica) regolare a tratti è dovuta a Bonnet. Sia  $\mathcal{R}$  una regione (poligonale) di  $M$  omeomorfa a un disco, il cui bordo  $\partial\mathcal{R}$  è una curva  $\gamma$  chiusa semplice regolare a tratti e orientata positivamente. Se  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sono i tratti regolari parametrizzati con l'ascissa curvilinea e  $\vartheta^i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) denotano le misure degli angoli interni nei corrispondenti vertici, allora la formula di Bonnet è la seguente

$$\int_{\mathcal{R}} K d\sigma + \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} k_g(s) ds = \sum_{i=1}^k \vartheta^i + (2 - k)\pi,$$

dove  $k_g(s)$  è la curvatura geodetica della curva  $\gamma_i$ . In particolare, per un triangolo  $T_i$  (della triangolazione  $T$ ) risulta

$$\int_{T_i} K d\sigma + \int_{\partial T_i} k_g(s) ds = \widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i - \pi,$$

dove  $k_g(s)$  è la curvatura geodetica della curva bordo di  $T_i$  e  $\widehat{A}_i, \widehat{B}_i, \widehat{C}_i$  sono le misure degli angoli interni del triangolo  $T_i$ . Poiché  $M$  è una varietà priva di bordo, ogni lato della triangolazione  $T$  è comune esattamente a due triangoli. Inoltre, tutti i triangoli di  $T$  sono orientati positivamente, quindi triangoli adiacenti determinano orientazioni opposte sul lato in comune (cfr. Figura 10.1). Di conseguenza,

$$\sum_{i=1}^f \int_{\partial T_i} k_g(s) ds = 0$$

e quindi:

$$\int_M K d\sigma = \sum_{i=1}^f \int_{T_i} K d\sigma = \sum_{i=1}^f (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i - \pi) = \sum_{i=1}^f (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i) - f\pi.$$

Siccome in ogni vertice confluisce un angolo giro, si ha

$$\int_M K d\sigma = 2\pi v - f\pi = 2\pi v - 3\pi f + 2\pi f.$$

D'altronde, poiché il numero totale di lati della triangolazione è uguale a  $3f$  e ogni lato è comune a due triangoli, si ha  $3f = 2l$  e quindi

$$\int_M K d\sigma = 2\pi v - 2\pi l + 2\pi f = 2\pi(v - l + f) = 2\pi\chi(M).$$

□

**Esempio 10.26.** Una triangolazione (geodetica) di  $\mathbb{S}^2$  è data dalla Figura 10.2. Siccome  $f = 8, l = 12, v = 6$ , si ottiene  $\chi(\mathbb{S}^2) = v - l + f = 6 - 12 + 8 = 2$ .

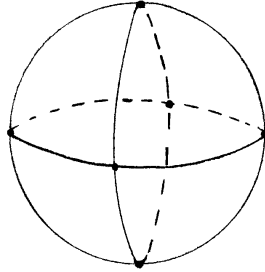


Figura 10.2: Una triangolazione di  $\mathbb{S}^2$ .

**Osservazione 10.27.** Una superficie connessa compatta orientabile  $M$  è omeomorfa a una sfera con  $p$ -manici (detta anche ciambella con  $p$ -buchi o  $p$ -toro),  $p$  è detto *genere della superficie*. Siccome  $\chi(M) = 2 - 2p$ , si vede che  $\chi(M)$  determina la configurazione topologica di  $M$ . Di conseguenza, la curvatura totale determina la configurazione topologica di  $M$ . In dimensione  $> 2$ , la curvatura influenza ma non controlla la configurazione topologica della varietà.

**Corollario 10.28.** Sia  $M$  una superficie connessa compatta orientata. Allora,

$$\int_M K d\sigma > 0 \Leftrightarrow M \underset{top}{=} \mathbb{S}^2; \quad \int_M K d\sigma = 0 \Leftrightarrow M \underset{top}{=} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1;$$

$$\int_M K d\sigma < 0 \Leftrightarrow M \text{ ha genere } p > 1.$$

Inoltre, se  $M$  ha curvatura gaussiana costante  $K$ , il genere  $p$  della superficie è dato da :

$$p = 1 - (K/4\pi)\text{vol}(M).$$

Se  $g$  è una metrica sulla sfera  $\mathbb{S}^2$  con curvatura gaussiana  $\leq 1$ , allora

$$\text{vol}(\mathbb{S}^2, g) \geq \text{vol}(\mathbb{S}^2(1)) = 4\pi.$$

**Osservazione 10.29.** Più in generale, il Teorema di Gauss-Bonnet vale per una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta. Il caso orientabile si prova come per le superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Se  $(M, g)$  è una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta non orientabile, indichiamo con  $d\sigma$  la misura canonica indotta dalla metrica  $g$ . Applicando il Teorema di Gauss-Bonnet al rivestimento doppio orientato  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  con metrica  $\tilde{g} = p^*g$ , si ha  $\int_{\tilde{M}} \tilde{K} d\tilde{\sigma} = 2\pi\chi(\tilde{M}) = 4\pi\chi(M)$ . Inoltre, se  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , posto  $f_1(x) := \tilde{f}(\tilde{x}_1) + \tilde{f}(\tilde{x}_2)$ , dove  $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\}$  è la fibra in  $x$ , allora si ha (cfr. Proposizione III.1 di [7], p.15)

$$\int_{\tilde{M}} \tilde{f} d\tilde{\sigma} = \int_M f_1 d\sigma.$$

Prendendo come funzione  $\tilde{f}$  la curvatura  $\tilde{K}$  di  $\tilde{M}$ , allora  $\tilde{K}(\tilde{x}_1) = \tilde{K}(\tilde{x}_2) = K(x)$  e quindi  $\int_{\tilde{M}} \tilde{K} d\tilde{\sigma} = 2 \int_M K d\sigma$ . Di conseguenza,

$$\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tilde{M}} \tilde{K} d\tilde{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_M K d\sigma.$$

In particolare, siccome  $\chi(M) = 2 - q$  dove  $q$  è il genere di  $M$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_M K d\sigma > 0 &\Leftrightarrow \tilde{M} =_{top} \mathbb{S}^2 \Leftrightarrow M =_{top} \mathbb{P}^2, q = 1; \\ \int_M K d\sigma = 0 &\Leftrightarrow \tilde{M} =_{top} \mathbb{T}^2 \Leftrightarrow M =_{top} \mathcal{K} \text{ (bottiglia di Klein)}, q = 2; \\ \int_M K d\sigma < 0 &\Leftrightarrow \tilde{M} \text{ ha genere } p > 1 \Leftrightarrow M \text{ ha genere } q > 2. \end{aligned}$$

Inoltre, si ottengono facilmente le seguenti proprietà:

- se  $M$  è una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta omeomorfa alla sfera o al piano proiettivo, allora  $K > 0$  in qualche punto;
- se  $M$  è una 2-varietà riemanniana (connessa) compatta omeomorfa al toro o alla bottiglia di Klein, allora  $K \equiv 0$  oppure esistono necessariamente punti dove  $K > 0$  e punti dove  $K < 0$ ;
- in tutti gli altri casi la curvatura  $K < 0$  in qualche punto.

### Il Teorema di Gauss-Bonnet nelle dimensioni 4 e 6

Abbiamo esaminato il Teorema di Gauss-Bonnet per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione 2. Questo importante teorema è stato generalizzato da S.S. Chern [25] anche per varietà riemanniane compatte

orientabili di dimensione pari  $n = 2m \geq 2$ , in tal caso la formula che esprime la caratteristica di Eulero-Poincaré è notevolmente più complicata:

$$\chi(M) = \frac{1}{2^{3m} \pi^m m!} \int_M F(R) dv_g,$$

dove

$$F(R) = \sum_{\sigma, \tau} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) R_{\sigma(1)\sigma(2)\tau(1)\tau(2)} \cdots R_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)\tau(2m-1)\tau(2m)},$$

$\operatorname{sgn}(\sigma)$  denota il segno della permutazione  $\sigma$  e le componenti del tensore di curvatura sono riferite a una base ortonormale positiva. Per  $n = 2$  si ottiene il classico Teorema di Gauss-Bonnet.

In dimensione 4, si ha (cfr. anche [7], p. 82)

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M (\|R\|^2 - 4\|Ric\|^2 + r^2) dv_g. \quad (10.10)$$

Ricordiamo che, per una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 4$ , le forme quadratiche  $\|R\|^2$ ,  $\|Ric\|^2$  e  $r^2$  soddisfano (cfr. Appendice D):

$\|R\|^2 \geq (2r^2)/n(n-1)$ , dove l'uguale vale se e solo se  $M$  ha curvatura sezionale costante;

$\|Ric\|^2 \geq r^2/n$ , dove l'uguale vale se e solo se  $M$  è di Einstein;

$\|R\|^2 \geq (4\|Ric\|^2)/(n-2) - (2r^2)/(n-1)(n-2)$ , dove l'uguale vale se e solo se  $M$  è conformemente piatta.

Nel caso della dimensione 4, se  $M$  è di Einstein cioè  $\|Ric\|^2 = (1/4)r^2$ , dalla (10.10) si ottiene  $\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \|R\|^2 dv_g \geq 0$  e quindi

$$\chi(M) \geq 0 \quad \text{e} \quad \chi(M) \geq \frac{r^2}{192\pi^2} \operatorname{vol}(M, g),$$

dove l'uguaglianza, nel primo caso, vale se e solo se  $M$  è piatta, e nel secondo caso, vale se e solo se  $M$  è a curvatura sezionale costante. Sempre nel caso della dimensione 4, se  $M$  è conformemente piatta, cioè  $\|R\|^2 = 2\|Ric\|^2 - \frac{r^2}{3}$ , siccome  $\|Ric\|^2 \geq \frac{r^2}{4}$ , dalla (10.10) si ha

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \left( \frac{2r^2}{3} - 2\|Ric\|^2 \right) dv_g \leq \frac{1}{192\pi^2} \int_M r^2 dv_g,$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  è a curvatura sezionale costante.

In dimensione 6 si ha (cfr. [29])

$$\chi(M) = \frac{1}{384\pi^3} \int_M \left( r^3 + 3r\|R\|^2 - 12r\|Ric\|^2 + 16\check{Ric} + 24\alpha - 24\beta - 8\gamma + 4\delta \right) dv_g, \quad (10.11)$$



dove

$$\begin{aligned}\check{Ric} &= \sum Ric_{ij} Ric_{ih} Ric_{jh}, & \alpha &= \sum Ric_{ij} Ric_{kh} Ric_{kjh}, & \beta &= \sum Ric_{ij} Ric_{ipqr} Ric_{jpqr}, \\ \gamma &= \sum Ric_{ikjh} Ric_{kphq} Ric_{piqj}, & \delta &= \sum Ric_{ijkh} Ric_{khpq} Ric_{pqij}.\end{aligned}$$

Se  $M$  è di Einstein, la (10.11) diventa

$$\chi(M) = \frac{1}{384\pi^3} \int_M \left( \frac{r^3}{9} - r \|R\|^2 - 8\gamma + 4\delta \right) dv_g.$$

Nel caso di  $M$  conformemente piatta, la (10.11) diventa (cfr. [86])

$$\chi(M) = \frac{1}{384\pi^3} \int_M \left( \frac{21}{100} r^3 - \frac{27}{20} r \|Ric\|^2 + \frac{3}{2} \check{Ric} \right) dv_g;$$

se in aggiunta la curvatura scalare  $r$  è costante, si dimostra che

$$384\pi^3 \chi(M) = \frac{4}{25} r^3 \text{vol}(M, g) - \frac{4}{5} r \int_M \|Ric\|^2 dv_g - \int_M \|\nabla R\|^2 dv_g. \quad (10.12)$$

Di conseguenza

$$384\pi^3 \chi(M) \leq \frac{4}{25} r^3 \text{vol}(M, g) - \frac{4}{5} r \int_M \|Ric\|^2 dv_g,$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  è localmente simmetrica. Inoltre, usando la (10.12) si ottiene il seguente

**Teorema 10.30.** ([86]) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta orientabile conformemente piatta 6-dimensionale e con curvatura scalare  $r$  costante.*

- Se  $r > 0$ , allora

$$14400 \pi^3 \chi(M) \leq r^3 \text{vol}(M, g),$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  è a curvatura sezionale costante (positiva).

- Se  $r = 0$ , allora

$$\chi(M) \leq 0,$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  è isometrica a una delle seguenti varietà:

(i)  $\mathbb{R}^6/G$  (dove  $G$  è un gruppo propriamente discontinuo di traslazioni dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^6$ );

(j)  $\mathbb{S}^3(k) \times H^3(-k)/G$  (dove  $G$  è un gruppo propriamente discontinuo di isometrie di  $\mathbb{S}^3(k) \times H^3(-k)$ ).

- Se  $r < 0$ , allora

$$384\pi^3\chi(M) \leq \frac{151}{600}r^3\text{vol}(M, g) - \frac{27}{20}r \int_M \|Ric\|^2 dv_g,$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  è a curvatura sezionale costante (negativa).

Esempi di varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione 6, conformemente piatte e con curvatura scalare costante sono:

$$\begin{aligned} M_1 &= \mathbb{S}^5(k) \times \mathbb{R}/G_1, & M_2 &= H^5(-k) \times \mathbb{R}/G_2 & M_3 &= \mathbb{S}^2(k) \times H^4(-k)/G_3, \\ M_4 &= \mathbb{S}^3(k) \times H^3(-k)/G_4, & M_5 &= \mathbb{S}^4(k) \times H^2(-k)/G_5, \\ M_6 &= (c) \text{ (spazio a curvatura sezionale costante } c), \end{aligned}$$

dove  $G_i$  è un gruppo propriamente discontinuo di isometrie del corrispondente spazio. Per tali spazi la formula (10.12) diventa

$$384\pi^3\chi(M) = \frac{4}{25}r^3\text{vol}(M, g) - \frac{4}{5}r \|Ric\|^2 \text{vol}(M, g),$$

quindi facili calcoli mostrano che:

$$\begin{aligned} \chi(M_1) = \chi(M_2) = \chi(M_4) = 0, & \quad \chi(M_3) = \frac{3k^3}{8\pi^3}\text{vol}(M_3), \\ \chi(M_5) = -\frac{3k^3}{8\pi^3}\text{vol}(M_5), & \quad \chi(M_6) = \frac{15c^3}{8\pi^3}\text{vol}(M_6). \end{aligned}$$

Per varietà conformemente piatte senza l'ipotesi che la curvatura scalare sia costante, abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 10.31.** ([44]) *Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana compatta orientabile conformemente piatta con curvatura scalare  $r \geq 0$  e di dimensione  $n = 4$  o  $n = 6$ , allora  $\chi(M) \leq 2$ . Inoltre,*

$$\begin{aligned} \chi(M) = 2 &\iff (M, g) \text{ è conforme a } (\mathbb{S}^n, g_0); \\ \chi(M) = 1 &\iff (M, g) \text{ è conforme a } (\mathbb{P}^n, g_0). \end{aligned}$$

# Capitolo 11

## Problemi variazionali in geometria

Un tema fondamentale in geometria differenziale è l'uso di principi variazionali per distinguere e studiare oggetti geometrici particolarmente interessanti. Ad esempio, metriche di Einstein e curve geodetiche sono caratterizzati come punti critici di opportuni funzionali.

Iniziamo questo capitolo con un semplice problema variazionale che si incontra nello studio degli autovalori di una matrice reale simmetrica. Sia quindi  $A$  una matrice reale simmetrica di ordine  $n$  ( $n > 1$  per evitare il caso banale). Sulla sfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$  dello spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ , consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto f(v) = g_0(Av, v). \quad (11.1)$$

Un punto  $v$  di  $\mathbb{S}^{n-1}$  si dice punto critico per  $f$  se il differenziale  $(df)_v = 0$ , cioè se per ogni  $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  curva differenziabile di  $\mathbb{S}^{n-1}$ , con  $\gamma(0) = v$ , posto  $f(t) = f(\gamma(t))$ , si ha

$$(df)_v(\dot{\gamma}(0)) = f'(t)|_{t=0} = 0.$$

**Proposizione 11.1.** *Un punto  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  è punto critico di  $f$  se, e solo se,  $v$  è un autovettore di  $A$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $\mathbb{S}^{n-1}$  con  $\gamma(0) = v$ . Allora

$$\begin{aligned} f'(t)|_{t=0} &= \frac{d}{dt} g_0(A\gamma(t), \gamma(t))|_{t=0} = g_0(A\dot{\gamma}(0), \gamma(0)) + g_0(A\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) \\ &= 2g_0(Av, \dot{\gamma}(0)). \end{aligned}$$

Se  $v$  è autovettore di  $A$ ,  $Av = \lambda v$ , siccome  $\|\gamma(t)\| = \text{cost.} = 1$ , si ha

$$f'(0) = 2\lambda g_0(v, \dot{\gamma}(0)) = 2\lambda g_0(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = 0.$$

Viceversa, supponiamo  $v$  punto critico di  $f$ . Sia  $w \in T_v\mathbb{S}^{n-1} = v^\perp$  un vettore unitario. Allora  $\gamma(t) = (\cos t)v + (\sin t)w$  è una curva differenziabile di  $\mathbb{S}^{n-1}$  con  $\gamma(0) = v$  e  $\dot{\gamma}(0) = w$ . Inoltre,  $0 = f'(t)|_{t=0} = 2g_0(Av, \dot{\gamma}(0)) = 2g_0(Av, w)$  implica che  $Av$  è ortogonale a  $w$  per ogni  $w \in T_v\mathbb{S}^{n-1}$ . Pertanto,  $Av$  è parallelo a  $v$ .  $\square$

**Osservazione 11.2.** Poiché la funzione  $f$  definita dalla (11.1) è continua e definita su un compatto, esiste certamente un punto di minimo e quindi un punto critico di  $f$ . Di conseguenza, ogni matrice reale simmetrica ammette almeno un autovettore. Utilizzando questo fatto, si ottiene il ben noto teorema di algebra lineare: “se  $A$  è una matrice reale simmetrica di ordine  $n$ , allora esiste una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$  di autovettori per  $A$ ”.

Nel seguito di questo Capitolo, e nel Capitolo successivo, tratteremo alcuni problemi variazionali intimamente legati alla geometria di una varietà riemanniana. In questi problemi variazionali, indicato con  $X$  l'insieme su cui è definito un certo funzionale  $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$ , un punto  $x_0$  di  $X$  viene definito come punto critico per  $\mathcal{F}$  se per ogni *variazione*  $x_s$  di  $x_0$  in  $X$ :

$$\frac{d\mathcal{F}(x_s)}{ds}(0) = 0.$$

Questo può sembrare strano, ma in effetti è abbastanza naturale in quanto è possibile definire su  $X$  una struttura di varietà differenziabile (in generale di dimensione infinita) per cui:

- una variazione  $x_s$  di  $x_0$  in  $X$  è semplicemente una curva differenziabile  $\gamma(s) = x_s$  di  $X$  con  $\gamma(0) = x_0$ ;
- $w = \frac{dx_s}{ds}|_{s=0} = \dot{\gamma}(0)$  è un vettore tangente alla curva  $\gamma(s)$  per  $s = 0$  e quindi un vettore di  $T_{x_0}X$  (spazio tangente in  $x_0$  a  $X$ );
- $\left(\frac{d}{ds}\mathcal{F}(x_s)\right)|_{s=0}$  è la derivata direzionale della funzione  $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  nella direzione di  $w$ . Infatti, tenendo conto del significato geometrico del differenziale, otteniamo

$$(d\mathcal{F})_{x_0}(w) = (d\mathcal{F})_{x_0}(\dot{\gamma}(0)) = (\mathcal{F} \circ \dot{\gamma})(0) = \left(\frac{d}{ds}\mathcal{F}(s)\right)_{s=0},$$

dove  $\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}(\gamma(s))$ . Quindi, dire che  $x_0$  è punto critico di  $\mathcal{F}$  significa dire che il differenziale di  $\mathcal{F}$  in  $x_0$  si annulla su  $T_{x_0}X$ .

## 11.1 Una caratterizzazione variazionale delle metriche di Einstein

In questa Sezione riportiamo una dimostrazione di un classico risultato di D. Hilbert sulla caratterizzazione variazionale delle metriche di Einstein (D. Hilbert [48]; cfr. anche T. Nagano [72]).

Sia  $M$  una varietà differenziabile orientabile,  $n$ -dimensionale e compatta. Indichiamo con  $\mathcal{M}$  l'insieme di tutte le metriche riemanniane su  $M$  che hanno lo stesso fissato volume, in particolare unitario, ovvero

$$\mathcal{M} := \{g : g \text{ metrica riemanniana su } M, \text{ vol}(M, g) = 1\}.$$

Consideriamo il funzionale

$$I : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto I(g) := \int_M r(g) v_g,$$

dove  $r(g)$  è la curvatura scalare della varietà riemanniana  $(M, g)$ . Se  $g(t)$ , con  $|t| < \varepsilon$ , è una curva differenziabile di metriche dell'insieme  $\mathcal{M}$ , possiamo considerare la funzione

$$I : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto I(t) := I(g(t)) = \int_M r(t) v_{g(t)},$$

dove  $r(t) = r(g(t))$  è la curvatura scalare della varietà riemanniana  $(M, g(t))$ .

**Definizione 11.3.** Diciamo che un elemento  $g$  di  $\mathcal{M}$  è *punto critico* del funzionale  $I$  se per ogni curva differenziabile  $g(t)$  di  $\mathcal{M}$ , con  $g(0) = g$ , è soddisfatta la condizione

$$\left. \frac{dI(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (11.2)$$

**Teorema 11.4.** (di Hilbert) Sia  $M$  una varietà differenziabile orientabile compatta di dimensione  $n > 2$ . Allora, una metrica  $g$  di  $\mathcal{M}$  è una metrica di Einstein se, e solo se,  $g$  è punto critico del funzionale  $I : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La dimostrazione di questo teorema seguirà da una serie di lemmi. Sia  $g(t)$  una curva differenziabile di  $\mathcal{M}$ ,  $|t| < \varepsilon$ , con  $g(0) = g$ . Le componenti dei tensori che verranno nel seguito considerati sono riferite a un sistema di coordinate locali.

**Lemma 11.5.**

$$\frac{dI}{dt}(t) = \int_M A(t) + \int_M B(t),$$

dove

$$A(t) := \sum_{i,j=1}^n Ric_{ij}(t) \frac{d}{dt} (g^{ij}(t) v_{g(t)}) \quad e \quad B(t) := \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{d}{dt} Ric_{ij}(t) \right) g^{ij}(t) v_{g(t)}.$$

*Dimostrazione.* Partendo dalla definizione del funzionale  $I$ , abbiamo:

$$\frac{dI}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_M r(t) v_{g(t)} = \int_M \frac{d}{dt} (r(t) v_{g(t)}).$$

Sapendo che  $r = \sum_{i,j=1}^n Ric_{ij} g^{ij}$ , risulta

$$\frac{d}{dt} (r(t) v_{g(t)}) = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{d}{dt} Ric_{ij}(t) \right) g^{ij}(t) v_{g(t)} + \sum_{i,k,j=1}^n Ric_{ij}(t) \frac{d}{dt} (g^{ij}(t) v_{g(t)}).$$

□

**Il tensore  $h(t) = g'(t)$**

Indichiamo con  $h(t)$  il tensore simmetrico di tipo  $(0, 2)$  definito da

$$h_{ij}(t) := \frac{d}{dt} g_{ij}(t) \quad (\text{quindi, } g(t) = g + th(0) + o(t^2)).$$

La simmetria di  $h$  segue dalla simmetria di  $g$ . Inoltre  $h^{ij}$ , generico elemento della matrice inversa di  $(h_{ij})$ , è dato da

$$h^{ij}(t) = -\frac{d}{dt} g^{ij}(t).$$

Infatti:

$$\sum_{j=1}^n g_{ij}(t) g^{jk}(t) = \delta_{ik} \implies \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{d}{dt} g_{ij}(t) \right) g^{jk}(t) + g_{ij}(t) \frac{d}{dt} g^{jk}(t) \right) = 0$$

e quindi,

$$\sum_{j=1}^n \left( h_{ij}(t) g^{jk}(t) + g_{ij}(t) \frac{d}{dt} g^{jk}(t) \right) = 0.$$

Moltiplicando per  $g^{ir}(t)$  e sommando anche rispetto all'indice  $i$ , si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \left( g^{ir} h_{ij} g^{jk} + g^{ir} g_{ij} \frac{d}{dt} g^{jk} \right) (t) &= 0, \\ \left( h^{rk} + \sum_{j=1}^n \delta_{jr} \frac{d}{dt} g^{jk} \right) (t) &= 0 \quad \text{e quindi,} \quad h^{rk}(t) = -\frac{d}{dt} g^{rk}(t). \end{aligned}$$

**Lemma 11.6.**

$$\frac{d}{dt} v_{g(t)} = \frac{1}{2} \langle h(t), g(t) \rangle v_{g(t)}.$$

*Dimostrazione.* Localmente risulta:

$$v_{g(t)} = \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dx_1 \cdots dx_n,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{g(t)} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} \frac{d}{dt} \det(g_{ij}(t)) dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Ricordiamo che (cfr. Lemma 3.18):

$$(\det G)'(t) = (\det G) \operatorname{tr}(G^{-1}(t) G'(t)).$$

Applicando tale formula, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{g(t)} &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij}(t))}} (\det g_{ij}(t)) \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{d}{dt} g_{ij} \right) g^{ij}(t) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det(g_{ij}(t))} \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(t) g^{ij}(t) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \frac{1}{2} \langle h(t), g(t) \rangle v_{g(t)}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 11.7.**

$$\frac{d}{dt} (g^{ij}(t) v_{g(t)}) = -h^{ij}(t) v_{g(t)} + \frac{1}{2} g^{ij}(t) \langle h, g \rangle (t) v_{g(t)}.$$

*Dimostrazione.* Questo Lemma segue dal Lemma 11.6 tenendo presente che  $h^{ij} = -\frac{d}{dt} g^{ij}$ . □

**Lemma 11.8.** Vale la seguente formula:

$$A(t) = -\langle Ric, h \rangle (t) v_{g(t)} + \frac{1}{2} r(t) \langle h, g \rangle (t) v_{g(t)}.$$

*Dimostrazione.* Dal Lemma 11.5, segue che

$$A(t) = \sum_{i,j=1}^n Ric_{ij}(t) \frac{d}{dt} (g^{ij}(t) v_{g(t)}).$$

Applicando il Lemma 11.7, si ottiene:

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{i,j=1}^n Ric_{ij}(t) \left( -h^{ij}(t) v_{g(t)} + \frac{1}{2} g^{ij}(t) \langle h, g \rangle (t) v_{g(t)} \right) \\ &= -\sum_{i,j=1}^n Ric_{ij}(t) h^{ij}(t) v_{g(t)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n Ric_{ij}(t) g^{ij}(t) \langle h, g \rangle (t) v_{g(t)} \\ &= -\langle Ric, h \rangle (t) v_{g(t)} + \frac{1}{2} r(t) \langle h, g \rangle (t) v_{g(t)}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 11.9.**  $\int_M B(t) = 0$ .

*Dimostrazione.* Esprimendo  $Ric_{ij}(t) = \sum_k R_{ikj}{}^k(t)$  in funzione dei coefficienti  $g_{ij}(t)$  e  $g^{ij}(t)$ , dopo alcuni calcoli, si ottiene la seguente formula (cfr. M. Berger [8] p. 288, formula (2.11)):

$$B(t) = (\Delta \operatorname{tr} h(t) + \delta \delta h(t)) v_{g(t)},$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace-Beltrami e  $\delta$  è l'operatore divergenza. Pertanto, applicando il Teorema B.5 (di Green), si ha il risultato enunciato. □

**Lemma 11.10.**

$$\int_M \langle h(t), g(t) \rangle v_{g(t)} = 0, \quad \text{cioè} \quad \int_M \operatorname{tr} h(t) v_{g(t)} = 0 \quad \forall t.$$

*Dimostrazione.* Siccome le metriche di  $\mathcal{M}$  hanno volume costante unitario, tenendo presente il Lemma 11.6, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \operatorname{vol}(M, g(t)) = \frac{d}{dt} \int_M v_{g(t)} = \int_M \frac{d}{dt} v_{g(t)} \\ &= \frac{1}{2} \int_M \langle h, g \rangle (t) v_{g(t)}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 11.11.** *Per ogni metrica riemanniana  $g$  e per ogni tensore  $h$  covariante simmetrico del secondo ordine che soddisfano  $\langle h, g \rangle = 0$ , esiste una curva  $g(t)$  di metriche di volume costante tale che*

$$g(0) = g \quad \text{e} \quad g'(0) = h.$$

*Dimostrazione.* Siano  $(M, g)$  una varietà riemanniana,  $h = (h_{ij})$  un tensore covariante simmetrico del secondo ordine su  $M$ , che soddisfa  $\langle h, g \rangle = 0$ , e  $\bar{h}$  il corrispondente tensore di tipo  $(1,1)$ , cioè tale che  $g(\bar{h}X, Y) = h(X, Y)$ , uguaglianza che può esprimersi brevemente nella forma  $g\bar{h} = h$ . Consideriamo inoltre il tensore  $e^{t\bar{h}}$  che, come per l'esponenziale di una matrice (cfr. Sezione 3.5), si può esprimere con

$$e^{t\bar{h}} = I + t\bar{h} + \frac{t^2}{2} \bar{h}^2 + \frac{t^3}{3!} \bar{h}^3 + \dots + \frac{t^r}{r!} \bar{h}^r + \dots, \quad \text{e quindi}$$

$$e^{t\bar{h}} X = X + t\bar{h}X + \frac{t^2}{2} \bar{h}^2 X + \frac{t^3}{3!} \bar{h}^3 X + \dots + \frac{t^r}{r!} \bar{h}^r X + \dots$$



Poniamo  $g(t) := g e^{t\bar{h}}$ ,  $|t| < \varepsilon$ . Si noti che  $g(t)$  è il tensore di tipo  $(0, 2)$  che corrisponde, mediante la  $g$ , al tensore simmetrico  $e^{t\bar{h}}$ , quindi:

$$\begin{aligned} g(t)(X, Y) &= g(e^{t\bar{h}} X, Y) \\ &= g(X, Y) + tg(\bar{h}, Y) + \frac{t^2}{2}g(\bar{h}^2 X, Y) + \frac{t^3}{3}g(\bar{h}^3 X, Y) + \dots \end{aligned}$$

Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono gli autovalori del tensore simmetrico  $\bar{h}$ ,  $t\lambda_1, \dots, t\lambda_n$  sono gli autovalori di  $t\bar{h}$  e quindi  $e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}$  sono gli autovalori del tensore simmetrico  $e^{t\bar{h}}$ . Pertanto, il tensore  $g(t)$  è definito positivo per ogni  $t$  e quindi definisce una curva di metriche riemanniane su  $M$ . La curva  $g(t)$  soddisfa:

$$g(0) = g \quad \text{e} \quad g'(t) = \frac{d}{dt} g(t) = g \frac{d}{dt} e^{t\bar{h}} = g \bar{h} e^{t\bar{h}},$$

vale a dire

$$g'(t)(X, Y) = g((\bar{h}e^{t\bar{h}})(X), Y).$$

In particolare:

$$g'(0)(X, Y) = g(\bar{h}X, Y) = h(X, Y), \quad \text{ossia } g'(0) = h.$$

Resta da verificare che  $\text{vol}(g(t)) = \text{cost} = \text{vol}(g)$ , e quindi basta provare che

$$\det(g_{ij}(t)) = \det(g_{ij}(0)) = \det(g_{ij}).$$

Da

$$g(t) = g e^{t\bar{h}} = g + th + \frac{t^2}{2} g \bar{h}^2 + \frac{t^3}{3!} g \bar{h}^3 + \dots,$$

segue che:

$$g(0) = g, \quad g'(0) = h, \quad g''(0) = g \bar{h}^2, \quad g'''(0) = g \bar{h}^3, \quad \dots, \quad g^{(r)}(0) = g \bar{h}^r, \dots$$

Pertanto:

$$g_{ij}(t) = g_{ij}(0) + g'_{ij}(0)t + g''_{ij}(0)\frac{t^2}{2} + g'''_{ij}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots, \quad \text{dove}$$

$$g'_{ij}(0) = h_{ij}, \quad g''_{ij}(0) = g(\partial_i, \bar{h}^2 \partial_j) = g(\bar{h} \partial_i, \bar{h} \partial_j) = \sum_{r,s=1}^n h_i^r h_j^s g_{rs},$$

$$g'''_{ij}(0) = g(\partial_i, \bar{h}^3 \partial_j), \dots$$

Applicando la formula di Taylor alla funzione  $\det(g_{ij}(t))$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}(t)) &= (\det g_{ij}(0)) + (\det g_{ij})'(0)t + (\det g_{ij}(t))''(0)\frac{t^2}{2} \\ &\quad + (\det g_{ij}(t))'''(0)\frac{t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Utilizzando la formula di derivazione per un determinante, si ha:

$$\begin{aligned} (\det g_{ij}(t))' &= (\det g_{ij}(t)) \sum_{i,j=1}^n g'_{ij}(t) g^{ij}(t) = (\det g_{ij}(t)) \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(t) g^{ij}(t) \\ &= (\det g_{ij}(t)) \langle h(t), g(t) \rangle, \end{aligned}$$

e quindi

$$(\det g_{ij}(t))'(0) = (\det g_{ij}) \langle h, g \rangle = 0.$$

Inoltre,

$$(\det g_{ij}(t))'' = (\det g_{ij}(t))' \langle h(t), g(t) \rangle + (\det g_{ij}(t)) \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(t) g^{ij}(t),$$

per cui

$$\begin{aligned} (\det g_{ij}(t))''(0) &= (\det g_{ij}) \left( \sum_{i,j=1}^n (h'_{ij}(t) g^{ij}(t) + h_{ij}(t) (g^{ij})'(t)) \right) (0) \\ &= (\det g_{ij}) \left( \sum_{i,j=1}^n (g''_{ij}(t) g^{ij}(t) + h_{ij}(t) (g^{ij})'(t)) \right) (0) \\ &= (\det g_{ij}) \sum_{i,j=1}^n \{ g''_{ij}(0) g^{ij}(0) + h_{ij}(-h^{ij}) \} \\ &= (\det g_{ij}) \left( \sum_{r,s=1}^n h_i^r h_j^s g_{rs} g^{ij} - \sum_{i,j=1}^n h^{ij} h_{ij} \right) \\ &= (\det g_{ij}) \left( \sum_{i,s=1}^n h^{is} h_{is} - \sum_{i,j=1}^n h^{ij} h_{ij} \right) = 0. \end{aligned}$$

Allo stesso modo, si vede che:

$$(\det g_{ij}(t))'''(0) = 0, \dots, (\det g_{ij}(t))^{(r)}(0) = 0.$$

Dalla formula di Taylor, segue che:

$$(\det g_{ij})(t) = (\det g_{ij})(0) = \det(g_{ij}) = \text{cost.}$$

□

*Dimostrazione.* (del Teorema 11.4)

Sia  $g(t)$  una curva differenziabile di  $\mathcal{M}$  tale che  $g(0) = g$ . Poniamo

$$I(t) := I(g(t)) = \int_M r(t) v_{g(t)}.$$

Usando le notazioni precedentemente introdotte, si ha

$$\frac{dI}{dt}(t) = \int_M A(t) + \int_M B(t)$$

e, applicando i Lemmi 11.8 e 11.9, abbiamo

$$\frac{dI}{dt}(t) = - \int_M \langle Ric(t) - \frac{1}{2} r(t) g(t), h(t) \rangle v_{g(t)}.$$

Pertanto,

$$\left. \frac{dI}{dt}(t) \right|_{t=0} = - \int_M \langle Ric - \frac{r}{2} g, h \rangle v_g, \quad (11.3)$$

dove  $h := h(0)$ ,  $r = r(0)$  e  $Ric = Ric(0)$ .

Se  $g$  è una metrica di Einstein, quindi  $Ric = (r/n)g$  con  $r = \text{cost.}$ , applicando il Lemma 11.10, la (11.3) diventa

$$\left. \frac{dI}{dt}(t) \right|_{t=0} = \frac{n-2}{2} r \int_M \langle g, h \rangle v_g = 0.$$

Viceversa, supponiamo che  $g$  sia una metrica critica per il funzionale  $I(g)$ . Allora

$$\left. \frac{dI}{dt}(0) = 0 \quad \forall g(t) \text{ curva differenziabile di } \mathcal{M} \text{ con } g(0) = g.$$

Applicando la (11.3), abbiamo

$$\int_M \langle Ric - (r/2)g, h \rangle v_g = 0, \quad (11.4)$$

dove  $h = h(0) = g'(0)$ . Consideriamo il tensore simmetrico del secondo ordine  $h := Ric - (r/n)g$ . Tale tensore soddisfa  $\langle h, g \rangle = 0$ , infatti:

$$\langle h, g \rangle = \langle Ric - (r/n)g, g \rangle = \langle Ric, g \rangle - (r/n) \langle g, g \rangle = r - r = 0.$$

Applicando il Lemma 11.11, possiamo considerare una curva differenziabile  $g(t)$  di metriche di  $\mathcal{M}$  con  $g(0) = g$  e  $g'(0) = h$ . Allora la (11.4), siccome  $h = Ric - (r/n)g$ , diventa:

$$\int_M \langle Ric - (r/2)g, Ric - (r/n)g \rangle v_g = 0. \quad (11.5)$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\langle Ric - \frac{r}{2}g, Ric - \frac{r}{n}g \rangle &= \langle Ric, Ric \rangle - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)r \langle Ric, g \rangle + \frac{r^2}{2n} \langle g, g \rangle \\
&= \langle Ric, Ric \rangle - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)r \operatorname{tr} Ric + \frac{r^2}{2n} \operatorname{tr} g \\
&= \langle Ric, Ric \rangle - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)r^2 + \frac{r^2}{2n}n \\
&= \langle Ric, Ric \rangle - \frac{r^2}{n} = \langle Ric - \frac{r}{n}g, Ric - \frac{r}{n}g \rangle \\
&= \|Ric - (r/n)g\|^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

la (11.5) implica che  $Ric = (r/n)g$ , ossia  $g$  è una metrica di Einstein.  $\square$

**Osservazione 11.12.** Se  $\dim M=2$ ,  $Ric = (r/2)g$  e quindi, dalla formula (11.4), segue che

$$\frac{dI(g(t))}{dt} = 0 \quad \forall g(t) \text{ di } \mathcal{M} \text{ con } g(0) = g.$$

Ciò non è sorprendente in quanto, applicando il Teorema di Gauss-Bonnet per varietà riemanniane compatte 2-dimensionali (cfr. Sezione 10.5), si ha:

$$I(g(t)) = 2\pi\chi(M) = \text{costante}.$$

**Osservazione 11.13.** Osserviamo che se  $\bar{g} = cg$ , con  $c = \text{cost} > 0$ , allora  $\bar{Ric} = Ric$  (cfr. Esercizio 8.52) e  $\bar{r} = r/c$ . In particolare, se  $g$  è una metrica di Einstein anche la metrica  $\bar{g}$  è di Einstein. Infatti:

$$\bar{Ric} = Ric = (r/n)g = (\bar{r}/n)cg = (\bar{r}/n)\bar{g}.$$

D'altronde,  $\operatorname{vol}(M, \bar{g}) = \operatorname{vol}(M, cg) = c^{n/2}\operatorname{vol}(M, g)$ . Pertanto, nel Teorema di Hilbert, l'ipotesi di considerare metriche di Einstein di volume unitario non è restrittiva.

**Osservazione 11.14.** Sia  $(M, \eta)$  una varietà di contatto compatta. Ricordiamo che ogni metrica associata alla forma di contatto  $\eta$  determina un tensore  $\varphi$  di tipo  $(1, 1)$  (cfr. Sezione 4.6). Inoltre, tutte le metriche associate a  $\eta$  determinano la stessa forma di volume (cfr. [11], p.49), quindi l'insieme  $\mathcal{A}(\eta)$  di tutte le metriche associate a  $\eta$  è contenuto nell'insieme  $\mathcal{M}$  di tutte le metriche con fissato volume. Se consideriamo il funzionale  $I(g)$  ristretto all'insieme  $\mathcal{A}(\eta)$ , allora ci aspettiamo una condizione più debole per i punti critici. Infatti, una metrica  $g \in \mathcal{A}(\eta)$  è un punto critico per il funzionale  $I(g)$  se, e solo se, la metrica  $g$  soddisfa la condizione  $Q \circ \varphi|_{\ker \eta} = \varphi \circ Q|_{\ker \eta}$ , dove  $Q$  è l'operatore di Ricci associato a  $g$  (cfr. [11], Theorem 10.7).

In dimensione tre, se consideriamo la curvatura scalare di Webster  $W$  definita (10.2) e il funzionale  $\tilde{I}(g)$  dato dall'integrale di  $W$  e definito su  $\mathcal{A}(\eta)$ ,

allora una metrica  $g \in \mathcal{A}(\eta)$  è un punto critico del funzionale  $\tilde{I}$  se, e solo se, il campo vettoriale di Reeb della forma di contatto  $\eta$  è di Killing rispetto a  $g$ , ovvero la varietà è di K-contatto (cfr. Chern-Hamilton [26], e [87] per una differente dimostrazione). Una caratterizzazione variazionale delle varietà di K-contatto in dimensione  $(2n + 1)$  è data in [12].

## 11.2 Geodetiche come punti critici dell'energia

Sia  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , una curva differenziabile di una varietà riemanniana  $(M, g)$ . L'energia di  $\sigma$  è definita da

$$E(\sigma) := \frac{1}{2} \int_0^1 \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt.$$

Scopo principale di questa sezione è determinare le curve geodetiche come punti critici del funzionale energia. Iniziamo esaminando prima una situazione particolare relativa alle curve periodiche.

Sia  $\gamma$  una curva differenziabile chiusa periodica dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ , il cui periodo è  $2\pi$ . Tale curva si può esprimere nella forma

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \text{con } \gamma(0) = \gamma(2\pi).$$

Sia  $X$  l'insieme di tutte le curve  $\gamma$  di questo tipo. Consideriamo il seguente

**Problema:** Determinare i punti critici del funzionale energia

$$E : X \longrightarrow \mathbb{R}, \gamma \longmapsto E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt.$$

In questo caso i punti di  $X$  sono curve, per risolvere il problema consideriamo una curva di curve, ossia una variazione  $\gamma_s$  di  $\gamma$  in  $X$ :

$$\gamma_s(t) = (x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad |s| < \epsilon,$$

con  $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ ,  $\gamma_s(2\pi) = \gamma_s(0)$ . Posto  $E(s) = E(\gamma(s))$  e  $x_i(t, 0) = x_i(t)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} E'(0) &= E'(s)|_{s=0} = \left( \frac{d}{ds} E(\gamma_s(t)) \right)_{s=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d}{ds} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{d}{dt} x_i(t, s) \right)^2 \right)_{s=0} dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \left( \frac{d}{dt} x_i(t, s) \right)_{s=0} \left( \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} x_i(t, s) \right)_{s=0} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{dx_i}{dt}(t) \left( \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} x_i(t, s) \right)_{s=0} dt \\
&= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{dx_i}{dt}(t) \left( \frac{d}{ds} x_i(t, s) \right)_{s=0} \right]_0^{2\pi} \\
&\quad - \sum_{i=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{d^2 x_i}{dt^2}(t) \left( \frac{d}{ds} x_i(t, s) \right)_{s=0} dt.
\end{aligned}$$

Siccome  $x_i(t)$  e  $x_i(t, s)$  sono funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ , il primo termine della formula precedente si annulla. Dunque, otteniamo

$$E'(0) = - \int_0^{2\pi} g_0 \left( \left( \frac{d}{ds} \gamma(t, s) \right)_{s=0}, \ddot{\gamma}(t) \right) dt, \quad (11.6)$$

dove  $\ddot{\gamma}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t)$  e  $g_0$  denota la metrica euclidea di  $\mathbb{R}^3$ . Ora, sia  $\gamma(t)$  un punto critico per  $E$ , allora l'espressione di  $E'(0)$  data dalla (11.6) si annulla per ogni variazione  $\gamma(t, s)$  di  $\gamma(t)$ . Consideriamo la variazione definita da

$$\gamma(t, s) = \gamma(t) + s\ddot{\gamma}(t).$$

Tale variazione è periodica e soddisfa  $\gamma(t, 0) = \gamma(t)$  con  $\frac{d}{ds} \gamma(t, s) = \ddot{\gamma}(t)$ , per cui dalla (11.6) segue che

$$\int_0^{2\pi} \|\ddot{\gamma}(t)\|^2 dt = 0,$$

e quindi

$$\gamma(t) = at + b, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^3.$$

Dalla periodicità segue che  $a = 0$ . Pertanto, in questo problema variazionale i punti critici sono curve costanti  $\gamma(t) = b = \text{cost}$ .

La situazione è differente se consideriamo il problema di determinare i punti critici di  $E : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $X_1$  è il sottoinsieme di  $X$  costituito da tutte le curve chiuse periodiche, di periodo  $2\pi$ , che sono curve della sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$ . In questo caso ci aspettiamo di trovare per i punti critici una condizione meno rigida in quanto le variazioni da considerare sono meno generali. Procedendo come prima, troviamo la formula variazionale (11.6). In questo caso la variazione periodica soddisfa:  $\gamma(t, s) \in \mathbb{S}^2$  per ogni  $t$  e per ogni  $s$ . Differenziando, rispetto ad  $s$ , la relazione  $g_0(\gamma(t, s), \gamma(t, s)) = 1$ , abbiamo

$$g_0 \left( \frac{d}{ds} \gamma(t, s), \gamma(t, s) \right)_{s=0} = 0, \text{ cioè } g_0 \left( \left( \frac{d}{ds} \gamma(t, s) \right)_{s=0}, \gamma(t) \right) = 0,$$

e quindi

$$\left( \frac{d}{ds} \gamma(t, s) \right)_{s=0} \in T_{\gamma(t)} \mathbb{S}^2 = \gamma(t)^\perp$$

per ogni variazione periodica  $\gamma(t, s)$  di  $\gamma(t)$  sulla sfera  $\mathbb{S}^2$ . Pertanto, se  $\gamma(t)$  è un punto critico, la componente tangente di  $\ddot{\gamma}(t)$  lungo  $T_{\gamma(t)}\mathbb{S}^2$  è nulla (basta definire la variazione  $\gamma(t, s)$  di  $\gamma(t)$  definita, per ogni fissato  $t$ , dall'arco di circonferenza di raggio massimo  $\gamma_t(s)$  a sua volta definito per  $|s| < \delta$  dalle condizioni  $\gamma_t(0) = \gamma(t)$  e  $\dot{\gamma}_t(0) = \dot{\gamma}^\top(t)$ ). Di conseguenza,

$$\ddot{\gamma}(t) = g_0(\ddot{\gamma}(t), \gamma(t))\gamma(t). \quad (11.7)$$

Da  $g_0(\gamma(t), \gamma(t)) = 1$ , segue che  $g_0(\dot{\gamma}(t), \gamma(t)) = 0$  e quindi

$$g_0(\ddot{\gamma}(t), \gamma(t)) + g_0(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Pertanto, la (11.7) diventa

$$\ddot{\gamma}(t) + g_0(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\gamma(t) = 0. \quad (11.8)$$

Inoltre, usando la (11.8), abbiamo

$$\frac{d}{dt}g_0(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g_0(\ddot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = -2g_0(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))g_0(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = 0,$$

e quindi

$$g_0(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \text{cost} = c^2.$$

Supponiamo  $\gamma(t)$  non banale, e quindi  $c > 0$ . Allora, le soluzioni dell'equazione differenziale (11.8), che si può riscrivere nella forma

$$\frac{d^2x_i(t)}{dt^2} + c^2x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

sono del tipo  $x_i(t) = a_i \cos ct + b_i \sin ct$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e quindi

$$\gamma(t) = (\cos ct)a + (\sin ct)b,$$

dove  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ , pensati come vettori, sono linearmente indipendenti (altrimenti  $\gamma(t)$  sarebbe un segmento di retta). Inoltre:

$$\begin{aligned} a = \gamma(0) = \gamma(2\pi) &= (\cos 2\pi c)a + (\sin 2\pi c)b \\ &\iff (1 - \cos 2\pi c)a - (\sin 2\pi c)b = 0; \end{aligned}$$

ciò implica che  $\cos 2\pi c = 1$  e  $\sin 2\pi c = 0$ , e quindi deve essere  $c = k \in \mathbb{Z}$ . Poi,

$$\gamma(t) \in \mathbb{S}^2 \iff \|a\|^2 \cos^2 kt + \|b\|^2 \sin^2 kt + 2g_0(a, b)(\cos kt)(\sin kt) = 1 \quad \forall t.$$

Pertanto, prendendo  $t = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$  e  $t = \frac{\pi}{4}$ , si ha

$$\|a\|^2 = 1, \|b\|^2 = 1 \text{ e } a \perp b.$$

In definitiva,

$$\gamma(t) = (\cos kt)a + (\sin kt)b, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

è una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^2$  percorsa  $k$  volte. Viceversa, se  $\gamma(t)$  è una circonferenza di raggio massimo di  $\mathbb{S}^2$  percorsa  $k$  volte, allora chiaramente la (11.6) è soddisfatta per ogni variazione  $\gamma(t, s)$  di  $\gamma(t)$  in  $X_1$ . Basta osservare che in tal caso  $(\frac{d}{ds}\gamma(t, s))_{s=0} \in \gamma(t)^\perp$ , mentre  $\dot{\gamma}(t)$  è parallelo a  $\gamma(t)$ . Abbiamo quindi provato il seguente teorema.

**Teorema 11.15.** *Nell'insieme di tutte le curve differenziabili chiuse  $\gamma(t)$ , di periodo  $2\pi$ , della sfera  $\mathbb{S}^2$ , i punti critici del funzionale energia*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

*sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo  $\gamma(t)$ , di  $\mathbb{S}^2$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , percorse  $k$  volte,  $k \in \mathbb{Z}$ .*

Il Teorema 11.15 ci dice che le circonferenze di raggio massimo della sfera euclidea  $\mathbb{S}^2$  sono i punti critici del funzionale energia definito in un opportuno insieme, d'altronde tali circonferenze sono esattamente le curve geodetiche della stessa sfera. In effetti, come vedremo, le curve geodetiche di un'arbitraria varietà riemanniana si possono ottenere come punti critici del funzionale energia. Sia  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , una curva differenziabile di una fissata varietà riemanniana  $(M, g)$ . Si noti che l'energia di una curva, a differenza della sua lunghezza, dipende dalla parametrizzazione. Se  $\theta : [0, 1] \rightarrow [\alpha, \beta]$  è un diffeomorfismo, le curve  $\tilde{\sigma} : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ ,  $\theta \mapsto \tilde{\sigma}(\theta)$ , e  $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \theta : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , in generale, non hanno la stessa energia. Infatti:

$$\begin{aligned} 2E(\sigma) &= \int_0^1 \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt = \int_0^1 \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta(t))\|^2 |\theta'(t)|^2 dt \\ &\neq \int_\alpha^\beta \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta)\|^2 d\theta = 2E(\tilde{\sigma}). \end{aligned}$$

**Lemma 11.16.** *Si ha*

$$L^2(\sigma) \leq 2E(\sigma),$$

*dove l'uguaglianza si ha se, e solo se,  $\sigma(t)$  è parametrizzata a velocità costante (ossia  $t$  è proporzionale all'ascissa curvilinea). In particolare, se  $\gamma(t)$  è una curva geodetica,  $L^2(\gamma) = 2E(\gamma)$ .*



*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $L(\sigma) = \int_0^1 \|\dot{\sigma}(t)\| dt$ . La disuguaglianza di Schwarz ci dice che

$$\left( \int_0^1 f_1 f_2 dt \right)^2 \leq \left( \int_0^1 f_1^2 dt \right) \left( \int_0^1 f_2^2 dt \right),$$

dove l'uguaglianza si ha se, e solo se,  $f_2$  è proporzionale a  $f_1$ . Applicando la suddetta disuguaglianza alle funzioni  $f_1 = \text{cost.} = 1$  e  $f_2 = \|\dot{\sigma}(t)\|$ , si ha l'enunciato del lemma.  $\square$

Per ogni  $p, q \in M$ , poniamo

$$\Omega(p, q) = \{ \sigma : [0, 1] \rightarrow M \text{ differenziabile con } \sigma(0) = p \text{ e } \sigma(1) = q \}.$$

**Proposizione 11.17.** *Per il funzionale energia  $E : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$  i punti di minimo sono esattamente le geodetiche minimali. In altre parole, se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  è una geodetica minimale con  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) = q$ , allora*

$$E(\gamma) \leq E(\sigma) \quad \forall \sigma \in \Omega(p, q),$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se,  $\sigma$  è una curva geodetica minimale.

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma(t)$  una geodetica minimale. Siccome  $\gamma$  è una curva minimale con  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  costante, applicando il Lemma 11.16, si ha:

$$2E(\gamma) = L^2(\gamma) \leq L^2(\sigma) \leq 2E(\sigma).$$

Inoltre,  $E(\gamma) = E(\sigma) \Rightarrow 2E(\sigma) = L^2(\sigma) \Rightarrow \sigma(t)$  è parametrizzata con parametro  $t$  proporzionale all'ascissa curvilinea  $s$  ( $t = cs$ ). Inoltre  $E(\gamma) = E(\sigma) \Rightarrow L(\sigma) = L(\gamma) \Rightarrow \sigma(t)$  è minimale con  $t = cs$ . Pertanto, per il Corollario 7.46,  $\sigma(t)$  è una geodetica minimale. Viceversa, sia  $\sigma(t)$  una geodetica minimale. Allora  $\|\dot{\sigma}(t)\| = \text{cost.}$  implica  $2E(\sigma) = L^2(\sigma)$ . Inoltre, essendo  $\sigma(t)$  minimale, si ha  $L^2(\sigma) = L^2(\gamma) = 2E(\gamma)$ , e quindi  $E(\gamma) = E(\sigma)$ .  $\square$

Sia  $A$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$ , un'applicazione differenziabile  $H : A \rightarrow M$ ,  $(t, s) \mapsto u(t, s)$ , si può pensare come una superficie parametrizzata di  $M$ . Nella Sezione 7.2 abbiamo osservato che

$$\frac{\partial H}{\partial t} : (t, s) \mapsto \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{(t,s)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial s} : (t, s) \mapsto \left( \frac{\partial H}{\partial s} \right)_{(t,s)}$$

sono campi differenziabili di vettori lungo  $H$ . Inoltre, si è visto che vale la seguente equazione (cfr. Lemma 7.39):

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (11.9)$$

Sia

$$H : [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad (t, s) \mapsto H(t, s) = \sigma_s(t),$$

una *variazione* della curva  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ , cioè un'applicazione differenziabile con

$$H(t, 0) = \sigma_0(t) = \sigma(t).$$

Se inoltre, per ogni  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , si ha

$$H(0, s) = \sigma_s(0) = \sigma(0) \quad \text{e} \quad H(1, s) = \sigma_s(1) = \sigma(1),$$

allora la *variazione* è detta *propria* (cfr. Figura 11.1).

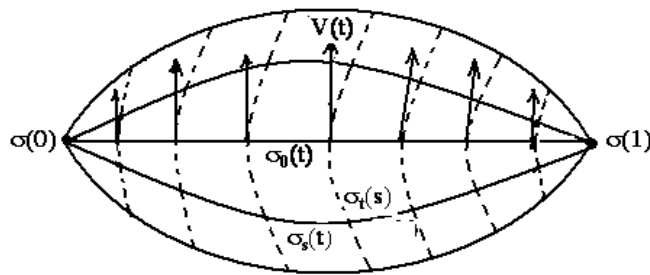


Figura 11.1: Una variazione propria della curva  $\sigma$ .

Per ogni fissato  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,

$$\sigma_s : [0, 1] \rightarrow M, \quad t \mapsto \sigma_s(t) = H(t, s),$$

è una *curva della variazione*  $H$ . Se la variazione è propria, tutte le curve  $\sigma_s(t)$  hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Per ogni fissato  $t \in [0, 1]$ , la curva

$$\sigma_t : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad s \mapsto \sigma_t(s) = H(t, s),$$

è detta *curva trasversa* della variazione. Il vettore velocità  $V(t)$  della curva trasversa  $\sigma_t(s)$ , per  $s = 0$ , è dato da

$$V(t) = \left( \frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right) (t, 0) = \left( \frac{d}{ds} \sigma_t(s) \right)_{s=0} = \dot{\sigma}_t(0) \in T_{H(t,0)}M = T_{\sigma(t)}M.$$

Quindi,  $V(t) \in \mathfrak{X}(\sigma)$  è un campo differenziabile lungo  $\sigma_0(t)$  che viene detto *campo variazionale* di  $H$ . Se la variazione è propria, si ha

$$\sigma_0(s) = H(0, s) = \sigma(0) = p = \text{cost.},$$

$$\sigma_1(s) = H(1, s) = \sigma(1) = q = \text{cost.},$$

e quindi

$$\dot{\sigma}_1(0) = \dot{\sigma}_0(0) = 0, \quad \text{cioè} \quad V(1) = V(0) = 0.$$

La funzione

$$E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto E(s) = E(\sigma_s(t)) = \frac{1}{2} \int_0^1 \|\dot{\sigma}_s(t)\|^2 dt$$

è detta *energia* di  $H$ .

**Teorema 11.18. (formula della variazione prima)**

*Sia  $H(t, s)$  una variazione di  $\sigma$ . Allora*

$$E'(0) = \left( \frac{dE}{ds} \right)_{s=0} = \left\{ \left[ g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=0}^{t=1} \right\}_{s=0} - \int_0^1 g \left( V(t), \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \right) dt.$$

*In particolare, se la variazione  $H$  di  $\sigma$  è propria, si ha*

$$E'(0) = - \int_0^1 g \left( V(t), \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \right) dt.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la derivata della funzione energia:

$$E'(s) = \frac{dE}{ds} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \frac{d}{ds} g(\dot{\sigma}_s(t), \dot{\sigma}_s(t)) \right\} dt.$$

$X(s) := \dot{\sigma}_s(t) = \frac{d}{dt} \sigma_s(t) = \frac{\partial}{\partial t} H(t, s)$  è un campo vettoriale lungo la curva trasversa  $\sigma_t(s)$ . Applicando il Teorema 6.34 e la (11.9), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} g(\dot{\sigma}_s(t), \dot{\sigma}_s(t)) &= \frac{d}{ds} g \left( \frac{\partial}{\partial t} H(t, s), \frac{\partial}{\partial t} H(t, s) \right) \\ &= 2g \left( \frac{D}{ds} \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \\ &= 2g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Quindi

$$E'(s) = \frac{dE}{ds} = \int_0^1 g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt. \quad (11.11)$$

Poiché

$$\frac{d}{dt} g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) = g \left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) + g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

la (11.10) diventa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} g(\dot{\sigma}_s(t), \dot{\sigma}_s(t)) = \frac{d}{dt} g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) - g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right).$$

Quindi,

$$E'(s) = \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dt} g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right\} dt - \int_0^1 g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt$$

e

$$E'(0) = \left\{ \left[ g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=0}^{t=1} \right\}_{s=0} - \left\{ \int_0^1 g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \right\}_{s=0}.$$

Ricordiamo che

$$\frac{\partial H}{\partial s}(t, 0) = V(t) \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t}(t, 0) = \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t).$$

Pertanto,

$$E'(0) = \left\{ \left[ g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=0}^{t=1} \right\}_{s=0} - \int_0^1 g \left( V(t), \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \right) dt.$$

Inoltre, se la variazione è propria, abbiamo

$$\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0) = V(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial s}(1, 0) = V(1) = 0$$

e il termine

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \left[ g \left( \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=0}^{t=1} \right\}_{s=0} \\ &= \left[ g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(1, s), \frac{\partial H}{\partial t}(1, s) \right) - g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(0, s), \frac{\partial H}{\partial t}(0, s) \right) \right]_{s=0} \\ &= g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(1, 0), \frac{\partial H}{\partial t}(1, 0) \right) - g \left( \frac{\partial H}{\partial s}(0, 0), \frac{\partial H}{\partial t}(0, 0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Dunque,

$$E'(0) = - \int_0^1 g \left( V(t), \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \right) dt.$$

□

**Definizione 11.19.** Una curva differenziabile  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , si dice *punto critico* per il funzionale energia  $E$  se per ogni variazione propria  $H(t, s) = \sigma_s(t)$  di  $\sigma$  si ha

$$\left( \frac{dE(s)}{ds} \right)_{s=0} = 0.$$

Come conseguenza del Teorema 11.18, si ottiene la seguente caratterizzazione variazionale delle geodetiche.

**Teorema 11.20.** *Sia  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , una curva differenziabile. Allora:  $\sigma(t)$  è una curva geodetica se, e solo se,  $\sigma(t)$  è punto critico del funzionale energia  $E$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\sigma(t)$  è una curva geodetica, allora  $\frac{D}{dt}\dot{\sigma}(t) = 0$  e quindi, applicando il Teorema 11.18,  $\sigma$  è punto critico di  $E$ . Viceversa, sia  $\sigma$  punto critico di  $E$ , ossia  $E'(0) = 0$  per ogni variazione propria di  $\sigma$ . Consideriamo il campo di vettori

$$W(t) = f(t) \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \in \mathfrak{X}(\sigma),$$

dove  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  è un'applicazione differenziabile con  $f(t) > 0$  per ogni  $t \in ]0, 1[$  e  $f(0) = f(1) = 0$ . Applicando il Teorema 7.36, per ogni  $t \in [0, 1]$  esiste  $U_t$  intorno normale di  $\sigma(t)$ , ed esiste un  $\delta_t > 0$  tale che  $\exp_{\sigma(t)} V$  sia definita per  $\|V\| < \delta_t$ .  $\{U_t\}$  è un ricoprimento aperto del compatto  $\sigma([0, 1])$ , quindi esiste un sottoricoprimento finito  $U_1, \dots, U_k$  di  $\sigma([0, 1])$ . Prendendo  $\delta := \min \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$ , si ha che  $\exp_{\sigma(t)} V$  è definita per ogni  $t \in [0, 1]$  e per ogni  $V \in T_{\sigma(t)}M$ ,  $\|V\| < \delta$ . Posto  $\bar{\delta} = \max\{\|W(t)\|, t \in [0, 1]\}$  e  $\epsilon = \delta/\bar{\delta}$ , si ha

$$\|sW(t)\| = |s| \|W(t)\| < \epsilon \|W(t)\| < \epsilon \bar{\delta} = \delta \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Quindi, l'applicazione

$$H(t, s) := \exp_{\sigma(t)} sW(t)$$

è definita per ogni  $t \in [0, 1]$  e per ogni  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Inoltre,  $H(t, s)$  soddisfa:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \exp_{\sigma(t)} 0 = \sigma(t), \\ H(0, s) &= \exp_{\sigma(0)} sW(0) = \exp_{\sigma(0)} 0 = \sigma(0), \\ H(1, s) &= \exp_{\sigma(1)} sW(1) = \exp_{\sigma(1)} 0 = \sigma(1). \end{aligned}$$

Pertanto  $H(t, s)$  definisce una variazione propria di  $\sigma$ . Inoltre, il campo variazionale di questa variazione è dato da:

$$\begin{aligned} V(t) &= \left( \frac{\partial}{\partial s} H(t, s) \right)_{|s=0} = \left( \frac{\partial}{\partial s} \exp_{\sigma(t)} sW(t) \right)_{|s=0} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial s} \gamma_{W(t)}(s) \right)_{|s=0} = \dot{\gamma}_{W(t)}(0) = W(t). \end{aligned}$$

Applicando la formula della variazione prima alla variazione definita da  $H(t, s) := \exp_{\sigma(t)} sW(t)$ , si ha:

$$0 = E'(0) = - \int_0^1 g \left( f(t) \frac{D\dot{\sigma}}{dt}, \frac{D\dot{\sigma}}{dt} \right) dt = - \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D\dot{\sigma}}{dt} \right\|^2 dt.$$

Pertanto,  $\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = 0$  e quindi  $\sigma(t)$  è una curva geodetica.  $\square$

**Osservazione 11.21.** Si osservi che, con qualche aggiustamento nelle dimostrazioni precedenti, si possono determinare le formule del Teorema 11.18 per curve differenziabili a tratti. Inoltre, il Teorema 11.20 si può esprimere nella forma seguente: se  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $t \mapsto \sigma(t)$ , è una curva differenziabile a tratti, allora  $\sigma(t)$  è una curva (differenziabile) geodetica se, e solo se,  $\sigma(t)$  è punto critico del funzionale energia  $E$  definito nell'insieme di tutte le curve differenziabili a tratti che congiungono  $p = \sigma(0)$  con  $q = \sigma(1)$  (cfr. [32]).

**Osservazione 11.22.** Si noti che mentre la nozione di curva geodetica ha carattere locale, la caratterizzazione di curva geodetica come punto critico del funzionale energia ha carattere globale.

Concludiamo questa sezione dimostrando la formula della variazione seconda. Tale formula è uno strumento usato per studiare il comportamento dell'energia in prossimità di un punto critico, ossia la stabilità di un punto critico.

**Lemma 11.23.** Se  $u : A \rightarrow M$ ,  $(t, s) \mapsto u(t, s)$ , è un'applicazione differenziabile definita in  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ , e  $V : A \rightarrow TM$  è un'applicazione differenziabile definita da  $(t, s) \mapsto V(t, s) \in T_{u(t,s)}M$  (quindi un campo di vettori lungo  $u$ ), allora

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V = -R \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s} \right) V,$$

dove  $R$  è il tensore di curvatura di  $(M, g)$ .

*Dimostrazione.* Se  $(x_i)$  è un sistema di coordinate locali, si ha

$$V(t, s) = \sum V^i(t, s) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{u(t,s)},$$

dove  $V^i(t, s)$  sono funzioni differenziabili su  $A$ . Di conseguenza,

$$\frac{DV}{ds} = \sum_i \left( \frac{\partial V^i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + V^i \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

$$\frac{D}{dt} \frac{DV}{ds} = \sum_i \left( \frac{\partial^2 V^i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial s} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial t} \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} + V^i \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

e (scambiando  $t$  con  $s$ )

$$\frac{D}{ds} \frac{DV}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial^2 V^i}{\partial s \partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial t} \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial V^i}{\partial s} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + V^i \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Quindi,

$$\frac{D}{dt} \frac{DV}{ds} - \frac{D}{ds} \frac{DV}{dt} = \sum_i V^i \left( \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (11.12)$$

Siccome

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial x_j \circ u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{si ha}$$

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_j \left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial u^j}{\partial s} \frac{D}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_j \left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial u^j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial u}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_j \left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial s} \frac{\partial u^k}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \left( \frac{\partial^2 u^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial t} \frac{\partial u^k}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Pertanto, tenendo conto che  $[\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial t} \frac{\partial u^k}{\partial s} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= - \sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial t} \frac{\partial u^k}{\partial s} R \left( \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= -R \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

e quindi, applicando la (11.12), otteniamo la formula enunciata nel lemma.  $\square$

**Teorema 11.24. (formula della variazione seconda)**

Sia  $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow M$  una curva geodetica. Se  $H(t, s)$  è una variazione propria di  $\gamma$ , allora

$$\begin{aligned} E''(0) &= \left( \frac{d^2 E}{ds^2} \right)_{|s=0} = \int_0^1 \left\{ g \left( \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right) - g(R(V, \dot{\gamma})V, \dot{\gamma}) \right\} dt \\ &= - \int_0^1 g \left( V(t), \frac{D^2 V}{dt^2} - R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} \right) dt, \end{aligned}$$

dove  $V$  è il campo variazionale di  $H$  ed  $R$  è il tensore di curvatura di  $(M, g)$ .

*Dimostrazione.* Partiamo dalla formula (11.11):

$$E'(s) = \int_0^1 g \left( \frac{D \partial H}{dt \partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt.$$

Derivando questa equazione, tenendo conto della compatibilità della connessione di Levi-Civita con la metrica  $g$ , otteniamo:

$$E''(s) = \int_0^1 g \left( \frac{D \partial H}{dt \partial s}, \frac{D \partial H}{ds \partial t} \right) dt + \int_0^1 g \left( \frac{D D \partial H}{ds dt \partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt. \quad (11.13)$$

Applicando i Lemmi 7.39 e 11.23, l'equazione (11.13) diventa

$$\begin{aligned} E''(s) &= \int_0^1 g \left( \frac{D \partial H}{dt \partial s}, \frac{D \partial H}{dt \partial s} \right) dt + \int_0^1 g \left( \frac{D D \partial H}{ds dt \partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \\ &= \int_0^1 g \left( \frac{D \partial H}{dt \partial s}, \frac{D \partial H}{dt \partial s} \right) dt + \int_0^1 g \left( \frac{D D \partial H}{dt ds \partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \\ &\quad + \int_0^1 g \left( R \left( \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial s} \right) \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Poiché il secondo termine della (11.14) è dato da:

$$\frac{d}{dt} g \left( \frac{D \partial H}{ds \partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) = g \left( \frac{D D \partial H}{dt ds \partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) + g \left( \frac{D \partial H}{ds \partial s}, \frac{D \partial H}{dt \partial t} \right),$$

la stessa equazione (11.14) diventa

$$\begin{aligned} E''(s) &= \int_0^1 g \left( \frac{D \partial H}{dt \partial s}, \frac{D \partial H}{dt \partial s} \right) dt + \left[ g \left( \frac{D \partial H}{ds \partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &\quad - \int_0^1 g \left( \frac{D \partial H}{ds \partial s}, \frac{D \partial H}{dt \partial t} \right) dt + \int_0^1 g \left( R \left( \frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial H}{\partial s} \right) \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt. \end{aligned}$$



Per  $s = 0$ , la curva  $H(t, 0) = \gamma(t)$  è una curva geodetica e quindi

$$\left( \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{s=0} = \frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0.$$

Pertanto, per  $s = 0$ , il terzo termine della precedente equazione è nullo. Inoltre, per  $s = 0$ , risulta

$$\frac{\partial H}{\partial s}(t, 0) = V(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial t}(t, 0) = \dot{\gamma}(t).$$

Di conseguenza, dalla precedente equazione, otteniamo

$$\begin{aligned} E''(0) &= \int_0^1 g \left( \frac{D}{dt} V(t), \frac{D}{dt} V(t) \right) dt + \left[ g \left( \frac{D}{ds} \frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &\quad + \int_0^1 g(R(\dot{\gamma}(t), V(t))V(t), \dot{\gamma}(t)) dt. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Poiché la variazione è propria:  $H(0, s) = \text{cost.} = \gamma(0)$  e  $H(1, s) = \text{cost.} = \gamma(1)$  per ogni  $s$ . Ciò implica che il secondo termine dell'equazione (11.15) è nullo. Inoltre, sempre tenendo presente che la variazione è propria,  $V(1) = V(0) = 0$  e quindi integrando la seguente equazione:

$$\frac{d}{dt} g \left( V, \frac{DV}{dt} \right) = g \left( \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right) + g \left( V, \frac{D^2V}{dt^2} \right),$$

abbiamo

$$\int_0^1 g \left( \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right) dt = - \int_0^1 g \left( V, \frac{D^2V}{dt^2} \right) dt.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

**Osservazione 11.25.** Sia  $\gamma(t)$  un arco geodetico. L'operatore

$$J_\gamma : \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma), V \longmapsto J_\gamma V = -\frac{D^2V}{dt^2} + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

è detto *operatore di Jacobi* lungo la geodetica  $\gamma$ . L'applicazione bilineare simmetrica  $\text{Hess}_\gamma$  definita da

$$\text{Hess}_\gamma(V, W) = \int_0^1 g(V, J_\gamma W) dt \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(\gamma),$$

è l'*hessiano dell'energia* nel punto critico  $\gamma$ . Se  $M$  ha curvatura sezionale non positiva, nella formula della variazione seconda il termine con la curvatura è non negativo, inoltre il primo termine si annulla solo per variazioni parallele (altrimenti è positivo). Quindi, in tal caso, la derivata seconda  $E''(0) \geq 0$ . Pertanto: *su una varietà riemanniana con curvatura sezionale non positiva, una curva geodetica è stabile per il funzionale energia, equivalentemente, l'applicazione bilineare simmetrica  $\text{Hess}_\gamma$  è semidefinita positiva.*



# Capitolo 12

## Applicazioni armoniche

In questo capitolo vedremo che lo studio delle curve geodetiche fatto nella Sezione 11.2 è un caso particolare di uno studio molto più generale, ovvero quello delle applicazioni armoniche. Tale studio ha avuto inizio con il famoso articolo di J. Eells e J.H. Sampson [34] del 1964.

Le applicazioni armoniche, di cui studieremo alcuni aspetti geometrici, sono soluzioni di un problema variazionale e appaiono in modo naturale, così come le curve geodetiche, in vari problemi di geometria riemanniana. Per ulteriori sviluppi e approfondimenti sulle applicazioni armoniche si rinvia a Urakawa [112] e Xin [124].

### 12.1 Il fibrato vettoriale $f^{-1}TM'$

Il fibrato vettoriale  $f^{-1}TM'$  si rivelerà utile per lo studio delle applicazioni armoniche. Sia  $f \in C^\infty(M, M')$  un'applicazione differenziabile tra le varietà differenziabili  $M$  ed  $M'$ . Poniamo  $\dim M = n$  e  $\dim M' = n'$ . Sia  $TM'$  il fibrato tangente di  $M'$  con proiezione  $\pi : TM' \rightarrow M'$ .  $TM'$  è un fibrato vettoriale su  $M'$  di rango  $n'$  (cfr. Sezione 2.2).

**Definizione 12.1.** Un *campo di vettori lungo  $f$*  è un'applicazione differenziabile  $u : M \rightarrow TM'$  tale che  $\pi \circ u = f$ , quindi  $u(p) \in T_{f(p)}M'$  per ogni  $p \in M$ .

L'insieme dei campi di vettori lungo  $f$ , con le usuali operazioni di somma e di prodotto per numeri reali, è uno spazio vettoriale reale (di dimensione infinita) che denotiamo con  $\mathfrak{X}(f)$ , esso è anche un  $\mathcal{F}(M)$ -modulo. Sia  $(f^{-1}TM' = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_{f(p)}M', \pi, M)$  il *pull back del fibrato tangente  $TM'$  via  $f$* , dove

$$\pi : f^{-1}TM' \longrightarrow M, \quad X_{f(p)} \longmapsto p.$$

Tale fibrato, indicato anche con  $f^*TM'$ , è un fibrato vettoriale su  $M$  di rango  $n'$ . L'insieme delle sezioni del fibrato vettoriale  $f^{-1}TM'$  è esattamente  $\mathfrak{X}(f)$ . Una sezione  $X$  di  $TM'$ , ovvero un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M')$ , induce una

sezione  $\bar{X}$  di  $f^{-1}TM'$ , detto *sollevamento* di  $X$ . La sezione  $\bar{X} \in \mathfrak{X}(f)$  è così definita:

$$\bar{X} : M \longrightarrow f^{-1}TM', \quad p \longmapsto \bar{X}_p = X_{f(p)} = (X \circ f)(p).$$

Se  $a \in \mathcal{F}(M')$ , il suo sollevamento è la funzione  $\bar{a} = a \circ f \in \mathcal{F}(M)$ . Se  $Y = aX$ , si ha  $\bar{Y} = \bar{a}\bar{X}$ . Se  $(V, (y_\alpha))$  è una carta locale di  $M'$ , i sollevamenti dei campi di vettori coordinati  $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \in \mathfrak{X}(V)$  si indicano con

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} : f^{-1}(V) &\longrightarrow f^{-1}TV \\ p &\longmapsto \left( \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right)_{f(p)} = \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(p)} = \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f \right)(p). \end{aligned}$$

$\left( \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right)_{\alpha=1, \dots, n'}$  è una base locale per  $\mathfrak{X}(f)$ . Sia  $u \in \mathfrak{X}(f)$ , usando coordinate locali, poiché il vettore  $u(p) \in T_{f(p)}M'$ , si ha

$$\begin{aligned} u(p) &= \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha(p) \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(p)} = \left( \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f \right)(p) \quad \text{e quindi} \\ u &= \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}, \end{aligned}$$

dove  $u^\alpha \in \mathcal{F}(U)$  e  $U$  è un aperto di  $M$  con  $f(U) \subset V$ . In particolare, se  $X \in \mathfrak{X}(M')$ , localmente  $X = \sum_{\alpha=1}^{n'} X^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ , allora

$$\bar{X} = \sum_{\alpha=1}^{n'} (\bar{X}^\alpha \circ f) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{n'} (X^\alpha \circ f) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f.$$

Sia ora  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Con  $f_*X$  denotiamo la seguente applicazione

$$f_*X : M \longrightarrow f^{-1}TM', \quad p \longmapsto (f_*X)(p) := f_{*p}(X_p) \in T_{f(p)}M',$$

quindi  $\pi \circ (f_*X) = f$ . Localmente, posto

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad f^\alpha = y_\alpha \circ f,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} f_{*p}X_p &= \sum_{\alpha=1}^{n'} (f_{*p}X_p)(y_\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(p)} = \sum_{\alpha=1}^{n'} X_p(f^\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(p)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}(p) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f \right)(p) = \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha(p) \left( \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right)_p, \end{aligned}$$

dove le  $u^\alpha = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}$  sono differenziabili, quindi  $f_*X \in \mathfrak{X}(f)$ . Inoltre, se  $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ , dalla formula precedente segue che  $f_*(\lambda X) = \lambda f_*(X)$ . Quindi, abbiamo la seguente proposizione.

**Proposizione 12.2.** *Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ , si ha*

$$f_*X \in \mathfrak{X}(f) \text{ e } f_*(\lambda X) = \lambda f_*X.$$

*Localmente:*

$$f_*X = \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}. \quad (12.1)$$

*In particolare:*

$$f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\alpha=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}.$$

### Connessione e metrica indotte su $f^{-1}TM'$

Sia  $g'$  una metrica riemanniana su  $M'$ . La connessione di Levi-Civita  $\nabla'$  di  $(M', g')$  induce in modo naturale una connessione  $\bar{\nabla}$  sul fibrato  $f^{-1}TM'$ . Sia  $\frac{D'}{dt}$  l'operatore di derivazione covariante (indotto da  $\nabla'$ ) per campi di vettori lungo curve differenziabili di  $M'$ .

Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $u \in \mathfrak{X}(f)$ , vogliamo definire  $\bar{\nabla}_X u$ . Consideriamo  $\gamma(t)$  curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ . Allora,  $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$  è una curva differenziabile di  $M'$ ,  $u(t) = u(\gamma(t)) \in T_{\tilde{\gamma}(t)}M'$  è un campo di vettori lungo  $\tilde{\gamma}(t)$ , cioè  $u(t) \in \mathfrak{X}(\tilde{\gamma})$ , e  $f_*X_p = f_*\dot{\gamma}(0) = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$ . Dalla (6.4) si ha

$$\begin{aligned} \left( \frac{D'u(t)}{dt} \right) (0) &= \sum_{\alpha} \left( \frac{du^\alpha}{dt} (0) + \sum_{\beta, \gamma} \frac{dy_\beta}{dt} (0) u^\gamma (0) \Gamma'_{\beta\gamma}{}^\alpha (0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) (\gamma(0)) \\ &= \sum_{\alpha} \left( X_p(u^\alpha) + \sum_{\beta, \gamma} X_p^\beta u^\gamma(p) \Gamma'_{\beta\gamma}{}^\alpha (f(p)) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(p)}, \end{aligned}$$

e quindi  $\left( \frac{D'u(t)}{dt} \right) (0)$  dipende solo da  $X_p$  e  $u$ . Pertanto, si pone:

$$(\bar{\nabla}_X u)_p = \bar{\nabla}_{X_p} u = \nabla'_{f_*X_p} u := \left( \frac{D'u(t)}{dt} \right) (0) \in T_{f(p)}M'. \quad (12.2)$$

Nel caso in cui  $f = \sigma : I \rightarrow M'$  è una curva differenziabile, si vede facilmente che  $\bar{\nabla}$  è l'usuale operatore di derivazione covariante  $\frac{D'}{dt}$  su  $M'$  per campi di vettori definiti lungo  $\sigma$ .  $\bar{\nabla}$  si può anche pensare come l'operatore di derivazione covariante su  $M'$  per campi di vettori lungo  $f$ . Se consideriamo

$u = \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f$ , allora  $u(t) = \left( \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) (\tilde{\gamma}(t))$  è indotto dal campo di vettori  $\frac{\partial}{\partial y_\alpha}$  che è definito su un aperto di  $M'$ , per cui

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(0)} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \frac{D'u(t)}{dt}(0) = \nabla'_{\dot{\gamma}(0)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}.$$

Di conseguenza, dalla (12.2) segue che

$$\left( \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right)_p = \nabla'_{\dot{\gamma}(0)} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \nabla'_{f_* X_p} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \quad \text{ossia} \quad \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \nabla'_{f_* X} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}.$$

Più in generale, per ogni  $Y \in \mathfrak{X}(M')$  si ha

$$\left( \bar{\nabla}_X \bar{Y} \right)_p = \nabla'_{f_* X_p} Y = \left( \nabla'_{f_* X} Y \right)_p,$$

ossia

$$\bar{\nabla}_X \bar{Y} = \nabla'_{f_* X} Y. \quad (12.3)$$

A volte, implicitamente, si usa la notazione

$$\nabla'_{f_* X} f_* Y = \bar{\nabla}_X f_* Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Dalla (12.3) seguono

$$\bar{\nabla}_{X+Y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + \bar{\nabla}_Y \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}, \quad (12.4)$$

$$\bar{\nabla}_{\varphi X} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \varphi \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}, \quad (12.5)$$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e per ogni  $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ . Usando le equazioni (12.2), (12.4), (12.5), si prova facilmente che

$$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f), \quad (X, u) \longmapsto \bar{\nabla}_X u,$$

definisce una connessione lineare sul fibrato  $f^{-1}TM'$ , ossia sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- (a)  $\bar{\nabla}_{X+Y} u = \bar{\nabla}_X u + \bar{\nabla}_Y u, \quad \bar{\nabla}_{\varphi X} u = \varphi \bar{\nabla}_X u,$
- (b)  $\bar{\nabla}_X(u+v) = \bar{\nabla}_X u + \bar{\nabla}_X v, \quad \bar{\nabla}_X \varphi u = X(\varphi)u + \varphi \bar{\nabla}_X u,$

per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $u, v \in \mathfrak{X}(f)$  e  $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ . In particolare, la seconda della (b) segue da:

$$\begin{aligned} \left( \bar{\nabla}_X \varphi u \right)_p &= \bar{\nabla}_{X_p} \varphi u = \left( \frac{D'}{dt} (\varphi u)(t) \right) (0) = \frac{d\varphi}{dt}(0) u(0) + \varphi(0) \frac{D'u}{dt}(0) \\ &= X_p(\varphi) u(p) + \varphi(p) \bar{\nabla}_{X_p} u = \left( X(\varphi) u + \varphi \bar{\nabla}_X u \right)_p. \end{aligned}$$

La differenziabilità di  $\bar{\nabla}_X u$  segue dalle seguenti considerazioni locali.

Se  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  e  $(y_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n'}$  denotano coordinate locali definite rispettivamente in un aperto  $U \subset M$  e in un aperto  $V \subset M'$ , con  $f(U) \subset V$ , allora per ogni  $p \in U$ :

$$\begin{aligned} \left( \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_p &= \bar{\nabla}_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} = \nabla'_{f_* p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ &= \sum_{\beta} \left( \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \right)_p \nabla'_{\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(p)}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ &= \left( \sum_{\beta} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left( \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ f \right) (p), \end{aligned}$$

ossia

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left( \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ f = \sum_{\beta} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \overline{\nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}}.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left( \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ f &= \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} (\Gamma'_{\beta\alpha}{}^\gamma \frac{\partial}{\partial y_\gamma}) \circ f \\ &= \sum_{\beta, \gamma} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} (\Gamma'_{\beta\alpha}{}^\gamma \circ f) \left( \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f \right) \\ &= \sum_{\gamma} \left( \sum_{\beta} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\gamma \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\gamma}, \end{aligned}$$

dove  $\Gamma'_{\beta\alpha}{}^\gamma$  sono i coefficienti della connessione di Levi-Civita  $\nabla'$  di  $(M', g')$  e

$$\bar{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\gamma = \Gamma'_{\beta\alpha}{}^\gamma \circ f = \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \circ f = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma.$$

Quindi i coefficienti  $\tilde{\Gamma}_{i\alpha}{}^\gamma$  della connessione  $\bar{\nabla}$  sono dati da:

$$\tilde{\Gamma}_{i\alpha}{}^\gamma = \sum_{\beta} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^\gamma = \sum_{\beta} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta} \circ f. \quad (12.6)$$

Scelti arbitrariamente i campi di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $u \in \mathfrak{X}(f)$ , essi si esprimono localmente come

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad u = \sum_{\alpha=1}^{n'} u^\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \quad \text{con} \quad X^i, u^\alpha \in \mathcal{F}(U).$$

Allora, usando le proprietà di  $\bar{\nabla}$ , si ha

$$\bar{\nabla}_X u = \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( u^\alpha \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + X(u^\alpha) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( u^\alpha \nabla'_{f_* X} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + X(u^\alpha) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right).$$

In particolare, per  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , posto  $f_* Z = \sum_{\alpha} u^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}$  con  $u^\alpha \in \mathcal{F}(U)$ , si ha

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Y f_* Z &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( u^\alpha \nabla'_{f_* Y} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + Y(u^\alpha) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right), \\ \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y f_* Z &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( u^\alpha \nabla'_{f_* X} \nabla'_{f_* Y} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} + X(u^\alpha) \nabla'_{f_* Y} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( X(Y(u^\alpha)) \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + Y(u^\alpha) \nabla'_{f_* X} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni  $p \in M$ , si ha

$$\left( -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y f_* Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X f_* Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} f_* Z \right)_p = R'(f_* X_p, f_* Y_p) f_* Z_p,$$

dove  $R'$  denota il tensore di curvatura di  $(M', g')$ . Pertanto, otteniamo la seguente

**Proposizione 12.3.** *Se  $\bar{R}$  è il tensore di curvatura associato alla connessione lineare  $\bar{\nabla}$ , allora per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ :*

$$\bar{R}(X, Y) f_* Z = R'(f_* X, f_* Y) f_* Z.$$

Per ogni  $u, v \in \mathfrak{X}(f)$ , l'applicazione

$$\bar{g}(u, v) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto g'_{f(p)}(u_p, v_p),$$

è differenziabile. Infatti, localmente

$$\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\beta}\right)(p) = g'_{f(p)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(p)}\right) = g'\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right) \circ f(p),$$

ossia

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = (g'_{\alpha\beta} \circ f).$$

Quindi, la metrica  $g'$  di  $M'$  induce sul fibrato  $f^{-1}TM'$  una *bundle-metric*  $\bar{g}$ , cioè una famiglia di prodotti scalari  $\{\bar{g}_p = g'_{f(p)}\}_{p \in M}$  sulle fibre  $T_{f(p)}M'$ , che dipende differenziabilmente da  $p$ .



**Proposizione 12.4.** Per ogni  $u, v \in \mathfrak{X}(f)$  e per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , sono verificate le seguenti proprietà:

$$\bar{\nabla} \bar{g} = 0, \text{ cioè } X \bar{g}(u, v) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X u, v) + \bar{g}(u, \bar{\nabla}_X v), \quad (12.7)$$

$$f_*[X, Y] = \bar{\nabla}_X f_* Y - \bar{\nabla}_Y f_* X. \quad (12.8)$$

In particolare, la (12.7) ci dice che  $(f^{-1}TM', \bar{\nabla}, \bar{g})$  è un fibrato vettoriale riemanniano.

*Dimostrazione.* Sia  $p$  un fissato punto di  $M$ . Sia  $\gamma(t)$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ . Allora:

$$\begin{aligned} X(\bar{g}(u, v))(p) &= X_p(\bar{g}(u, v)) = \dot{\gamma}(0)\bar{g}(u, v) = \left( \frac{d}{dt} \bar{g}(u, v) \gamma(t) \right)_{|t=0} \\ &= \left( \frac{d}{dt} g'(u(\gamma(t)), v(\gamma(t))) \right)_{|t=0} \\ &= g' \left( \frac{D'u(t)}{dt}, v(\gamma(t)) \right)_{|t=0} + g' \left( u(\gamma(t)), \frac{D'v(t)}{dt} \right)_{|t=0} \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_p} u, v(p)) + \bar{g}(u(p), \bar{\nabla}_{X_p} v) \\ &= \left( \bar{g}(\bar{\nabla}_X u, v) + \bar{g}(u, \bar{\nabla}_X v) \right)(p). \end{aligned}$$

Proviamo ora la (12.8). Poniamo

$$\bar{T}(X, Y) = f_*[X, Y] - \bar{\nabla}_X f_* Y + \bar{\nabla}_Y f_* X.$$

Siccome

$$[\varphi X, \psi Y] = \varphi \psi [X, Y] + \varphi X(\psi) Y - \psi Y(\varphi) X \text{ e } f_* (\varphi X) = \varphi f_* X,$$

si ottiene

$$\bar{T}(\varphi X, \psi Y) = \varphi \psi \bar{T}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}(M).$$

Quindi, per provare la (12.8) è sufficiente provare che  $\bar{T}(X, Y) = 0$  per  $X = \partial/\partial x_i$  e  $Y = \partial/\partial x_j$ . D'altronde  $[\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j] = 0$ , perciò basta provare che

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f_* \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Siccome, come già osservato,

$$f_* \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_\beta}, \quad \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left( \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ f,$$

si ha

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f^* \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left( \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ f \right),\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f^* \frac{\partial}{\partial x_j} - \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f^* \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{\alpha, \beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left( \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - \nabla'_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \right) \circ f \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial}{\partial y_\beta}, \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right] \circ f = 0.\end{aligned}$$

□

## 12.2 Energia di un'applicazione

### La norma di Hilbert-Schmidt

Siano  $(E, g)$ ,  $(F, g')$  due spazi vettoriali Euclidei di dimensione  $n$  e  $n'$  rispettivamente, e sia  $Hom(E, F)$  lo spazio vettoriale reale di tutte le applicazioni lineari da  $E$  in  $F$ . Per ogni  $\phi, \psi \in Hom(E, F) = E^* \otimes F$  poniamo

$$\langle \phi, \psi \rangle_H := \sum_{i=1}^n g'(\phi e_i, \psi e_i),$$

dove  $(e_1, \dots, e_n)$  è una fissata base ortonormale di  $E$ . La precedente definizione non dipende dalla scelta della base ortonormale. Infatti, se  $(v_1, \dots, v_n)$  è un'altra base ortonormale di  $E$ , allora  $v_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j$ , dove  $A = (a_{jk}) \in O(n)$ , e quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n g'(\phi v_k, \psi v_k) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^n a_{ik} a_{jk} g'(\phi e_i, \psi e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^t g'(\phi e_i, \psi e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} g'(\phi e_i, \psi e_j) = \sum_{i=1}^n g'(\phi e_i, \psi e_i).\end{aligned}$$

Si dimostra facilmente che  $\langle, \rangle_H$  è un prodotto scalare su  $Hom(E, F)$ , e

$$\|\phi\| = (\langle \phi, \phi \rangle_H)^{\frac{1}{2}}$$

è la *norma di Hilbert-Schmidt* dell'applicazione lineare  $\phi$ .

**Lemma 12.5.** *Siano dati  $\phi \in \text{Hom}(E, F)$ ,  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  una base ortonormale di  $E$  e  $\{\partial_r\}_{r=1, \dots, n}$  un'arbitraria base di  $E$ . Poniamo  $h = \phi^*g'$ ,  $e_i = \sum_{r=1}^n a_{ri} \partial_r$ ,  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ ,  $h_{ij} = h(\partial_i, \partial_j)$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $G = (g_{ij})$ ,  $G^{-1} = (g^{ij})$  e  $H = (h_{ij})$ . Allora:*

$$(a) \quad G^{-1} = A \cdot A^T, \quad \text{cioè} \quad g^{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} a_{rj}^t = \sum_{r=1}^n a_{ir} a_{jr};$$

$$(b) \quad \|\phi\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g'(\phi \partial_i, \phi \partial_j) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} h_{ij} = \text{tr}(G^{-1}H) = \text{tr} L_\phi,$$

dove  $L_\phi$  è l'endomorfismo di  $E$  definito da  $(\phi^*g')(v, w) = g(L_\phi v, w)$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= g(e_i, e_j) = \sum_{k,h=1}^n a_{ki} a_{hj} g_{kh} = \sum_{h=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ki}^t g_{kh} \right) a_{hj} \\ &= \sum_{h=1}^n c_{ih} a_{hj}, \quad (\text{dove } C = (c_{ih}) = A^T \cdot G). \end{aligned}$$

Dunque,  $A^T \cdot G \cdot A = I_n$  da cui segue che  $G = (A^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot A^T)^{-1}$  e quindi  $G^{-1} = A \cdot A^T$ . Di conseguenza, tenendo anche conto che  $h$  è la forma bilineare su  $E$  definita da  $h(v, w) = g'(\phi v, \phi w)$ , si ha

$$\begin{aligned} \|\phi\|^2 &= \sum_{i=1}^n g'(\phi e_i, \phi e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{r,s=1}^n a_{ri} a_{si} g'(\phi \partial_r, \phi \partial_s) \\ &= \sum_{r,s=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ri} a_{si} \right) g'(\phi \partial_r, \phi \partial_s) = \sum_{k,h=1}^n g^{rs} g'(\phi \partial_r, \phi \partial_s) \\ &= \sum_{k,h=1}^n g^{rs} (\phi^*g')_{rs} = \text{tr}(g^{-1}(\phi^*g')) = \text{tr}(G^{-1}H). \end{aligned}$$

□

### Energia di un'applicazione tra varietà riemanniane

Introduciamo ora il concetto di energia di un'applicazione differenziabile tra varietà riemanniane. Sia  $f : M \rightarrow M'$  un'applicazione differenziabile tra le varietà Riemanniane  $(M, g)$  e  $(M', g')$  con  $\dim M = n$  e  $\dim M' = n'$ . Ricordiamo che la *prima forma fondamentale di  $f$*  è data dal tensore  $f^*g'$ , che è un tensore doppio covariante simmetrico semidefinito positivo su  $M$ . L'aggiunta del differenziale  $f_{*p} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M'$  è l'applicazione lineare

$$f_{*p}^t : T_{f(p)} M' \rightarrow T_p M$$

definita da

$$g_p(v, f_{*p}^t v') = g'_{f(p)}(f_{*p} v, v') \quad \forall v \in T_p M \quad \text{e} \quad \forall v' \in T_{f(p)} M'.$$

Sia  $L_f$  il tensore simmetrico di tipo (1, 1) che corrisponde, rispetto a  $g$ , al tensore  $f^* g'$  di tipo (0, 2). Allora, per ogni  $v, w \in T_p M$  si ha

$$g_p((L_f)_p v, w) = (f^* g')_p(v, w) = g'_{f(p)}(f_{*p} v, f_{*p} w) = g_p(f_{*p}^t f_{*p} v, w).$$

Quindi,  $L_f$  è definito dall'endomorfismo  $f_{*p}^t \circ f_{*p} : T_p M \rightarrow T_p M$ .

**Definizione 12.6.** *Densità di energia di  $f$*  è l'applicazione reale

$$e(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p \longmapsto e(f)(p) := \frac{1}{2} \|f_{*p}\|^2,$$

dove  $\|f_{*p}\|$  denota la norma di Hilbert-Schmidt del differenziale  $f_{*p}$ , a volte indicato anche con  $(df)_p$ .

Per quanto visto prima, la definizione di  $\|f_{*p}\|^2$  non dipende dalla scelta della base ortonormale di  $T_p M$ . D'altronde, se  $\{e_i\}$  è una base ortonormale locale di campi vettoriali su  $M$ , risulta

$$\begin{aligned} \|f_{*p}\|^2 &= \sum_{i=1}^n g'_{f(p)}(f_{*p}(e_{ip}), f_{*p}(e_{ip})) = \sum_{i=1}^n (f^* g')(e_i, e_i)(p) \\ &= \text{tr}(g^{-1} f^* g')(p). \end{aligned}$$

Quindi,

$$e(f) = \frac{1}{2} \|f_{*p}\|^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(g^{-1} f^* g') = \frac{1}{2} \text{tr}_g(f^* g') = \frac{1}{2} \text{tr} L_f.$$

Consideriamo un sistema di coordinate locali  $(x_i)_{i=1, \dots, n}$  definito in un aperto  $U \subset M$ , un sistema di coordinate locali  $(y_\alpha)_{\alpha=1, \dots, n'}$  definito in un aperto  $V \subset N$ , con  $f(U) \subset V$ , e una base ortonormale locale  $\{e_i\}$  di campi di vettori definiti in  $U$ . Allora, tenendo presente la (b) del Lemma 12.5, si ottiene

$$\begin{aligned} e(f) &= \frac{1}{2} \|f_{*p}\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g'(f_*(e_k), f_*(e_k)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g' \left( f_* \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right), f_* \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_j} (g'_{\alpha\beta} \circ f) \right). \end{aligned}$$

Pertanto, l'espressione locale di  $e(f)$  è data da:

$$e(f) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_j} (g'_{\alpha\beta} \circ f) \right). \quad (12.9)$$

In particolare,  $e(f) \in \mathcal{F}(M)$ .

**Definizione 12.7.** Siano  $(M, g), (M', g')$  due varietà riemanniane, con  $M$  compatta, e sia  $f \in C^\infty(M, M')$ . L'energia di  $f$  è l'integrale di Dirichlet di  $f$ :

$$E(f) = \int_M e(f) v_g = \frac{1}{2} \int_M \|f_*\|^2 v_g = \frac{1}{2} \int_M \operatorname{tr} L_f v_g, \quad (12.10)$$

dove  $v_g$  è l'elemento di volume standard di  $(M, g)$ , espresso localmente dalla  $n$ -forma differenziale  $v_g = \sqrt{\underline{g}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ ,  $\underline{g} = \det(g_{ij})$ .

Si osservi che  $E(f) \geq 0$  e

$$E(f) = 0 \iff \|f_*\| = 0 \iff f_* = 0 \iff f = \text{cost.},$$

dove nell'ultima equivalenza si sfrutta il fatto che  $M$  è connessa.

**Osservazione 12.8.** Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile con  $M$  compatta, e sia  $i : (M', g') \hookrightarrow (M, \bar{g})$  un'immersione isometrica. Se poniamo  $\bar{f} := i \circ f : (M, g) \rightarrow (M, \bar{g})$ , allora

$$\operatorname{tr}_g \bar{f}^* \bar{g} = \operatorname{tr}_g (i \circ f)^* \bar{g} = \operatorname{tr}_g f^* (i^* \bar{g}) = \operatorname{tr}_g f^* g'.$$

Quindi

$$E(f) = E(\bar{f}).$$

**Osservazione 12.9.** Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile con  $M$  compatta, e sia  $\tilde{g}$  una metrica conforme a  $g$ :  $\tilde{g} = \lambda g$  con  $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ ,  $\lambda > 0$ . Se  $\{e_i\}$  è una base  $g$ -ortonormale locale di campi di vettori su  $M$ ,  $\{\tilde{e}_i = (1/\sqrt{\lambda})e_i\}$  è una base  $\tilde{g}$ -ortonormale e  $v_{\tilde{g}} = \lambda^{\frac{n}{2}} v_g$ . Allora,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}_{\tilde{g}} f^* g' &= \sum_i g'(f_* \tilde{e}_i, f_* \tilde{e}_i) = \frac{1}{\lambda} \sum_i g'(f_* e_i, f_* e_i) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tr}_g f^* g', \quad e \\ E_{\tilde{g}}(f) &= \frac{1}{2} \int_M \lambda^{\frac{n}{2}-1} \operatorname{tr}_g f^* g' v_g. \end{aligned}$$

In particolare, se  $M$  è una superficie ( $n = 2$ ), l'energia di  $f$  è un invariante conforme della metrica  $g$ :

$$E_{\tilde{g}}(f) = E_g(f).$$

Se  $n \geq 2$  e  $\tilde{g}$  è una metrica omotetica a  $g$ , cioè  $\lambda$  è una costante, allora

$$E_{\tilde{g}}(f) = \lambda^{\frac{n}{2}-1} E_g(f).$$

## 12.3 Applicazioni armoniche ed equazioni di Eulero-Lagrange

Siano  $\nabla$  e  $\nabla'$  le connessioni di Levi-Civita di  $(M, g)$  e di  $(M', g')$  rispettivamente e sia  $f \in C^\infty(M, M')$ . Ricordiamo che  $n = \dim M$  e  $n' = \dim M'$ . Il differenziale  $df$  si può pensare come un tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $M$  a valori in  $f^{-1}TM'$ :

$$df : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(f), X \mapsto df(X) = f_*X.$$

La *seconda forma fondamentale di  $f$*  è un tensore, che si denota con  $\nabla df$ , di tipo  $(1, 2)$  su  $M$  a valori in  $f^{-1}TM'$ :

$$\begin{aligned} \nabla df : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(f), (X, Y) \mapsto (\nabla_X df)(Y), \\ (\nabla_X df)(Y) &:= \bar{\nabla}_X f_*Y - f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*X} f_*Y - f_*(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

La forma  $\nabla df$  generalizza la nozione di seconda forma fondamentale per immersioni isometriche. Il valore di  $(\nabla df)(X, Y)$  in un punto  $p \in M$  dipende solo dai vettori  $X_p, Y_p \in T_pM$ . Inoltre, dalla (12.8) segue che  $(\nabla df)(X, Y)$  è simmetrica e quindi l'applicazione

$$(\nabla df)_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow T_{f(p)}M'$$

è bilineare e simmetrica. L'applicazione  $f$  si dice *totalmente geodetica* se  $\nabla df = 0$ . Se  $\gamma(t)$  è una curva differenziabile di  $M$ , posto  $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ , dalla definizione di  $\nabla df$ , si ha

$$(\nabla df)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)} f_*\dot{\gamma}(t) - f_*(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)) = \frac{D'\dot{\tilde{\gamma}}}{dt} - f_*\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}\right).$$

Da questa formula segue che  $f$  è totalmente geodetica se, e solo se,  $f$  trasforma geodetiche di  $M$  in geodetiche di  $M'$ .

Consideriamo ora l'applicazione  $\tau(f) : M \rightarrow f^{-1}TM'$  così definita

$$\tau(f)(p) := \text{tr}(\nabla df)(p) = \sum_{i=1}^n (\nabla df)_p(e_i, e_i) \in T_{f(p)}M', \quad (12.11)$$

dove  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  è una base ortonormale di  $T_pM$ . Il campo di vettori  $\tau(f) \in \mathfrak{X}(f)$ , definito dalla (12.11), si dice *campo di tensione* di  $f$ .

**Definizione 12.10.** Un'applicazione differenziabile  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  si dice *applicazione armonica* se  $\tau(f) = 0$ .

Si noti che per i fisici un'applicazione armonica è un “ $\sigma$ -model” (cfr., ad esempio, [38]).

**Esercizio 12.11.** Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile e sia  $\tilde{g}$  una metrica conforme a  $g$ :  $\tilde{g} = \lambda g$  con  $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ ,  $\lambda > 0$ . Si determini la relazione tra il campo di tensione di  $f : (M, \tilde{g}) \rightarrow (M', g')$  e quello di  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$ .

**Espressione locale di  $\tau(f)$** 

Consideriamo un sistema di coordinate locali  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  definito in un aperto  $U \subset M$ , un sistema di coordinate locali  $(y_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n'}$  definito in un aperto  $V \subset M'$ , con  $f(U) \subset V$ , e una base ortonormale locale  $\{e_i\}$  di campi di vettori definiti in  $U$ . Poniamo  $e_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}(\partial/\partial x_i)$ ,  $a_{ik} \in \mathcal{F}(U)$ . Allora,

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \sum_{k=1}^n (\nabla df)(e_k, e_k) = \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} \right) (\nabla df) \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} - f_* \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right). \end{aligned}$$

Usando le proprietà delle connessioni  $\bar{\nabla}$ ,  $\nabla$  e la (12.6), si ha:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} &= \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left( \sum_{\alpha=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n'} \left( \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ f + \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}_\alpha} \right) \\ &= \sum_{\gamma=1}^{n'} \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f + \sum_{\alpha,\gamma=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \tilde{\Gamma}_{i\alpha}^\gamma \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f \\ &= \sum_{\gamma=1}^{n'} \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n'} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} (\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \circ f) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f, \\ f_{*p} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p &= f_{*p} \left( \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = f_{*p} \left( \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) f_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p = \sum_{k,\gamma} \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial f^\gamma}{\partial x_k}(p) \left( \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \right)_{f(p)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, otteniamo

$$\tau(f) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} - f_* \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \sum_{\gamma=1}^{n'} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f^\gamma}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f \\ &\quad + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n'} \sum_{i,j=1}^n \left( g^{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} (\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \circ f) \right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Sia ora  $\psi \in \mathcal{F}(M)$ . Ricordiamo che se  $\Delta$  è l'operatore di Laplace-Beltrami di  $(M, g)$ , allora (cfr. Appendice B):

$$\Delta\psi = -\text{tr}(\nabla d\psi) = -\text{tr}\nabla^2\psi = -\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} \right),$$

e quindi risulta

$$\tau(\psi) = \text{tr}(\nabla d\psi) = -\Delta\psi.$$

Ricordiamo inoltre che il campo vettoriale  $\nabla\psi = \text{grad}\psi$ , cioè il campo di vettori duale (rispetto alla metrica  $g$  di  $M$ ) del differenziale di  $\psi$ , localmente è dato da:

$$\nabla\psi = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Pertanto, la formula (12.12) diventa

$$\begin{aligned} \tau(f) &= -\sum_{\gamma=1}^{n'} (\Delta f^\gamma) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^m \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} (\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \circ f) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f \\ &= \sum_{\gamma=1}^{n'} \left( -\Delta f^\gamma + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n'} g(\nabla f^\alpha, \nabla f^\beta) (\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \circ f) \right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ f \end{aligned}$$

e quindi abbiamo il seguente teorema.

**Teorema 12.12.** *Un'applicazione differenziabile  $f$  tra le varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(M', g')$  è armonica se, e solo se, valgono, per ogni  $\gamma = 1, \dots, n'$ , le seguenti equazioni di Eulero-Lagrange*

$$-\Delta f^\gamma + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n'} \sum_{i,j=1}^n \left( g^{ij} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial f^\beta}{\partial x_i} (\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \circ f) \right) = 0. \quad (12.13)$$

Questo è un sistema di  $n'$  equazioni differenziali ellittiche quasi lineari del secondo ordine nelle incognite  $f^1, \dots, f^{n'}$  (funzioni componenti locali di  $f$ ). Quasi lineare significa che l'equazione differenziale è lineare nel termine contenente le derivate parziali del secondo ordine. La parte principale è l'operatore di Laplace-Beltrami (da cui l'ellitticità). La parte non lineare è costituita da polinomi di secondo grado nelle derivate parziali prime di  $f^\alpha$ .



## 12.4 Esempi di applicazioni armoniche

Applicazioni armoniche appaiono in modo naturale in vari problemi di geometria riemanniana. Di seguito vediamo alcuni esempi.

### Esempio 12.13. Applicazioni costanti

Il più semplice esempio di applicazione armonica è un'applicazione costante. Se  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  è un'applicazione costante, allora  $f_{*p} = 0$  per ogni  $p$  e quindi  $\tau(f) = \text{tr}(\nabla df) = 0$ . Si noti che nel caso compatto, le funzioni costanti danno il minimo assoluto per l'energia.

### Esempio 12.14. Funzioni armoniche

Sia  $f \in \mathcal{F}(M)$ . In questo caso  $(M', g')$  è la retta euclidea,  $f^\alpha = f$ ,  $\Gamma'_{\alpha\beta} = 0$  e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange (12.13) danno  $\Delta f = 0$ . Oppure, si può notare che in tal caso risulta  $\tau(f) = -\Delta f$ . Quindi,

$$f \text{ è applicazione armonica } \Leftrightarrow \Delta f = 0,$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace-Beltrami. Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , allora  $f = (f_1, \dots, f_n)$  e quindi  $f$  è un'applicazione armonica se, e solo se, le funzioni componenti  $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  sono applicazioni armoniche. Questo esempio giustifica il nome di applicazione armonica dato per un'applicazione  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  con  $\tau(f) = 0$ .

### Esempio 12.15. Curve geodetiche

Sia  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  un intervallo di  $\mathbb{R}$  e sia  $f = \sigma : I \rightarrow (M', g')$  una curva differenziabile di  $M'$ . In questo caso  $(M, g)$  è un segmento euclideo.  $g^{ij} = g^{11} = 1$ ,  $f^\alpha = y^\alpha(t)$  (funzioni componenti di  $\sigma$ ),  $(x_1, \dots, x_n) = (t)$ ,  $\Gamma'_{ij} = 0$  e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange (12.13) diventano:

$$\frac{d^2 y^\gamma}{dt^2} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma'_{\alpha\beta}{}^\gamma(t) \frac{dy^\alpha}{dt} \frac{dy^\beta}{dt} = 0,$$

che sono le equazioni differenziali che definiscono le curve geodetiche di  $M'$ . Oppure, più geometricamente, basta osservare che

$$\tau(\sigma) = \text{tr}(\nabla d\sigma) = (\nabla d\sigma) \left( \frac{d}{dt}, \frac{d}{dt} \right) = \frac{D'\dot{\sigma}}{dt} - \sigma_* \left( \nabla \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \right) = \frac{D'\dot{\sigma}}{dt},$$

dove  $\dot{\sigma}(t) = \sigma_* \left( \frac{d}{dt} \right)$  è un campo di vettori lungo  $f = \sigma$ . Quindi,

$$\sigma(t) \text{ è una applicazione armonica } \Leftrightarrow \sigma(t) \text{ è curva geodetica di } M'.$$

### Esempio 12.16. Isometrie e metriche armoniche

Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'isometria. Allora

$$(\nabla df)(X, Y) = \bar{\nabla}_X f_* Y - f_* \nabla_X Y = \nabla'_{f_* X} f_* Y - f_* \nabla_X Y = 0.$$

Pertanto,  $\tau(f) = \text{tr} \nabla df = 0$  e quindi  $f$  è armonica. In particolare l'identità  $I : (M, g) \rightarrow (M, g)$  è un'applicazione armonica. Se  $\tilde{g}$  è un'altra metrica riemanniana su  $M$ , l'identità  $I : (M, g) \rightarrow (M, \tilde{g})$ , in generale, non è un'applicazione armonica, se accade che anche in tal caso  $I$  è armonica, allora si dice che  $\tilde{g}$  è una *metrica armonica* (cfr. [24]).

Se  $\tilde{g}$  è conforme a  $g$ ,  $\tilde{g} = e^{2f}g$ ,  $f \in \mathcal{F}(M)$ , in tal caso il campo di tensione di  $I : (M, g) \rightarrow (M, \tilde{g})$  è dato da

$$\tau(I_{g\tilde{g}}) = (2 - n)\nabla f,$$

dove  $\nabla f$  è il gradiente di  $f$ . Per ottenere la suddetta formula, basta applicare la formula della connessione di Levi-Civita della metrica  $\tilde{g} = e^{2f}g$  (cfr. Esercizio 6.50). In particolare, in dimensione 2 ogni metrica conforme è armonica. Se  $n > 2$ , una metrica conforme è armonica se, e solo se, è omotetica.

### Esempio 12.17. Immersioni minimali

Sia  $(M, g)$  una sottovarietà riemanniana di  $(M', g')$  con immersione isometrica  $f : M \rightarrow M'$  (quindi  $f^*g' = g$ ). Poiché  $f_{*p} : T_p M \rightarrow f_{*p}(T_p M) \subset T_{f(p)} M'$  è una isometria,  $f_{*p}(T_p M)$  si può identificare con  $T_p M$  e  $f_{*p} X_p$  con  $X_p$ . Più in generale, poiché un'immersione è localmente un imbedding,  $f_* X$  si può identificare localmente con  $X$ . Quindi, localmente  $\mathfrak{X}(M') = \mathfrak{X}(M) \oplus (\mathfrak{X}(M))^\perp$  e

$$T_{f(p)} M' = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

In questo caso l'equazione  $(\nabla df)(X, Y) = \nabla'_{f_* X} f_* Y - f_*(\nabla_X Y)$ , che riscriviamo come

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + (\nabla df)(X, Y),$$

è esattamente l'equazione di Gauss per l'immersione  $f$ , dove  $(\nabla_X Y)_p \in T_p M$  è la componente tangente e  $(\nabla df)(X, Y)(p) \in (T_p M)^\perp$  è la componente normale di  $(\nabla'_X Y)_p$ . Pertanto, il *vettore curvatura media* dell'immersione è

$$H(p) = \frac{1}{n} \text{tr}(\nabla df)(p) = \frac{1}{n} \tau(f)(p),$$

e quindi:

$$f \text{ è un'applicazione armonica} \iff f \text{ è un'immersione minimale.}$$

In particolare se  $(M', g') = (\mathbb{R}^m, g_0)$  ed  $f = (f_1, \dots, f_m) : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^m, g_0)$  è un'immersione isometrica, allora

$$\Delta f = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_m) = -(\tau(f_1), \dots, \tau(f_m)) = -\tau(f) = -nH$$

e quindi  $\Delta f = -nH$ .

### Esempio 12.18. Sommersioni riemanniane

Sia  $\pi : (M', g') \rightarrow (M, g)$  una sommersione riemanniana (suriettiva).

Proviamo che:

$\pi$  è armonica se, e solo se, le fibre sono sottovarietà minimali di  $M'$ .

Poniamo  $\dim M = n$  e  $\dim M' = n' = n + k$ . Ricordiamo (cfr. Sezione 4.3) che le fibre  $M_p = \pi^{-1}(\pi(p))$  sono sottovarietà riemanniane di  $(M', g')$  con la metrica indotta e  $\ker \pi_{*p} = T_p M_p = \mathcal{V}_p M'$  sottospazio verticale tangente alla fibra. Sia  $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n'}\}$  una base ortonormale locale di  $\mathfrak{X}(M')$ , dove  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è sollevamento orizzontale di una base ortonormale locale  $\{v_1, \dots, v_n\}$  di  $\mathfrak{X}(M)$ . Quindi,  $\{e_1, \dots, e_n\}_p$  è base del sottospazio orizzontale  $\mathcal{H}_p M'$  e  $\{e_{n+1}, \dots, e_{n'}\}_p$  è base del sottospazio verticale  $\mathcal{V}_p M'$ ,  $T_p M' = \mathcal{H}_p M' \oplus \mathcal{V}_p M'$ ,  $\mathcal{H}_p M' = (\mathcal{V}_p M')^\perp$ . Siccome  $\pi_* e_{n+1} = \dots = \pi_* e_{n'} = 0$  e (cfr. Esercizio 6.62)

$$\pi_*(\nabla'_{e_i} e_i) = \nabla_{v_i} v_i = \nabla_{\pi_* e_i} \pi_* e_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n,$$

per il campo di tensione di  $\pi$  si ha

$$\tau(\pi) = \sum_{i=1}^{n'} (\nabla_{\pi_* e_i} \pi_* e_i - \pi_* \nabla'_{e_i} e_i) = -\pi_* (\sum_{i=n+1}^{n'} \nabla'_{e_i} e_i).$$

Quindi  $\tau(\pi) = 0$  se, e solo se, il vettore  $\sum_{i=n+1}^{n'} \nabla'_{e_i} e_i$  è verticale, cioè la sua componente orizzontale è nulla. D'altronde (cfr. Sezione 6.8) il vettore curvatura media della fibra  $M_p$  è dato dalla proiezione di  $(1/k) \sum_{i=n+1}^{n'} \nabla'_{e_i} e_i$  sul sottospazio orizzontale (cioè sull'ortogonale dello spazio tangente alla fibra che è verticale). Pertanto,  $\pi$  è un'applicazione armonica se, e solo se, le fibre sono sottovarietà minimali di  $(M', g')$ .

La fibrazione di Hopf  $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  è una sommersione riemanniana e il campo di Hopf  $\xi_0$  è tangente alle fibre  $\pi^{-1}(\pi(p))$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$  (cfr. Sezioni 9.3, 9.5). D'altronde  $\xi_0$  è unitario e di Killing, quindi geodetico. Di conseguenza le fibre sono curve geodetiche e quindi sottovarietà minimali di  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Pertanto, *la fibrazione di Hopf è un esempio di sommersione riemanniana armonica.*

**Esempio 12.19. Applicazioni olomorfe**

Sia  $M$  una varietà complessa di dimensione complessa  $n$ . Indichiamo con  $(z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j), j = 1, \dots, n$ , un sistema di coordinate locali complesse definite su un aperto di  $M$ . Il tensore  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definito (in termini di coordinate locali) da

$$J \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J \frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j},$$

è la struttura quasi complessa (naturale) di  $M$ . In generale, una struttura quasi complessa su una varietà differenziabile è un tensore  $J$  di tipo  $(1, 1)$  tale che  $J^2 = -I$ . Un'applicazione differenziabile  $f$  tra due varietà complesse  $(M, J)$  e  $(M', J')$  è olomorfa se, e solo se,

$$J' \circ f_* = f_* \circ J.$$

Ricordiamo (cfr. Sezione 4.5) che una metrica riemanniana  $g$  su una varietà complessa  $M$  è detta *hermitiana* se

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

In tal caso  $(M, J, g)$  è detta *varietà hermitiana*. Una varietà hermitiana  $(M, J, g)$  è detta di *Kähler* se la 2-forma fondamentale  $\Omega = g(\cdot, J\cdot)$  è chiusa, cioè  $d\Omega = 0$ . Inoltre, una varietà hermitiana  $(M, J, g)$  è *kähleriana* se, e solo se,

$$\nabla J = 0, \quad \text{ossia} \quad \nabla_X JY = J\nabla_X Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

dove  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita di  $(M, g)$ .

**Teorema 12.20.** *Ogni applicazione olomorfa  $f : (M, J, g) \rightarrow (M', J', g')$  tra due varietà kähleriane è un'applicazione armonica.*

*Dimostrazione.* Consideriamo su  $M$  una base ortonormale locale di campi vettoriali del tipo  $(e_j, J e_j)$ ,  $j = 1, \dots, n = \dim_{\mathbb{C}} M$ . Allora,

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \text{tr}(\nabla df) \\ &= \sum_{j=1}^n \{(\nabla df)(e_j, e_j) + (\nabla df)(J e_j, J e_j)\} \\ &= \sum_{j=1}^n \{\bar{\nabla}_{e_j} f_* e_j - f_* \nabla_{e_j} e_j + \bar{\nabla}_{J e_j} f_* J e_j - f_* \nabla_{J e_j} J e_j\}. \end{aligned}$$

Applicando le proprietà indicate in parentesi, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{J e_j} f_* J e_j &= \bar{\nabla}_{J e_j} J' f_* e_j \quad (f \text{ è olomorfa}) \\ &= J' \bar{\nabla}_{J e_j} f_* e_j \quad (M' \text{ è di Kähler}) \\ &= J' (\bar{\nabla}_{e_j} f_* J e_j + f_* [J e_j, e_j]) \quad (\text{vale la (12.8)}) \\ &= \bar{\nabla}_{e_j} J' f_* J e_j + J' f_* [J e_j, e_j] \quad (N \text{ è di Kähler}) \\ &= \bar{\nabla}_{e_j} f_* J^2 e_j + J' f_* [J e_j, e_j] \quad (f \text{ è olomorfa}) \\ &= -\bar{\nabla}_{e_j} f_* e_j + J' f_* [J e_j, e_j]. \end{aligned}$$

Analogamente, si ottiene

$$\begin{aligned} f_* \nabla_{J e_j} J e_j &= f_* J \nabla_{J e_j} e_j \quad (M \text{ è di Kähler}) \\ &= f_* J (\nabla_{e_j} J e_j + [J e_j, e_j]) \quad (\nabla \text{ è simmetrica}) \\ &= f_* \nabla_{e_j} J^2 e_j + J' f_* [J e_j, e_j] \quad (f \text{ è olomorfa}) \\ &= -f_* \nabla_{e_j} e_j + J' f_* [J e_j, e_j]. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\bar{\nabla}_{J e_j} f_* J e_j - f_* \nabla_{J e_j} J e_j = f_* \nabla_{e_j} e_j - \bar{\nabla}_{e_j} f_* e_j$$

e quindi  $\tau(f) = 0$ . □

**Esempio 12.21. Applicazione prodotto**

Consideriamo la varietà riemanniana prodotto  $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ , la varietà  $(M', g')$  e un'applicazione differenziabile

$$f : (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) \rightarrow (M', g'), (p, q) \mapsto f(p, q).$$

Assumiamo che  $f$  sia armonica rispetto a ogni singola variabile, cioè,  $f_1 : (M_1, g_1) \rightarrow (M', g'), p \mapsto f(p, \bar{q})$  e  $f_2 : (M_2, g_2) \rightarrow (M', g'), q \mapsto f(\bar{p}, q)$  sono armoniche. Fissata una base ortonormale locale  $\{e_j, e_\alpha\}$  di  $\mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$  con  $\{e_j\}$  base locale di  $\mathfrak{X}(M_1)$  e  $\{e_\alpha\}$  base locale di  $\mathfrak{X}(M_2)$ , si ha

$$\tau(f) = \sum_j (\nabla df)(e_j, e_j) + \sum_\alpha (\nabla df)(e_\alpha, e_\alpha) = \tau(f_1) + \tau(f_2) = 0,$$

quindi  $f$  è armonica. Sia ora  $G$  un gruppo di Lie con una metrica riemanniana bi-invariante. Allora, le traslazioni  $\phi_1 : G \rightarrow G, x \mapsto x \cdot \bar{y}$  e  $\phi_2 : G \rightarrow G, y \mapsto \bar{x} \cdot y$  sono isometrie e quindi applicazioni armoniche. Di conseguenza, l'applicazione prodotto  $\phi : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto x \cdot y$  è un'applicazione armonica.

## 12.5 Tensione di una composizione

Siano date le seguenti applicazioni differenziabili  $f_1 : (M, g) \rightarrow (M', g')$ ,  $f_2 : (M', g') \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ ,  $f_2 \circ f_1 : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ . Per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$\begin{aligned} (\nabla_X d(f_2 \circ f_1))(Y) &= \bar{\nabla}_X f_{2*} f_{1*} Y - f_{2*} f_{1*} (\nabla_X Y) \\ &= \tilde{\nabla}_{f_{2*} f_{1*} X} f_{2*} f_{1*} Y - f_{2*} f_{1*} (\nabla_X Y) \\ &\quad + f_{2*} \bar{\nabla}_X f_{1*} Y - f_{2*} \bar{\nabla}_X f_{1*} Y \\ &= f_{2*} (\bar{\nabla}_X f_{1*} Y - f_{1*} (\nabla_X Y)) \\ &\quad + \tilde{\nabla}_{f_{2*} f_{1*} X} f_{2*} f_{1*} Y - f_{2*} \bar{\nabla}_X f_{1*} Y \\ &= f_{2*} (\nabla df_1)(X, Y) + \tilde{\nabla}_{f_{2*} f_{1*} X} f_{2*} f_{1*} Y \\ &\quad - f_{2*} \nabla'_{f_{1*} X} f_{1*} Y \\ &= f_{2*} (\nabla df_1)(X, Y) + (\nabla df_2)(f_{1*} X, f_{1*} Y). \end{aligned}$$

Quindi, la seconda forma fondamentale della composizione è data dalla seguente formula

$$\nabla d(f_2 \circ f_1) = df_2 \circ \nabla df_1 + (\nabla df_2)(df_1, df_1),$$

e facendo la traccia si ottiene :

$$\tau(f_2 \circ f_1) = (df_2)\tau(f_1) + \text{tr}(\nabla df_2)(df_1, df_1). \quad (12.14)$$

Dalla (12.14) seguono le seguenti proprietà:

- Se  $f_2$  è totalmente geodetica,  $\tau(f_2 \circ f_1) = (df_2)\tau(f_1)$  e quindi

$$f_1 \text{ applicazione armonica} \implies f_2 \circ f_1 \text{ applicazione armonica.}$$

In particolare, se  $f_2$  è un'isometria:

$$f_1 \text{ applicazione armonica} \iff f_2 \circ f_1 \text{ applicazione armonica.}$$

- Se  $f_1$  è un'isometria, allora  $\tau(f_1) = 0$  e

$$\tau(f_2 \circ f_1) = \text{tr}(\nabla df_2)(f_{1*}, f_{1*}).$$

Quindi,

$$f_2 \text{ applicazione armonica} \iff f_2 \circ f_1 \text{ applicazione armonica.}$$

- La composizione di due applicazioni armoniche non è, in generale, un'applicazione armonica. Infatti, se  $M$  è una superficie minimale di  $\mathbb{R}^3$  e  $\gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$  è una curva geodetica di  $M$ , allora l'immersione  $f_2 = i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  e l'applicazione  $f_1 = \gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$  sono entrambe applicazioni armoniche, tuttavia l'applicazione  $f_2 \circ f_1 : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  non è necessariamente un'applicazione armonica in quanto  $\tilde{\gamma}(t) = f_2(\gamma(t)) = \gamma(t)$  non è necessariamente una curva geodetica di  $\mathbb{R}^3$ .

- Se  $f_1 : (M, g) \rightarrow (M', g')$  è armonica e  $f_2 : (M', g') \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa (cioè, l'operatore hessiano  $(\nabla df_2)_q : T_q M' \times T_q M' \rightarrow \mathbb{R}$  è semidefinito positivo), allora  $f = f_2 \circ f_1 : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  è subarmonica:  $-\Delta f \geq 0$ . Basta osservare che per  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\Delta f = \tau(f)$ . Si noti che la definizione di  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  convessa è giustificata dal seguente fatto: se  $\gamma(t) : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$  è una geodetica di  $M$ , posto  $F = \sigma = f \circ \gamma : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , si ha

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{d}{dt} \dot{\sigma}(t) = \frac{d}{dt} f_* \dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} f_* \dot{\gamma}(t) - f_* \left( \frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} \right) = (\nabla df)(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)).$$

- Se  $f_1 : (M, g) \rightarrow (M', g')$  e  $f_2 = i : (M', g') \hookrightarrow (M'', g'')$  è un'immersione isometrica, allora

$$\tau(i \circ f_1) = \tau(f_1) + \text{tr} B(f_{1*}, f_{1*})$$

dove  $B$  è la seconda forma fondamentale  $\nabla df_2$  e  $\tau(f_1)$  è identificata con  $i_* \tau(f_1)$  in quanto  $i$  è un'immersione isometrica. D'altronde  $B(\cdot, \cdot)$ , e quindi anche  $\text{tr} B(f_{1*}, f_{1*})$ , definisce un vettore tangente a  $M''$  e ortogonale a  $M'$ ,  $\tau(f_1)$  è tangente a  $M'$  e  $\tau(i \circ f_1)$  è tangente a  $M''$ . Pertanto:

$$\tau(f_1) \text{ è la proiezione ortogonale di } \tau(i \circ f_1) \text{ su } M'$$

(cioè,  $\tau(f_1)$  è la componente di  $\tau(i \circ f_1)$  tangente a  $M'$ ) e quindi

$$f_1 : M \rightarrow M' \text{ è applicazione armonica} \iff \tau(i \circ f_1) \text{ è ortogonale a } M'.$$

L'ultima affermazione significa che

$$\tau(i \circ f_1)_p \in (T_{f_1(p)} M')^\perp \subset T_{f_1(p)} M'' \quad \forall p \in M.$$

Si noti che, per  $M$  compatta,  $E(f_1) = E(i \circ f_1)$  (cfr. Oss. 12.8).

- In particolare, dal punto precedente segue che se  $f : M \rightarrow S^n$  e

$$F = i \circ f : M \rightarrow S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \mapsto F(p) = f(p),$$

allora

$$\tau(F) = -\Delta F = -(\Delta F_1, \dots, \Delta F_{n+1})$$

e quindi

$$\begin{aligned} f : M \rightarrow S^n \text{ è armonica} &\Leftrightarrow \tau(F) = -\Delta F \text{ è ortogonale a } S^n \\ &\Leftrightarrow (\Delta F)(p) \text{ è ortogonale a } T_{F(p)}S^n \quad \forall p \in M \\ &\Leftrightarrow (\Delta F)(p) \text{ è parallelo a } F(p) \quad \forall p \in M \\ &\Leftrightarrow (\Delta F) = \lambda F \text{ per qualche } \lambda \in \mathcal{F}(M). \end{aligned}$$

D'altronde (cfr. Appendice B, Esercizio B.11),  $\|F\|^2 = 1$  implica:

$$0 = \frac{1}{2} \Delta \|F\|^2 = g_0(F, \Delta F) - g_0(dF, dF) = \lambda - \|dF\|^2 = \lambda - \|\nabla F\|^2,$$

dove  $\nabla F$  è il gradiente di  $F$ . Pertanto,

$$f : M \rightarrow S^n \text{ è armonica} \Leftrightarrow \Delta F = \|\nabla F\|^2 F,$$

dove  $\|\nabla F\| = \|dF\| = \|df\| = \|\nabla f\|$ .

• Se  $f_1 = i : (M, g) \hookrightarrow (M', g')$  è un'immersione isometrica e consideriamo  $f_2 : (M', g') \rightarrow (M'', g'')$ , dalla formula (12.14) si ottiene

$$\begin{aligned} \tau(f_2 \circ i)(p) &= (df_2)_p \tau(i) + \text{tr}(\nabla df_2)_p(i_*, i_*) \\ &= n(df_2)_p(H_p) + \text{tr}(\nabla df_2)_p(i_*, i_*) \end{aligned}$$

per ogni  $p \in M$ , dove  $H$  è il vettore curvatura media dell'immersione  $i : M \hookrightarrow M'$ .

• Se  $\pi : (M', g') \rightarrow (M, g)$  è una sommersione riemanniana armonica e  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ , allora (cfr. [103]):

$$f \text{ è armonica} \iff f \circ \pi : (M', g') \rightarrow (N, h) \text{ è armonica.}$$

## 12.6 La 1<sup>a</sup> formula variazionale

In questa sezione studiamo le applicazioni armoniche come punti critici del funzionale energia.

**Definizione 12.22.** Sia  $f \in C^\infty(M, M')$ . Una *variazione di  $f$*  è un'applicazione differenziabile

$$\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \longrightarrow M', (t, p) \longmapsto \Phi(t, p) = f_t(p), \text{ tale che}$$

$$\Phi(0, p) = f_0(p) = f(p).$$

Quindi  $\{f_t : M \rightarrow M'\}_{t \in I}$ ,  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ , è una famiglia di applicazioni differenziabili da  $M$  in  $M'$ , con  $f_0 = f$ . Per un fissato  $p \in M$ ,

$$\gamma_p(t) : I \rightarrow M', \quad t \mapsto f_t(p),$$

è una curva differenziabile di  $M'$ . Di conseguenza,

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} : p \mapsto \frac{\partial f_t}{\partial t}(p) = (f_p(t))_* \left( \frac{d}{dt} \right)_t = \dot{\gamma}_p(t) \in T_{\gamma_p(t)}M' = T_{f_t(p)}M'$$

definisce un campo di vettori lungo  $f_t$ , cioè  $\frac{\partial f_t}{\partial t} \in \mathfrak{X}(f_t)$ . Il corrispondente *campo variazionale di  $f$*  è il campo di vettori

$$V : p \mapsto \left( \frac{\partial f_t}{\partial t} \right)_0(p) = \dot{\gamma}_p(0) \in T_{f(p)}M', \quad \text{quindi } V \in \mathfrak{X}(f).$$

Si noti che, identificato  $T_{(t,p)}(I \times M)$  con  $T_t\mathbb{R} \times T_pM$ , il campo  $V$  è dato da

$$V(p) = (\Phi_*)_{(0,p)} \left( \left( \frac{d}{dt} \right)_0, 0_p \right) = (\Phi_*)_{(0,p)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{(0,p)},$$

dove  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,p)}$  estende in modo canonico  $\left( \frac{d}{dt} \right)_t$  su  $I \times M$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,p)} = \left( \left( \frac{d}{dt} \right)_t, 0_p \right) = \left( \frac{d}{dt} \right)_t \oplus 0_p.$$

Analogamente, un campo (locale) di vettori su  $M$  si estende in modo canonico su  $I \times M$ .

**Proposizione 12.23.** *Sia  $f \in C^\infty(M, N)$  con  $M$  compatta ed  $M'$  varietà riemanniana. Allora, per ogni  $u \in \mathfrak{X}(f)$  esiste una variazione  $\Phi(t, p) = f_t(p)$  di  $f$  il cui campo variazionale  $V = u$ .*

*Dimostrazione.* Fissato  $p \in M$ , consideriamo  $W_p$  intorno totalmente normale di  $f(p)$ , cioè  $W_p$  è intorno di  $f(p)$  in  $M'$  ed esiste un  $\delta_p > 0$  tale che  $\exp_q : B(0, \delta_p) \rightarrow \exp_q(B(0, \delta_p))$  sia un diffeomorfismo e  $W_p \subset \exp_q(B(0, \delta_p))$  per ogni  $q \in W_p$ , dove  $B(0, \delta_p) = \{v \in T_qM' : \|v\| < \delta_p\}$ . Poiché  $\{W_p\}_{p \in M}$  è un ricoprimento del compatto  $f(M)$  di  $M'$ , esiste un sottoricoprimento finito  $W_1, \dots, W_r$  di  $f(M)$ . Posto  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ ,  $\exp_{f(p)}v$  è definita per ogni  $p \in M$  e per ogni  $v \in T_{f(p)}M'$  con  $\|v\| < \delta$ . Siccome  $M$  è compatta, possiamo definire  $k = \max_{p \in M} \|u_p\|$ . Inoltre, considerato un  $\varepsilon > 0$  tale che  $\varepsilon < \delta/k$ , abbiamo

$$\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : \|t u_p\| = |t| \|u_p\| < \varepsilon \|u_p\| < \frac{\delta}{k} k = \delta$$

e quindi possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M &\longrightarrow M', \\ (t, p) &\longmapsto \Phi(t, p) = f_t(p) = \exp_{f(p)}(t u_p). \end{aligned} \tag{12.15}$$



$\Phi(t, p)$  definisce una variazione di  $f : f_0 = f$ . Inoltre, per  $p \in M$ , la curva  $\gamma_p : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M'$ ,  $t \mapsto f_t(p) = \exp_{f(p)}(t u_p) = \gamma_{tu_p}(1) = \gamma_{u_p}(t)$  è la geodetica di  $N$  determinata dalle condizioni iniziali  $\gamma_{u_p}(0) = f_0(p) = f(p)$ ,  $\dot{\gamma}_{u_p}(0) = u(p)$ . Pertanto, per questa variazione il campo variazionale è

$$V(p) = \frac{\partial f(t, p)}{\partial t}(0) = \dot{\gamma}_{u_p}(0) = u(p).$$

□

Ora, sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile tra due varietà riemanniane con  $M$  compatta. Data una variazione  $\Phi(t, p) = \{f_t\}_{t \in I}$  di  $f \in C^\infty(M, M')$ , con  $M$  compatta, l'energia  $E$  definisce un'applicazione differenziabile

$$E(t) : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto E(t) = E(f_t) = \frac{1}{2} \int_M \|(f_t)_*\|^2 v_g.$$

**Definizione 12.24.** L'applicazione  $f$  si dice *punto critico* dell'energia  $E$  se per ogni variazione  $\{f_t\}$  di  $f$  :

$$\frac{dE(t)}{dt}(0) = 0.$$

**Teorema 12.25.** Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile con  $M$  compatta. Se  $\Phi = \{f_t\}_{t \in I}$  è una variazione di  $f$ , allora la corrispondente prima formula variazionale è data da

$$\frac{dE(t)}{dt} \Big|_{t=0} = - \int_M \bar{g}(V, \tau(f)) v_g, \tag{12.16}$$

dove  $\bar{g}$  è la bundle-metric su  $f^{-1}TM'$  indotta da  $g'$  e  $V$  è il campo variazionale.

*Dimostrazione.* Sia  $\{e_i\}$  una base ortonormale locale per  $\mathfrak{X}(M)$ . La funzione derivata  $E'(t)$  è data da

$$E'(t) = \frac{d}{dt} E(f_t) = \frac{1}{2} \int_M \frac{d}{dt} \|(f_t)_*\|^2 v_g,$$

dove

$$\frac{d}{dt} \|(f_t)_*\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} g'((f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i)).$$

Siccome

$$g'((f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i))(p) = g'_{f_t(p)}(f_{t*}(e_{ip}), f_{t*}(e_{ip})),$$

$$\frac{d}{dt}g'((f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i)) = \frac{d}{dt}g'(\Phi_*e_i, \Phi_*e_i) = \frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(\Phi_*e_i, \Phi_*e_i),$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}g'((f_t)_*(e_i), (f_t)_*(e_i)) = 2\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\Phi_*e_i, \Phi_*e_i\right). \quad (12.17)$$

In queste uguaglianze si è tenuto conto dei seguenti fatti:  $e_i$  si può pensare come un campo locale su  $I \times M$ ,  $\Phi_*e_i \in \mathfrak{X}(\Phi)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(I \times M)$ ,  $\bar{g}$  è la bundle-metric su  $\Phi^{-1}(TM')$  indotta da  $g'$ ,  $\bar{\nabla}$  è compatibile con  $\bar{g}$  (cfr. (12.7)). Applicando la (12.8) ai campi  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $e_i \in \mathfrak{X}(I \times M)$ , tenendo conto che  $[\frac{\partial}{\partial t}, e_i] = 0$ , si ha:

$$\begin{aligned} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\Phi_*e_i, \Phi_*e_i\right) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{e_i}\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \Phi_*e_i\right) \\ &= e_i\bar{g}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \Phi_*e_i\right) - \bar{g}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \bar{\nabla}_{e_i}\Phi_*e_i\right), \end{aligned} \quad (12.18)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata ancora la (12.7). Ora, sia  $X_t \in \mathfrak{X}(M)$  il campo vettoriale definito da:

$$g(X_t, Y) = \bar{g}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \Phi_*Y\right) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \subset \mathfrak{X}(I \times M).$$

Allora,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i\bar{g}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \Phi_*e_i\right) &= \sum_{i=1}^n e_i g(X_t, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i}X_t, e_i) + g(X_t, \nabla_{e_i}e_i) \\ &= \operatorname{div}X_t + \sum_{i=1}^n g(X_t, \nabla_{e_i}e_i), \end{aligned}$$

ossia

$$\sum_{i=1}^n e_i\bar{g}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \Phi_*e_i\right) = \operatorname{div}X_t + \sum_{i=1}^n \bar{g}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \Phi_*\nabla_{e_i}e_i\right). \quad (12.19)$$

Quindi, (12.17), (12.18) e (12.19) implicano

$$E'(t) = \int_M (\operatorname{div}X_t) v_g - \int_M \sum_{i=1}^n \bar{g}\left(\Phi_*\frac{\partial}{\partial t}, \bar{\nabla}_{e_i}\Phi_*e_i - \Phi_*\nabla_{e_i}e_i\right) v_g.$$

Applicando il Teorema di Green (cfr. Appendice B), si ottiene

$$E'(t) = - \int_M \bar{g} \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i) \right) v_g. \quad (12.20)$$

Siccome

$$\left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t} \right)_{(0,p)} = V_p, \quad (\Phi_* e_i)_{(0,p)} = f_* e_i(p), \quad (\Phi_* \nabla_{e_i} e_i)_{(0,p)} = f_* (\nabla_{e_i} e_i)_p,$$

dalla (12.20), tenendo presente la definizione del campo di tensione  $\tau(f)$ , si ottiene

$$\begin{aligned} E'(0) &= \left. \frac{dE(t)}{dt} \right|_{t=0} = - \int_M \bar{g} \left( V, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i) \right) v_g \\ &= - \int_M \bar{g}(V, \tau(f)) v_g. \end{aligned}$$

□

Dal Teorema 12.25, segue il seguente Teorema di Eells-Sampson [34].

**Teorema 12.26.** *Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile, con  $M$  compatta. Allora:*

*$f$  è armonica se, e solo se,  $f$  è punto critico del funzionale energia.*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in C^\infty(M, M')$  armonica, allora  $\tau(f) = 0$  e dalla (12.16) segue che  $f$  è punto critico di  $E$ . Viceversa, se  $f$  è punto critico del funzionale  $E$ , allora  $E'(t)|_{t=0} = 0$  per ogni variazione  $f_t$  di  $f$ . La (12.16), applicata alla variazione definita dalla (12.15), implica

$$\int_M \bar{g}(u, \tau(f)) v_g = 0. \quad (12.21)$$

In particolare, se consideriamo la variazione di  $f$  data dalla (12.15) con  $u = \tau(f)$ , la (12.21) diventa

$$\int_M \bar{g}(\tau(f), \tau(f)) v_g = 0$$

e quindi  $\tau(f) = 0$ , cioè  $f$  è armonica. □

**Osservazione 12.27.** Un risultato fondamentale nella teoria delle applicazioni armoniche è il seguente Teorema di Eells-Sampson [34]: Se  $(M, g)$  e  $(M', g')$  sono due varietà riemanniane entrambe compatte e con  $M'$  avente curvatura sezionale non positiva, allora ogni applicazione differenziabile  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  è omotopa a un'applicazione armonica la quale ha energia minima nella sua classe di omotopia.

## 12.7 Il rough laplaciano

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale. Indichiamo con  $\nabla$  la connessione di Levi-Civita di  $M$ . Se  $V \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\nabla V$  si può pensare come un tensore di tipo  $(1, 1)$

$$\nabla V : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad X \longmapsto (\nabla V)(X) = \nabla_X V.$$

Se  $S$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $M$ , la sua derivata covariante è il tensore

$$\nabla S : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto (\nabla S)(X, Y),$$

che è di tipo  $(1, 2)$ , definito da

$$(\nabla S)(X, Y) = (\nabla_X S)(Y) := \nabla_X S(Y) - S(\nabla_X Y).$$

Prendendo  $S = \nabla V$ , poniamo per definizione  $\nabla^2 V := \nabla(\nabla V)$ , e quindi

$$(\nabla^2 V)(X, Y) = \{\nabla_X(\nabla V)\}(Y) = \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_{\nabla_X Y} V.$$

Di conseguenza, se  $\{e_i\}$  è una base locale ortonormale di campi di vettori, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \nabla^2 V &= \sum_{i=1}^n (\nabla^2 V)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \{\nabla_{e_i}(\nabla V)\}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \{\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} V - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} V\}. \end{aligned}$$

**Definizione 12.28.** L'operatore

$$\bar{\Delta} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad V \longmapsto \bar{\Delta} V = -\operatorname{tr} \nabla^2 V,$$

è detto *rough laplaciano* su  $M$ .

La seguente Proposizione estende la Proposizione 9.10.

**Proposizione 12.29.** Per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  :

$$\Delta g(V, W) = g(\bar{\Delta} V, W) + g(V, \bar{\Delta} W) - 2g(\nabla V, \nabla W), \quad (12.22)$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace-Beltrami. In particolare, se  $\|V\| = \text{cost.}$ , abbiamo

$$g(\bar{\Delta} V, V) = \|\nabla V\|^2.$$

*Dimostrazione.* Sia  $p$  un fissato punto di  $M$ . Sia  $\{e_i\}$  una base ortonormale locale di campi vettoriali su  $M$  geodetica in  $p$ , quindi  $(\nabla e_i)_p = 0$ . Poniamo

$V = \sum_k V^k e_k$  e  $W = \sum_k W^k e_k$ . Allora, applicando un risultato dell'Esercizio B.11, si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta g(V, W) &= \sum_k \Delta(V^k W^k) \\ &= \sum_k \left\{ V^k \Delta W^k + W^k \Delta V^k - 2g(\text{grad } V^k, \text{grad } W^k) \right\}. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Siccome

$$\begin{aligned} \sum_k g(\text{grad } V^k, \text{grad } W^k) &= \sum_{i,j,k} g(e_i(V^k)e_i, e_j(W^k)e_j) \\ &= \sum_{i,k} e_i(V^k) e_i(W^k), \\ \nabla_{e_i} W &= \nabla_{e_i} \sum_k W^k e_k \\ &= \sum_k \left\{ e_i(W^k)e_k + W^k \nabla_{e_i} e_k \right\}, \\ (\nabla_{e_i} W)(p) &= \sum_k \left( e_i(W^k)e_k \right)(p), \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} g(\nabla V, \nabla W)(p) &= \sum_i g(\nabla_{e_i} V, \nabla_{e_i} W)(p) \\ &= \sum_{i,h,k} g(e_i(V^k)e_k, e_i(W^h)e_h)(p) \\ &= \sum_{i,k} e_i(V^k)(p) e_i(W^k)(p) \\ &= \sum_k g(\text{grad } V^k, \text{grad } W^k)(p). \end{aligned} \quad (12.24)$$

Inoltre, dalle seguenti formule

$$\begin{aligned} (\Delta W^k)(p) &= -(\text{tr } \nabla^2 W^k)(p) \\ &= -\sum_i \left( e_i e_i(W^k) - (\nabla_{e_i} e_i)(W^k) \right)(p) \\ &= -\sum_i \left( e_i e_i(W^k) \right)(p), \\ \sum_k (V^k \Delta W^k)(p) &= -\sum_{i,k} \left\{ V^k e_i(e_i(W^k)) \right\}(p), \end{aligned}$$

$$\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} W = \sum_k \left\{ e_i(e_i(W^k))e_k + 2e_i(W^k)\nabla_{e_i} e_k + W^k \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} e_k \right\},$$

$$(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} W)(p) = \sum_k \left\{ e_i(e_i(W^k))e_k + W^k \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} e_k \right\}(p),$$

$$\begin{aligned} \sum_i g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} W, V)(p) &= \sum_{i,j,k} \left\{ g(e_i(e_i(W^k))e_k, V^j e_j) \right\}(p) \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \left\{ W^k V^j g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} e_k, e_j) \right\}(p) \\ &= \sum_{i,j,k} \left\{ V^j e_i(e_i(W^k))\delta_{jk} \right\}(p) \\ &\quad - \sum_{i,j,k} \left\{ W^k V^j g(\nabla_{e_i} e_k, \nabla_{e_i} e_j) \right\}(p) \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \left\{ W^k V^j e_i g(\nabla_{e_i} e_k, e_j) \right\}(p) \\ &= \sum_{i,k} \left\{ V^k e_i(e_i(W^k)) \right\}(p) \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \left\{ W^k V^j e_i g(\nabla_{e_i} e_k, e_j) \right\}(p) \\ &= - \sum_k (V^k \Delta W^k)(p) \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \left\{ W^k V^j e_i g(\nabla_{e_i} e_k, e_j) \right\}(p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} V, W)(p) &= - \sum_k (W^k \Delta V^k)(p) \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \left\{ V^k W^j e_i g(\nabla_{e_i} e_k, e_j) \right\}(p) \\ &= - \sum_k (W^k \Delta V^k)(p) \\ &\quad - \sum_{i,j,k} \left\{ V^j W^k e_i g(\nabla_{e_i} e_k, e_j) \right\}(p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\bar{\Delta} W, V)(p) &= - \sum_i g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} W - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} W, V)(p) \\ &= - \sum_i g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} W, V)(p), \end{aligned}$$

si ha

$$g(\bar{\Delta}W, V)(p) + g(\bar{\Delta}V, W)(p) = \sum_k (V^k \Delta W^k)(p) + \sum_k (W^k \Delta V^k)(p). \quad (12.25)$$

La (12.22) segue da (12.23), (12.24) e (12.25).  $\square$

Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile tra due varietà riemanniane. Indichiamo con  $\{e_i\}$  una base ortonormale locale di campi vettoriali su  $M$ . Sia  $\bar{\nabla}$  la connessione indotta su  $f^{-1}TM'$  dalla connessione di Levi-Civita di  $(M', g')$ . Se  $V \in \mathfrak{X}(f)$ ,  $\bar{\nabla}V$  è un tensore di tipo (1,1) su  $M$  a valori in  $f^{-1}TM'$ :

$$\bar{\nabla}V : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(f), X \mapsto \bar{\nabla}_X V.$$

$\bar{\nabla}^2V$  è un tensore di tipo (1,2) su  $M$  a valori in  $f^{-1}TM'$ :

$$\bar{\nabla}^2V = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}V) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(f), (X, Y) \mapsto (\bar{\nabla}^2V)(X, Y),$$

dove

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}^2V)(X, Y) &= (\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}V))(Y) = \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}V)(Y) - (\bar{\nabla}V)(\nabla_X Y) \\ &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y V - \bar{\nabla}_{\nabla_X Y} V. \end{aligned}$$

$\text{tr} \bar{\nabla}^2V$  è un elemento di  $\mathfrak{X}(f)$ ,

$$\text{tr} \bar{\nabla}^2V : M \rightarrow f^{-1}TM', p \mapsto \text{tr}(\bar{\nabla}^2V)_p,$$

dove

$$\begin{aligned} \text{tr}(\bar{\nabla}^2V)_p &= \sum_i (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V)_p \\ &= \sum_i (\bar{\nabla}_{e_{ip}} \bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_{ip}} e_i} V)_p \in T_{f(p)}N. \end{aligned}$$

L'operatore  $\bar{\Delta}_f : \mathfrak{X}(f) \rightarrow \mathfrak{X}(f)$  definito da

$$V \mapsto \bar{\Delta}_f V = -\text{tr} \bar{\nabla}^2V = -\sum_i (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V),$$

è detto *rough laplaciano lungo l'applicazione f*. Se  $f = I : (M, g) \rightarrow (M, g)$ ,  $\mathfrak{X}(f) = \mathfrak{X}(M)$  e  $\bar{\Delta}_f$  è l'usuale rough laplaciano  $\bar{\Delta}$  su  $M$ . Più in generale, sia  $E$  un fibrato vettoriale riemanniano su  $(M, g)$  con bundle-metric  $\bar{g}$  e connessione metrica  $D : \mathfrak{X}(M) \times S(E) \rightarrow S(E)$ , dove  $S(E)$  è lo spazio delle sezioni di  $E$ . Si può definire il rough laplaciano

$$\bar{D} : S(E) \rightarrow S(E), \sigma \mapsto \bar{D}\sigma = -\text{tr} D^2\sigma,$$

dove

$$\text{tr} D^2\sigma = \sum_i (D^2\sigma)(e_i, e_i) = \sum_i (D_{e_i} D_{e_i} \sigma - D_{\nabla_{e_i} e_i} \sigma).$$

**Proposizione 12.30.** *Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile con  $M$  compatta. Per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(f)$  il rough laplaciano  $\bar{\Delta}_f$  soddisfa:*

$$\int_M \bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W) v_g = \int_M \bar{g}(\bar{\nabla} V, \bar{\nabla} W) v_g = \int_M \bar{g}(V, \bar{\Delta}_f W) v_g, \quad (12.26)$$

dove

$$\bar{g}(\bar{\nabla} V, \bar{\nabla} W) = \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} V, \bar{\nabla}_{e_i} W), \quad n = \dim M.$$

Quindi,  $\bar{\Delta}_f$  è un operatore simmetrico semi-definito positivo.

*Dimostrazione.* È sufficiente provare la prima uguaglianza della (12.26). Applicando la compatibilità di  $\bar{\nabla}$  con  $\bar{g}$ , si ottiene

$$\bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W) = - \sum_{i=1}^n \{ \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} V, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V, W) \}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W) &= - \sum_{i=1}^n \{ e_i \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} V, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V, W) \} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} V, \bar{\nabla}_{e_i} W). \end{aligned} \quad (12.27)$$

Sia  $\alpha \in \Lambda^1(M)$  la 1-forma definita da

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), \quad Y \mapsto \bar{g}(\bar{\nabla}_Y V, W).$$

Sia  $X$  il campo vettoriale  $g$ -duale di  $\alpha$ , quindi

$$g(X, Y) = \alpha(Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_Y V, W).$$

Di conseguenza, applicando la (12.27), si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n g(e_i, \nabla_{e_i} X) = \sum_{i=1}^n \{ e_i g(e_i, X) - g(X, \nabla_{e_i} e_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^n \{ e_i \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} V, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V, W) \} \\ &= -\bar{g}(\bar{\Delta}_f V, W) + \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} V, \bar{\nabla}_{e_i} W). \end{aligned}$$

D'altronde per il Teorema di Green:  $\int_M (\operatorname{div} X) v_g = 0$ , per cui dalla formula precedente segue il risultato.  $\square$



Il rough laplaciano  $\bar{\Delta}$  è un operatore differenziale ellittico del secondo ordine. Questo fatto e il risultato della proposizione precedente valgono anche nel caso del rough laplaciano  $\bar{D}$  definito su un fibrato vettoriale riemanniano  $E$  su  $M$ , dove  $M$  è una varietà riemanniana compatta (cfr. [114], p. 153; [124], p. 9). Infine, ricordiamo (cfr. (9.9)) che il rough laplaciano  $\bar{\Delta} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  è legato al laplaciano  $\Delta_1$  (detto anche operatore di Hodge-de Rham) operante sulle 1-forme (e quindi sui campi di vettori) dalla seguente formula

$$\Delta_1 = \bar{\Delta} + Q, \text{ dove } Q \text{ è l'operatore di Ricci.}$$

## 12.8 Sezioni armoniche

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta e sia  $X$  un campo di vettori su  $M$ .  $X$  è una sezione di  $TM$  e quindi si può pensare come un'applicazione tra  $(M, g)$  e  $(TM, G_s)$ , dove  $G_s$  denota la metrica di Sasaki su  $TM$ . L'energia di un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è l'energia della corrispondente applicazione  $X : (M, g) \rightarrow (TM, G_s)$ . Quindi, la densità di energia di  $X$  è data da

$$e(X)(p) = \frac{1}{2} \|X_{*p}\|^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(X^*G_s)(p) = \frac{1}{2} \text{tr}L_X \quad \forall p \in M.$$

Sia  $\{E_{i_p}\}_{i=1, \dots, n}$  una base ortonormale di  $T_pM$ . Poiché il differenziale  $X_* : T_pM \rightarrow T_zTM$ ,  $z = (p, X_p)$ , soddisfa

$$X_*(E_{i_p}) = (E_{i_p})_z^H + (\nabla_{E_{i_p}}X)_z^V,$$

dalla definizione di metrica di Sasaki, si ha

$$\begin{aligned} 2e(X)(p) &= \sum_{i=1}^n (X^*G_s)_p(E_{i_p}, E_{i_p}) \\ &= \sum_{i=1}^n (g_p(E_{i_p}, E_{i_p}) + g_p(\nabla_{E_{i_p}}X, \nabla_{E_{i_p}}X)) \\ &= n + \sum_{i=1}^n \|\nabla_{E_i}X\|_p^2 = n + \|\nabla X\|_p^2. \end{aligned}$$

Oppure, determinando  $L_X$  si trova  $L_X = I + (\nabla X)^T(\nabla X)$ . Quindi,

$$E(X) = \int_M e(X) v_g = \frac{1}{2} n \text{vol}(M, g) + \frac{1}{2} \int_M \|\nabla X\|^2 v_g. \quad (12.28)$$

**Definizione 12.31.** Un campo di vettori  $X$  si dice che è una *sezione armonica* se  $X : (M, g) \rightarrow (TM, G_s)$  è un'applicazione armonica.

**Teorema 12.32.** (di Ishihara [49]) *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana compatta e sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Allora  $X$  è una sezione armonica se, e solo se,  $X$  è parallelo (cioè  $\nabla X = 0$ ).*

*Dimostrazione.* L'applicazione  $X : M \rightarrow TM$  è un'applicazione armonica se, e solo se,  $X$  è un punto critico del funzionale energia  $E : C^\infty(M, TM) \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè,  $(dE(X_t)/dt)(0) = 0$  per ogni variazione  $X_t(p) = X(t, p)$  di  $X$  in  $C^\infty(M, TM)$ , quindi con  $X_0 = X$ . Sia, dunque,  $X$  un punto critico di  $E$ . Consideriamo la seguente variazione (di  $X$ )

$$X(t, p) : (-\epsilon, +\epsilon) \times M \rightarrow TM, \quad (t, p) \mapsto X(t, p) = (1+t)X_p.$$

Applicando la (12.28), abbiamo

$$E(X_t) = \frac{1}{2} n \text{vol}(M, g) + \frac{1}{2} (1+t)^2 \int_M \|\nabla X\|^2 v_g,$$

da cui ricaviamo

$$\frac{dE(X_t)}{dt} = (1+t) \int_M \|\nabla X\|^2 v_g.$$

Quindi

$$0 = \left. \frac{dE(X_t)}{dt} \right|_{t=0} = \int_M \|\nabla X\|^2 v_g \quad \text{implica} \quad \nabla X = 0.$$

Viceversa, assumiamo che  $\nabla X = 0$  e proviamo che il campo di tensione di  $X$  è nullo. Il campo di tensione  $\tau(X)$  è un campo di vettori lungo  $X$ , perciò  $\tau(X)_p \in T_z(TM)$ ,  $z = (p, X_p)$ . Separando la componente orizzontale e quella verticale di  $\tau(X)$  si trova (cfr. [49])

$$\tau(X) = \{\text{tr}R(\nabla X, X)\}^H + \{-\bar{\Delta}X\}^V,$$

dove  $\bar{\Delta}X = -\text{tr}\nabla^2 X$  è il rough laplaciano di  $X$ . Se  $X$  è parallelo, cioè  $\nabla X = 0$ , allora  $\text{tr}R(\nabla X, X) \cdot = 0$  e  $\nabla^2 X = \nabla(\nabla X) = 0$ . Pertanto,  $\tau(X) = 0$  e  $X$  è un'applicazione armonica.  $\square$

In particolare, un campo di vettori unitario  $U$  è una sezione di  $T_1M$  e quindi si può pensare anche come un'applicazione tra  $(M, g)$  e  $(T_1M, G_s)$ . In questo caso risulta che  $U : (M, g) \rightarrow (T_1M, G_s)$  è un'applicazione armonica se, e solo se,  $\bar{\Delta}U = \|\nabla U\|^2 U$  e  $\text{tr}R(\nabla U, U) \cdot = 0$  (cfr. [47]). Ad esempio, il campo di Hopf  $\xi$  definisce un'applicazione armonica tra la sfera canonica e il fibrato sferico unitario tangente  $T_1S^{2n+1}$  (cfr. [47] ed anche [90],[91]). La condizione  $\bar{\Delta}U = \|\nabla U\|^2 U$  caratterizza i campi di vettori unitari come punti critici del funzionale energia  $E$  ristretto allo spazio  $\mathfrak{X}^1(M)$ , quando non vuoto, di tutti i campi vettoriali unitari su  $M$  (cfr. [121]). L'articolo [121] è il primo di una lunga lista di articoli nell'ambito di questa teoria (cfr., ad esempio, la monografia [33]).

## 12.9 La 2ª formula variazionale e stabilità

### 12.9.1 Forma hessiana dell'energia e l'operatore di Jacobi

Preliminarmente introduciamo alcune notazioni che ci saranno utili nella formula della variazione seconda di un'applicazione armonica. Tale formula è dovuta a Smith [102] e Mazet [66].

Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione differenziabile. Indichiamo con  $R'$  il tensore di curvatura di  $(M', g')$  definito da

$$R'(X, Y)Z = -\nabla'_X \nabla'_Y Z + \nabla'_Y \nabla'_X Z + \nabla'_{[X, Y]} Z.$$

$R' \circ f_* = R'(f_*, f_*)f_*$  è un tensore di tipo (1,3) su  $M$  a valori in  $f^{-1}TN$ . Per ogni  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ :  $R'(f_*X, f_*Y)f_*Z \in \mathfrak{X}(f)$ , dove

$$(R'(f_*X, f_*Y)f_*Z)(p) = R'_{f(p)}(f_{*p}X_p, f_{*p}Y_p)f_{*p}Z_p \in T_{f(p)}M'.$$

Inoltre, dalla Proposizione 12.3, si ha

$$R'(f_*X, f_*Y)f_*Z = -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y f_*Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X f_*Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} f_*Z.$$

Consideriamo l'operatore

$$Ric_f : \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f), \quad V \longmapsto Ric_f V = -\text{tr} R'(V, f_*)f_*.$$

Se  $\{e_i\}$  è una base ortonormale locale di campi vettoriali su  $M$ ,

$$\text{tr} R'(V, f_*)f_* : M \rightarrow f^{-1}TM', \quad p \mapsto \text{tr} (R'(V, f_*)f_*)_p,$$

dove

$$\text{tr} (R'(V, f_*)f_*)_p = \sum_{i=1}^n R'_{f(p)}(V_p, f_{*p}e_{ip})f_{*p}e_{ip}.$$

Per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(f)$  e per ogni  $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ , l'operatore  $Ric_f$  soddisfa:

$$\begin{aligned} Ric_f(\varphi V) &= \varphi Ric_f V, & Ric_f(V + W) &= Ric_f V + Ric_f W, \\ \bar{g}(Ric_f V, W) &= \bar{g}(V, Ric_f W). \end{aligned}$$

#### **Teorema 12.33. (formula della variazione seconda)**

Sia  $f : (M, g) \longrightarrow (M', g')$  un'applicazione armonica con  $M$  compatta. Se  $\{f_t\}_{t \in I}$  è una variazione di  $f$ , allora

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E(t)}{dt^2}(0) &= - \int_M \bar{g}(V, \text{tr}(\bar{\nabla}^2 V - R'(V, f_*)f_*)) v_g & (12.29) \\ &= \int_M \bar{g}(V, \bar{\Delta}_f V - Ric_f V) v_g, \end{aligned}$$

dove  $V$  è il campo variazionale.

*Dimostrazione.* Sia  $\Phi = (f_t)_{t \in I}$ ,  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ , una variazione dell'applicazione armonica  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$ . La derivata prima  $E'(t)$  è data dalla (12.20):

$$E'(t) = - \int_M \bar{g} \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i) \right) v_g.$$

Derivando questa equazione, e applicando la compatibilità di  $\bar{\nabla}$  con  $\bar{g}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} E''(t) &= - \int_M \frac{\partial}{\partial t} \bar{g} \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i) \right) v_g \\ &= - \int_M \bar{g} \left( \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i) \right) v_g \quad (12.30) \\ &\quad - \int_M \bar{g} \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} (\bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i) \right) v_g. \end{aligned}$$

Il primo termine della (12.30), per  $t = 0$ , si annulla. Infatti, essendo  $f$  applicazione armonica, si ha:

$$\left( \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i - \Phi_* \nabla_{e_i} e_i) \right)_{|t=0} = \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i) = \tau(f) = 0.$$

Applicando la definizione di  $R' \circ f_*$ , la (12.8), e tenendo conto che  $[\frac{\partial}{\partial t}, e_i] = 0$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* e_i &= \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Phi_* e_i + \bar{\nabla}_{[\frac{\partial}{\partial t}, e_i]} \Phi_* e_i - R' \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i \right) \Phi_* e_i \\ &= \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Phi_* e_i - R' \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i \right) \Phi_* e_i \\ &= \bar{\nabla}_{e_i} \left( \bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* \frac{\partial}{\partial t} + \Phi_* [\frac{\partial}{\partial t}, e_i] \right) - R' \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i \right) \Phi_* e_i \\ &= \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \Phi_* \frac{\partial}{\partial t} - R' \left( \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}, \Phi_* e_i \right) \Phi_* e_i. \end{aligned}$$

Inoltre, tenendo conto che  $[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{e_i} e_i] = 0$ , applicando la (12.8), otteniamo

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \Phi_* \nabla_{e_i} e_i = \Phi_* [\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{e_i} e_i] + \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \Phi_* \frac{\partial}{\partial t} = \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} \Phi_* \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pertanto, dalla (12.30), per  $t = 0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} E''(0) &= \int_M \bar{g} \left( V, \sum_{i=1}^n (-\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} V + \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n R'(V, f_* e_i) f_* e_i \right) v_g \\ &= \int_M \bar{g} (V, \bar{\Delta}_f V - Ric_f V) v_g. \end{aligned}$$

□

Il teorema precedente ci dice che la variazione seconda dell'energia è determinata dal campo variazionale  $V$  lungo l'applicazione armonica e dal tensore di curvatura di  $(M', g')$ . Per  $V \in \mathfrak{X}(f)$ , la forma hessiana dell'energia nel punto critico  $f$  (applicazione armonica) è la forma quadratica  $(\text{Hess } E)_f$  su  $\mathfrak{X}(f)$  data da

$$(\text{Hess } E)_f(V, V) = \left( \frac{d^2}{dt^2} E(f_t) \right)_{|t=0} = \int_M \bar{g}(V, \bar{\Delta}_f V - \text{Ric}_f V) v_g,$$

dove  $f_t$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , è una variazione di  $f$  il cui campo variazionale è  $V$ . Hessiano dell'energia nel punto critico  $f$  è l'applicazione bilineare simmetrica  $(\text{Hess } E)_f$  definita, per ogni  $V, W \in \mathfrak{X}(f)$ , da :

$$\begin{aligned} (\text{Hess } E)_f(V, W) &= \int_M \bar{g}(V, \bar{\Delta}_f W - \text{Ric}_f W) v_g & (12.31) \\ &= \int_M \bar{g}(V, J_f W) v_g . \end{aligned}$$

La bilinearità di  $H_f$  è riferita alla struttura vettoriale reale di  $\mathfrak{X}(f)$ .

**Definizione 12.34.** L'operatore

$$J_f : \mathfrak{X}(f) \longrightarrow \mathfrak{X}(f), \quad V \longmapsto J_f V = (\bar{\Delta}_f - \text{Ric}_f)V,$$

è detto *operatore di Jacobi di  $f$* .

$J_f$  è un operatore differenziale ellittico autoaggiunto del secondo ordine con parte principale  $\bar{\Delta}_f$ . Si possono quindi introdurre le nozioni di nullità, indice, e stabilità per applicazioni armoniche:

$$\begin{aligned} \text{nullity}(f) &:= \dim \{V \in \mathfrak{X}(f) : (\text{Hess } E)_f(V, \cdot) = 0, \}, \\ \text{index}(f) &:= s, \end{aligned}$$

dove

$$s = \text{Sup} \{ \dim S, S \text{ sottospazio di } \mathfrak{X}(f) : (\text{Hess } E)_f(V, V) < 0, \forall V \in S \}.$$

Si noti che indice e nullità sono finiti quando  $M$  è compatta (cfr. [66]).

**Definizione 12.35.** Un'applicazione armonica  $f$  è detta *applicazione armonica stabile* se  $\text{index}(f) = 0$ , cioè

$$(\text{Hess } E)_f(V, V) \geq 0 \quad \forall V \in \mathfrak{X}(f),$$

equivalentemente

$$\frac{d^2 E(t)}{dt^2}(0) \geq 0 \quad \text{per ogni variazione } \{f_t\}_{t \in I} \text{ di } f.$$

Di conseguenza, un'applicazione armonica  $f$  è *instabile* se  $\text{index}(f) > 0$ , cioè

$$\text{se esiste } V \in \mathfrak{X}(f) \text{ tale che } (\text{Hess } E)_f(V, V) < 0.$$

### Spettro dell'operatore di Jacobi

Poiché  $J_f$  è un operatore differenziale del secondo ordine ellittico e autoaggiunto, con  $M$  compatta, il suo spettro, denotato con  $\text{Spec}(J_f)$ , consiste di un insieme discreto (infinito) di autovalori con molteplicità finita:

$$\text{Spec}(J_f) = \{\lambda_1(f) \leq \lambda_2(f) \leq \dots \leq \lambda_i(f) \leq \dots \uparrow \infty\}. \quad (12.32)$$

Ricordiamo che  $\lambda$  è un autovalore di  $J_f$  se

$$V_\lambda(J_f) := \{V \in \mathfrak{X}(f) : J_f V = \lambda V\} \neq \{0\}.$$

$V_\lambda(J_f)$  è l'autospazio relativo a  $\lambda$ , la sua dimensione è detta molteplicità di  $\lambda$ . Nella (12.32) ogni autovalore compare un numero di volte uguale alla sua molteplicità. In termini di autovalori di  $J_f$ , risulta:

$$\text{index}(f) = \sum_{\lambda < 0} \dim V_\lambda(f),$$

$$\text{nullity}(f) = \dim V_0(f) = \dim \text{Ker } J_f,$$

$$f \text{ è stabile} \iff \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

$$f \text{ è instabile} \iff \lambda_1 < 0.$$

Nel seguito di questa sezione viene studiato lo spettro dell'operatore di Jacobi  $J_f$  per un'applicazione costante e per un'applicazione a valori in un toro.

### L'operatore di Jacobi di un'applicazione costante

Sia  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  un'applicazione costante:  $f(p) = q, \forall p \in M$ . In tal caso  $f$  è un'applicazione armonica e

$$\mathfrak{X}(f) = \{V : V(p) \in T_q M', \forall p \in M\}.$$

Quindi, se  $\{v_1, \dots, v_m\}$  è una base di  $T_q M'$ , possiamo definire  $V_i \in \mathfrak{X}(f)$ ,  $1 \leq i \leq m = \dim M'$ , ponendo

$$V_i(p) = v_i, \quad \forall p \in M.$$

Siccome ogni vettore di  $T_q M'$  si può esprimere come combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_m$ , si ottiene

$$\mathfrak{X}(f) = \{V = \sum_{i=1}^m \varphi_i V_i, \quad \varphi_i \in \mathcal{F}(M)\}.$$

Calcoliamo ora  $J_f V = \bar{\Delta}_f V - \text{Ric}_f V$  per un arbitrario  $V \in \mathfrak{X}(f)$ . Siccome  $f$  è costante,  $f_* = 0$  e quindi

$$\text{Ric}_f V = -\text{tr } R'(V, f_*) f_* = 0.$$

Sia  $V \in \mathfrak{X}(f)$ ,  $V = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha V_\alpha$ . Siccome  $f = \text{cost.}$  e  $V_\alpha$  ha funzioni componenti costanti, dalla (12.2) segue che  $\bar{\nabla}_X V_\alpha = 0$  per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e quindi

$$\bar{\nabla}_X V = \sum_{\alpha=1}^m (X(\varphi_\alpha) V_\alpha + \varphi_\alpha \bar{\nabla}_X V_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^m X(\varphi_\alpha) V_\alpha.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} J_f V &= \bar{\Delta}_f V = - \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m (e_i e_i(\varphi_\alpha) - (\nabla_{e_i} e_i) \varphi_\alpha) V_\alpha \\ &= - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n (e_i e_i(\varphi_\alpha) - (\nabla_{e_i} e_i) \varphi_\alpha) V_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^m (\Delta_g \varphi_\alpha) V_\alpha, \end{aligned}$$

dove  $e_i$  è una base ortonormale locale di campi vettoriali su  $M$  e  $\Delta_g$  è l'operatore di Laplace-Beltrami di  $(M, g)$ . Pertanto, abbiamo la seguente

**Proposizione 12.36.** *Se  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$ , con  $M$  compatta, è un'applicazione costante, allora lo spettro del suo operatore di Jacobi è l'insieme degli autovalori dell'operatore di Laplace-Beltrami di  $(M, g)$  contati  $m$  volte,  $m = \dim M'$ , ossia:*

$$\text{Spec}(J_f) = m \times \text{Spec}(\Delta_g).$$

*In particolare,  $\text{Spec}(J_f)$  non dipende dal punto  $q = f(M) \in M'$ . Inoltre, se consideriamo due applicazioni costanti  $f_1 : (M_1, g_1) \rightarrow (M_1, g'_1)$  e  $f_2 : (M_2, g_2) \rightarrow (M_2, g'_2)$ , allora:*

$$\text{Spec}(J_{f_1}) = \text{Spec}(J_{f_2}) \Leftrightarrow \dim M'_1 = \dim M'_2 \text{ e } \text{Spec} \Delta_{g_1} = \text{Spec} \Delta_{g_2}.$$

Siccome

$$\text{Spec} \Delta_g = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots \uparrow \infty\},$$

dove la molteplicità di  $\lambda_0$  è 1 (le funzioni armoniche su una varietà riemanniana compatta sono le costanti), segue il seguente

**Corollario 12.37.** *Se  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$ , con  $M$  compatta, è un'applicazione costante, allora*

$$\text{index}(f) = 0 \text{ (quindi } f \text{ è stabile),}$$

$$\text{nullity}(f) = \dim V_0(f) = \dim \text{Ker} J_f = m = \dim M'.$$

La Proposizione 12.36 ci dice che la teoria della variazione seconda di un'applicazione costante è non banale. Inoltre, l'operatore di Jacobi si può pensare anche come una naturale generalizzazione dell'operatore di Laplace-Beltrami  $\Delta_g$ : quest'ultimo si può identificare con l'operatore di Jacobi di un'applicazione costante  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ .

### L'operatore di Jacobi di un'applicazione a valori in un toro.

Siano  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta,  $(\mathbb{T}^m, g_0)$  un toro piatto e  $\phi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$  un'applicazione armonica. Intanto,  $\phi$  è stabile (cfr. Proposizione 12.40). Poiché  $\mathbb{T}^m$  è parallelizzabile, esistono  $Y_1, \dots, Y_m \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^m)$  linearmente indipendenti e paralleli. Ponendo  $\tilde{Y}_\alpha = Y_\alpha \circ \phi$  otteniamo  $m$ -elementi di  $\mathfrak{X}(\phi)$  che risultano ancora linearmente indipendenti. Quindi,

$$\mathfrak{X}(\phi) = \left\{ V = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha \tilde{Y}_\alpha, \varphi_\alpha \in \mathcal{F}(M) \right\}.$$

Inoltre, siccome  $\mathbb{T}^m$  è piatto, i coefficienti della connessione di Levi-Civita di  $\mathbb{T}^m$  sono nulli e quindi (cfr. (12.6)):

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = 0.$$

D'altronde, si può prendere un sistema di coordinate locali  $(y_\alpha)$  per cui localmente  $Y_\alpha = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ . Quindi,

$$\bar{\nabla}_X \tilde{Y}_\alpha = 0.$$

Da questa condizione, per  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e per  $V = \sum_{\alpha=1}^m \varphi_\alpha \tilde{Y}_\alpha \in \mathfrak{X}(\phi)$ , segue che

$$\bar{\nabla}_X V = \sum_{\alpha=1}^m X(\varphi_\alpha) \tilde{Y}_\alpha.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_\phi V &= - \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} V - \bar{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i} V) \\ &= - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{i=1}^n \left( e_i e_i(\varphi_\alpha) - (\nabla_{e_i} e_i) \varphi_\alpha \right) \tilde{Y}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^m (\Delta_g \varphi_\alpha) \tilde{Y}_\alpha, \end{aligned}$$

dove  $\Delta_g$  è l'operatore di Laplace-Beltrami di  $(M, g)$ . D'altronde,

$$J_\phi V = \bar{\Delta}_\phi V - Ric_\phi V = \bar{\Delta}_\phi V.$$

Pertanto abbiamo la seguente

**Proposizione 12.38.** (Urakawa [113]) *Se  $\phi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$ , con  $M$  compatta, è un'applicazione armonica, allora*

$$\text{Spec}(J_\phi) = m \times \text{Spec}(\Delta_g).$$

*In particolare, se  $\phi' : (M', g') \rightarrow (\mathbb{T}^p, g_0)$ , con  $M'$  compatta, è un'altra applicazione armonica, risulta*

$$\text{Spec}(J_\phi) = \text{Spec}(J_{\phi'}) \iff m = p \quad \text{e} \quad \text{Spec}(\Delta_g) = \text{Spec}(\Delta_{g'}).$$



Dalle Proposizioni 12.36 e 12.38, segue la seguente

**Proposizione 12.39.** *Se  $\phi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$ , con  $M$  compatta, è un'applicazione armonica e  $f_0 : (M, g) \rightarrow (\mathbb{T}^m, g_0)$  è un'applicazione costante, allora*

$$\text{Spec}(J_\phi) = \text{Spec}(J_{f_0}).$$

*Quindi, lo spettro di  $J_\phi$  non determina, in generale, l'applicazione armonica  $\phi$ .*

Un esempio di applicazione armonica a valori in un toro piatto è dato dalla cosiddetta applicazione di Albenese  $\phi : (M, g) \rightarrow (\mathbb{T}^p, g_0)$ , dove  $p$  è dato dal primo numero di Betti  $b_1$  di  $M$  che si assume positivo (cfr. J. Jost, [53] p. 87-88). Si noti che una varietà riemanniana compatta  $(M, g)$  con tensore di Ricci definito positivo ha  $b_1 = 0$ .

## 12.9.2 Il Teorema di Xin

Il Teorema di Xin riguarda l'instabilità di applicazioni armoniche sulla sfera. Intanto, diamo il seguente risultato di stabilità.

**Proposizione 12.40.** *Se  $(M, g)$  è compatta e  $(M', g')$  ha curvatura sezionale non positiva, allora ogni applicazione armonica  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  è stabile. In particolare, si ottiene che ogni applicazione armonica  $f : (M, g) \rightarrow (\mathbb{R}^m, g_0)$  è stabile.*

*Dimostrazione.* Se  $(M', g')$  ha curvatura sezionale non positiva, allora per ogni  $u, v \in T_q M'$ :

$$R'(u, v, u, v) = g'(R'(u, v)u, v) \leq 0.$$

Quindi, per ogni  $V \in \mathfrak{X}(f)$  e per ogni  $p \in M$ , si ha

$$\begin{aligned} \bar{g}(\text{Ric}_f V, V)(p) &= \sum_{i=1}^n g'(R'(V_p, f_* e_{i_p}) f_* e_{i_p}, V_p) \\ &= - \sum_{i=1}^n R'(V_p, f_* e_{i_p}, V_p, f_* e_{i_p}) \geq 0. \end{aligned}$$

D'altronde

$$\int_M \bar{g}(\bar{\Delta}_f V, V) v_g = \int_M \bar{g}(\bar{\nabla} V, \bar{\nabla} V) v_g \geq 0.$$

Pertanto, dalla (12.31), segue che  $(\text{Hess } E)_f(V, V) \geq 0$  per ogni  $V \in \mathfrak{X}(f)$ .  $\square$

Per applicazioni armoniche definite sulla sfera canonica abbiamo il seguente risultato di instabilità di Xin [123].

**Teorema 12.41.** *Sia  $\mathbb{S}^n$  la sfera canonica di curvatura sezionale costante  $+1$ ,  $n \geq 3$ . Allora ogni applicazione armonica  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow (M', g')$ , non costante, è instabile;*

*Dimostrazione.* Sia  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow (M', g')$ ,  $n \geq 3$ , un'applicazione armonica. Per provare il teorema basta provare che se  $f$  è stabile allora  $f$  è costante. Per ogni  $p \in \mathbb{S}^n$ :  $T_p \mathbb{R}^{n+1} = T_p \mathbb{S}^n \oplus (T_p \mathbb{S}^n)^\perp$  e quindi per ogni  $V \in T_p \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $V \equiv a \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$V = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad V = V^\top + V^\perp,$$

$$V^\top = a - g_0(a, p)p \quad \text{e} \quad V^\perp = g_0(a, p)p,$$

dove  $g_0$  denota il prodotto scalare euclideo di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Pertanto

$$T_p \mathbb{S}^n = \{a - g_0(a, p)p, \quad a \in \mathbb{R}^{n+1}\}, \quad (12.33)$$

e per ogni  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  si definisce il campo vettoriale  $W_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$  ponendo:

$$W_a(p) := a - g_0(a, p)p.$$

Si noti che  $W_a = \text{grad } h_a$ , dove  $h_a(p) = g_0(a, p)$  per ogni  $p \in \mathbb{S}^n$ . Questi campi vettoriali soddisfano le seguenti proprietà:

$$\nabla_{X_p} W_a = -g_0(a, p)X_p \quad \forall X_p \in T_p \mathbb{S}^n, \quad \bar{\Delta} W_a = W_a.$$

Usando queste formule, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_f f_* W_a &= - \sum_{i=1}^n R'(f_* W_a, f_* e_i) f_* e_i + (2 - n) f_* W_a \\ &= \text{Ric}_f f_* W_a + (2 - n) f_* W_a, \end{aligned} \quad (12.34)$$

dove  $f_* W_a \in \mathfrak{X}(f)$  ed  $\{e_i\}$  è una base ortonormale locale di campi di vettori su  $\mathbb{S}^n$ . Allora, la (12.34) e la (12.31) implicano

$$(\text{Hess} E)_f(f_* W_a, f_* W_a) = (2 - n) \int_{\mathbb{S}^n} \bar{g}(f_* W_a, f_* W_a) v_{g_0}. \quad (12.35)$$

Siccome stiamo assumendo  $f$  stabile ed  $n \geq 3$ , dalla (12.35) si ottiene

$$f_* W_a = 0, \quad \text{cioè } f_{*p} W_a(p) = 0 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ e per ogni } p \in \mathbb{S}^n.$$

Pertanto, tenendo conto della (12.33), otteniamo che  $f_* = 0$  e quindi  $f$  è costante.  $\square$

**Osservazione 12.42.** Come già osservato, se  $f : (M, g) \rightarrow (M', g')$  è un'immersione isometrica, allora  $f$  è applicazione armonica se, e solo se,  $f$  è un'immersione minimale. La Proposizione 12.40 e il Teorema 12.41 ci dicono in particolare che, c'è differenza tra stabilità di  $f$  pensata come applicazione armonica (cioè rispetto al funzionale energia) oppure come immersione minimale (cioè rispetto al funzionale volume). Infatti, se  $(M', g') = (\mathbb{R}^n, g_0)$ ,  $f$  come applicazione armonica è sempre stabile (cfr. Proposizione 12.40), tuttavia se  $(M, g)$  è il catenoide di  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  è noto che tale superficie è una superficie minimale completa non stabile (cfr. [31]). Al contrario, se  $(M', g')$  è il cilindro  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ , è noto che l'imbedding standard  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$  è un imbedding minimale stabile, mentre come applicazione armonica è instabile (cfr. Teorema 12.41).

**Corollario 12.43.** *Siano date la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  di curvatura sezionale costante  $+1$ ,  $n \geq 3$ , e una varietà riemanniana  $(M', g')$  di curvatura sezionale non positiva. Allora, ogni applicazione armonica  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow (M', g')$  è costante.*

*Dimostrazione.* Se  $f$  fosse non costante, dal Teorema 12.41 si avrebbe  $f$  instabile. D'altronde, siccome  $M'$  ha curvatura sezionale non positiva, per la Proposizione 12.40 si avrebbe che  $f$  è stabile.  $\square$

In particolare, se esiste  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow (M', g')$  applicazione armonica non costante,  $n \geq 3$ ,  $(M', g')$  ha necessariamente qualche curvatura sezionale positiva. Con un metodo simile a quello usato per dimostrare il Teorema di Xin, si dimostra il seguente risultato di Leung [63].

**Teorema 12.44.** *Ogni applicazione armonica (non costante)  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ , con  $M$  compatta e  $n > 2$ , è instabile.*

### 12.9.3 Stabilità dell'identità e il Teorema di Smith

L'applicazione identità  $I : (M, g) \rightarrow (M, g)$ ,  $M$  compatta, è un altro esempio banale di applicazione armonica, tuttavia la corrispondente teoria della variazione seconda è più complicata rispetto al caso di un'applicazione costante. In questo caso:  $\mathfrak{X}(f) = \mathfrak{X}(I) = \mathfrak{X}(M)$ ,  $\bar{\Delta}_I$  è l'usuale rough laplaciano  $\bar{\Delta}$  di  $(M, g)$  e  $Ric_I$  è l'operatore di Ricci  $Q$  di  $(M, g)$ :

$$Ric_I X = -\text{tr } R(X, \cdot) \cdot = \text{tr } R(\cdot, X) \cdot = QX.$$

Pertanto, l'operatore di Jacobi è dato da:

$$J_I : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), X \mapsto J_I X = (\bar{\Delta} - Q)X.$$

Usando la formula di Weitzenböck :

$$\Delta_1 = \bar{\Delta} + Q,$$

si ottiene che  $J_I$  è legato a  $\Delta_1$  (laplaciano operante sui campi di vettori) da

$$J_I = \bar{\Delta} - Q = \Delta_1 - 2Q = 2\bar{\Delta} - \Delta_1. \quad (12.36)$$

**Proposizione 12.45.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta. Allora,*

$$\begin{aligned} (\text{Hess } E)_I(X, X) &= \int_M (\|\nabla X\|^2 - \text{Ric}(X, X)) v_g \\ &= \int_M (g(\Delta_1 X, X) - 2\text{Ric}(X, X)) v_g \\ &= \int_M \left( \frac{1}{2} \|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\text{div} X)^2 \right) v_g \end{aligned}$$

per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , dove  $\mathcal{L}_X$  è la derivata di Lie. In particolare, se la curvatura di Ricci di  $(M, g)$  è semi-definita negativa, l'identità  $I$  è stabile.

*Dimostrazione.* La prima uguaglianza segue dalla (12.26) e dalla (12.31). Inoltre, usando la (12.36), si ottiene

$$\begin{aligned} (\text{Hess } E)_I(X, X) &= \int_M g(J_I X, X) v_g \\ &= 2 \int_M g(\bar{\Delta} X, X) v_g - \int_M g(\Delta_1 X, X) v_g \quad (12.37) \\ &= 2 \int_M \|\nabla X\|^2 v_g - \int_M g(\Delta_1 X, X) v_g. \end{aligned}$$

Posto  $\omega = g(X, \cdot)$ , si ha

$$\begin{aligned} \|\nabla X\|^2 &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) = \dots = \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{e_i} \omega)(e_j) \quad (12.38) \\ &= \|\nabla \omega\|^2, \end{aligned}$$

dove (cfr. [114], p. 238)

$$\|\nabla \omega\|^2 = \frac{1}{2} \|\text{d } \omega\|^2 + \frac{1}{4} \|\mathcal{L}_X g\|^2.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \int_M g(\Delta_1 X, X) v_g &= \int_M g(\Delta_1 \omega, \omega) v_g \quad (12.39) \\ &= \int_M (\|\text{d } \omega\|^2 + \|\delta \omega\|^2) v_g \\ &= \int_M (\|\text{d } \omega\|^2 + (\text{div} X)^2) v_g. \end{aligned}$$

Sostituendo la (12.39) e la (12.38) nella (12.37), si ottiene la formula enunciata.  $\square$

Dalla Proposizione 12.45 segue la formula di Bochner-Yano:

$$\int_M (\|\nabla X\|^2 - Ric(X, X)) v_g = \int_M \left( \frac{1}{2} \|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\operatorname{div} X)^2 \right) v_g.$$

Il seguente risultato sulla stabilità dell'identità è dovuto a R.T. Smith [102].

**Teorema 12.46.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta di Einstein:  $Ric = cg$ , dove  $c = \text{cost}$ . Sia  $\lambda_1$  il primo autovalore positivo dell'operatore di Laplace-Beltrami. Allora:*

- (i) *l'identità  $I$  è stabile  $\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 2c$ , quindi  $I$  è instabile  $\Leftrightarrow \lambda_1 < 2c$ ;*  
(ii) *nullity( $I$ ) = dim Iso( $M, g$ ) + dim{ $f \in \mathcal{F}(M) : \Delta f = 2c f$ }.*

*Dimostrazione.* Dalla decomposizione di Hodge-de Rham:

$$\Lambda^1(M) = \{\alpha \in \Lambda^1(M) : \delta\alpha = 0\} \oplus \{df : f \in \mathcal{F}(M)\},$$

che è ortogonale rispetto al prodotto scalare integrale, segue la decomposizione ortogonale

$$\mathfrak{X}(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \operatorname{div} X = 0\} \oplus \{\operatorname{grad} f : f \in \mathcal{F}(M)\}.$$

Questa decomposizione di  $\mathfrak{X}(M)$  è invariante per l'operatore  $\Delta_1$ . Se  $\operatorname{div} X = 0$ , posto  $\omega = g(X, \cdot)$ , si ha  $\delta\omega = -\operatorname{div} X = 0$ . Inoltre, siccome  $g(\Delta_1 X, \cdot) := \Delta_1 \omega$ , si ha

$$\operatorname{div}(\Delta_1 X) = -\delta\Delta_1 \omega = -\delta(d\delta + \delta d)\omega = -\delta d\delta\omega = 0.$$

Se  $X = \operatorname{grad} f$ , si ha

$$g(\Delta_1(\operatorname{grad} f), \cdot) = \Delta_1(df) = d\delta df = d(\Delta f),$$

e quindi

$$\Delta_1(\operatorname{grad} f) = \operatorname{grad}(\Delta f).$$

Poiché per ipotesi la varietà è di Einstein, quindi  $Q = cI$ , allora l'equazione (12.36) diventa

$$J_I = \Delta_1 - 2Q = \Delta_1 - 2cI,$$

e quindi la decomposizione di  $\mathfrak{X}(M)$  è invariante anche per l'operatore di Jacobi  $J_I$ .

(i) Per  $X \in \mathfrak{X}(M)$  con  $\operatorname{div} X = 0$ , applicando la formula della Proposizione 12.45, si ha

$$\int_M g(J_I X, X) v_g = \frac{1}{2} \int_M \|\mathcal{L}_X g\|^2 v_g \geq 0,$$

e quindi gli autovalori dell'operatore di Jacobi di  $J_I$  sono non negativi sul sottospazio  $\{X \in \mathfrak{X}(M) : \operatorname{div} X = 0\}$ .

Sul sottospazio  $\{\operatorname{grad} f : f \in \mathcal{F}(M)\}$ , abbiamo

$$J_I(\operatorname{grad} f) = \Delta_1(\operatorname{grad} f) - 2c \operatorname{grad} f = \operatorname{grad}(\Delta f) - 2c \operatorname{grad} f.$$

Esprimendo  $f \in \mathcal{F}(M)$  in termini di autofunzioni di  $\Delta$ , si ha

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i, \quad \Delta f_0 = 0, \quad \Delta f_i = \lambda_i f_i, \quad i \geq 1.$$

Da

$$J_I(\text{grad} f_i) = (\lambda_i - 2c)\text{grad} f_i, \quad i \geq 1,$$

segue che gli autovalori di  $J_I$  sul sottospazio  $\{\text{grad} f : f \in \mathcal{F}(M)\}$  sono

$$\{\lambda_i - 2c, \quad i \geq 1\}.$$

Mettendo assieme i due casi, otteniamo che

$$I \text{ è stabile} \iff \lambda_1 \geq 2c.$$

(ii) Segue dalla decomposizione ortogonale di  $\mathfrak{X}(M)$ , osservando i seguenti fatti:

- per  $X \in \mathfrak{X}(M)$  con  $\text{div} X = 0$ , si ha:  $J_I X = 0 \iff X$  è di Killing;
- per  $f_i$  autofunzione di  $\Delta$ ,  $\Delta f_i = \lambda_i f_i$ , si ha:  $J_I(\text{grad} f_i) = 0 \iff \lambda_i = 2c$ ;
- quando  $M$  è completa (in particolare compatta), l'algebra di Lie del gruppo delle isometrie di  $(M, g)$  è isomorfo all'algebra di Lie delle isometrie infinitesimali, cioè, dei campi di Killing di  $M$  (cfr. Osservazione 9.8).  $\square$

La sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  ha curvatura sezionale costante  $k_0 > 0$ , tensore di Ricci  $\text{Ric}_0 = (n-1)k_0 g_0 = c g_0$  e  $\lambda_1 = k_0 n = \frac{n}{n-1}c$ . Poiché  $\frac{n}{n-1} \leq 2$  e  $\frac{n}{n-1} = 2 \iff n = 2$ , abbiamo il seguente

**Corollario 12.47.** *Per la sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  :*

$$I_{\mathbb{S}^2} \text{ è stabile e } I_{\mathbb{S}^n}, n \geq 3, \text{ è instabile.}$$

**Osservazione 12.48.** Per  $n \geq 3$ , i campi di vettori  $W_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$  introdotti nella dimostrazione del Teorema 12.41 (di Xin) formano un sottospazio  $(n+1)$ -dimensionale su cui l'hessiano è definito negativo. Una base per tale sottospazio è data dai campi di vettori  $W_i$  definiti dai vettori  $\{e_i\}$  della base canonica di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Quindi  $\text{index}(I_{\mathbb{S}^n}) \geq n+1$ . In effetti  $\text{index}(I_{\mathbb{S}^n})$  è esattamente  $n+1$  (cfr. [102]).

Piú in generale, in dimensione 2, possiamo dare il seguente risultato di stabilità dell'identità.

**Proposizione 12.49.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta di dimensione 2. Allora,*

- (i) *l'identità  $I : (M, g) \rightarrow (M, g)$  è stabile;*
- (j) *per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ :  $(\text{Hess} E)_I(X, X) = 0$  se, e solo se,  $X$  è un campo di vettori conformemente di Killing (cioè,  $\mathcal{L}_X g = (2/n)(\text{div} X)g$ ).*

*Dimostrazione.* Dalla Proposizione 12.45, per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$(\text{Hess } E)_I(X, X) = \int_M \left( \frac{1}{2} \|\mathcal{L}_X g\|^2 - (\text{div } X)^2 \right) v_g. \quad (12.40)$$

Posto  $h := \mathcal{L}_X g$  e  $S := h - (\text{tr } h/n)g$ ,  $n = \dim M$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= \langle S, S \rangle = \langle h, h \rangle - 2 \frac{\text{tr } h}{n} \langle h, g \rangle + \frac{(\text{tr } h)^2}{n^2} \langle g, g \rangle \\ &= \|h\|^2 - \frac{(\text{tr } h)^2}{n}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\|h\|^2 \geq \frac{(\text{tr } h)^2}{n}, \quad \|h\|^2 = \frac{(\text{tr } h)^2}{n} \iff h = \frac{\text{tr } h}{n} g.$$

D'altronde,

$$\text{div } X = \frac{1}{2} \text{tr } \mathcal{L}_X g = \frac{1}{2} \text{tr } h.$$

Pertanto dalla (12.40), si ottiene

$$(\text{Hess } E)_I(X, X) \geq \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \int_M (\text{div } X)^2 v_g \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \quad (12.41)$$

Per  $n = 2$ , risulta

$$(\text{Hess } E)_I(X, X) \geq 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

e quindi  $I$  è stabile; inoltre,

$$(\text{Hess } E)_I(X, X) = 0 \iff \mathcal{L}_X g = (\text{div } X)g.$$

Quest'ultima condizione ci dice che  $X$  è conformemente di Killing.  $\square$

Sempre nel caso 2-dimensionale, si può provare che  $I$  è un minimo assoluto per l'energia (cfr. [5] p. 99).

**Osservazione 12.50.** Dalla Proposizione 12.45, abbiamo

$$(\text{Hess } E)_I(X, X) = \int_M (\|\nabla X\|^2 - \text{Ric}(X, X)) v_g$$

Per cui, assumendo  $I$  stabile e usando la (12.41), si ottiene

$$\int_M (\|\nabla X\|^2 - \text{Ric}(X, X) + \frac{n-2}{n} (\text{div } X)^2) v_g \geq 0, \quad (12.42)$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se,  $X$  è conformemente di Killing. Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è conformemente di Killing e  $\text{Ric}(X, X) \leq 0$ , dalla (12.42) segue che  $\nabla X = 0$  e quindi  $M$  è localmente riducibile. In particolare: *su una varietà riemanniana compatta con tensore di Ricci definito negativo non esistono campi di vettori conformemente di Killing.*

**Proposizione 12.51.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta. Se  $\lambda_1^1$  è il primo autovalore non nullo di  $\Delta_1$  e  $\lambda_1$  è il primo autovalore non nullo di  $\Delta$ , allora  $\lambda_1^1 \leq \lambda_1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{F}(M)$  tale che  $\Delta f = \lambda_1 f$ . Poniamo  $\alpha = df \neq 0$ , allora

$$\Delta_1 \alpha = (d\delta + \delta d)df = d\delta df = d\Delta f = \lambda_1 \alpha$$

implica  $\lambda_1^1 \leq \lambda_1$ . □

**Proposizione 12.52.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta. Poniamo*

$$c := \inf \{ Ric(u, u) : u \in T_p M, \|u\| = 1, p \in M \}.$$

*Se  $I$  è stabile, allora*

$$2c \leq \lambda_1^1 \leq \lambda_1.$$

*Quindi,  $\lambda_1^1 < 2c$  implica che  $I$  è instabile.*

*Dimostrazione.* Poiché  $I$  è stabile:

$$\int_M g(J_I X, X) v_g \geq 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Dalla definizione di  $c$ , si ha  $Ric(X, X) \geq c g(X, X)$ . Quindi, applicando la Proposizione 12.45, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_M g(J_I X, X) v_g &= \int_M g(\Delta_1 X, X) v_g - 2 \int_M Ric(X, X) v_g \\ &\leq \int_M g(\Delta_1 X, X) v_g - 2c \int_M g(X, X) v_g. \end{aligned}$$

Pertanto, prendendo  $X$  autovettore di  $\Delta_1$  relativo all'autovalore  $\lambda_1^1$ , si ottiene  $\lambda_1^1 - 2c \geq 0$ . □

**Osservazione 12.53.** Un ben noto Teorema di Lichnerowicz-Obata stabilisce che se il tensore di Ricci di una varietà riemanniana compatta  $(M, g)$  soddisfa  $Ric \geq cg$ , con  $c = \text{cost.} > 0$ , allora il primo autovalore non nullo del laplaciano (operante sulle funzioni) soddisfa:

$$\lambda_1 \geq (n/(n-1))c, \quad n = \dim M,$$

dove l'uguaglianza vale se, e solo se,  $(M, g)$  è isometrica alla sfera canonica  $\mathbb{S}^n$  di curvatura sezionale costante  $\kappa_0 = c/(n-1)$ .

La stima  $\lambda_1 \geq 2c$ , che segue dalla Proposizione 12.52, è più fine della stima di Lichnerowicz-Obata, ciò è dovuto alla condizione di stabilità per  $I$  che per  $\mathbb{S}^n$  è soddisfatta solo per  $n = 2$ . In particolare, se  $(M, g)$  è di Einstein ( $Ric = cg$ ,  $c > 0$ ) con  $\dim M \geq 3$  e  $I$  instabile, allora

$$(n/(n-1))c \leq \lambda_1 < 2c.$$



**Osservazione 12.54.** Un risultato del tipo Lichnerowicz-Obata (come ricordato nella precedente Osservazione 12.53) che riguarda il primo autovalore non nullo del laplaciano  $\Delta_r$  (detto anche operatore di Hodge-de Rham) operante sulle  $r$ -forme è dato in [85]. Più precisamente in [85], come conseguenza di un risultato più generale, è provato quanto segue. Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana compatta orientabile conformemente piatta e con tensore di Ricci che soddisfa  $Ric \geq cg$  per qualche costante  $c > 0$ , allora

$${}^r\lambda_1 \geq \frac{r(n-r+1)c}{n-1}, \quad 1 \leq r \leq n/2, \quad n = \dim M,$$

dove  ${}^r\lambda_1$  è il primo autovalore non nullo del laplaciano  $\Delta_r$ . Inoltre, se l'uguaglianza vale per qualche  $r$ ,  $1 \leq r \leq n/2$ , allora  $(M, g)$  ha curvatura sezionale costante  $\kappa = c/(n-1)$ . Analogo risultato vale per  ${}^r\lambda_1$ ,  $n/2 \leq r \leq n-1$ .

### 12.9.4 Stabilità di applicazioni olomorfe

Enunciamo il seguente risultato di Urakawa (cfr. [114], p. 172) che riguarda la stabilità di applicazioni olomorfe tra varietà di Kähler.

**Teorema 12.55.** *Siano  $(M, J, g)$  e  $(M', J', g')$  due varietà di Kähler compatte, ed  $f : M \rightarrow M'$  un'applicazione olomorfa. Allora*

$$\int_M \bar{g}(J_f V, V) v_g = \int_M \bar{g}(DV, DV) v_g \geq 0 \quad \forall V \in \mathfrak{X}(f),$$

dove  $DV$  è il tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $M$  a valori in  $f^{-1}TN$  definito da:

$$DV : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(f), X \mapsto (DV)(X) := \bar{\nabla}_{JX} V - J' \bar{\nabla}_X V.$$

In particolare :

- (1)  $f$  è stabile (ossia, gli autovalori di  $J_f$  sono non negativi);
- (2)  $\text{Ker} J_f = \{V \in \mathfrak{X}(f) : DV = 0\}$ .

Un campo vettoriale  $V \in \mathfrak{X}(f)$  che soddisfa  $DV = 0$  è detto *campo di vettori analitico lungo  $f$* . Nel seguito spieghiamo il significato di questa nozione. Sulla varietà complessa  $M$  consideriamo il complessificato  $T_p^c M$  di  $T_p M$ . La struttura complessa  $J$  di  $M$  si estende in modo naturale al complessificato  $T_p^c M$  :

$$J(u + \sqrt{-1}v) := Ju + \sqrt{-1}Jv, \quad u, v \in T_p M.$$

Gli autovalori di  $J$  sono  $\pm\sqrt{-1}$ , perciò  $T_p^c M$  si decompone in somma diretta:

$$T_p^c M = T_p^{1,0} M \oplus T_p^{0,1} M, \quad \text{dove}$$

$$\begin{aligned} T_p^{1,0} M &= \{Z \in T_p^c M : JZ = +\sqrt{-1}Z\} \\ &= \{Z \in T_p^c M : Z = u - \sqrt{-1}Ju, \quad u \in T_p M\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_p^{0,1}M &= \{Z \in T_p^c M : JZ = -\sqrt{-1}Z\} \\ &= \{Z \in T_p^c M : Z = u + \sqrt{-1}Ju, u \in T_p M\}. \end{aligned}$$

I vettori di  $T_p^c M$  appartenenti a  $T_p^{1,0}M$  si dicono di tipo olomorfo, mentre quelli appartenenti a  $T_p^{0,1}M$  si dicono di tipo antiolomorfo. Poniamo

$$T^{1,0}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{1,0}M.$$

$T^{1,0}M$  è un fibrato vettoriale complesso che è anche olomorfo, esso è detto *fibrato tangente olomorfo*. Il fibrato tangente  $TM$  è spesso identificato con il fibrato tangente olomorfo  $T^{1,0}M$  mediante l'isomorfismo

$$T_p M \ni u \mapsto \tilde{u} = \frac{1}{2}(u - \sqrt{-1}Ju) \in T_p^{1,0}M. \quad (12.43)$$

Le sezioni olomorfe di  $T^{1,0}M$  sono dette *campi vettoriali olomorfi* su  $M$ . Se  $(z_1, \dots, z_n)$  è un sistema di coordinate locali complesse su  $M$ , poniamo

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Allora  $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)_p\right\}_{j=1, \dots, n}$  è base per  $T_p^{1,0}M$ , e  $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right)_p\right\}_{j=1, \dots, n}$  è base per  $T_p^{0,1}M$ .

Siccome  $J\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$  e  $J\frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}$ , la corrispondenza (12.43) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \mapsto \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Un campo di vettori  $Z = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\partial/\partial z_j)$ , è olomorfo se, e solo se, le funzioni componenti  $\varphi_j$  sono funzioni olomorfe nelle variabili  $(z_1, \dots, z_n)$ . Se  $f : (M, J) \rightarrow (M', J')$  è un'applicazione olomorfa tra due varietà complesse ed  $E$  è un fibrato vettoriale olomorfo su  $M'$ , allora  $f^{-1}E$  è un fibrato vettoriale olomorfo su  $M$ . In particolare,  $f^{-1}T^{1,0}M'$  è un fibrato vettoriale olomorfo su  $M$ . Le sezioni olomorfe di  $f^{-1}T^{1,0}M'$  sono dette *campi vettoriali olomorfi lungo  $f$* . Se  $f$  è un'applicazione olomorfa tra due varietà kähleriane  $(M, J, g)$  e  $(M', J', g')$ , allora esiste un isomorfismo tra lo spazio  $\{V \in \mathfrak{X}(f) : DV = 0\}$  dei campi vettoriali analitici lungo  $f$  e lo spazio dei campi vettoriali olomorfi lungo  $f$ , l'isomorfismo è definito dalla corrispondenza:

$$V \mapsto \bar{V} := \frac{1}{2}(V - \sqrt{-1}J'V).$$

Conseguenza del Teorema 12.55, è il seguente

**Corollario 12.56.** *L'identità  $I$  su una varietà kähleriana compatta  $(M, J, g)$  è stabile, inoltre  $\ker J_I$  è lo spazio dei campi vettoriali olomorfi su  $M$ .*

Si noti che l'analogo di questo corollario in dimensione dispari, ossia per le varietà sasakiane, in generale, non vale. Infatti, l'identità  $I$  sulla sfera unitaria  $\mathbb{S}^{2n+1}$  è instabile e la stessa sfera unitaria  $\mathbb{S}^{2n+1}$  è il classico esempio di varietà sasakiana.

Come applicazione del Corollario 12.56 dimostriamo il seguente Teorema di Urakawa [112] che è la versione kähleriana del Teorema di Lichnerowicz-Obata.

**Teorema 12.57.** *Sia  $(M, J, g)$  una varietà kähleriana compatta con tensore di Ricci definito positivo:  $\text{Ric}(u, u) \geq c = \text{cost} > 0$  per ogni  $u \in T_p M$ ,  $\|u\| = 1$ , e per ogni  $p \in M$ . Allora, il primo autovalore non nullo  $\lambda_1$  dell'operatore di Laplace-Beltrami soddisfa:*

$$\lambda_1 \geq 2c.$$

Se  $\lambda_1 = 2c$ , allora  $M$  ammette un campo vettoriale olomorfo non nullo.

*Dimostrazione.* Dal Corollario 12.56, segue che  $I$  è stabile, di conseguenza applicando la Proposizione 12.52 si ottiene  $\lambda_1 \geq 2c$ .

Viceversa, assumiamo che  $\lambda_1 = 2c$ . Sia quindi  $f \in \mathcal{F}(M)$  tale che  $\Delta f = 2cf$ . Poniamo  $V := \text{grad} f \neq 0$ . Allora

$$\Delta_1 df = (d\delta + \delta d)df = d\delta df = d\Delta f = 2c df,$$

e quindi

$$\Delta_1 V = 2c V.$$

Di conseguenza, siccome  $\Delta_1 = J_I + 2Q$ , otteniamo

$$\begin{aligned} 2c \int_M g(V, V) v_g &= \int_M g(\Delta_1 V, V) v_g \\ &= \int_M g(J_I V, V) v_g + 2 \int_M g(QV, V) v_g. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Siccome  $I$  è stabile,  $J_I$  è un operatore semi definito positivo e quindi

$$\int_M g(J_I V, V) v_g \geq 0.$$

Inoltre, per ipotesi abbiamo

$$2 \int_M g(QV, V) v_g \geq 2c \int_M g(V, V) v_g.$$

Pertanto la (12.44) implica

$$\int_M g(J_I V, V) v_g = 0.$$

Da quest'ultima equazione segue che  $J_I V = 0$ . Infatti, esprimendo  $V$  come somma infinita di autovettori di  $J_I$ :

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i, \quad J_I V_i = \tilde{\lambda}_i V_i, \quad \int_M g(J_I V_i, V_j) v_g = 0, \quad i \neq j.$$

Inoltre, se  $r = \dim \ker J_I$ , allora

$$J_I V = \sum_{i=r+1}^{\infty} \tilde{\lambda}_i V_i, \quad \tilde{\lambda}_i > 0 \quad \forall i \geq r+1.$$

Di conseguenza, otteniamo

$$0 = \int_M g(J_I V, V) v_g = \sum_{i=r+1}^{\infty} \tilde{\lambda}_i \int_M g(V_i, V_i) v_g$$

da cui segue che  $V_i = 0$  per ogni  $i \geq r+1$  e quindi  $J_I V = 0$ . Pertanto, esiste  $V \neq 0$ ,  $V \in \ker J_I$ , e dal Corollario 12.56 segue che  $V$  è un campo vettoriale olomorfo.  $\square$

La stima di  $\lambda_1$  data dal Teorema 12.57 è più fine di quella data dal Teorema di Lichnerowicz-Obata (cfr. Osservazione 12.53), ciò è dovuto alla condizione di Kähler che abbiamo nel Teorema 12.57. Se  $(M, g)$  è uno spazio simmetrico hermitiano irriducibile, allora esso è di Einstein,  $Ric = cg$  e  $\lambda_1 = 2c$  (cfr. [114], p. 183).

# Appendice A

## Orientabilità e integrazione

### A.1 Varietà orientabili

Una varietà differenziabile  $M$ , che si assume sempre connessa e paracompatta, si dice *orientabile* se esiste una  $n$ -forma  $\omega \in \Lambda^n(M)$  diversa da zero in ogni punto di  $M$ . Se  $\omega, \omega' \in \Lambda^n(M)$  sono due  $n$ -forme non nulle in ogni punto di  $M$ , allora

$$\omega' = f\omega,$$

dove  $f \in \mathcal{F}(M)$  è una funzione  $> 0$  (oppure  $< 0$ ) in ogni punto di  $M$ . Se definiamo

$$\omega' \approx \omega \quad (\omega, \omega' \text{ equiverse}) \iff f > 0,$$

$\approx$  è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le  $n$ -forme di  $\Lambda^n(M)$  non nulle in ogni punto di  $M$ , l'insieme quoziente che si ottiene ha esattamente due classi di equivalenza. Ognuna di queste due classi definisce una *orientazione* su  $M$ . Una varietà differenziabile orientabile si dice *orientata* quando è fissata una delle due orientazioni. Una  $n$ -forma  $\Omega \in \Lambda^n(M)$ , non nulla in ogni punto di  $M$ , individua una delle due orientazioni. Su un intorno coordinato  $U$ , con  $\varphi$  applicazione coordinata, la  $n$ -forma  $\Omega$  è data da

$$\Omega_U = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \equiv (f \circ \varphi^{-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

dove  $f \in \mathcal{F}(U)$  e  $\Omega_U$  è identificata con  $(\varphi^{-1})^* \Omega_U \in \Lambda^n(\varphi(U))$ .  $\mathbb{R}^n$  è una varietà orientabile, l'orientazione naturale di  $\mathbb{R}^n$  è definita dalla  $n$ -forma

$$\omega_0 = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Siano  $M$  e  $M'$  due varietà differenziabili orientate da  $\Omega$  e  $\Omega'$  rispettivamente. Un diffeomorfismo  $F : M \rightarrow M'$  si dice che *conserva l'orientazione* se

$$F^* \Omega' = f \Omega \quad \text{con } f > 0 \text{ su } M.$$

Considerando le espressioni locali di  $\Omega$  e  $\Omega'$ , applicando la definizione di applicazione duale sulle  $n$ -forme e la (2.4), si ottiene che:

$$F \text{ conserva l'orientazione} \iff \det(F_{*p}) > 0 \quad \text{per ogni } p \in M.$$

Sia  $M$  una varietà orientabile e sia  $\Omega$  una  $n$ -forma che orientata  $M$ . Consideriamo un atlante  $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ . Su  $U_\alpha$  la forma  $\Omega$  è data da:

$$\Omega_\alpha = f_\alpha dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \text{dove } f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Sostituendo, se necessario,  $x_1$  con  $-x_1$ , possiamo assumere  $f_\alpha > 0$  per ogni  $\alpha$ . Se  $(U_\alpha, (x_i))$  e  $(U_\beta, (y_i))$  sono due carte di  $\mathcal{A}$  con domini a intersezione non vuota, su  $U_\alpha \cap U_\beta$  abbiamo

$$\Omega_\alpha = f_\alpha dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{e} \quad \Omega_\beta = f_\beta dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n,$$

dove  $f_\alpha, f_\beta \in \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta)$  sono funzioni positive. D'altronde,

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Pertanto, necessariamente si ha

$$f_\alpha = f_\beta \det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta, \quad (1.1)$$

cioè per  $x = \varphi_\alpha(p) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  e  $y = \varphi_\beta(p) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  :

$$(f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) = (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(y) \det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right).$$

Quindi vale il seguente risultato.

*Su una varietà orientata esiste un atlante  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  con la proprietà che per ogni  $\alpha, \beta$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  è un diffeomorfismo che conserva la fissata orientazione, equivalentemente*

$$\det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) > 0 \quad \text{su } U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \quad (1.2)$$

dove  $(x_1, \dots, x_n)$  è il sistema di coordinate locali definito dalla carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  è il sistema di coordinate locali definito dalla carta  $(U_\beta, \varphi_\beta)$ . Un atlante con questa proprietà si dice *compatibile* con la fissata orientazione. Viceversa, se esiste un atlante di carte locali con la proprietà di prima, allora  $M$  è orientabile (in questo caso si sfrutta la paracompattatezza di  $M$  e quindi l'esistenza di una partizione dell'unità). L'orientabilità, anche se è stata definita usando la struttura differenziabile della varietà, in effetti è un *invariante topologico*: se  $M$  e  $M'$  sono due varietà differenziabili omeomorfe, allora  $M$  è orientabile se e solo se  $M'$  è orientabile. Se  $M$  è orientabile, dalla definizione segue subito che ogni sottovarietà aperta di  $M$  è orientabile. Quindi, per verificare che una varietà non è orientabile, basta provare che ammette una sottovarietà aperta non orientabile.

**Osservazione A.1.** Si noti che ogni varietà differenziabile  $M$  orientabile e di dimensione tre è parallelizzabile (cfr. [54], Teorema 1, p.46), quindi ammette una base di campi vettoriali differenziabili globalmente definita su  $M$ .

### Esempi di varietà orientabili

1) Ogni varietà che ammette un atlante costituito da una sola carta è ovviamente orientabile. Quindi:  $\mathbb{R}^n$ , gli aperti di  $\mathbb{R}^n$  e le sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  che sono immagini di una parametrizzazione globale, sono orientabili.

2) Un'ipersuperficie  $M$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  è orientabile se e solo se esiste un campo (continuo) unitario  $\xi$  di vettori ortogonali ad  $M$ ; in tal caso l'orientazione di  $M$  è definita dalla  $n$ -forma

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = (i_\xi \omega_0)(X_1, \dots, X_n) = \omega_0(\xi, X_1, \dots, X_n).$$

Se  $M$  è la sfera  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\xi(p) = \vec{p}$  è un campo unitario di vettori ortogonali alla sfera. Quindi,  $\mathbb{S}^n$  è un esempio di ipersuperficie orientabile. Più in generale, ogni ipersuperficie compatta di  $\mathbb{R}^{n+1}$  è orientabile (cfr. Samelson [101]). In particolare, la superficie torica  $\mathbb{T}^2$  e le superfici connesse compatte  $M_p = \mathbb{S}^2 \#_p \mathbb{T}^2$ ,  $p \geq 0$ , sono orientabili.

3) Ogni varietà differenziabile che ammette un atlante costituito da due carte  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ , con  $U_1 \cap U_2$  connesso, è orientabile. Infatti se  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  è un atlante che non soddisfa la (1.2), allora l'atlante  $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \psi_2)\}$  soddisfa la (1.2), dove  $\psi_2$  è ottenuta da  $\varphi_2$  cambiando di segno a una coordinata. Ritroviamo che la sfera  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 2$ , è orientabile in quanto si può considerare l'atlante definito dalle due proiezioni stereografiche.

4) Il nastro di Möbius è il classico esempio di superficie di  $\mathbb{R}^3$  non orientabile. Consideriamo il segmento aperto  $\sigma = AB : x_1 = 1, -2 < x_3 < 2, x_2 = 0$ , questo è un segmento del piano  $x_2 = 0$ , parallelo all'asse  $x_3$  e avente  $C = (1, 0, 0)$  come punto medio. Sottoponiamo  $\sigma$  a un movimento composto da una rotazione di  $C$  intorno all'asse  $x_3$  e simultaneamente da una rotazione di  $\sigma$  intorno al punto  $C$  nel piano  $\alpha(C, \text{asse } x_3)$  in modo tale che quando  $C$  ruota di un angolo  $\vartheta$ ,  $\sigma$  ruota intorno a  $C$  di un angolo  $\frac{\vartheta}{2}$ . Dopo una rotazione completa di  $C$ , il segmento  $\sigma = AB$  è mandato nel segmento  $BA$ . La superficie  $\Sigma$  che in questo modo viene descritta dal segmento  $\sigma$  è il nastro di Möbius. Se  $\Sigma$  fosse orientabile, dovrebbe esistere un campo continuo  $\xi$  di vettori,  $\xi_p \neq 0$ ,  $\xi_p \perp T_p \Sigma$ , per ogni  $p \in \Sigma$ . Ora se consideriamo la curva  $\gamma(t)$  descritta dal punto  $C$  durante il movimento di  $\sigma$ , quindi  $\gamma(0) = C = \gamma(1)$ , muovendo  $\xi$  lungo  $\gamma$  si avrebbe  $\xi_C = \xi_{\gamma(0)} = -\xi_{\gamma(1)} = -\xi_C$  e quindi  $\xi_C = 0$ . Dunque il nastro di Möbius è una varietà non orientabile.

5) Il piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2$  è una varietà non orientabile in quanto possiede un aperto omeomorfo a un nastro di Möbius. In particolare le superfici connesse compatte  $M_q = \mathbb{S}^2 \#_q \mathbb{P}^2$ ,  $q \geq 1$ , sono 2-varietà non orientabili. Lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^n$  è orientabile se e solo se  $n$  è dispari.

6) Sia  $M$  una varietà quasi complessa con struttura quasi complessa  $J$  e metrica hermitiana  $g$ ,  $\dim_{\mathbb{R}} = 2n$ . La 2-forma fondamentale  $\Phi(X, Y) = g(X, JY)$  soddisfa  $\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$ . Siccome  $g$  è definita positiva e  $J$

è non singolare in ogni punto, si ottiene che la  $2n$ -forma  $\Omega = \Phi^n = \Phi \wedge \dots \wedge \Phi$  ( $n$ -volte) è non nulla in ogni punto. D'altronde, una varietà (paracompatta) quasi complessa ammette una metrica hermitiana. Pertanto: *ogni varietà (paracompatta) quasi complessa è orientabile.*

7) Il prodotto  $M \times N$  e la somma connessa  $M \sharp N$  di varietà orientabili definisce ancora una varietà orientabile. Il fibrato tangente  $TM$  è una varietà orientabile. Ogni gruppo di Lie è orientabile. Se  $M$  è una varietà differenziabile non orientabile, allora esiste una varietà differenziabile  $\tilde{M}$  orientabile che è un rivestimento a due fogli di  $M$ . In particolare, ogni varietà differenziabile semplicemente connessa è orientabile (basta ricordare che ogni rivestimento di uno spazio semplicemente connesso è banale).

## A.2 Integrale di una $n$ -forma

Su una varietà differenziabile orientata è possibile definire l'integrale di una  $n$ -forma  $\omega \in \Lambda^n(M)$  con supporto contenuto in un compatto  $K$ . Intanto ricordiamo la formula del cambiamento di variabili nell'integrazione su domini di  $\mathbb{R}^n$ . Siano  $A, B$  due aperti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $G : A \rightarrow B, x \mapsto y = G(x)$ , un diffeomorfismo e  $\det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)$  il determinante del suo jacobiano. Se  $D \subset A$  e  $D' = G(D) \subset B$  sono domini limitati di integrazione con  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile, allora  $f \circ G : A \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(y(x))$ , è integrabile e

$$\int_{D'} f(y) dy_1 \dots dy_n = \int_D f(G(x)) \left| \det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \right| dx_1 \dots dx_n, \quad (1.3)$$

dove l'integrale che si considera è l'usuale integrale di Riemann. Sia ora  $M$  una varietà differenziabile orientata e sia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  un atlante di  $M$  compatibile con l'orientazione fissata. Se  $\omega \in \Lambda^n(M)$  e  $A$  è un dominio di  $M$  contenuto in qualche  $U_\alpha$ , con  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  dominio (limitato) di integrazione di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\omega_\alpha = f_\alpha dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , poniamo

$$\int_A \omega_\alpha := \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.4)$$

Se  $A$  è anche contenuto in  $U_\beta$ , posto  $G = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(A) \rightarrow \varphi_\beta(A)$ , applicando (1.3) e (1.1) si ha

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_\beta(A)} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(y) dy_1 \dots dy_n &= \int_{G(\varphi_\alpha(A))} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(y) dy_1 \dots dy_n \\ &= \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(G(x)) \left| \det \left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \right| dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\beta \circ \varphi_\beta^{-1})(G(x)) \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\varphi_\alpha(A)} (f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1})(x) dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

Quindi la definizione (1.4) è ben posta. Se  $\omega \in \Lambda^n(M)$  ha supporto contenuto in un compatto  $K$ , esiste un numero finito di carte locali  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, r}$  di  $\mathcal{A}$  i cui domini ricoprono  $K$  con  $\varphi_i(U_i)$  domini (limitati) di integrazione. Su  $U_i$ ,  $\omega$  è data da  $\omega_i = (f_i \circ \varphi_i^{-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ , dove  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ . Sia  $\{\rho_1, \dots, \rho_{r+1}\}$  una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento  $\{U_1, \dots, U_r, U_{r+1} = M \setminus K\}$  di  $M$ . Allora,

$$\rho_i \geq 0, \text{ supp. } \rho_i \subset U_i, i = 1, \dots, r+1, \rho_{r+1} = 0 \text{ su } K, \text{ e } \sum_{i=1}^{r+1} \rho_i = 1.$$

Di conseguenza, siccome  $\text{supp. } \omega \subset K$ ,  $\omega = \sum_{i=1}^r \rho_i \omega$ . Inoltre, siccome ogni  $\omega_i = \rho_i \omega$  ha supporto contenuto in  $U_i$ , si ha  $\int_M \omega_i = \int_{U_i} \omega_i$  e quindi si pone

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{r+1} \int_M \omega_i = \sum_{i=1}^r \int_M \rho_i \omega.$$

La definizione data non dipende dalla particolare partizione considerata. Se  $(V_j, \xi_j)_j$  è un'altra partizione dell'unità, dove  $V_j$  sono domini di un altro atlante orientato positivamente, le funzioni  $\{\rho_i \xi_j\}$  soddisfano  $(\rho_i \xi_j)(p) = 0$  eccetto per un numero finito di indici  $(i, j)$ , inoltre  $\sum_{i,j} \rho_i \xi_j = 1$  e  $\sum_j \xi_j = 1$ . Allora, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_i \int_M \rho_i \omega &= \sum_i \int_M \left( \sum_j \xi_j \right) \rho_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \rho_i \xi_j \omega \\
&= \sum_j \int_M \left( \sum_i \rho_i \right) \xi_j \omega = \sum_j \int_M \xi_j \omega.
\end{aligned}$$

In particolare, se  $M$  è compatta,  $\int_M \omega$  è definita per ogni  $\omega \in \Lambda^n(M)$ . Se  $\Omega$  è una  $n$ -forma che orienta  $M$  e  $(U, (x_i))$  una carta locale di un atlante compatibile con l'orientazione definita da  $\Omega$ , allora

$$\Omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{su } U \quad \text{con } f > 0.$$

Di conseguenza, nel caso di  $M$  compatta, si ha  $\int_M \Omega > 0$ . La  $n$ -forma  $\Omega$  che orienta  $M$  è anche detta *elemento di volume*. Se  $M$  e  $M'$  sono due varietà orientate da  $\Omega$  e  $\Omega'$  rispettivamente, ed  $F : M \rightarrow M'$  è un diffeomorfismo che conserva l'orientazione, allora

$$\int_{M'} \omega' = \int_M F^* \omega', \quad \text{dove } \omega' \in \Lambda^n(M') \text{ ha supporto compatto.}$$

Un teorema fondamentale nella teoria dell'integrazione è il seguente.

**Teorema A.2.** (di Stokes) *Sia  $M$  una varietà differenziabile orientata e con bordo  $\partial M$ . Se  $\alpha \in \Lambda^{n-1}(M)$  è una  $(n-1)$ -forma a supporto compatto, allora*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} i^* \alpha \quad (= 0 \text{ se } M \text{ è priva di bordo}),$$

dove  $i : \partial M \hookrightarrow M$  è l'inclusione.

### Caso riemanniano

Esaminando la definizione di integrale di (Riemann) di una funzione definita su un dominio di  $\mathbb{R}^n$ , notiamo che si sfrutta la conoscenza del volume di certi domini come  $n$ -cubi e  $n$ -parallelepipedi. Se una varietà differenziabile ha un ben determinato elemento di volume, allora è possibile definire l'integrale di una funzione. Se  $M$  è orientabile, esiste un elemento di volume, tuttavia esso non è univocamente determinato. Nel caso riemanniano vediamo che esiste un ben determinato elemento di volume. Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana orientata e sia  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  un atlante compatibile con la fissata orientazione. Se  $(x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate definite in un fissato dominio  $U_\alpha$  dell'atlante  $\mathcal{A}$  e  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ , poniamo

$$(\Omega_g)_\alpha := \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Questa formula definisce una  $n$ -forma globale  $\Omega_g$  su  $M$ . Infatti, se  $(y_1, \dots, y_n)$  sono le coordinate definite in un altro dominio  $U_\beta$  dell'atlante  $\mathcal{A}$ ,  $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$ , posto  $g'_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$  e  $\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_k a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}$  si ha

$$A^T G A = G',$$

dove  $G = (g_{ij})$ ,  $A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$ ,  $\det A > 0$  e  $G' = (g'_{ij})$ . Siccome  $\sqrt{\det G'} = \det A \sqrt{\det G}$ , tenendo anche conto che

$$dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

si ha

$$\begin{aligned} (\Omega_g)_\beta &= \sqrt{\det(g'_{ij})} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) \sqrt{\det(g_{ij})} \det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (\Omega_g)_\alpha. \end{aligned}$$

Chiaramente  $\Omega_g$  è sempre diversa da zero. Inoltre, se  $\mathcal{B} = \{e_i\}$  è una base ortonormale locale positiva di campi vettoriali, si ha

$$(\Omega_g)_\alpha(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Infatti, se  $e_i = \sum a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}$ , si ha  $A^T G A = I$  e quindi  $\sqrt{\det G} \det A = 1$ . Di conseguenza,

$$(\Omega_g)_\alpha(e_1, \dots, e_n) = \sqrt{\det(g_{ij})} \det((dx_h)(e_k)) = \sqrt{\det(g_{ij})} \det(a_{hk}) = 1.$$

Sia  $\omega$  un'altra  $n$ -forma mai nulla tale che  $\omega(e_1, \dots, e_n) = +1$  per ogni base ortonormale (locale) positiva  $\{e_i\}$  di campi vettoriali. Supponiamo

$$\omega_\alpha = f_\alpha dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \text{dove } f_\alpha \in \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Allora

$$1 = \omega_\alpha(e_1, \dots, e_n) = f_\alpha \det(a_{hk}) = \frac{f_\alpha}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

per cui necessariamente  $f_\alpha = \sqrt{\det(g_{ij})}$ . Pertanto vale il seguente

**Teorema A.3.** *Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana orientata, esiste un'unica  $n$ -forma  $\Omega_g \in \Lambda^n(M)$  tale che  $\Omega_g(e_1, \dots, e_n) = +1$  per ogni base ortonormale (locale) positiva  $\{e_i\}$  di campi vettoriali. Inoltre, localmente:*

$$\Omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

La  $n$ -forma  $\Omega$  è detta *elemento di volume riemanniano* della varietà riemanniana orientata  $(M, g)$ . In tal caso, per ogni  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua a supporto compatto, si pone

$$\int_M f dv := \int_M f \Omega_g \quad \text{e} \quad \text{vol}(M, g) = \int_M \Omega_g \quad (\text{quando } M \text{ è compatta}).$$

Naturalmente se  $A$  è un dominio di  $M$  contenuto in un intorno coordinato  $(U, \varphi)$ , con  $\varphi(A)$  dominio limitato di integrazione, considerando le  $g_{ij} \in \mathcal{F}(\varphi(U))$ , si ha

$$\text{vol}(A, g) = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n.$$

Per una varietà riemanniana  $(M, g)$ , non necessariamente orientabile, è possibile definire la nozione di integrale mediante la *misura canonica*  $dv_g$  associata alla metrica  $g$ . Se  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  è un atlante di  $M$  ed  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con supporto compatto contenuto in qualche  $U_\alpha$ , si pone

$$\int_{U_\alpha} f dv_g := \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n,$$

dove  $(x_1, \dots, x_n)$  sono le coordinate locali definite in  $U_\alpha$  e le  $g_{ij} \in \mathcal{F}(\varphi(U))$ . Tale definizione non dipende dalla scelta della carta locale. Se  $f$  ha supporto

contenuto in  $U_\alpha \cap U_\beta$ , applicando la (1.3) e tenendo conto che  $\sqrt{\det G} = |\det A^{-1}| \sqrt{\det G'}$ , si ottiene

$$\int_{U_\alpha} f dv_g = \int_{U_\beta} f dv_g.$$

Se  $f$  ha supporto contenuto in un compatto  $K$  di  $M$ , è possibile ricoprire  $K$  con un numero finito di carte locali  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, r}$ . In tal caso, poniamo

$$\int_M f dv_g := \sum_{i=1}^r \int_{U_i} (f \rho_i) dv_g,$$

dove  $\{\rho_i\}_{i=1, \dots, r+1}$  è una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento  $\{U_i, U_{r+1} := M \setminus K\}_{i=1, \dots, r}$  (si noti che  $f \rho_{r+1} = 0$ ). Anche in questo caso, come nel caso orientabile, la definizione data non dipende dalla particolare partizione dell'unità considerata. Se  $M$  è compatta, si pone:

$$\text{vol}(M, g) := \int_M 1 dv_g,$$

e l'integrale  $\int_M f dv_g$  è definito per ogni  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Se  $M$  è anche orientata, questa definizione coincide con quella data in precedenza. Infine, si noti che *il volume di una varietà riemanniana è invariante per isometrie*.

**Esempio A.4.** Sia  $M$  una *superficie regolare* di  $\mathbb{R}^3$  e  $\varphi : U \rightarrow M$ ,  $(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  una parametrizzazione locale di  $M$ . In questo caso, l'*elemento di area* è dato da:

$$d\sigma = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du \wedge dv,$$

dove  $\varphi_u \wedge \varphi_v$  denota il prodotto vettoriale di  $\varphi_u = (x_u, y_u, z_u)$  e  $\varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$  in  $\mathbb{R}^3$ . Infatti, indicata con  $g_0$  la metrica euclidea di  $\mathbb{R}^3$  e con  $g$  la metrica riemanniana indotta da  $g_0$  su  $M$ , si ha:

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = \det(g_{ij}) = EG - F^2,$$

dove  $E = g_{uu} = g_0(\partial_u, \partial_u)$ ,  $F = g_{uv} = g_0(\partial_u, \partial_v)$ ,  $G = g_{vv} = g_0(\partial_v, \partial_v)$ .

**Esempio A.5.** Sia  $\mathbb{T}^2$  il toro di  $\mathbb{R}^3$  descritto dalla rotazione della circonferenza di centro  $C(0, R, 0)$  e raggio  $r < R$  intorno all'asse  $z$ . Vogliamo determinare il volume (o area, visto che siamo in dimensione 2) della varietà riemanniana  $(\mathbb{T}^2, g)$  dove  $g$  è la metrica riemanniana indotta. Consideriamo la carta  $(U, \varphi)$  corrispondente alla parametrizzazione

$$x(u, v) = (R + r \cos u) \cos v, y(u, v) = (R + r \cos u) \sin v, z(u, v) = r \sin u,$$

dove  $u, v \in Q = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$ . Tale parametrizzazione ricopre tutto il toro tranne un parallelo e un meridiano. Rispetto alle coordinate  $(u, v)$ , abbiamo  $g_{uu} = r^2$ ,  $g_{uv} = 0$ ,  $g_{vv} = (R + r \cos u)^2$  e quindi  $\sqrt{\det(g_{ij})} = r(R + r \cos u)$ . Poniamo  $U_\epsilon = \varphi^{-1}(Q_\epsilon)$ , dove  $Q_\epsilon = ]\epsilon, 2\pi - \epsilon[ \times ]\epsilon, 2\pi - \epsilon[$ . Allora

$$\begin{aligned} \text{vol}(U_\epsilon, g) &= \int_{Q_\epsilon} r(R + r \cos u) \, du \, dv \\ &= \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} (rR + r^2 \cos u) \, du \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} dv \\ &= r^2(2\pi - 2\epsilon) (\sin(2\pi - \epsilon) - \sin \epsilon) + rR(2\pi - 2\epsilon)^2, \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{vol}(\mathbb{T}^2, g) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{vol}(U_\epsilon, g) = 4\pi^2 rR.$$

**Esercizio A.6.** Si verifichi che  $\text{vol}(\mathbb{T}^2, g) = 4\pi^2 rR$  è in accordo col Teorema di Pappo riguardante l'area delle superfici di rotazione: se  $\Sigma$  è generata dalla rotazione di una curva  $\gamma(s)$  di lunghezza  $\ell$ , denotata con  $\rho(s)$  la distanza del punto  $\gamma(s)$  dall'asse di rotazione (dove  $s$  è l'ascissa curvilinea), si ha

$$\text{area}(\Sigma) = 2\pi \int_0^\ell \rho(s) \, ds.$$

**Esercizio A.7.** Date due varietà riemanniane compatte  $(M_1, g_1)$ ,  $(M_2, g_2)$ , si verifichi che

$$\text{vol}(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2) = \text{vol}(M_1, g_1) \text{vol}(M_2, g_2).$$

**Esercizio A.8.** Sia  $(M, g)$  una  $n$ -varietà riemanniana compatta e sia  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  un rivestimento riemanniano a  $k$  fogli di  $(M, g)$ . Si verifichi che

$$\text{vol}(\tilde{M}, \tilde{g}) = k \text{vol}(M, g).$$

**Esercizio A.9.** Sia  $(M, g)$  una  $n$ -varietà riemanniana compatta e sia  $\bar{g}$  una metrica riemanniana omotetica a  $g$ :  $\bar{g} = a g$ , dove  $a$  è un numero reale positivo. Si verifichi che

$$\text{vol}(M, \bar{g}) = a^{(n/2)} \text{vol}(M, g).$$



# Appendice B

## Divergenza e laplaciano

### B.1 L'operatore di Laplace–Beltrami

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana.

**Divergenza** di un campo di vettori  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è la funzione

$$\operatorname{div} X := \operatorname{tr} \nabla X = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} X, E_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathcal{L}_X g)(E_i, E_i),$$

dove  $\{E_i\}$  è una base ortonormale locale di campi vettoriali e  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita. In particolare, un campo vettoriale di Killing ha divergenza nulla. Si noti che la definizione data non dipende dalla base ortonormale locale scelta.

**Proposizione B.1.** *Sia  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . In coordinate locali, posto  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  e  $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$ , risulta*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (\partial_i X^i + \sum_{j=1}^n X^j \Gamma_{ij}^i) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \partial_i (X^i \sqrt{|g|}),$$

dove  $|g| = \det G$ ,  $G = (g_{ij})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{E_i\}$  una base ortonormale locale di campi vettoriali,  $E_i = \sum_{k=1}^n b_{ki} \partial_k$ . Se poniamo  $\nabla_{\partial_i} X = \sum_{k=1}^n a_{ki} \partial_k$ , allora  $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Infatti, tenendo presente il Lemma 12.5, si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_i g(\nabla_{E_i} X, E_i) = \sum_{k,h,i} b_{ki} b_{hi} g(\nabla_{\partial_k} X, \partial_h) \\ &= \sum_{k,h} g^{kh} g\left(\sum_r a_{rk} \partial_r, \partial_h\right) = \sum_{k,h,r} a_{rk} g^{kh} g_{hr} = \sum_r a_{rr}. \end{aligned}$$

D'altronde,

$$\nabla_{\partial_i} X = \nabla_{\partial_i} \sum_{j=1}^n X^j \partial_j = \sum_{k=1}^n (\partial_i X^k + \sum_j X^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k$$

e quindi

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (\partial_i X^i + \sum_j X^j \Gamma_{ij}^i). \quad (2.1)$$

Da (cfr. Esercizio 6.55)  $\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \sum_k \{ \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} \} g^{ik}$ , segue

$$\sum_i \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{ \partial_j g_{ik} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij} \} g^{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} g^{ik} \partial_j g_{ik}$$

e quindi

$$\sum_i \Gamma_{ij}^i X^j = \frac{1}{2} \sum_{i,k} g^{ik} X^j \partial_j g_{ik}. \quad (2.2)$$

Inoltre, vale la formula

$$\partial_j |g| = \partial_j \det G = (\det G) \operatorname{tr} (G^{-1} \partial_j G) = |g| \sum_{i,k} g^{ik} \partial_j g_{ik}. \quad (2.3)$$

Usando (2.1), (2.2) e (2.3), si ottiene

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_j \partial_j X^j + \sum_j \left( \sum_i X^j \Gamma_{ij}^i \right) = \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} g^{ik} X^j \partial_j g_{ik} \\ &= \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2} \sum_j X^j \sum_{i,k} g^{ik} \partial_j g_{ik} \\ &= \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2} \sum_j X^j \frac{1}{|g|} \partial_j |g| \\ &= \sum_j \left( \partial_j X^j + \frac{1}{\sqrt{|g|}} X^j \partial_j \sqrt{|g|} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^n \partial_i (X^i \sqrt{|g|}). \end{aligned}$$

□

Sia  $X$  un arbitrario campo vettoriale e supponiamo  $X_p \neq 0$  e quindi  $X$  diverso da zero in un intorno coordinato  $U$  di  $p$ . Consideriamo su  $U$  un sistema di coordinate locali per cui  $X = \partial/\partial x_1$ . In tal caso si ha

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{|g|}} X(\sqrt{|g|}).$$



Supponiamo  $M$  orientata da  $\Omega_g$   $n$ -forma di volume determinata dalla metrica  $g$ , localmente

$$\Omega_g = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Siccome  $\operatorname{div} X = 0 \Leftrightarrow X(\sqrt{|g|}) = 0$ , allora  $\operatorname{div} X = 0$  se e solo se la forma di volume  $\Omega_g$  è invariante lungo le curve integrali del campo  $X$  (cfr. anche Proposizione B.2).

**Proposizione B.2.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana orientata (da  $\Omega_g$ ). Allora:*

- a) la forma di volume  $\Omega_g$  è parallela (cioè  $\nabla_X \Omega_g = 0$ );  
 b) per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , si ha

$$\mathcal{L}_X \Omega_g = (\operatorname{div} X) \Omega_g = d\omega,$$

dove  $\omega = i_X \Omega_g \in \Lambda^{n-1}(M)$ ,  $\omega(X_1, \dots, X_{n-1}) := \Omega_g(X, X_1, \dots, X_{n-1})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\{E_i\}$  una base ortonormale (locale) positiva di campi vettoriali, quindi  $\Omega_g(E_1, \dots, E_n) = 1$ . Poiché  $\nabla_X \Omega_g$  è un tensore, per provare la a) basta provare che  $(\nabla_X \Omega_g)(E_1, \dots, E_n) = 0$ . Siccome  $\nabla_X E_i$  è combinazione lineare di  $E_j$  ( $j \neq i$ ) e  $\nabla_X \Omega_g(E_1, \dots, E_n) = 0$ , si ha

$$(\nabla_X \Omega_g)(E_1, \dots, E_n) = \nabla_X \Omega_g(E_1, \dots, E_n) - \sum_{i=1}^n \Omega_g(E_1, \dots, \nabla_X E_i, \dots, E_n) = 0.$$

Anche per la b) basta verificare le uguaglianze sulla  $n$ -pla  $(E_1, \dots, E_n)$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \Omega_g)(E_1, \dots, E_n) &= X \Omega_g(E_1, \dots, E_n) - \sum_{i=1}^n \Omega_g(E_1, \dots, [X, E_i], \dots, E_n) \\ &= X \Omega_g(E_1, \dots, E_n) - \sum_{i=1}^n \Omega_g(E_1, \dots, \nabla_X E_i, \dots, E_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \Omega_g(E_1, \dots, \nabla_{E_i} X, \dots, E_n) \\ &= (\nabla_X \Omega_g)(E_1, \dots, E_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \Omega_g(E_1, \dots, \sum_k g(\nabla_{E_i} X, E_k) E_k, \dots, E_n) \\ &= 0 + \sum_i g(\nabla_{E_i} X, E_i) \Omega_g(E_1, \dots, E_n) \\ &= (\operatorname{div} X) \Omega_g(E_1, \dots, E_n). \end{aligned}$$

Inoltre, tenendo conto che  $\nabla_{E_i} \Omega_g = 0$ , si ha

$$(d\omega)(E_1, \dots, E_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (\nabla_{E_i} \omega)(E_1, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left( \nabla_{E_i} \Omega_g(X, E_1, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j \neq i, j=1}^n \Omega_g(X, E_1, \dots, \nabla_{E_i} E_j, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \left( (\nabla_{E_i} \Omega_g)(X, E_1, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \right. \\
&\quad + \Omega_g(\nabla_{E_i} X, E_1, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \\
&\quad + \sum_{j \neq i, j=1}^n \Omega_g(X, E_1, \dots, \nabla_{E_i} E_j, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \\
&\quad \left. - \sum_{j \neq i, j=1}^n \Omega_g(X, E_1, \dots, \nabla_{E_i} E_j, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \Omega_g(\nabla_{E_i} X, E_1, \dots, \hat{E}_i, \dots, E_n) \\
&= \sum_{i=1}^n \Omega_g(E_1, \dots, \nabla_{E_i} X, \dots, E_n) = (\operatorname{div} X) \Omega_g(E_1, \dots, E_n).
\end{aligned}$$

□

Il **gradiente** di una funzione differenziabile  $f$  è il campo vettoriale  $\operatorname{grad} f$ , che si indica anche con  $\nabla f$ , duale del differenziale:

$$g(\nabla f, X) = \operatorname{d}f(X) = X(f).$$

Se  $\{E_i\}$  è una base ortonormale (locale) di campi vettoriali, si ha

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n E_i(f) E_i.$$

In coordinate locali, si ottiene

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

L'operatore

$$\nabla \nabla f : X \mapsto (\nabla \nabla f)(X) = \nabla_X \nabla f$$

definisce un tensore di tipo (1, 1) simmetrico. Infatti,

$$X(Y(f)) = X(\operatorname{d}f)(Y) = Xg(\nabla f, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) + g(\nabla f, \nabla_X Y) \quad (2.4)$$

e l'analoga per  $Y(X(f))$  implicano

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = g(\nabla_X \nabla f, Y) - g(\nabla_Y \nabla f, X) + g(\nabla f, [X, Y]),$$

e quindi

$$g(\nabla_X \nabla f, Y) = g(\nabla_Y \nabla f, X). \quad (2.5)$$

L'**hessiano** di  $f$ , così come introdotto nella Sezione 6.2 per una arbitraria connessione lineare, è l'operatore

$$H_f = \nabla^2 f = \nabla(\mathrm{d}f) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_{X,Y}^2 f.$$

Nel nostro caso  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita, tenendo anche conto della (2.4) e che  $g(\nabla f, \nabla_X Y) = (\nabla_X Y)(f)$ , si ha

$$\begin{aligned} H_f(X, Y) &:= (\nabla_X \mathrm{d}f) Y = XY(f) - (\nabla_X Y)(f) \\ &= g(\nabla_X \nabla f, Y) = g((\nabla \nabla f)X, Y). \end{aligned}$$

$H_f = \nabla^2 f$  è  $\mathcal{F}(M)$ -bilineare e simmetrica, quindi è un tensore covariante simmetrico del secondo ordine.

### L'operatore di Laplace-Beltrami

L'operatore differenziale

$$\Delta : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M),$$

$$f \mapsto \Delta f := -\mathrm{div} \nabla f = -\mathrm{tr}_g \nabla(\nabla f) = -\mathrm{tr}_g \nabla^2 f = -\mathrm{tr}_g H_f,$$

è detto *operatore di Laplace-Beltrami* (oppure *laplaciano*) della varietà riemanniana  $(M, g)$ . In coordinate locali, siccome  $X = \nabla f$  ha componenti  $X^j = \sum_{i=1}^n g^{ij}(\partial f / \partial x_i)$ , dalla Proposizione B.1 si ottiene

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \quad (2.6)$$

Se  $\{E_i\}$  è una base ortonormale (locale) di campi vettoriali, si ha

$$\Delta f = -\mathrm{tr}_g \nabla^2 f = -\sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i}(\mathrm{d}f)) E_i = -\sum_{i=1}^n \left( E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i)(f) \right).$$

Inoltre, posto  $E_i = \sum_k^n b_{ki} \partial_k$ , si ha

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\mathrm{tr}_g \nabla^2 f = -\sum_{i=1}^n (\nabla^2 f)(E_i, E_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n (\nabla^2 f) \left( \sum_k^n b_{ki} \partial_k, \sum_h^n b_{hi} \partial_h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k,h=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ki} b_{hi} \right) (\nabla^2 f)(\partial_k, \partial_h) \\
&= - \sum_{k,h=1}^n g^{kh} (\nabla^2 f)(\partial_k, \partial_h) \\
&= - \sum_{k,h=1}^n g^{kh} \left( \partial_k \partial_h f - (\nabla_{\partial_k} \partial_h) f \right) \\
&= - \sum_{k,h=1}^n g^{kh} \left( \partial_{kh}^2 f - \sum_{r=1}^n \Gamma_{kh}^r \partial_r f \right),
\end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta f = - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \quad (2.7)$$

**Osservazione B.3. (Laplaciano in coordinate armoniche)**

Sia  $(x_h)$  un sistema di coordinate locali sulla varietà riemanniana  $(M, g)$ . Applicando la (2.7) alle funzioni coordinate, si ha

$$\Delta x_h = - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left( \frac{\partial^2 x_h}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_h}{\partial x_k} \right) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \Gamma_{ij}^h.$$

Ricordiamo che un sistema di coordinate locali  $(x_h)$  di  $(M, g)$  è detto *armonico* se le funzioni coordinate  $x_h (h = 1, \dots, n)$  sono funzioni armoniche, ovvero

$$\Delta x_h = 0 \quad \text{per ogni } h = 1, \dots, n.$$

Dalla teoria delle PDE ellittiche segue che, per ogni fissato punto  $p_0$  di  $M$ , esiste un intorno sufficientemente piccolo di  $p_0$  in cui è definito un sistema di coordinate armoniche (cfr. [10] p.143).

Ora, sia  $(x_h)$  un sistema di coordinate locali armoniche, quindi per ogni  $h = 1, \dots, n$  vale

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \Gamma_{ij}^h = 0.$$

Di conseguenza, rispetto a queste coordinate, la (2.7) diventa:

$$\Delta f = - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

e quindi

$$\Delta f = - \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.8)$$

**Esempio B.4.** Se sulla sfera unitaria  $(\mathbb{S}^2, g)$  consideriamo coordinate geografiche  $(\theta, \varphi)$ , allora  $g_{\theta\theta} = 1$ ,  $g_{\theta\varphi} = 0$  e  $g_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta$  (cfr. Esercizio 4.16) e la forma del laplaciano diventa

$$\begin{aligned}\Delta f &= -\frac{1}{\sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right) \\ &= -\left( \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right).\end{aligned}$$

Un operatore lineare  $L : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  è detto *operatore differenziale ellittico del secondo ordine* su  $M$  se, per ogni fissato sistema di coordinate locali e per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ , si può scrivere

$$L(f) = \sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

dove  $(a^{ij})$  sono le componenti di un tensore covariante simmetrico del secondo ordine il quale è definito positivo in ogni punto di  $M$ . Questa definizione non dipende dal particolare sistema di coordinate locali considerato. Dalla (2.7) segue che l'operatore di Laplace-Beltrami è un operatore differenziale ellittico del secondo ordine.

**Teorema B.5.** (di Green) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta. Per ogni  $X \in \mathfrak{X}(M)$  si ha:*

$$\int_M (\operatorname{div} X) v_g = 0.$$

*In particolare, per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ :*

$$\int_M (\Delta f) v_g = 0.$$

*Dimostrazione.* Se  $M$  è orientabile, possiamo orientare  $M$  con la  $n$ -forma volume  $\Omega_g = v_g$ . Sia  $\{\phi_t\}$  il gruppo (globale) a un parametro di diffeomorfismi di  $M$  generato da  $X$ . Posto  $g_t = \phi_t^* g$ ,  $\phi_t$  è un'isometria tra  $(M, g_t)$  e  $(M, g)$  per cui  $\operatorname{vol}(M, g) = \operatorname{vol}(M, g_t)$ , cioè

$$\int_M v_{g_t} = \int_M v_g \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

D'altronde la derivata di Lie  $\mathcal{L}_X \Omega_g := \left( \frac{d}{dt} \phi_t^* \Omega_g \right)_{t=0}$ , per cui, tenendo anche conto della Proposizione B.2, abbiamo

$$\begin{aligned}0 &= \left( \frac{d}{dt} \int_M v_{g_t} \right)_{t=0} = \left( \int_M \frac{d}{dt} v_{g_t} \right)_{t=0} = \left( \int_M \frac{d}{dt} \Omega_{g_t} \right)_{t=0} \\ &= \int_M \left( \frac{d}{dt} \phi_t^* \Omega_g \right)_{t=0} = \int_M \mathcal{L}_X \Omega_g = \int_M (\operatorname{div} X) v_g.\end{aligned}$$

Se  $M$  non è orientabile, consideriamo il rivestimento doppio orientato  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ . Dato  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , consideriamo il campo di vettori  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$  tale che  $\pi_*\tilde{X} = X$  (cfr. Esercizio 2.31). Siccome  $\pi$  è un'isometria locale,  $(\operatorname{div}\tilde{X})(\tilde{p}) = (\operatorname{div}X)(\pi(\tilde{p}))$  e

$$\int_M (\operatorname{div}X) v_g = \frac{1}{2} \int_{\tilde{M}} (\operatorname{div}\tilde{X}) v_{\tilde{g}} = 0.$$

□

**Osservazione B.6.** Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana compatta orientabile, posto  $\omega = i_X \Omega_g \in \Lambda^{n-1}(M)$ , dalla Proposizione B.2 e dal Teorema di Green, si ha

$$\int_M d\omega = 0.$$

**Teorema B.7.** (di Hopf–Bochner) *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana (connessa) compatta. Se  $f \in \mathcal{F}(M)$  soddisfa  $\Delta f \geq 0$  (oppure  $\Delta f \leq 0$ ), allora  $f = \text{cost}$ . In particolare, per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ :*

$$f \text{ è armonica (cioè, } \Delta f = 0) \Leftrightarrow f = \text{cost}.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo  $M$  orientata, altrimenti si passa al rivestimento doppio orientato. Siccome  $(\Delta f) \geq 0$ , applicando il Teorema di Green:  $\int_M \Delta f v_g = 0$ , si ottiene che  $\Delta f = 0$ . Di conseguenza (cfr. Esercizio B.11),

$$\Delta f^2 = 2f \cdot \Delta f - 2g(\nabla f, \nabla f) = -2g(\nabla f, \nabla f) \quad \text{e} \quad \int_M \Delta f^2 v_g = 0$$

implicano  $\int_M \|\nabla f\|^2 v_g = 0$ , e quindi (essendo  $M$  connessa)  $f$  è costante su  $M$ . □

## B.2 Codifferenziale e operatore di Hodge-de Rham

La derivata covariante definita dalla connessione di Levi-Civita  $\nabla$  di una varietà riemanniana  $(M, g)$  ammette un *aggiunto formale*  $\nabla^*$ . Se  $T$  è un tensore del tipo  $(1, r+1)$ ,  $\nabla^*T$  è il tensore di tipo  $(1, r)$  definito da

$$\nabla^*T = -\operatorname{tr}\nabla T.$$

In altre parole, se  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $(\nabla^*T)(Y_1, \dots, Y_r)$  è l'opposto della traccia del seguente tensore covariante di ordine 2:

$$(X, Y) \mapsto (\nabla_X T)(Y, Y_1, \dots, Y_r).$$

Fissata una base ortonormale (locale)  $\{E_i\}$  di campi vettoriali:

$$(\nabla^*T)(Y_1, \dots, Y_r) = -\sum_i (\nabla_{E_i} T)(E_i, Y_1, \dots, Y_r).$$

In modo analogo, se  $T \in \mathfrak{X}^{0,r+1}(M)$ , si definisce  $\nabla^*T \in \mathfrak{X}^{0,r}(M)$ .

Se  $T \in \mathfrak{X}^{1,r}(M)$ , *divergenza* di  $T$  è il tensore  $\operatorname{div}T$  di tipo  $(0,r)$  definito da

$$(\operatorname{div}T)(Y_1, \dots, Y_r) := \operatorname{tr}(X \mapsto (\nabla_X T)(Y_1, \dots, Y_r)).$$

Quindi,

$$(\operatorname{div}T)(Y_1, \dots, Y_r) = \sum_i g((\nabla_{E_i} T)(Y_1, \dots, Y_r), E_i).$$

Si noti che per  $T \in \mathfrak{X}^{1,r}(M)$  ed  $f \in \mathcal{F}(M)$ , si ha

$$(\operatorname{div}(fT))(Y_1, \dots, Y_r) = f(\operatorname{div}T)(Y_1, \dots, Y_r) + g(\operatorname{grad}f, T(Y_1, \dots, Y_r)).$$

Se  $T \in \mathfrak{X}^{0,r+1}(M)$ , indicato con  $T^*$  il tensore di tipo  $(1,r)$  definito da

$$T(Y_1, \dots, Y_{r+1}) = g(T^*(Y_1, \dots, Y_r), Y_{r+1}),$$

risulta

$$\operatorname{div}T^* = -\nabla^*T,$$

e si pone

$$\operatorname{div}T := -\nabla^*T.$$

In particolare se  $\alpha$  è la 1-forma duale di  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , allora

$$\operatorname{div}X = -\nabla^*\alpha.$$

Se  $T \in \mathfrak{X}^{0,2}(M)$  ed  $f \in \mathcal{F}(M)$ , si ha

$$(\operatorname{div}T)(Y) = \sum_i (\nabla_{E_i} T)(Y, E_i)$$

e quindi

$$(\operatorname{div}(fT))(Y) = f(\operatorname{div}T)(Y) + T(\nabla f, Y).$$

In particolare, se  $T$  è il tensore metrico  $g$ , siccome  $\operatorname{div}g = 0$ , si ha

$$(\operatorname{div}(fg))(Y) = g(\nabla f, Y),$$

e quindi

$$\operatorname{div}(fg) = df. \tag{2.9}$$

L'operatore  $\delta := \nabla^* : \Lambda^{r+1}(M) \rightarrow \Lambda^r(M)$  è detto *codifferenziale*. Anche il differenziale esterno  $d : \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ , che abbiamo definito nella Sezione 2.7, può essere espresso in termini di  $\nabla$  mediante la seguente formula (già usata nella dimostrazione della Proposizione B.2)

$$(\operatorname{d}\alpha)(Y_1, \dots, Y_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{Y_i} \alpha)(Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_{r+1}).$$

L'operatore

$$\Delta_r = \delta d + d\delta : \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^r(M),$$

il quale estende l'operatore di Laplace-Beltrami sulle  $r$ -forme, è anche detto *operatore di Hodge-de Rham*. In particolare, per  $r = 0$ , cioè per  $f \in \Lambda^0(M) = \mathcal{F}(M)$ :

$$\Delta_0 f = \delta df = \nabla^* df = -\operatorname{div}(\nabla f) = -\operatorname{tr}\nabla(\nabla f) = \Delta f.$$

Ricordiamo che  $\Delta_r$  è un operatore naturale nel senso che, così come  $d$  e  $\delta$ , è invariante per isometrie, cioè per ogni isometria  $F$  di  $(M, g)$  si ha

$$F^* \Delta_r = \Delta_r F^*.$$

Inoltre, valgono

$$d^2 = \delta^2 = 0, \quad \Delta_r d = d\Delta_r \quad \text{e} \quad \Delta_r \delta = \delta\Delta_r.$$

Se  $\alpha_i$  è la 1-forma duale di  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle := g(X_1, X_2)$ . Se  $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r$  e  $\beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_r$ , con  $\alpha_i, \beta_i \in \Lambda^1(M)$ , poniamo

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \det(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq r}.$$

Sia  $\{\vartheta^i\}_{i=1}^n$  una base ortonormale (locale) per  $\Lambda^1(M)$ . Se

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_r} \vartheta^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{i_r}, \\ \beta &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} \beta_{i_1 \dots i_r} \vartheta^{i_1} \wedge \dots \wedge \vartheta^{i_r}, \end{aligned}$$

risulta

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum \alpha_{i_1 \dots i_r} \beta_{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{F}(M).$$

Supponiamo  $M$  compatta. La metrica  $g$  induce un prodotto scalare su  $\Lambda^r(M)$  ponendo:

$$(\alpha, \beta) := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle v_g, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^r(M).$$

Si può definire un prodotto scalare sull'algebra esterna  $\Lambda(M) := \sum_{r=0}^n \Lambda^r(M)$  imponendo che  $\Lambda^r(M)$  e  $\Lambda^s(M)$  siano ortogonali per  $r \neq s$ .

Per ogni  $\alpha, \beta \in \Lambda^r(M)$ ,  $\eta \in \Lambda^{r+1}(M)$ , gli operatori  $d$ ,  $\delta$  e  $\Delta_r$ , soddisfano:

$$(d\alpha, \eta) = (\alpha, \delta\eta) \quad \text{e} \quad (\Delta_r \alpha, \beta) = (\alpha, \Delta_r \beta).$$

In particolare:

$$(\Delta_r \alpha, \alpha) = \int_M (|\delta\alpha|^2 + |d\alpha|^2) v_g = \|\delta\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2,$$



dove  $|\alpha|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle$  e  $\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha)$ . Inoltre, per  $f \in \Lambda^0(M)$  e  $\alpha \in \Lambda^r(M)$ , risulta:

$$\Delta_r(f\alpha) = (\Delta_0 f)\alpha + f\Delta_r\alpha - 2\nabla_{\nabla f}\alpha.$$

Una  $r$ -forma  $\alpha \in \Lambda^r(M)$  si dice  $r$ -forma armonica se  $\Delta_r\alpha = 0$ . Due teoremi fondamentali sulle  $r$ -forme armoniche sono i seguenti.

**Teorema B.8.** (di decomposizione di Hodge-de Rham)

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta orientata. Denotiamo con  $\Lambda_d^p(M) = \text{Im } d_{p-1}$  lo spazio delle  $p$ -forme esatte, con  $\Lambda_h^p(M)$  lo spazio delle  $p$ -forme armoniche e con  $\Lambda_\delta^p(M) = \text{Im } \delta_{p+1}$  lo spazio delle  $p$ -forme coesatte. Allora, lo spazio vettoriale  $\Lambda^p(M)$  si decompone come somma diretta ortogonale:

$$\Lambda^p(M) = \Lambda_d^p(M) \oplus \Lambda_\delta^p(M) \oplus \Lambda_h^p(M).$$

**Teorema B.9.** (di Hodge-de Rham)

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta orientata. Lo spazio vettoriale  $H^p(M, \mathbb{R}) = \ker d_p / \text{Im } d_{p-1}$  ( $p^{\text{mo}}$ -gruppo di coomologia di de Rham) è isomorfo allo spazio vettoriale delle  $p$ -forme armoniche  $\Lambda_h^p(M)$ .

**Esercizio B.10.** Si consideri lo spazio euclideo  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ . Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile e sia  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Si determinino  $\text{div} X$  e  $\nabla f$ . Inoltre, si verifichi che:

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

**Esercizio B.11.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Siano  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$  e  $F_1, F_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ . Si verifichino le seguenti proprietà:

- 1)  $\text{div}(fX) = f\text{div}X + (df)(X) = f\text{div}X + g(\nabla f, X)$ ,
- 2)  $\nabla(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \nabla f_2 + f_2 \cdot \nabla f_1$ ,
- 3)  $f_1 \cdot \Delta f_2 = f_1 \text{div} \nabla f_2 = \text{div}(f_1 \nabla f_2) - g(\nabla f_1, \nabla f_2)$ ,
- 4)  $\Delta(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \Delta f_2 + f_2 \cdot \Delta f_1 - 2g(\nabla f_1, \nabla f_2)$ ,
- 5)  $\Delta g_0(F_1, F_2) = g_0(F_1, \Delta F_2) + g_0(\Delta F_1, F_2) - 2g_0(\nabla F_1, \nabla F_2)$ .

**Esercizio B.12.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana compatta. Siano  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$ . Si verifichino le seguenti proprietà:

- a)  $\int_M f(\text{div}X) v_g = - \int_M g(\nabla f, X) v_g$ ;
- b)  $\int_M (\Delta f_1) \cdot f_2 v_g = \int_M f_1 \cdot (\Delta f_2) v_g = \int_M g(\nabla f_1, \nabla f_2) v_g$ .

Siccome ogni 1-forma  $\alpha \in \Lambda^1(M)$  si può esprimere nella forma  $\alpha = g(X, \cdot)$  con  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , e  $\delta\alpha = -\operatorname{div}X$ , la  $a$ ) dell'Esercizio B.12 si può anche scrivere nella forma equivalente

$$\int_M f(\delta\alpha) v_g = \int_M g(df, \alpha) v_g.$$

Inoltre, dal Teorema di Green segue che  $\int_M (\delta\alpha) v_g = 0$ .

**Esercizio B.13.** Siano  $g, \tilde{g}$  due metriche riemanniane omotetiche su  $M$ :

$$\tilde{g} = a^2 g, \quad a^2 = \operatorname{cost.} > 0.$$

Usando la formula (2.7), si verifichi che:

$$\Delta_{\tilde{g}} f = \frac{1}{a^2} \Delta_g f.$$

Più in generale, per metriche conformi:  $\tilde{g} = a^2 g$  con  $a \in \mathcal{F}(M)$ ,  $a > 0$ , risulta

$$\Delta_{\tilde{g}} f = \frac{1}{a^2} \{ \Delta_g f + (2 - n)(df)(\nabla_g \ln a) \}$$

dove l'indice in basso indica la metrica usata.

Per maggiori dettagli e approfondimenti sugli argomenti di questa appendice si rinvia ai testi [52], [97], [98], [100].

# Appendice C

## Geometria del fibrato tangente

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$ . Ricordiamo che il fibrato tangente  $TM = \{(p, u) : p \in M, u \in T_p M\}$ , e  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $(p, u) \mapsto p$ , è la proiezione canonica.  $TM$  si può munire in modo naturale di una struttura differenziabile indotta da quella di  $M$  (cfr. Sezione 2.2). Fissato  $z = (p, u) \in TM$ , se  $(x_1, \dots, x_n, v^1, \dots, v^n)$  denota un sistema di coordinate locali definito in un intorno aperto di  $z$  in  $TM$ , allora un vettore tangente  $\tilde{X}_z \in T_z(TM)$  si può esprimere come segue

$$\tilde{X}_z = \sum_{i=1}^n a^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_z + \sum_{i=1}^n b^i \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right)_z,$$

dove  $a^i = \tilde{X}_z(x_i)$  e  $b^i = \tilde{X}_z(v^i)$ .

### C.1 Vettori orizzontali e verticali

Assumiamo  $M$  munita di una connessione lineare  $\nabla$  e denotiamo con  $D/dt$  la derivata covariante di campi vettoriali differenziabili lungo curve. Una curva differenziabile di  $TM$

$$\tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM, t \mapsto (\gamma(t), V(t)),$$

si dice *curva orizzontale* se il campo  $V(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ , cioè  $DV/dt = 0$  per ogni  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ;  $\tilde{\gamma}$  si dice *curva verticale* se  $\gamma(t) = p$  e quindi  $V(t) \in T_p M$  per ogni  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , in tal caso  $DV/dt = dV/dt$ . Un vettore tangente  $\tilde{X}_z \in T_z(TM)$ ,  $z = (p, u) \in TM$ , si dice *vettore verticale* (risp. *orizzontale*) se è tangente ad una curva  $\tilde{\gamma}$  verticale (risp. orizzontale):

$$\tilde{X}_z = \dot{\tilde{\gamma}}(0), \quad \tilde{\gamma}(0) = z = (p, u).$$

Un campo di vettori  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(TM)$  si dice *verticale* (risp. *orizzontale*) se è un campo di vettori tangenti verticali (risp. orizzontali). Sia  $X_p \in T_p M$ . Si dice *sollevamento verticale* di  $X_p$  nel punto  $z = (p, u) \in TM$ , il vettore

$X_z^V \in T_z(TM)$  tangente, per  $t = 0$ , a una curva verticale  $\tilde{\gamma}(t) = (p, V(t))$  che soddisfa  $\tilde{\gamma}(0) = z$  e  $\frac{dV}{dt}(0) = X_p$ . Ad esempio, le curve  $\tilde{\gamma}_1(t) = (p, u + tX_p)$  e  $\tilde{\gamma}_2(t) = (p, (\cos t)u + (\sin t)X_p)$  soddisfano le due proprietà. Siccome, in termini di coordinate locali il vettore  $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = (0, X_p^i)$ , allora

$$X_z^V = \dot{\tilde{\gamma}}(0) = \sum_{i=1}^n X_p^i \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right)_z \quad \text{e quindi} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p^V = \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right)_z.$$

Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , il *campo vettoriale*  $X^V$  *sollevamento verticale* di  $X$  è definito da  $X^V(z) = X_z^V$ . Quindi, se  $X$  è espresso localmente da  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , il suo sollevamento verticale localmente è dato da

$$X^V = \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i \frac{\partial}{\partial v^i} = \sum_{i=1}^n (X^i \circ \pi) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^V. \quad (3.1)$$

Si noti che nella definizione di  $X^V$  non interviene la connessione  $\nabla$ .

Sia  $p \in M$  e sia  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva differenziabile di  $M$  con  $\gamma(0) = p$ . Allora, per ogni fissato  $z = (p, u) \in TM$  esiste un unico campo di vettori  $V(t)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , parallelo lungo  $\gamma$  e tale che  $V(0) = u$ . La curva

$$\tilde{\gamma}_z^H : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM, \quad t \mapsto (\gamma(t), V(t)),$$

è detta *curva sollevamento orizzontale* di  $\gamma$  uscente da  $z$ . Si noti che la curva  $\tilde{\gamma}_z^H(t)$  è univocamente determinata dalle condizioni

$$\tilde{\gamma}_z^H(0) = z = (p, u) \quad \text{e} \quad \pi \circ \tilde{\gamma}_z^H(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

In particolare, se  $\gamma(t)$  è una curva geodetica con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = u$ , allora il sollevamento orizzontale di  $\gamma(t)$  uscente da  $z = (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$  è la curva

$$\tilde{\gamma}_z^H(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)).$$

Sia  $X_p \in T_pM$  e sia  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva differenziabile di  $M$  tale che  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ . Fissato  $z = (p, u) \in TM$ , sia  $\tilde{\gamma}_z^H(t) = (\gamma(t), V(t))$  la curva sollevamento orizzontale di  $\gamma$  uscente da  $z$ . Il vettore tangente

$$\tilde{X}_z = \dot{\tilde{\gamma}}_z^H(0) = (\dot{\gamma}(0), \frac{dV}{dt}(0))$$

si chiama *sollevamento orizzontale di*  $X_p$  *nel punto*  $z$ . Se poniamo (localmente)  $x_k(t) = x_k(\tilde{\gamma}_z^H(t))$ ,  $v^k(t) = v^k(\tilde{\gamma}_z^H(t))$  e teniamo presente che

$$\frac{DV}{dt} = 0 \quad \iff \quad \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} v^j = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} X_z^H &:= \dot{\gamma}_z^H(0) = \left( \dot{\gamma}(0), \frac{dV}{dt}(0) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{dx_k}{dt}(0) \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_z + \sum_{k=1}^n \frac{dv^k}{dt}(0) \left( \frac{\partial}{\partial v^k} \right)_z \\ &= \sum_{k=1}^n X_p^k \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_z + \sum_{k=1}^n \left\{ - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{dx_i}{dt}(0) v^j(0) \right\} \left( \frac{\partial}{\partial v^k} \right)_z, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} X_z^H &= \sum_{i=1}^n X_p^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_z - \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) X_p^i v^j \right\} \left( \frac{\partial}{\partial v^k} \right)_z \quad (3.2) \\ &= \sum_{i=1}^n X_p^i \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_z - \sum_{k,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) v^j \left( \frac{\partial}{\partial v^k} \right)_z \right\}. \end{aligned}$$

La (3.2) esprime  $X_z^H$  nella base coordinata  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_z, \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right)_z \right\}$ , inoltre mostra che  $X_z^H$  è univocamente determinato da  $X_p$  e  $z = (p, u)$ , quindi non dipende dalla particolare curva  $\gamma(t)$  considerata. Il *campo di vettori  $X^H$  sollevamento orizzontale* di  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è così definito:

$$X^H(z) := X_z^H, \quad \forall z = (p, u) \in TM,$$

dove  $X_z^H$  è il sollevamento orizzontale di  $X_p$  in  $z$ . Di conseguenza, se localmente  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , ponendo  $\tilde{X}^k = X^k \circ \pi$ ,  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \circ \pi$ , l'espressione (3.2) diventa

$$X_z^H = \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^j \frac{\partial}{\partial v^k} \right\}(z),$$

e quindi il campo di vettori  $X^H \in \mathfrak{X}(TM)$  è espresso localmente da

$$X^H = \sum_{i=1}^n \tilde{X}^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^j \frac{\partial}{\partial v^k} \right\} = \sum_i \tilde{X}^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^H,$$

dove

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^H(z) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^j \frac{\partial}{\partial v^k} \right)(z).$$

**Decomposizione di  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(TM)$ :**

Sia  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(TM)$ . Localmente  $\tilde{X}$  è espresso da

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \sum_{k=1}^n \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \tilde{X}^{n+k} \frac{\partial}{\partial v^k} = \sum_{k=1}^n \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{i,j,k=1}^n \left\{ \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{X}^i v^j \right\} \frac{\partial}{\partial v^k} \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ \tilde{X}^{n+k} + \sum_{i,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{X}^i v^j \right\} \frac{\partial}{\partial v^k}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\tilde{X} = \tilde{X}^H + \tilde{X}^V,$$

dove  $\tilde{X}^H$  è dato, applicando la (3.2), da

$$\begin{aligned} \tilde{X}^H &:= \sum_{k=1}^n \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{X}^i v^j \right\} \frac{\partial}{\partial v^k} \\ &= \sum_i \tilde{X}^i \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{k,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^j \frac{\partial}{\partial v^k} \right\} = \sum_i \tilde{X}^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^H, \end{aligned} \quad (3.3)$$

e  $\tilde{X}^V$  è dato, applicando la (3.1), da

$$\begin{aligned} \tilde{X}^V &:= \sum_{k=1}^n \left\{ \tilde{X}^{n+k} + \sum_{i,j=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^j \tilde{X}^i \right\} \frac{\partial}{\partial v^k} \\ &= \sum_k \left\{ \tilde{X}^{n+k} + \sum_{i,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^j \tilde{X}^i \right\} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^V. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$\tilde{X}^H$  (risp.  $\tilde{X}^V$ ) è la *componente orizzontale* (risp. *verticale*) di  $\tilde{X}$ . Osserviamo che per ogni  $z = (p, u) \in TM$ ,  $\tilde{X}_z^H$  è il sollevamento orizzontale del vettore

$$X'_p = \sum_i \tilde{X}^i(z) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \in T_p M,$$

e  $\tilde{X}_z^V$  è il sollevamento verticale del vettore

$$X''_p = \sum_k \left\{ \tilde{X}^{n+k}(z) + \sum_{i,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k(z) v^j(z) \tilde{X}^i(z) \right\} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p \in T_p M.$$

Se  $\tilde{X}_z = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$ , dove  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$  con  $\tilde{\gamma}(0) = z = (p, u) = (\gamma(0), V(0))$ , allora

$$X'_p = \dot{\gamma}(0) \quad \text{e} \quad X''_p = \frac{DV}{dt}(0). \quad (3.5)$$

Poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_z TM &:= \left\{ \tilde{X}_z^V : \tilde{X}_z \in T_z TM \right\} \text{ sottospazio verticale di } T_z TM, \\ \mathcal{H}_z TM &:= \left\{ \tilde{X}_z^H : \tilde{X}_z \in T_z TM \right\} \text{ sottospazio orizzontale di } T_z TM.\end{aligned}$$

Dall'unicità della decomposizione  $\tilde{X}_z = \tilde{X}_z^H + \tilde{X}_z^V$ , segue che:

$$T_z(TM) = \mathcal{V}_z TM \oplus \mathcal{H}_z TM.$$

Inoltre, le corrispondenze  $z \mapsto \mathcal{H}_z TM$  e  $z \mapsto \mathcal{V}_z TM$ , definiscono due distribuzioni  $n$ -dimensionali supplementari su  $TM$ , dette rispettivamente *distribuzione orizzontale* e *distribuzione verticale*. Infine, notiamo che le applicazioni

$T_p M \longrightarrow \mathcal{V}_z TM, X_p \longmapsto X_z^V,$  e  $T_p M \longrightarrow \mathcal{H}_z TM, X_p \longmapsto X_z^H,$   
sono isomorfismi tra spazi vettoriali.

## C.2 L'applicazione di connessione e $\pi_*$

Sia  $z = (p, u) \in TM$ . L'applicazione

$$\begin{aligned}K_z : T_z(TM) &\longrightarrow T_p M, \\ \tilde{X}_z = \tilde{X}_z^H + \tilde{X}_z^V = \tilde{X}_z^H + (X_p)_z^V &\longmapsto K_z(\tilde{X}_z) := X_p,\end{aligned}$$

è detta *applicazione di connessione* (o applicazione di Dombrowski). Equivalentemente, se consideriamo una curva  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t)) \in TM$  con  $\tilde{\gamma}(0) = (\gamma(0), V(0)) = z = (p, u)$ ,

$$K_z(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) = K_z\left(\left(\dot{\gamma}(0)\right)_z^H + \left(\frac{DV}{dt}(0)\right)_z^V\right) = \frac{DV}{dt}(0).$$

Quindi, la definizione di  $K_z$  è in accordo col fatto che curve orizzontali su  $TM$  corrispondono a campi paralleli su  $M$ . In particolare,  $K_z(\tilde{X}_z^H) = 0$  e  $K_z$  ristretta ai vettori verticali definisce un isomorfismo

$$\mathcal{V}_z TM \longrightarrow T_p M, \tilde{X}_z^V = (X_p)_z^V \longmapsto X_p.$$

Sappiamo che un campo di vettori  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  si può pensare come un'applicazione  $Z : M \rightarrow TM$  e quindi, per ogni  $p \in M$ , possiamo considerare il differenziale

$$Z_{*p} : T_p M \rightarrow T_z TM, z = (p, Z_p).$$

Allora, l'applicazione di connessione soddisfa

$$K(Z_{*p}(X_p)) = \nabla_{X_p} Z.$$

Infatti, considerata una curva  $\gamma(t)$  di  $M$  con  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ , e posto  $\tilde{\gamma}(t) = Z(\gamma(t)) = (\gamma(t), Z(t))$ , si ha

$$K(Z_{*p}(X_p)) = K(Z_{*p}(\dot{\gamma}(0))) = K(\dot{\tilde{\gamma}}(0)) = \frac{DZ}{dt}(0) = \nabla_{\dot{\tilde{\gamma}}(0)}Z = \nabla_{X_p}Z.$$

La proiezione canonica  $\pi : TM \rightarrow M$ ,  $z = (p, u) \mapsto p$ , è data localmente da  $(x_i, v^i) \mapsto (x_i)$ , perciò il differenziale

$$\pi_{*z} : T_z(TM) \rightarrow T_pM$$

è definito da

$$\tilde{X}_z = \sum_i \left\{ a^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_z + b^{n+i} \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right)_z \right\} \mapsto \pi_{*z}(\tilde{X}_z) = \sum_i a^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p.$$

Dalle formule (3.3) e (3.4), si ottiene:

$$\pi_{*z}(\tilde{X}_z^H) = \pi_{*z}((X_p)_z^H) = X_p \quad \text{e} \quad \pi_{*z}(\tilde{X}_z^V) = 0$$

per ogni  $\tilde{X}_z = \tilde{X}_z^H + \tilde{X}_z^V \in T_z(TM)$ . Quindi,

$$\pi_{*z} : \mathcal{H}_z TM \rightarrow T_pM, \quad \tilde{X}_z^H = (X_p)_z^H \mapsto X_p,$$

è un isomorfismo. Inoltre, siccome  $\pi \circ Z = I_d$ , abbiamo

$$\pi_{*z}(Z_{*p}(X_p)) = X_p, \quad z = (p, Z_p)$$

e quindi

$$Z_{*p}(X_p) = (X_p)_z^H + (\nabla_{X_p}Z)_z^V. \quad (3.6)$$

Ricapitolando, le applicazioni  $K$  e  $\pi_*$  agiscono sui vettori  $\tilde{X}_z \in T_z TM$  come proiezioni supplementari.  $K$  annulla la componente orizzontale di  $\tilde{X}_z$  e proietta isomorficamente il sottospazio verticale su  $T_pM$ ,  $\pi_*$  annulla la componente verticale di  $\tilde{X}_z$  e proietta isomorficamente su  $T_pM$  il sottospazio orizzontale. Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \ker K_z &= \mathcal{H}_z TM \quad \text{è isomorfo a} \quad \text{Im} \pi_{*z}, \\ \ker \pi_{*z} &= \mathcal{V}_z TM \quad \text{è isomorfo a} \quad \text{Im} K_z, \end{aligned}$$

e la corrispondenza

$$\Phi : T_z(TM) \rightarrow T_pM \oplus T_pM, \quad \tilde{X}_z \mapsto (\pi_{*z}(\tilde{X}_z), K_z(\tilde{X}_z)),$$

è un isomorfismo. Infine si noti che, se  $p \in M$  e  $i : T_pM \hookrightarrow TM$ ,  $u \mapsto (p, u)$ , è l'inclusione della sottovarietà  $T_pM = \pi^{-1}(p)$  di  $TM$ , allora

$$i_{*u}(T_pM) = \mathcal{V}_z TM.$$



**Osservazione C.1.** Sia  $X_p \in T_p M$ . I sollevamenti  $X_z^H, X_z^V \in T_z(TM)$ ,  $z = (p, u)$ , come derivazioni di funzioni definite su  $TM$  si comportano nel modo seguente.

- $X_z^V(df) = X_p(f)$  per ogni  $f \in \mathcal{F}(M)$ , dove la 1-forma  $df$  su  $M$  è pensata come una funzione su  $TM$  (cioè,  $(df)(p, u) = u(f)$ );
- $Y^H(f \circ \pi) = Y(f) \circ \pi$  e  $Y^V(f \circ \pi) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}(M)$  e  $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ ;
- se  $g$  è una metrica riemanniana su  $M$  (in questo caso  $\nabla$  è la connessione di Levi-Civita), e denotiamo con  $r$  la lunghezza di un vettore tangente  $u$ , allora  $X_z^H(f(r^2)) = 0$  e  $X_z^V(f(r^2)) = 2f'(r^2)g_p(X_p, u)$  per ogni  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

### Il flusso geodetico

Per ogni fissato  $z = (p, u) \in TM$  esiste un  $\varepsilon > 0$  ed esiste un'unica curva differenziabile  $\tilde{\gamma}_z(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ ,  $|t| < \varepsilon$ , di  $TM$ , dove  $\gamma(t)$  è la curva geodetica di  $M$  (rispetto alla connessione  $\nabla$ ) che verifica  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = u$ . Poiché il campo tangente  $\dot{\gamma}(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$ ,  $\tilde{\gamma}_z(t)$  è una curva orizzontale con  $\tilde{\gamma}_z(0) = z$  e quindi  $\tilde{\gamma}_z(t)$  è il sollevamento orizzontale di  $\gamma$  uscente da  $z$ . Di conseguenza, il vettore  $\dot{\tilde{\gamma}}_z(0) = (\dot{\gamma}(0), \ddot{\gamma}(0)) \in T_z(TM)$  è il sollevamento orizzontale di  $X_p = u$  in  $z = (p, u)$ . Definiamo

$$\xi : TM \longrightarrow T(TM), \quad z = (p, u) \longmapsto \xi_z = \dot{\tilde{\gamma}}_z(0) = u_z^H.$$

Se si prende  $X_p = u$  nella (3.2), si ha

$$\begin{aligned} \xi_z = u_z^H &= \sum_i u^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_z - \sum_k \left\{ \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(p) u^i u^j \right\} \left( \frac{\partial}{\partial v^k} \right)_z \\ &= \sum_{i=1}^n u^i \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_z^H \end{aligned}$$

da cui, essendo  $v^k(z) = u^k$ , si ricava l'espressione locale del campo  $\xi$ :

$$\xi = \sum_k v^k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_k \left\{ \sum_{i,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k v^i v^j \right\} \frac{\partial}{\partial v^k} = \sum_{i=1}^n v^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^H.$$

Dunque, il campo  $\xi$  su  $TM$  è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$K_z(\xi_z) = 0 \quad \text{e} \quad \pi_{*z}(\xi_z) = u \quad \forall z = (p, u) \in TM.$$

La prima di queste proprietà equivale a dire che  $\xi_z$  è un vettore orizzontale, mentre la seconda che  $\xi_z$  è il sollevamento orizzontale di  $u$  in  $z$ . Il campo vettoriale  $\xi$  su  $TM$ , equivalentemente il gruppo ad un parametro di trasformazioni locali  $\phi_t(z) := \tilde{\gamma}_z(t)$  generato da  $\xi$ , viene detto *flusso geodetico*. Quindi

$$\xi_z = \dot{\tilde{\gamma}}_z(0) = \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}_z(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \phi_t(z)|_{t=0}$$

è il vettore tangente per  $t = 0$  all'orbita del flusso geodetico. Il campo  $\xi$ , visto come una derivazione di  $\mathcal{F}(TM)$ , opera come segue:

$$\xi(f)(z) = \xi_z(f) = \dot{\tilde{\gamma}}_z(0)(f) = \frac{d}{dt}f(\tilde{\gamma}_z(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \Big|_{t=0}$$

per ogni  $f \in \mathcal{F}(TM)$  e per ogni  $z \in TM$ .

### C.3 La metrica di Sasaki e il fibrato sferico

Sia ora  $(M, g)$  una varietà riemanniana con  $\nabla$  connessione di Levi-Civita. La *metrica di Sasaki* è la metrica riemanniana su  $TM$ , che denotiamo con  $G_s$ , più studiata e più nota. Essa è definita, per ogni  $z = (p, u) \in TM$  e per ogni  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(TM)$ , da

$$G_s(\tilde{X}, \tilde{Y})(z) = g_p(\pi_{*z}(\tilde{X}_z), \pi_{*z}(\tilde{Y}_z)) + g_p(K_z(\tilde{X}_z), K_z(\tilde{Y}_z)).$$

Posto  $\tilde{X}_z = \tilde{X}_z^H + \tilde{X}_z^V = (X_p')_z^H + (X_p'')_z^V$  e  $\tilde{Y}_z = \tilde{Y}_z^H + \tilde{Y}_z^V = (Y_p')_z^H + (Y_p'')_z^V$ , dalla definizione di  $G_s$  segue che:

$$G_s(\tilde{X}, \tilde{Y})(z) = G_s(\tilde{X}_z^H, \tilde{Y}_z^H) + G_s(\tilde{X}_z^V, \tilde{Y}_z^V) = g_p(X_p', Y_p') + g_p(X_p'', Y_p'').$$

Quindi, la metrica di Sasaki è completamente determinata da

$$\begin{cases} G_s(X_z^H, Y_z^H) = G_s(X_z^V, Y_z^V) = g_p(X_p, Y_p), \\ G_s(X_z^H, Y_z^V) = G_s(X_z^V, Y_z^H) = 0, \end{cases}$$

dove  $X_z^H, Y_z^H, X_z^V, Y_z^V$  sono i sollevamenti di  $X_p, Y_p \in T_pM$ . Equivalentemente, la metrica di Sasaki è caratterizzata da

$$G_s(X^H, Y^H) = G_s(X^V, Y^V) = g(X, Y) \circ \pi, \quad G_s(X^H, Y^V) = 0,$$

dove  $X, Y$  sono campi di vettori su  $M$ . In particolare, i sottospazi  $\mathcal{V}_zTM$  e  $\mathcal{H}_zTM$  sono  $G_s$ -ortogonali. Se  $\tilde{X}_z, \tilde{Y}_z \in T_zTM$  sono vettori tangenti, per  $t = 0$ , alle curve  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$  e  $\tilde{\sigma}(t) = (\sigma(t), W(t))$  rispettivamente, e quindi per la (3.5)

$$\begin{aligned} \tilde{X}_z &= \dot{\tilde{\gamma}}(0) = (\dot{\gamma}(0))_z^H + \left( \frac{DV}{dt}(0) \right)_z^V, \\ \tilde{Y}_z &= \dot{\tilde{\sigma}}(0) = (\dot{\sigma}(0))_z^H + \left( \frac{DW}{dt}(0) \right)_z^V, \end{aligned}$$

allora

$$G_s(\tilde{X}_z, \tilde{Y}_z) = g\left(\dot{\gamma}(0), \dot{\sigma}(0)\right) + g\left(\frac{DV}{dt}(0), \frac{DW}{dt}(0)\right).$$

Inoltre, la proiezione

$$\pi : (TM, G_s) \rightarrow (M, g)$$

è una *sommersione riemanniana* in quanto  $(\ker \pi_{*z})^\perp = (\mathcal{V}_z TM)^\perp = \mathcal{H}_z TM$  e  $\pi_{*z} : \mathcal{H}_z TM \rightarrow T_p M$  è un'isometria:

$$G_s(X_z^H, Y_z^H) = g_p(X_p, Y_p) = g_p(\pi_{*z} X_z^H, \pi_{*z} X_z^H) \quad \forall X_z^H, Y_z^H \in \mathcal{H}_z TM.$$

**Osservazione C.2.**  $TM$  ammette una struttura quasi complessa  $J$  definita da

$$JX^H = X^V \quad \text{e} \quad JX^V = -X^H.$$

Si può vedere che  $(G_s, J)$  è una struttura quasi hermitiana su  $TM$ . Inoltre, se consideriamo su  $TM$  la 1-forma  $\beta$ , detta *forma di Liouville*, definita da

$$\beta(\tilde{X}_z) = g_p(u, \pi_* \tilde{X}_z), \quad \text{dove } z = (p, u) \in TM \text{ e } \tilde{X} \in \mathfrak{X}(TM),$$

il differenziale  $d\beta$  è una forma simplettica su  $TM$  e  $2d\beta$  è la 2-forma fondamentale della struttura quasi hermitiana  $(G_s, J)$  (cfr. [11], Cap. 9).

L'insieme

$$T_1 M := \left\{ z = (p, u) \in TM : g_p(u, u) = 1 \right\}$$

è una ipersuperficie di  $TM$  di dimensione  $2n - 1$ , che viene detta *fibrato sferico unitario tangente*, dove  $n = \dim M$ . La corrispondente proiezione la denotiamo con  $\pi_1 : T_1 M \rightarrow M$ .

**Proposizione C.3.** *Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana. Allora, lo spazio tangente a  $T_1 M$  in un fissato punto  $z = (p, u) \in T_1 M$  è dato da*

$$T_z(T_1 M) = \{ X_z^H + Y_z^V : X_p, Y_p \in T_p M, Y_p \perp u \}. \quad (3.7)$$

*In particolare, si ha:*

$$\mathcal{H}_z TM \subset T_z(T_1 M), \quad \text{e} \quad Y_z^V \in T_z(T_1 M) \Leftrightarrow Y_p \perp u.$$

*Dimostrazione.* Sia  $z = (p, u) \in T_1 M$ . Un vettore  $X_z^H$  sollevamento orizzontale di  $X_p \in T_p M$  è sempre tangente a  $T_1 M$ . Infatti,  $X_z^H = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$ , dove  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$ ,  $\gamma(0) = p$  e  $V(t)$  è parallelo lungo  $\gamma(t)$  con  $V(0) = u$ .  $V(t)$ , in quanto parallelo, ha lunghezza costante. Pertanto  $\|V(t)\| = \text{cost.} = \|V(0)\| = \|u\| = 1$ , cioè  $\tilde{\gamma}(t)$  è una curva di  $T_1 M$  e quindi  $X_z^H \in T_z(T_1 M)$ . Se consideriamo un vettore  $Y_z^V$  sollevamento verticale di  $Y_p \in T_p M$ , questo non sempre è tangente a  $T_1 M$ . Infatti, sia  $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), V(t))$  una curva verticale di  $T_1 M$  uscente da  $z$ , quindi  $\tilde{\gamma}(t) = (p, V(t))$  e  $V(0) = u$ , con  $\frac{dV}{dt}(0) = Y_p \in T_p M$ . Il vettore verticale  $Y_z^V = \dot{\tilde{\gamma}}(0) = (0, \frac{dV}{dt}(0)) = (0, Y_p)$ . Siccome  $g(V(t), V(t)) = 1$  è costante, si ha  $g_p(\frac{dV}{dt}(0), V(0)) = 0$ , cioè  $\frac{dV}{dt}(0)$  è ortogonale a  $u = V(0)$ , quindi  $Y_z^V \in T_z(T_1 M)$  se e solo se  $Y_p \perp u$ . Ciò conclude la dimostrazione in quanto  $\dim T_z(T_1 M) = 2n - 1$ .  $\square$

Il campo vettoriale  $N : T_1M \rightarrow T(TM)$ ,

$$z = (p, u) \mapsto N_z = u_z^V = \left\{ \sum_i u^i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right\}_p^V = \sum_i u^i \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right)_z,$$

è unitario in quanto  $G_s(N_z, N_z) = G_s(u_z^V, u_z^V) = g_p(u, u) = 1$ . Dalla definizione di  $G_s$  segue che  $N$  è anche normale a  $T_1M$ . Infatti: se  $\tilde{X}_z \in T_z(T_1M)$ ,  $z = (p, u)$ , è orizzontale allora è chiaramente ortogonale a  $N_z$  che è verticale; se invece  $\tilde{X}_z$  è verticale, applicando la (3.7), si ha che  $\tilde{X}_z$  è il sollevamento verticale di un vettore ortogonale a  $u$ , e quindi è ortogonale a  $N_z$ . Una conseguenza immediata è che

$$T_z(T_1M) = N_z^\perp = (u_z^V)^\perp, \quad z = (p, u) \in T_1M.$$

Inoltre, se  $X_z^V$  è il sollevamento verticale di  $X_p \in T_pM$  in  $z = (p, u) \in T_1M$ , allora

$$X_z^T := X_z^V - g_p(X_p, u)N_z$$

è un vettore di  $T_z(T_1M)$  che prende il nome di *sollevamento tangenziale* di  $X_p$  in  $z = (p, u) \in T_1M$ . Naturalmente  $X_z^T = X_z^V$  quando  $X_p \perp u$ . In particolare,  $T_z(T_1M)$  è generato da vettori del tipo:

$$X_z^H = (X_p)^H \text{ e } X_z^T = (X_p)^T.$$

Il *sollevamento tangenziale di un campo di vettori*  $X \in \mathfrak{X}(M)$  è il campo di vettori tangenziale  $X^T \in \mathfrak{X}(T_1M)$  che ad ogni punto  $z = (p, u) \in T_1M$  associa il sollevamento tangenziale di  $X_p$  in  $z$ . Il flusso geodetico  $\xi$ , in quanto vettore orizzontale ( $\xi_z = u_z^H$ ) definisce su  $T_1M$  un campo di vettori unitari e tangenti che, usualmente, è indicato con lo stesso simbolo. Tale  $\xi$  è anche differenziabile in quanto l'applicazione

$$\xi \circ i : T_1M \hookrightarrow TM \rightarrow T(T_1M)$$

è differenziabile.

Se  $Z$  è un campo di vettori unitario, come per la (3.6), si può considerare l'applicazione  $Z : M \rightarrow T_1M$  e quindi, per ogni  $p \in M$ , il differenziale  $Z_{*p} : T_pM \rightarrow T_zT_1M$ ,  $z = (p, Z_p)$ , soddisfa:

$$Z_{*p}(X_p) = (X_p)_z^H + (\nabla_{X_p} Z)_z^V = (X_p)_z^H + (\nabla_{X_p} Z)_z^T.$$

La metrica di Sasaki  $G_s$  di  $TM$  induce su  $T_1M$  una metrica riemanniana che indichiamo con  $\tilde{G}_s$ . Se  $z = (p, u) \in T_1M$  e  $\{e_1 = u, e_2, \dots, e_n\}$  è una base  $g$ -ortonormale di  $T_pM$ , allora

$$\{\xi_z = u_z^H, (e_2)_z^H, \dots, (e_n)_z^H, N_z = u_z^V, (e_2)_z^V, \dots, (e_n)_z^V\}$$

è una base  $G_s$ -ortonormale di  $T_z(TM)$ , e

$$\{\xi_z = u_z^H, (e_2)_z^H, \dots, (e_n)_z^H, (e_2)_z^V, \dots, (e_n)_z^V\}$$

è una base  $\tilde{G}_s$ -ortonormale di  $T_z(T_1M)$ .

Se  $\tilde{\nabla}$  è la connessione di Levi-Civita di  $(TM, G_s)$ , l'operatore di Weingarten (cfr. Sezione 6.7) dell'ipersuperficie  $T_1M$  di  $TM$ , dato da  $S_N X := -\tilde{\nabla}_X N$ , è caratterizzato da:

$$S_N X^H = 0 \quad \text{e} \quad S_N X^T = -X^T,$$

per ogni vettore orizzontale  $X^H$  e per ogni vettore tangenziale  $X^T$ . Di conseguenza,  $T_1M$  è una ipersuperficie di  $(TM, G_s)$  a curvatura media  $H$  costante  $\neq 0$ :

$$H := \frac{\text{tr } S_N}{2n-1} N = -\frac{n-1}{2n-1} N.$$

## C.4 Il fibrato sferico tangente di una superficie riemanniana

Sia  $M^2$  una superficie riemanniana, ovvero una varietà riemanniana 2-dimensionale con metrica  $g$ . In tal caso, il tensore di curvatura di  $M^2$  è dato da

$$R(X, Y)Z = \kappa(g(X, Z)Y - g(Y, Z)X).$$

dove  $\kappa$  è la curvatura gaussiana. Inoltre assumiamo che  $M^2$  sia orientabile, quindi possiamo definire una struttura complessa  $J$  ponendo:

$$J e_1 = e_2, \quad J e_2 = -e_1,$$

dove  $(e_1, e_2)$  è una base ortonormale (locale) positiva.

Sia  $T_1M^2$  il fibrato sferico tangente con la metrica di Sasaki  $\tilde{G}_s$ . Ponendo

$$(E_1)_z = (Ju)_z^T = (Ju)_z^V, \quad (E_2)_z = (Ju)_z^H, \quad (E_3)_z = (u)_z^H$$

per ogni  $z = (x, u) \in T_1M^2$ , si ottiene una base ortonormale globale su  $(T_1M^2, \tilde{G}_s)$ . Indichiamo con  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  le 1-forme duali di  $E_1, E_2, E_3$ . Allora, dalla Proposizione 1 di [73], si ha

$$d\eta_1 = \kappa \eta_2 \wedge \eta_3, \quad d\eta_2 = -\eta_1 \wedge \eta_3, \quad d\eta_3 = \eta_1 \wedge \eta_2.$$

Di conseguenza, i campi di vettori  $E_1, E_2, E_3$  soddisfano:

$$[E_2, E_3] = -\kappa E_1, \quad [E_3, E_1] = -E_2, \quad [E_1, E_2] = -E_3. \quad (3.8)$$

Assumiamo ora che  $M^2$  sia a curvatura gaussiana  $\kappa$  costante e che i campi vettoriali  $(E_1, E_2, E_3)$  siano completi (ad esempio, se  $M^2$  è compatta i campi vettoriali sono completi). Allora, applicando il Teorema 3.16, il rivestimento universale di  $T_1M^2$  si può pensare come un gruppo di Lie  $\mathcal{G}$  con i campi vettoriali  $(E_1, E_2, E_3)$  invarianti a sinistra. Inoltre, la metrica di Sasaki  $\tilde{G}_s$  è invariante a sinistra in quanto la base  $(E_1, E_2, E_3)$  è ortonormale rispetto a tale metrica (cfr. Proposizione 5.16). Quindi, dalla (3.8), tenendo conto

della classificazione dei gruppi di Lie unimodulari data nella Sezione 3.6.1, si ha:

$$\mathcal{G} = SU(2) \text{ se } \kappa > 0; \quad \mathcal{G} = \tilde{E}(2) \text{ se } \kappa = 0; \quad \mathcal{G} = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \text{ se } \kappa < 0.$$

In particolare  $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ , rivestimento universale di  $PSL(2, \mathbb{R})$ , si può vedere come il rivestimento universale del fibrato sferico tangente  $T_1H^2$  del piano iperbolico con la metrica indotta (cfr., anche [65] p.395).

Usando le notazioni della Sezione 8.9 (caso unimodulare), dalla (3.8) segue che

$$\lambda_1 = -\kappa, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \quad \mu_1 = (\kappa - 2)/2, \quad \mu_2 = \mu_3 = -\kappa/2,$$

e quindi dalla (8.29) si ottiene che le componenti del tensore di Ricci  $Ric_{ij} = Ric(E_i, E_j)$  sono date da

$$Ric_{11} = \kappa^2/2, \quad Ric_{22} = Ric_{33} = \kappa(2 - \kappa)/2, \quad Ric_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j. \quad (3.9)$$

Di conseguenza, la segnatura della curvatura di Ricci  $(Ric_{11}, Ric_{22}, Ric_{33})$  è data da:

- $(+, -, -)$  se  $\kappa < 0$ ;
- $(0, 0, 0)$  se  $\kappa = 0$ ;
- $(+, +, +)$  se  $0 < \kappa < 2$ ;
- $(+, 0, 0)$  se  $\kappa = 2$ ;
- $(+, -, -)$  se  $\kappa > 2$ .

In particolare,

$$Ric_{11} = Ric_{22} = Ric_{33} \iff \kappa = 1 \text{ (caso } SU(2)) \text{ oppure } \kappa = 0 \text{ (caso } \tilde{E}(2)).$$

Pertanto,  $(T_1M^2, \tilde{G}_s)$  è di Einstein, ovvero ha curvatura sezionale costante, se e solo se  $\kappa = 1$  o  $\kappa = 0$ . Nel caso di  $\kappa = 1$ , la metrica  $\tilde{G}_s$  ha curvatura sezionale costante  $K = 1/4$ , e la metrica  $\tilde{g} = (1/4)\tilde{G}_s$  ha curvatura sezionale costante  $K = 1$ .

### Struttura riemanniana di contatto su $T_1M$

Sia  $M^2$  una varietà riemanniana di dimensione 2 con curvatura gaussiana  $\kappa$ . Usando le notazioni introdotte all'inizio di questa Sezione, poniamo

$$\xi_1 = 2E_2, \quad \xi_2 = 2E_3, \quad \xi_3 = -2E_1.$$

Allora, la (3.8) diventa

$$[\xi_1, \xi_2] = 2\kappa\xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = 2\xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = 2\xi_2. \quad (3.10)$$

Si noti che i campi vettoriali  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  sono ortonormali rispetto alla metrica  $\tilde{g} = (1/4)\tilde{G}_s$ , inoltre  $(1/2)\xi_2$  è il flusso geodetico.

Consideriamo la 1-forma  $\eta = \tilde{g}(\xi, \cdot)$ ,  $\xi = \xi_2$ . Allora, dalla (3.10) si ottiene

$$(d\eta)(\xi_1, \xi_3) = 1, \quad \text{e} \quad (d\eta)(\xi, \cdot) = 0.$$

Di conseguenza, con un semplice calcolo si ha

$$\eta \wedge d\eta \neq 0.$$

Inoltre, le condizioni  $\eta(\xi) = 1$ , e  $(d\eta)(\xi, \cdot) = 0$ , ci dicono che  $\xi$  è il campo vettoriale di Reeb della 1-forma di contatto  $\eta$ . Ora, se definiamo il tensore  $\varphi$  ponendo

$$\varphi\xi = 0, \quad \varphi\xi_3 = \xi_1, \quad \varphi\xi_1 = -\xi_3,$$

si ottiene facilmente che  $(d\eta)(\cdot, \cdot) = \tilde{g}(\cdot, \varphi\cdot)$ . Pertanto,  $(\eta, \xi, \varphi, \tilde{g})$ , è una struttura riemanniana di contatto, *la struttura riemanniana di contatto naturale*, su  $T_1M^2$  dove il campo vettoriale di Reeb è il flusso geodetico (normalizzato). Infine, determiniamo il tensore  $h = (1/2)\mathcal{L}_\xi\varphi$ . Dalla (3.9) segue

$$h\xi_1 = (\kappa - 1)\xi_1 \quad \text{e} \quad h\xi_3 = (1 - \kappa)\xi_3.$$

Pertanto, la struttura riemanniana di contatto naturale su  $T_1M^2$  è saskiana se e solo se  $M^2$  ha curvatura gaussiana  $\kappa = \text{cost.} = 1$ .

Più in generale, abbiamo la seguente

**Osservazione C.4.** La struttura riemanniana di contatto naturale  $(\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\varphi}, \tilde{g})$  sul fibrato sferico tangente  $T_1M$ , di una varietà riemanniana  $(M, g)$  di dimensione arbitraria  $n$ , è definita da (cfr. [11], Cap. 9):

- $\tilde{\eta} = (1/2)\eta'$ , dove  $\eta'$  la 1-forma su  $T_1M$  indotta dalla forma di Liouville  $\beta$  su  $TM$  (cfr. Osservazione C.2). In forma esplicita:

$$\tilde{\eta}_z(X_z^T) = 0, \quad \tilde{\eta}_z(X_z^H) = (1/2)g_p(X, u), \quad z = (p, u) \in T_1M \text{ e } X \in \mathfrak{X}(M).$$

- $\tilde{\xi} = 2\xi$ , dove  $\xi$  è il flusso geodetico. In forma esplicita:

$$\tilde{\xi}_z = 2u^H, \quad z = (p, u) \in T_1M.$$

- Per  $z = (p, u) \in T_1M$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  :

$$\tilde{\varphi}_z X_z^T = -X_z^H + (1/2)g_p(X_p, u)\tilde{\xi}_z, \quad \tilde{\varphi}_z X_z^H = X_z^T.$$

- $\tilde{g} = (1/4)\tilde{G}_s$ . In forma esplicita:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_z(X_z^T, Y_z^T) &= (1/4)(g_p(X, Y) - g_p(X_p, u)g_p(Y_p, u)), \\ \tilde{g}_z(X_z^T, Y_z^H) &= 0, \quad \tilde{g}_z(X_z^H, Y_z^H) = (1/4)g_p(X_p, Y_p), \end{aligned}$$

dove  $z = (p, u) \in T_1M$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Si noti che il campo vettoriale di Reeb  $\tilde{\xi}$  della struttura riemanniana di contatto naturale su  $T_1M$  è di Killing se, e solo se, la varietà riemanniana  $(M, g)$  ha curvatura sezionale costante  $+1$ , e in tal caso la struttura di contatto è saskiana. In particolare, se  $(M, g)$  è la sfera canonica di curvatura sezionale costante  $+1$ , la struttura riemanniana di contatto naturale su  $T_1\mathbb{S}^n$  è saskiana. Inoltre, se  $M$  ha curvatura negativa,  $\tilde{\xi}$  (che è due volte il flusso geodetico) è un campo vettoriale di Anosov (cfr., ad esempio, [11] Sez. 11.2).

## C.5 Metriche riemanniane $g$ -naturali su $TM$ e $T_1M$

La metrica di Sasaki è solo un caso particolare di un'ampia classe di metriche riemanniane su  $TM$  e  $T_1M$  introdotte da O. Kowalski e M. Sekizawa [58], e denominate *metriche riemanniane  $g$ -naturali*.

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana, una *metrica  $g$ -naturale*  $G$  su  $TM$  è definita da

$$\begin{cases} G_{(p,u)}(X^H, Y^H) &= (\alpha_1 + \alpha_3)(r^2)g_p(X, Y) \\ &\quad + (\beta_1 + \beta_3)(r^2)g_p(X, u)g_p(Y, u), \\ G_{(p,u)}(X^H, Y^V) &= G_{(p,u)}(X^V, Y^H) \\ &= \alpha_2(r^2)g_p(X, Y) + \beta_2(r^2)g_p(X, u)g_p(Y, u), \\ G_{(p,u)}(X^V, Y^V) &= \alpha_1(r^2)g_p(X, Y) + \beta_1(r^2)g_p(X, u)g_p(Y, u), \end{cases} \quad (3.11)$$

dove  $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sono sei funzioni differenziabili,  $u, X, Y \in T_pM$  e  $r^2 = g_p(u, u)$ . Poniamo

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= \alpha_i(t) + t\beta_i(t), & \alpha(t) &= \alpha_1(t)(\alpha_1 + \alpha_3)(t) - \alpha_2^2(t), \\ \phi(t) &= \phi_1(t)(\phi_1 + \phi_3)(t) - \phi_2^2(t), \end{aligned}$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}^+$ . Allora, una metrica  $g$ -naturale  $G$  su  $TM$  è riemanniana se e solo se valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\alpha_1(t) > 0, \quad \phi_1(t) > 0, \quad \alpha(t) > 0, \quad \phi(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (3.12)$$

In letteratura ci sono ben note metriche riemanniane su  $TM$  le quali sono casi speciali di metriche riemanniane  $g$ -naturali. In particolare:

- la *metrica di Sasaki*  $G_s$  si ottiene per

$$\alpha_1(t) = 1, \quad \alpha_2(t) = \alpha_3(t) = \beta_1(t) = \beta_2(t) = \beta_3(t) = 0;$$

- la *metrica di Cheeger-Gromoll*  $G_{cg}$  [23] è la metrica che si ottiene per

$$\alpha_2(t) = \beta_2(t) = 0, \quad \alpha_1(t) = \beta_1(t) = -\beta_3(t) = \frac{1}{1+t}, \quad \alpha_3(t) = \frac{t}{1+t};$$

- *metriche di Kaluza-Klein*  $G_{kk}$  (cfr., ad esempio, [122]), sono metriche  $g$ -naturali che si ottengono per

$$\alpha_2(t) = \beta_2(t) = \beta_1(t) + \beta_3(t) = 0.$$

Le metriche  $G_s$  e  $G_{cg}$  sono particolari metriche di Kaluza-Klein. In generale la proiezione  $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g)$  non è una sommersione riemanniana, tuttavia se  $G = G_{kk}$  con  $\alpha_1(t) + \alpha_3(t) = 1$ , allora la proiezione  $\pi$  è una sommersione riemanniana.

*Metriche  $g$ -naturali on  $T_1M$*  sono le restrizioni all'ipersuperficie  $T_1M$  di metriche  $g$ -naturali su  $TM$ . Queste metriche possiedono una semplice forma. Precisamente, tenendo conto di (3.7), dalla (3.11) segue che una metrica  $g$ -naturale  $\tilde{G}$  su  $T_1M$ , indotta da una metrica  $g$ -naturale  $G$  su  $TM$ , è



completamente caratterizzata dalle seguenti identità

$$\begin{cases} G_{(p,u)}(X_1^H, X_2^H) &= (\alpha_1 + \alpha_3)(r^2)g_p(X_1, X_2) \\ &+ (\beta_1 + \beta_3)(r^2)g_p(X_1, u)g_p(X_2, u), \\ G_{(p,u)}(X_1^H, Y_1^V) &= \alpha_2(r^2)g_p(X_1, Y_1), \\ G_{(p,u)}(Y_1^V, Y_2^V) &= \alpha_1(r^2)g_p(Y_1, Y_2), \end{cases} \quad (3.13)$$

per ogni  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in T_pM$  con  $Y_1, Y_2 \perp u$ , dove  $r^2 = g_p(u, u)$ . Siccome la lunghezza di ogni elemento  $(p, u) \in T_1M$  è costante ( $r = 1$ ), ne segue che  $G_{(p,u)}$  dipende da quattro costanti. Poniamo

$$a = \alpha_1(1), \quad b = \alpha_2(1), \quad c = \alpha_3(1), \quad e \quad d = (\beta_1 + \beta_3)(1).$$

Nel caso di  $T_rM$  fibrato sferico di raggio  $r$ , si pone  $a = \alpha_1(r^2)$ ,  $b = \alpha_2(r^2)$ ,  $c = \alpha_3(r^2)$  e  $d = (\beta_1 + \beta_3)(r^2)$ . Tornando al caso unitario, fissato  $(p, u)$  elemento di  $T_1M$ , quindi  $\|u\| = 1$ , sia  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n = u)$  una base ortonormale di  $T_pM$ . Allora una base di  $T_{(p,u)}(T_1M)$  è data da  $(e_1^V, \dots, e_{n-1}^V, e_1^H, \dots, e_n^H)$ . La corrispondente matrice delle componenti della metrica, tenendo conto della (3.13), è data da

$$\begin{pmatrix} a I_{n-1} & b I_{n-1} & 0 \\ b I_{n-1} & (a+c)I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a+c+d \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\tilde{G}$  è riemanniana, cioè è definita positiva, se e solo se i minori principali della precedente matrice sono tutti positivi e ciò si verifica se e solo se valgono le seguenti disuguaglianze

$$a > 0, \quad a(a+c) - b^2 > 0 \quad \text{and} \quad a+c+d > 0. \quad (3.14)$$

Nel caso di  $T_rM := \{z = (p, u) \in TM : g_p(u, u) = r^2\}$  cambia solo l'ultima condizione che diventa  $a+c+dr^2 > 0$ . La condizione (3.14) ci dice che  $\tilde{G}$  è riemanniana, ma ciò non significa che  $\tilde{G}$  sia indotta da una metrica riemanniana  $g$ -naturale  $G$  su  $TM$ . Se  $\tilde{G}$  è indotta da una metrica riemanniana  $g$ -naturale  $G$  su  $TM$  della forma (3.11), senza perdere in generalità, la metrica  $G$  su  $TM$  si può scegliere con

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_2 = b, \quad \alpha_3 = c, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \beta, \quad (3.15)$$

dove  $a, b, c$  sono costanti e  $\beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile. Allora la metrica  $\tilde{G}$  su  $T_1M$ , indotta da questa metrica riemanniana  $g$ -naturale  $G$  su  $TM$ , dipende solo dal valore  $d := \beta(1)$ . Da (3.12) e (3.15), segue che in questo caso  $\tilde{G}$  è riemanniana se e solo se le costanti  $a, b, c, d$  soddisfano

$$a > 0, \quad \alpha := a(a+c) - b^2 > 0 \quad \text{and} \quad \phi := a(a+c+d) - b^2 > 0. \quad (3.16)$$

Nel caso del fibrato  $T_rM$  cambia solo l'ultima condizione che diventa

$$\phi := a(a + c + dr^2) - b^2 > 0, \quad \text{dove } d := \beta(r^2).$$

Come nel caso della metrica di Sasaki, si può verificare che il campo di vettori su  $TM$  definito da

$$N_z^G = \frac{1}{\sqrt{(a+c+d)\phi}} [-bu^h + (a+c+d)u^v],$$

per ogni  $z = (p, u) \in TM$ , è unitario e normale in ogni punto di  $T_1M$ . Anche in questo caso si può definire il *sollevamento tangenziale*  $X_z^{TG}$ , rispetto a  $G$ , di un vettore  $X_p \in T_pM$  in  $z = (p, u) \in T_1M$ , come la proiezione tangenziale del sollevamento verticale  $X_z^V$  di  $X_p$  in  $z = (p, u)$  rispetto a  $N_z^G$ , cioè,

$$X_z^{TG} = X_z^V - G_z(X_z^V, N_z^G) N_z^G = X_z^V - \sqrt{\frac{\phi}{a+c+d}} g_p(X_p, u) N_{(p,u)}^G.$$

Se  $X_p \in T_pM$  è ortogonale a  $u$ , allora

$$X_z^{TG} = X_z^V, \quad \text{mentre} \quad u_z^{TG} = \frac{b}{a+c+d} u_z^H.$$

Lo spazio tangente  $T_z(T_1M)$ ,  $z = (p, u) \in T_1M$ , è generato da vettori del tipo  $X_z^H$  e  $Y_z^{TG}$ , dove  $X_p, Y_p \in T_pM$ . Tenendo conto di questo fatto, la metrica riemanniana  $\tilde{G}$  su  $T_1M$ , indotta da  $G$ , è completamente determinata da

$$\begin{cases} \tilde{G}_z(X_z^H, Y_z^H) &= (a+c) g_p(X_p, Y_p) + d g_p(X_p, u) g_x(Y_p, u), \\ \tilde{G}_z(X_z^H, Y_z^{TG}) &= b g_p(X, Y), \\ \tilde{G}_{(x,u)}(X_z^{TG}, Y_z^{TG}) &= a g_p(X, Y) - \frac{\phi}{a+c+d} g_p(X_p, u) g_p(Y_p, u), \end{cases}$$

per ogni  $z = (p, u) \in T_1M$  e per ogni  $X_p, Y_p \in T_pM$ .

Dalla definizione di  $\tilde{G}$ , segue che la condizione  $b = 0$  è soddisfatta se e solo se i sollevamenti orizzontali e tangenziali sono ortogonali rispetto a  $\tilde{G}$ .

In particolare:

- la metrica di Sasaki  $\tilde{G}_s$  è definita da

$$a = 1 \quad \text{e} \quad b = c = d = 0;$$

- la metrica di Cheeger-Gromoll  $\tilde{G}_{cg}$  è definita da

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad d = 0;$$

- metriche di Kaluza-Klein  $\tilde{G}_{kk}$  sono definite da

$$b = d = 0 \quad \text{e} \quad a(a+c) > 0.$$

Per maggiori dettagli e approfondimenti sulle metriche  $g$ -naturali si rinvia a [1] e [2] (e alla bibliografia in essi contenuta).

## Appendice D

# Decomposizione del tensore di curvatura

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale euclideo con prodotto scalare  $g$  e di dimensione  $n$ . Indichiamo con  $\mathcal{R}(V)$  l'insieme di tutti i tensori algebrici di curvatura su  $V$  (cfr. Sezione 8.3).  $\mathcal{R}(V)$  è uno spazio vettoriale, sottospazio dello spazio vettoriale dei tensori covarianti di tipo  $(0, 4)$  su  $V$ . Esso possiede un prodotto scalare naturale  $\langle, \rangle$  indotto da  $g$ :

$$\langle R, R' \rangle = \sum_{ijkl} R_{ijkl} R'_{ijkl},$$

dove  $R_{ijkl}$  e  $R'_{ijkl}$  sono le componenti di  $R$  e  $R'$  rispetto a una fissata base  $g$ -ortonormale  $\{e_i\}$  di  $V$ . Si verifica facilmente che tale definizione non dipende dalla particolare base ortonormale considerata. Inoltre, si pone

$$\|R\|^2 = \langle R, R \rangle = \sum_{ijkl} R_{ijkl}^2.$$

Il gruppo  $O(n)$ , delle trasformazioni ortogonali di  $V$ , agisce in modo naturale su  $\mathcal{R}(V)$ :

$$O(n) \times \mathcal{R}(V) \rightarrow \mathcal{R}(V), (A, R) \mapsto AR, \quad \text{dove} \\ (AR)(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(Av_1, Av_2, Av_3, Av_4).$$

Per ogni  $R, R' \in \mathcal{R}(V)$  e per ogni  $A \in O(n)$  risulta

$$\langle AR, AR' \rangle = \langle R, R' \rangle.$$

Un sottospazio  $\mathcal{R}'(V)$  di  $\mathcal{R}(V)$  si dice  $O(n)$ -irriducibile se è  $O(n)$ -invariante e non ha sottospazi non banali  $O(n)$ -invarianti. Se  $R$  è un elemento di  $\mathcal{R}(V)$ , denotiamo con  $Ric$  il tensore di Ricci associato al tensore di curvatura  $R$  e con  $r$  la corrispondente curvatura scalare. Denotiamo con  $\odot$  il prodotto di Kulkarni-Nomizu introdotto nell'Osservazione 8.22, con

$$R_0 = (1/2)g \odot g$$

il tensore di curvatura sezionale costante  $+1$ , e con  $Ric_0$  la parte di  $Ric$  a

traccia nulla, ovvero

$$Ric_0 = Ric - (r/n)g.$$

Se  $n = 2$  si ha  $R = (r/2)R_0 = (r/4)g \odot g$ . Assumiamo  $n \geq 3$  e sia  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una arbitraria base di  $V$ . Poniamo:

$$g_{ij} = g(v_i, v_j), R_{ijkh} = R(v_i, v_j, v_k, v_h) \text{ e } Ric_{ij} = Ric(v_i, v_j).$$

Allora, per ogni  $R \in \mathcal{R}(V)$  :

$$\begin{aligned} R_{ijkh} &= \frac{r}{n(n-1)} (g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}) \\ &+ \frac{1}{(n-2)} (Ric_{ik}g_{jh} - g_{ih}Ric_{jk} + g_{ik}Ric_{jh} - Ric_{ih}g_{jk}) \\ &- \frac{2r}{n(n-2)} (g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}) \\ &+ R_{ijkh} - \frac{1}{(n-2)} (Ric_{ik}g_{jh} - g_{ih}Ric_{jk} + g_{ik}Ric_{jh} - Ric_{ih}g_{jk}) \\ &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)} (g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la seguente decomposizione del tensore di curvatura:

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

dove

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r}{n(n-1)} R_0 = \frac{r}{2n(n-1)} g \odot g, \\ R_2 &= \frac{1}{(n-2)} Ric \odot g - \frac{r}{n(n-2)} g \odot g = \frac{1}{(n-2)} \left( Ric - \frac{r}{n} g \right) \odot g \\ &= \frac{1}{(n-2)} Ric_0 \odot g, \\ R_3 &= R - \frac{1}{(n-2)} Ric \odot g + \frac{r}{2(n-1)(n-2)} g \odot g \\ &= R - \frac{1}{(n-2)} Ric_0 \odot g - \frac{r}{2n(n-1)} g \odot g \\ &= R - \frac{1}{(n-2)} Ric_0 \odot g - \frac{r}{n(n-1)} R_0. \end{aligned}$$

Se  $n = 3$ , abbiamo  $R_3 = 0$ , ossia in tal caso

$$R = \frac{r}{12} g \odot g + Ric_0 \odot g = R_1 + R_2.$$

Ora assumiamo  $n \geq 4$ . Indichiamo con  $S^2(V)$  lo spazio dei tensori covarianti simmetrici di ordine 2 su  $V$ , e con  $S_0^2$  il sottospazio di quelli a traccia nulla. Inoltre, indichiamo con  $c$  la contrazione di Ricci,

$c : \mathcal{R}(V) \rightarrow S^2(V)$ ,  $R \mapsto c(R) = (\text{tensore di Ricci associato a } R)$ .

Poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(V) &= \mathbb{R}g \odot g \text{ (spazio dei tensori di curvatura del tipo } R = \lambda R_0), \\ \mathcal{R}_2(V) &= g \odot S_0^2 = \{R \in \mathcal{R}(V) : R = g \odot h_0, h_0 \in S_0^2\}, \\ \mathcal{R}_3(V) &= \ker c \text{ (spazio dei tensori di curvatura di Weyl)}.\end{aligned}$$

Risulta che  $R_1 \in \mathcal{R}_1(V)$ ,  $R_2 \in \mathcal{R}_2(V)$  e  $R_3 \in \mathcal{R}_3(V)$ . Si noti che  $R_3$  è il tensore di curvatura conforme di Weyl  $C$  associato a  $R$ .

La decomposizione

$$\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}_1(V) \oplus \mathcal{R}_2(V) \oplus \mathcal{R}_3(V) \quad (4.1)$$

è ortogonale e i sottospazi  $\mathcal{R}_i(V)$  sono  $O(n)$ -irriducibili (cfr. [10], p.47). Applicando la decomposizione (4.1) si ha:

- $R = R_1 = \lambda R_0 \iff (M, g)$  ha curvatura sezionale costante;
- $R = R_2 + R_3 \iff (M, g)$  ha curvatura scalare costante  $r = 0$ ;
- $R = R_3 \iff (M, g)$  è Ricci piatta;
- $R = R_1 + R_2 \iff (M, g)$  è conformemente piatta;
- $R = R_1 + R_3 \iff (M, g)$  è di Einstein;
- $R = R_2 \iff (M, g)$  è conformemente piatta con curvatura scalare  $r = 0$ .

Di conseguenza, si ottiene:

**Proposizione D.1.** *Una varietà riemanniana  $(M, g)$ , di dimensione  $n \geq 4$ , ha curvatura sezionale costante se e solo se è conformemente piatta e di Einstein.*

Poiché la decomposizione  $R = R_1 + R_2 + R_3$  è ortogonale, risulta

$$\|R\|^2 = \|R_1\|^2 + \|R_2\|^2 + \|R_3\|^2.$$

D'altro canto, dalle espressioni di  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , con un calcolo diretto si trova

$$\|R_1\|^2 = \frac{2r^2}{n(n-1)}, \quad \|R_2\|^2 = \frac{4}{(n-2)} \left( \|Ric\|^2 - \frac{r^2}{n} \right),$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}\|C\|^2 &= \|R_3\|^2 = \|R\|^2 - \|R_1\|^2 - \|R_2\|^2 \\ &= \|R\|^2 - \frac{4}{(n-2)} \|Ric\|^2 + \frac{2r^2}{(n-1)(n-2)}.\end{aligned}$$

Usando le forme quadratiche di curvatura  $\|R\|^2$ ,  $\|Ric\|^2$  e  $r^2$ , dalle considerazioni precedenti, segue facilmente la seguente

**Proposizione D.2.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 4$ . Allora:

- $\|R\|^2 \geq 2r^2/n(n-1)$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  ha curvatura sezionale costante;
- $\|Ric\|^2 \geq r^2/n$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  è di Einstein;
- $\|R\|^2 \geq (4/(n-2))\|Ric\|^2 - 2r^2/(n-1)(n-2)$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  è conformemente piatta.

**Corollario D.3.** Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 4$ . Allora,

- $\|R\|^2 \geq 2\|Ric\|^2/(n-1)$ ,

dove l'uguaglianza vale se e solo se  $M$  ha curvatura sezionale costante.

*Dimostrazione.* Se consideriamo il tensore di curvatura

$$P_{ijkh} = R_{ijkh} - \frac{1}{(n-1)}(g_{ik}Ric_{jh} - g_{jk}Ric_{ih}),$$

si ottiene

$$\|R\|^2 - \frac{2}{(n-1)}\|Ric\|^2 = \|P\|^2 \geq 0.$$

Se  $\|R\|^2 = \frac{2\|Ric\|^2}{(n-1)}$ , cioè  $P = 0$ , applicando la Proposizione D.2 si ha

$$\frac{2\|Ric\|^2}{(n-1)} \geq \frac{4\|Ric\|^2}{(n-2)} - \frac{2r^2}{(n-1)(n-2)}$$

e da questa si ottiene

$$\|Ric\|^2 \leq \frac{r^2}{n}.$$

Quindi  $\|Ric\|^2 = \frac{r^2}{n}$  ed  $M$  è di Einstein. Pertanto,

$$\|R\|^2 = \frac{2\|Ric\|^2}{(n-1)} = \frac{2r^2}{n(n-1)}$$

e di conseguenza  $M$  ha curvatura sezionale costante. □

**Osservazione D.4.** Per varietà riemanniane di dimensione 2:

$$\|R\|^2 = 2\|Ric\|^2 = r^2.$$

Per varietà riemanniane di dimensione 3:

$$\|R\|^2 = 4\|Ric\|^2 - r^2.$$

Se  $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$  è una varietà riemanniana prodotto:

$$\|R_g\|^2 = \|R_{g_1}\|^2 + \|R_{g_2}\|^2, \quad \|Ric_g\|^2 = \|Ric_{g_1}\|^2 + \|Ric_{g_2}\|^2$$

e

$$r_g = r_{g_1} + r_{g_2}.$$

**Esercizio D.5.** Indicata con  $\mathbb{S}^m(c)$  la sfera canonica di curvatura sezionale costante  $c > 0$  e con  $H^m(c)$  lo spazio iperbolico di curvatura sezionale costante  $-c < 0$ , si verifichi che le seguenti varietà riemanniane prodotto:

$$\mathbb{S}^{n-1}(c) \times \mathbb{R}, \quad H^{n-1}(c) \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{S}^{n-p}(c) \times H^p(c), \quad p \geq 2,$$

sono conformemente piatte. Suggerimento: fare uso della caratterizzazione delle varietà conformemente piatte data nella Proposizione D.2.

**Osservazione D.6.** Interessanti applicazioni delle forme quadratiche fondamentali  $\|R\|^2$ ,  $\|Ric\|^2$  e  $r^2$  si hanno, ad esempio, nello studio della geometria spettrale dell'operatore di Laplace-Beltrami (cfr. [7]) e nella espressione della caratteristica di Eulero-Poincaré nelle dimensioni 4 e 6 (cfr. Sezione 10.5). Un'altra interessante applicazione di queste forme quadratiche fondamentali si ha nello studio dei funzionali  $F_1(g) := \int_M r^2(g) v_g$ ,  $F_2(g) := \int_M \|Ric\|^2(g) v_g$  e  $F_3(g) := \int_M \|R\|^2(g) v_g$  al variare di  $g \in \mathcal{M}$  (cfr. [8]), così come visto nella Sezione 11.1 per il funzionale  $I(g) := \int_M r(g) v_g$ .





# Bibliografia

- [1] M. T. K. Abbassi, *g*-natural metrics: new horizons in the geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Intern. Conf. “Adv. in Diff. Geom.” in honour of Prof. O. Kowalski, Note Mat. 28, suppl. n.1, 2008, 6–35.
- [2] M. T. K. Abbassi and O. Kowalski, *Naturality of homogeneous metrics on Stiefel manifolds  $SO(m+1)/SO(m-1)$* , Differential Geometry and its Applications, 28 (2), 2010, 131–139
- [3] I. D. Ado, *The representation of Lie algebras by matrices*, Uspekhi Matem. Nauk (N.S.) 2-6(22) (1947), 159–173.
- [4] M. T. Anderson, *Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow*, Notices Amer. Math. Soc., 51 (2004), 184–193.
- [5] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Math. Soc., Clarendon Press-Oxford 2003.
- [6] R. Benedetti e C. Mantegazza, *La Congettura di Poincaré e il Flusso di Ricci*, Matematica, Cultura e Società, Rivista dell’UMI Serie I, 2(3), (2017), 245–289.
- [7] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d’une Variété Riemannienne*, Lect. Notes Math., vol. 194, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971.
- [8] M. Berger, *Quelques formules de variation pour une structure riemannienne*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 4(3), (1970), 285–294.
- [9] M. Berger, *A panoramic view of Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2003.
- [10] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.
- [11] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, second edition, Progress in Math., vol. 203, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2010.

- [12] D. E. Blair and D. Perrone, *A variational characterization of contact metric manifolds with vanishing torsion*, *Canad. Math. Bull.*, 35(4), (1992), 455–462.
- [13] E. Boeckx, D. Perrone and L. Vanhecke, *Unit tangent sphere bundles and two-point homogeneous spaces*, *Periodica Mathematica Hungarica* 36 (2-3), (1998), 79–95.
- [14] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New-York, 1984.
- [15] R. Bott and J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 64 (1958), 87–89.
- [16] C. P. Boyer and K. Galicki, *Sasakian Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2008.
- [17] G. Calvaruso and D. Perrone, *Geometry of Kaluza-Klein metrics on the sphere  $S^3$* , *Annali di Mat. Pura e Appl.* 192 (5), (2013), 879–900.
- [18] G. Calvaruso and A. Perrone, *Natural almost contact structures and their 3D homogeneous models*, *Math. Nachr.* 289 (11-12), (2016), 1370–1385.
- [19] B. Cappelletti-Montano, A. De Nicola and I. Yudin, *A survey on cosymplectic geometry*, *Rev. Math. Phys.*, 25(10) 1343002, (2013).
- [20] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry - An introduction to general relativity*, Addison Wesley, San Francisco, 2004.
- [21] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities: Differential Geometric and Analytic Perspectives*, Cambridge University Press, 2001.
- [22] V. Checcucci, A. Tognoli e E. Vesentini, *Lezioni di Topologia Generale*, Feltrinelli, 1972.
- [23] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of non negative curvature*, *Annals of Math.*, 96 (1972), 413–443.
- [24] B. Y. Chen and T. Nagano, *Harmonic metrics, harmonic tensors and Gauss maps*, *J. Math. Soc. Japan*, 36 (2) (1984), 295–313.
- [25] S. S. Chern, *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, *Ann. of Math.*, 45 (2) (1944), 747–752.
- [26] S. S. Chern and R. S. Hamilton, *On Riemannian metrics adapted to three-dimensional contact manifolds*, *Lect. Notes in Math.* 1111, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1985, 279–305.

- [27] B. Chow, S. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, and L. Ni, *The Ricci flow: techniques and applications*, Part I: Geometric aspects. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 135, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [28] L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- [29] J. C. Dessertine, *Expressions nouvelles de la formula de Gauss-Bonnet en dimension 4 et 6*, C.R. Acad. Sc. Paris., 273 (1971), 164–167.
- [30] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [31] M. P. Do Carmo and C. K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  are planes*, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (1979), 903–906.
- [32] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [33] S. Dragomir and D. Perrone, *Harmonic vector fields: variational principles and differential geometry*, Elsevier, 2012.
- [34] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Americ. J. Math., 86 (1964), 109-160.
- [35] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1925.
- [36] A. Figalli and C. Villani, *Optimal transport and curvature, Nonlinear PDE's and applications*, Lecture Notes in Math., vol.2028, Springer, Heidelberg (2011), 171–217.
- [37] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987.
- [38] P. Gauduchon, *Harmonics maps, twistors and  $\sigma$ -models*, Adv. Series in Math. Physics World Sc. Publ. Singapore 1998.
- [39] H. Geiges and J. Gonzalo, *Contact geometry and complex surfaces*, Invent. Math., 121 (1995), 147–209.
- [40] H. Gluck and W. Ziller, *On the volume of a unit vector field on the three-sphere*, Comm. Math. Helv., 61 (1986), 177–192.
- [41] S. I. Goldberg and D. Perrone, *Contact 3-manifolds with positive scalar curvature*, Contemporary Mathematics A.M.S., 127 (1992), 59–68.
- [42] J. Gonzalo, *Branched covers and contact structures*, Proc. A.M.S., 101 (1987), 347–352.

- [43] M. Gunther, *On the perturbation problem associated to isometric imbeddings of Riemannian manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., 7 (1989), 69–77.
- [44] M. G. Gursky, *Locally conformally flat four and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic*, Indiana Univ. Math. J., 3 (1994), 747–774.
- [45] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom., 17 (1982), 255–306.
- [46] R. S. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), A.M.S., Providence, RI, Contemporary Mathematics, 71 (1988), 237–262.
- [47] D. S. Han and J. W. Yim, *Unit vector fields on spheres which are harmonic maps*, Math. Z., 227 (1998), 83–92.
- [48] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, (1915), 395–407.
- [49] T. Ishihara, *Harmonic sections of tangent bundles*, J. Math. Tokushima Univ., 13 (1979), 23–27.
- [50] T. Ivey, *Ricci solitons on compact three-manifolds*, Differential Geometry and its Applications, 3(4), (1993), 301–307.
- [51] D. L. Johnson, *Volume of flows*, Proc. Amer. Math. Soc., 104 (1988), 923–932.
- [52] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer, 1995.
- [53] J. Jost, *Nonpositive curvature: geometric and analytic aspects*, Lectures in Mathematics ETH Zürich - Birkhäuser, 1997.
- [54] R. C. Kirby, *The Topology of 4-Manifolds*, Lect. Notes in Math., vol. 1374, 1989.
- [55] A. Kirillov, *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, Cambridge University Press, vol. 113, 2008.
- [56] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, vol. I, II, 1963.
- [57] C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.
- [58] O. Kowalski and M. Sekizawa, *Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles - a classification*, Bull. Tokyo Gakugei Univ., 40 (4), (1988), 1–29.

- [59] N. H. Kuiper, *On conformally flat spaces in the large*, Ann. of Math., 50 (1949), 916–924.
- [60] R. S. Kulkarni, *Curvature structures and conformal transformations*, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 91–94.
- [61] R. S. Kulkarni, *Curvature and metric*, Ann. of Math., 91 (1970), 311–331.
- [62] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds - An Introduction to Curvature*, Springer, 1997.
- [63] P. F. Leung, *On the stability of harmonic maps*, Lect. Notes in Math., 949 (1982), 122–129.
- [64] H. Li, *Topology of co-symplectic/co-Kähler manifolds*, Asian J. Math., 12 (2008), 527–543.
- [65] B. Martelli, *An Introduction to Geometric Topology*, arXiv:1610.02592v3 [math.GT] 5 Apr 2022.
- [66] E. Mazet, *La formule de la variation seconde de l'énergie au voisinage d'une application harmonique*, J. Differential Geometry, 8 (1973), 279–296.
- [67] W. H. Meeks III and J. Pérez, *Constant mean curvature surfaces in metric Lie groups*, in: J. Galvez, J. Pérez (Eds.), Geometric Analysis, Contemp. Math., 570 (2012), 25–100.
- [68] J. Milnor, *Differentiable structures on spheres*, Amer. J. Math., 81 (1959), 962–972.
- [69] J. Milnor, *Curvature of left invariant metrics on Lie groups*, Adv. in Math., 21 (1976), 293–329.
- [70] J. W. Morgan, *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., 42 (1), (2004), 57–78.
- [71] S. B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J., 8 (1941), 401–404.
- [72] T. Nagano, *A problem on the existence of an Einstein metric*, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 30–31
- [73] P. T. Nagy, *On the tangent sphere bundle of a Riemannian 2-manifold*, Tokohu Math. J. 29 (1977), 203–208.

- [74] J. Nash, *The embedding problem for Riemannian manifold*, Ann. of Math., 63 (1956), 20–63.
- [75] S. Nishigawa, *Variational Problems in Geometry*, Transl. Math. Monographs Amer. Math. Soc., vol. 205, 2002.
- [76] K. Nomizu and H. Ozeki, *The existence of complete Riemannian metrics*, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 889–891.
- [77] M. Okumura and S. Tachibana, *On the almost complex structure of tangent bundles of Riemannian spaces*, Tokohu Math. J. 14 (1962), 156–161.
- [78] B. O’Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, London, 1970.
- [79] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [80] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., 84 (1978), 1182–1238.
- [81] V. Patrangenaru, *Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples*, Pacific J. of Math., 173 (2), (1996), 511–532.
- [82] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, 2002, ArXiv.org/abs/math.DG/0211159.
- [83] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, 2003, ArXiv.org/abs/math.DG/0303109.
- [84] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, 2003, ArXiv.org/abs/math.DG/0307245.
- [85] D. Perrone, *On the minimal eigenvalue of the Laplacian operator for  $p$ -forms in conformally flat Riemannian manifolds*, Proc. A.M.S., 86 (1), (1982), 103–108.
- [86] D. Perrone, *Osservazioni sulla caratteristica di Eulero-Poincaré di varietà riemanniane conformemente piatte*, Note Mat., 3 (1983), 173–181.
- [87] D. Perrone, *Torsion and critical metrics on contact three-manifolds*, Kodai Math. J. 13 (1990), 88–100.
- [88] D. Perrone, *Homogeneous contact Riemannian three-manifolds*, Illinois J. Math. 42 (2), (1998), 243–256.

- [89] D. Perrone, *On the volume of unit vector fields on Riemannian three-manifolds*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, 30 (1) (2008), 11–21.
- [90] D. Perrone, *Unit vector fields on real space forms which are harmonic maps*, Pacific J. Math., 239 (1) (2009), 89–104.
- [91] D. Perrone, *Minimality, harmonicity and CR geometry for Reeb vector fields*, Int. J. of Math., 21 (9), (2010), 1–30.
- [92] D. Perrone, *Classification of homogeneous almost  $\alpha$ -coKähler three-manifolds*, Differential Geometry and its Applications, 59 (2018), 66–90.
- [93] D. Perrone, *Taut contact circles and bi-contact metric structures on three-manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., 52 (2017), 213–235.
- [94] D. Perrone, *Contact semi-Riemannian structures in CR Geometry: some aspects*, Special Issue “Applications of Differential Geometry” Axioms, 8(1), 6 (2019), pp 50.
- [95] D. Perrone, *Taut contact hyperbolas on three-manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., 60 (2021), 735–765.
- [96] D. Perrone, *Un'introduzione alla Geometria Differenziale di curve e superfici (seconda edizione)*, ESE Salento University Publishing, Quaderni di Matematica, Q2/2022.
- [97] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, GTM, 171, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [98] W. A. Poor, *Differential Geometric Structure*, McGraw-Hill Book Company, 1981.
- [99] P. J. Ryan, *A note on conformally flat spaces with constant scalar curvature*, Proc. 13<sup>0</sup> Biennial Seminar Can. Math. Congress, 2 (1971), 115–124.
- [100] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, Transl. Math. Monographs, A.M.S., vol.149, 1992.
- [101] H. Samelson, *Orientability of hypersurfaces*, Proc. A.M.S., 22 (1969), 301–303.
- [102] R. T. Smith, *The second variation formula for harmonic mappings*, Proc. A.M.S., 47 (1975), 229–236.
- [103] R. T. Smith, *Harmonic mappings of spheres*, Amer. J. Math., 97 (1975), 364–385.



- [104] S. Stahl, *The Poincaré Half-Plane*, Jones and Bartlett Publisher, Boston-London, 1993.
- [105] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, New-Jersey, 1951.
- [106] Z. I. Szabó, *A short topological proof for the symmetry of 2-point homogeneous spaces*, *Invent. Math.*, 106 (1991), 61–64.
- [107] Y. Tashiro, *On contact structures of tangent sphere bundles*, *Tôhoku Math.J.*, 21 (1969), 117–143.
- [108] W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, vol. 1, 1997.
- [109] P. Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society, Cambridge University Press, vol. 325, 2006.
- [110] F. Toscano, *Luigi Bianchi, Gregorio Ricci Curbastro e la scoperta delle identità di Bianchi*, SISFA, Atti del XX Congresso Nazionale di Storia della Fisica e dell’Astronomia, (2000), 353–370.
- [111] F. Tricerri, L. Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, London Math. Soc., Lect. Notes Series n.83, Cambridge Univ. Press, London, 1983.
- [112] H. Urakawa, *Stability of harmonic maps and eigenvalues of the Laplacian*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 301(2), (1987), 557–589.
- [113] H. Urakawa, *Spectral geometry of the second variation operator of harmonic maps*, *Illinois J. Math.*, 33(2), (1989), 250–267.
- [114] H. Urakawa, *Calculus of Variations and Harmonic Maps*, *Transl. Math. Monographs Amer. Math. Soc.*, 132 (1993).
- [115] M. Villa, *Breve cenno sulla geometria non euclidea secondo l’indirizzo differenziale*, *Repertorio di Matematiche* Ed. Cedam, Padova, (1971), 127–131.
- [116] H. C. Wang, *Two point homogeneous spaces*, *Ann. of Math.*, 55 (1952), 177–191.
- [117] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [118] G. Wiegink, *Total bending of vector fields on the sphere  $S^3$* , *Differential Geometry and its Applications*, 6 (1996), 219–236.



- [119] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math., 37 (1936), 645–680.
- [120] J.A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish, Inc., Wilmington, 1984.
- [121] C. M. Wood, *On the energy of a unit vector field*, Geom. Dedicata 64 (1997).
- [122] C.M. Wood, *An existence theorem for harmonic sections*, Manuscripta Math., **68** (1990), 69–75.
- [123] Y. L. Xin, *Some results on stable harmonic maps*, Duke Math. J., 47 (1980), 609–613.
- [124] Y. L. Xin, *Geometry of Harmonic Maps*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, (1996).
- [125] K. Yano, *On harmonic and Killing vector fields*, Ann. of Math., 55 (1952), 38–45.
- [126] K. Yano, T. Nagano, *On geodesic vector fields in a compact orientable riemannian space*, Comm. Math. Helv., 35 (1961), 55–64.
- [127] S. T. Yau, *Curvature preserving diffeomorphisms*, Ann. of Math., 100 (1970), 121–130.



# Indice analitico

- algebra di Lie, 71
  - $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ , 78
  - $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , 80
  - $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ , 81
  - di  $\mathbb{R}_+^n(\cdot)$ , 78
  - di  $\mathbb{R}^n(+)$ , 77
- anti-isometria, 156
- applicazione
  - armonica, 392
  - armonica stabile, 415
  - conforme, 149
  - coordinata, 6
  - di connessione, 457
  - di Gauss, 237
  - differenziabile, 14
  - duale, 57
  - esponenziale, 86
    - di matrici, 84
    - riemanniana, 216
  - olomorfa, 398
  - prodotto, 398
  - totalmente geodetica, 392
- atlante differenziabile, 6
- bottiglia di Klein, 51, 155
- bundle-metric, 386
- campi di vettori
  - geodetici, 176
- campi vettoriali
  - di lunghezza costante, 309
  - di Hopf, 328
  - di Killing, 328
  - di volume minimo, 328
  - olomorfi, 428
- campo di vettori, 28
  - analitico, 427
  - conformemente di Killing, 424, 425
  - di Hopf, 101, 315, 322
  - di Killing, 301
  - di Killing su  $\mathbb{R}^n$ , 311
  - di Killing su  $\mathbb{S}^n$ , 312
  - gradiente, 313
  - lungo  $f$ , 222
  - olomorfo, 428
  - parallelo, 167, 170, 270
  - verticale, 453
- campo variazionale, 372, 402
- circonferenza, 9, 64, 370
- codifferenziale, 449
- coefficienti di Christoffel, 161
- connessione
  - di Levi-Civita
    - dello spazio iperbolico, 177
    - di sottovarietà riemanniane, 186
  - normale, 192
  - di Levi-Civita, 175
  - euclidea, 160
  - lineare, 160
  - normale, 199
  - sul fibrato  $f^{-1}TM'$ , 384
- cono metrico, 118
- contrazione
  - degli indici, 52
  - di Ricci, 470
- coordinate
  - armoniche, 446
  - geografiche, 101
  - isoterme, 346
  - locali, 6
  - normali, 229
- costanti di struttura, 76
- curva
  - differenziabile, 41

- geodetica, 171, 375
  - minimale, 371
- integrale, 42
- orizzontale, 453
- trasversa, 372
- verticale, 453
- curvatura
  - geodetica, 351
  - sezionale costante, 257, 264
  - di Ricci, 277
  - di una curva, 236
  - gaussiana, 237
  - geodetica, 180, 193
  - media, 192
  - normale, 193
  - scalare, 278
  - scalare di Webster, 338, 366
  - sezionale, 255, 257, 261
- decomposizione del tensore di curvatura, 470
- densità di energia, 390
- derivata
  - covariante lungo curve, 165
  - covariante seconda, 244
  - di Lie di un tensore, 202
  - direzionale, 23
  - covariante, 160
  - di Bortolotti, 260
  - di Lie, 60
- diametro di una varietà riemanniana, 282
- diffeomorfismo, 8
  - che conserva l'orientazione, 431
- differenziale, 35–37, 39
  - esterno, 59, 60, 449
- distanza
  - nel piano iperbolico, 133
  - riemanniana, 131
  - sulla sfera canonica, 133
- distribuzione, 196
  - orizzontale, 103
  - verticale, 103
  - integrabile, 197
  - minimale, 198
- orizzontale, 198, 457
- totalmente geodetica, 198
- verticale, 198, 457
- disuguaglianza isoperimetrica, 258
- divergenza, 441, 449
- elemento di volume riemanniano, 437
- energia, 373
  - di un campo di vettori, 411
  - di un'applicazione, 389
  - di una curva, 370
- equazione
  - di Einstein, 285
  - del flusso di Ricci, 293
  - di curvatura di Gauss, 247, 260
  - di Gauss, 189
  - di Killing, 302
  - di Weingarten, 191
- equazioni
  - di Eulero-Lagrange, 394
  - di Maurer-Cartan, 77
  - di struttura di Cartan, 183
- esempi di applicazioni armoniche, 395
- fibrato
  - normale, 188
  - sferico unitario  $T_1M^2$ , 463
  - sferico unitario tangente, 461
  - tangente, 31, 97
  - tangente olomorfo, 428
  - vettoriale, 32, 160
  - vettoriale  $f^{-1}TM'$ , 381
- fibrazione di Hopf, 315, 397
- flusso geodetico, 459, 462
- fogliazione, 197
- forma
  - armonica, 451
  - differenziale, 52
- forme locali
  - di curvatura, 184
  - di torsione, 183
- forme quadratiche di curvatura, 471
- formula di Cartan, 61
- formula di Koszul, 175
- geodetica

- localmente minimale, 228
- minimale, 215
- geodetiche
  - del piano iperbolico  $\mathbb{R}_+^2$ , 210
  - dell'iperboloide  $H^n$ , 209
  - della sfera canonica, 205
  - dello spazio iperbolico  $\mathbb{R}_+^n$ , 212, 214
  - dello spazio proiettivo, 208
  - di una superficie torica, 207
  - di una superficie di rotazione, 206
  - radiali, 220, 225
- geometrie 3D di Thurston, 336
- gradiente, 444
- gruppi di Lie, 63
  - 3D non-unimodulari, 91
  - 3D unimodulari, 88
- gruppo
  - $E(1, 1)$ , 90
  - $\mathbb{S}^3$ , 70
  - $E(2)$ , 89
  - di Lorentz, 146
  - euclideo, 143
  - ortogonale, 97
  - di Heisenberg  $Nil^3$ , 89
  - lineare, 64
  - lineare speciale, 65
  - locale a un parametro, 43
  - ortogonale, 65
  - ortogonale speciale, 66
  - simplettico quaternionico, 69
  - simplettico reale, 68
  - strutturale riducibile, 32
  - unitario, 67
- gruppo di Lie
  - nilpotente, 75
  - riemanniano, 136
  - risolubile, 75
  - semplice, 75
  - unimodulare, 87
- hessiano, 379, 445
- imbedding, 44
- immersione, 44
  - isometrica, 99
- instabilità di applicazioni armoniche, 419
- integrale di una  $n$ -forma, 434
- intorno
  - normale, 220
  - totalmente normale, 228
- invariante di Milnor, 93
- inversione
  - rispetto a una circonferenza, 107
  - rispetto a una sfera, 107
- isometria infinitesimale, 301
- isometrie, 135
  - del disco iperbolico, 153
  - del piano iperbolico, 151
  - della sfera canonica, 144
  - dello spazio euclideo, 141
  - dello spazio iperbolico, 145
- laplaciano, 445
- lemma di Gauss, 224
- lunghezza di una curva, 129
- matrice jacobiana, 37
- metrica
  - $g$ -naturale, 466
  - bi-invariante su  $SO(n)$ , 140
  - di Cheeger-Gromoll, 466, 468
  - di Kaluza-Klein, 466, 468
  - hermitiana, 114
  - iperbolica invariante a sinistra, 140
  - armonica, 396
  - conforme, 391
  - di Sasaki, 468
  - di Sasaki, 460
  - lorenziana canonica su  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , 101
  - omotetica, 391
  - riemanniana, 95
    - invariante a sinistra, 136
    - invariante a sinistra su  $Nil^3$ , 138
  - iperbolica, 105
  - prodotto, 102
- metriche
  - conformi, 181
  - omotetiche, 452
  - conformi, 346, 347, 452
  - di Berger, 288, 319

- omotetiche, 271, 279
- misura canonica, 437
- modelli di Poincaré, 105
- modello di Klein, 112
- n-superficie regolare, 13, 49
- norma di Hilbert-Schmidt, 388
- olonomia, 180
- operatore
  - di Jacobi, 379, 415, 416, 418
  - di Laplace-Beltrami, 445
  - di Weingarten, 191
  - hessiano, 163
- orientazione, 431
- palla geodetica, 220, 227
- parametrizzazione regolare, 5
- parentesi di Lie, 30, 71
- partizione dell'unità, 20
- piano proiettivo, 51
- prima forma fondamentale di  $f$ , 389
- prima formula variazionale, 403
- prima identità di Bianchi, 246
- prodotto
  - di Kulkarni-Nomizu, 469
  - di Kulkarni-Nomizu, 256
  - diretto, 65
  - esterno, 53, 60
  - semidiretto, 64, 65
  - tensoriale, 53
- proiezione stereografica, 10
  - iperbolica, 105
- pseudosfera, 156
- pseudosfera di Beltrami, 241
- punto critico, 357, 374, 403
- quaternioni, 69
- questione delle parallele, 1, 241
- raggio di iniettività, 221
- rango, 40
- riferimento
  - geodetico, 221
  - mobile, 169
- rivestimento riemanniano, 153, 154, 234
- rough Laplacian, 305
- rough laplaciano, 406
  - lungo l'applicazione  $f$ , 409
- seconda forma fondamentale, 189, 392
- seconda identità di Bianchi, 250
- sezione, 33, 382
  - armonica, 411
- sfera, 10
  - geodetica, 220, 227
  - canonica, 100
  - di Riemann, 11
- sfere parallelizzabili, 34
- sigma-model, 392
- simmetria geodetica, 341, 342
- solitone di Ricci, 296
- solitone di Ricci tipo gradiente, 297
- solitoni (esempi):
  - cylinder shrinking soliton, 298
  - gaussiano, 298
  - Hamilton's cigar soliton, 299
- sollevamento orizzontale, 454
- sollevamento tangenziale, 462, 468
- sollevamento verticale, 453
- soluzioni autosimilari, 297
- sommersione riemanniana, 103, 199, 396
- sottogruppo di Lie, 64
- sottovarietà, 46
  - aperta, 46
  - minimale, 190
  - regolare, 46, 50
  - riemanniana, 99
  - totalmente geodetica, 189, 204
- spazio
  - 2-punti omogeneo, 335
  - 3-punti omogeneo, 335
  - dei tensori di curvatura, 471
  - forma, 271
  - lenticolare, 274
  - simmetrico di rango 1, 345
  - tangente, 23, 24
  - di Minkowski, 104, 176
  - iperbolico, 104, 141
  - proiettivo reale, 11

- spazio pseudoiperbolico, 156
- spettro dell'operatore di Jacobi, 416
- spostamento parallelo, 169, 173
- stabilità
  - dell'identità, 423, 424
  - di applicazioni olomorfe, 427
- struttura
  - cokähleriana, 122
  - complessa, 113
  - cosimplettica, 121
  - di Cartan, 125
  - differenziabile, 7
  - kähleriana, 114
  - quasi complessa, 113
  - quasi hermitiana, 114
  - riemanniana di contatto omogenea, 338
  - riemanniana di bi-contatto, 125
  - sasakiana standard di  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , 323
  - complessa ortogonale, 324
  - riemanniana di contatto invariante a sinistra, 123
  - riemanniana di contatto, 115
  - riemanniana di quasi contatto, 116
  - sasakiana, 117
- superfici connesse compatte, 14
- superficie regolare, 5
- tensione, 392
  - di una composizione, 399
- tensore, 51
  - controvariante, 52
  - covariante, 52
  - di Codazzi, 281
  - di curvatura, 244
  - di curvatura conforme, 346, 471
  - di curvatura di Riemann, 246
  - di Ricci, 276
  - di torsione, 163
  - gravitazionale, 285
  - parallelo, 201
- teorema
  - di E. Cartan, 342
  - di Eells-Sampson, 405
  - di Gauss-Bonnet, 350
  - di M. Berger, 310
- Egregium di Gauss, 260
- di Smith, 421
- di Gluck-Ziller, 328
- di Hilbert, 359
- di Hopf-Rinow, 230
- di Shur, 265
- di Wiegink, 324
- di Xin, 419
- elegantissimo di Gauss, 240
- teoremi di Lie, 73
- toro  $n$ -dimensionale, 10, 155
- trasformazione affine, 180
- trasformazioni di Möbius, 150
- trasporto parallelo
  - sul cono di rotazione, 194
  - sula sfera, 196
- triangolo geodetico, 240
- variazione, 372, 403
  - di un'applicazione, 401
  - di una curva, 223
  - prima, 373
  - seconda, 378
  - propria, 372
  - seconda, 413
- varietà
  - a curvatura sezionale costante, 266
  - complessa, 8
  - di Einstein, 283
  - orientabile, 431
  - quoziente, 15
  - riemanniana, 95
    - completa, 230
    - orientata, 437
    - omogenea, 333
    - omogenea e isotropa, 266
  - warped product, 102, 118
  - di contatto, 115
  - differenziabile, 7
  - integrale, 197
  - lorentziana, 98
  - parallelizzabile, 34, 433
  - prodotto, 10
  - riemanniana

- conformemente piatta, 346
- isotropa, 136
- localmente simmetrica, 342
- omogenea, 136, 234
- simmetrica, 341
- semi-riemanniana, 98, 176
- simplettica, 112, 113
- tangente, 31
- topologica, 6
- vettore
  - curvatura media, 198
  - tangente, 24
  - curvatura media, 396
- vettori tangenti coordinati, 25
- volume di un campo di vettori, 327