

Capitolo 8

Applicazione a due prototipi dei problemi *evolutivi* relativi all'Equazione del calore e all'Equazione delle onde.

8.1 Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore

La teoria dei Semigrupperi fornisce un metodo elegante per costruire una soluzione del seguente **problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore**: determinare $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u = g & \text{in } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (8.1)$$

dove Ω è aperto, limitato, connesso e regolare di \mathbb{R}^N , $g \in L^2(\Omega)$ assegnato (dato iniziale o di Cauchy).

Posto $u(\cdot, t) := u(t)$ (sicché, per ogni $t \in [0, +\infty[$, $u(t)$ è funzione della sola variabile x , cioè la funzione $x \mapsto u(x, t)$), riformuliamo (8.1) come problema di Cauchy (astratto) nello spazio di Hilbert $X = L^2(\Omega)$, cioè

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = g, \end{cases}$$

dove $u \in D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ è l'operatore non limitato definito da $\boxed{Au := \Delta u}$.

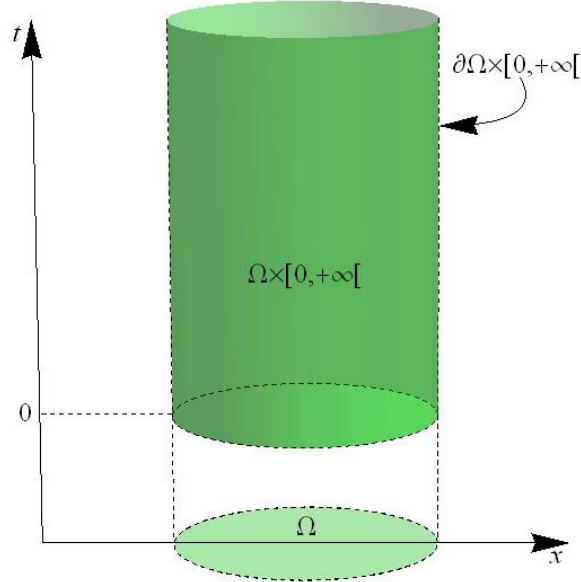


Figura 8.1: Cilindro parabolico

Notiamo che la condizione omogenea di Dirichlet è incorporata nella definizione di $D(A)$.

Teorema 8.1.1 (Semigrupo di soluzioni del problema parabolico lineare (8.1)).

Sia $Au := \Delta u$ con $u \in D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. L'operatore A genera un Semigrupo di contrazione $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ su $L^2(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo la forma bilineare associata a $-\Delta$:

$$B[u, v] := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \text{per ogni } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Scelto $v = u$, risulta (per la disuguaglianza di Poincaré cfr. [2]) per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \quad \beta > 0.$$

Per dimostrare che A genera un semigrupo di contrazione su $L^2(\Omega)$, proviamo (in virtù del Teorema 7.4.1):

- (i) $D(A)$ è denso in $L^2(\Omega)$;
- (ii) A è operatore lineare, chiuso;

(iii) ogni numero reale $\lambda > 0$ appartiene all'insieme risolvente di A , $\rho(A)$, e

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{B(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

1. Il dominio $D(A)$ contiene $C_0^\infty(\Omega)$ e perciò esso è denso in $L^2(\Omega)$. Ciò prova (i).

2. Sia $(u_k) \subset D(A)$ con $u_k \rightarrow u$ e $Au_k \rightarrow v$ in $L^2(\Omega)$.

Per il Teorema di regolarità (cfr., ad esempio, [6])

$$\|u_k - u_h\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|Au_k - Au_h\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k - u_h\|_{L^2(\Omega)})$$

per ogni $k, h \in \mathbb{N}$. Ne segue che $(u_k)_k$ è una successione di Cauchy in $H^2(\Omega)$ e quindi

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^2(\Omega). \tag{8.2}$$

Allora $u \in D(A)$ e, per (8.2), $Au_k \rightarrow Au$ in $L^2(\Omega)$; di conseguenza $Au = v$. Ciò prova (ii).

3. Per provare (iii), consideriamo il problema con condizione omogenea di Dirichlet per l'equazione stazionaria

$$\begin{cases} -Au + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.3}$$

Per ogni $\lambda \geq 0$ il problema (8.3) ha un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$ (cfr., ad esempio, [7] Teorema 9.3.4 e Osservazione 9.3.5). In effetti, per la regolarità ellittica, $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Pertanto $u \in D(A)$ e l'operatore $\lambda I - A : D(A) \rightarrow L^2(\Omega)$ è iniettivo e suriettivo, purché $\lambda \geq 0$. Quindi $[0, +\infty[\subset \rho(A)$.

Consideriamo la forma debole del problema di Dirichlet (8.3):

$$B[u, v] + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega). \tag{8.4}$$

Tenendo presente che risulta $\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u]$, $\beta > 0$, posto $v = u$ in (8.4), per $\lambda > 0$ si ha

$$\lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, poiché $u = R_\lambda f$, abbiamo la stima

$$\|R_\lambda f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } f \in L^2(\Omega),$$

e quindi

$$\|R_\lambda\|_{B(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

□

Osservazione 8.1.2. Dalla dimostrazione del teorema precedente, si evince che il principale interesse del Teorema 7.4.1 risiede nel fatto di poter ridurre lo studio di un problema *evolutivo* allo studio del problema per una equazione *stazionaria* (cfr. (8.3)).

Osservazione 8.1.3. (Rappresentazione di soluzioni del problema (8.1) in termini di autofunzioni di $-\Delta$)

Essendo Ω limitato, il problema (8.1) può essere risolto da una decomposizione in una base di Hilbert di $L^2(\Omega)$. Sia (cfr. 6.4.5) (v_n) una base ortonormale di Hilbert di autofunzioni dell'operatore $-\Delta$ con condizione omogenea di Dirichlet: $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ricerchiamo una soluzione di (8.1) sotto forma di serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) v_n(x).$$

Si vede facilmente che le funzioni della sola variabile t , $a_n(t)$, devono soddisfare

$$a_n'(t) + \mu_n a_n(t) = 0, \quad \mu_n > 0$$

pertanto

$$a_n(t) = a_n(0) \exp(-\mu_n t).$$

Le costanti $a_n(0)$ sono determinate dalla relazione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) v_n(x) = g(x).$$

In altre parole, la soluzione u di (8.1) è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) \exp(-\mu_n t) v_n(x),$$

dove le costanti $a_n(0)$ sono i coefficienti di Fourier di g nella base (v_n) , cioè $a_n(0) = (g, v_n)_{L^2(\Omega)}$. Quindi

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\mu_n t) (g, v_n)_{L^2(\Omega)} v_n(\mathbf{x}). \quad (8.5)$$

La (8.5) definisce, per ogni $g \in L^2(\Omega)$ una applicazione $t \mapsto u(t) = S(t)g$ da $[0, +\infty[$ in $L^2(\Omega)$. Questa applicazione è continua per $t \in [0, +\infty[$ e differenziabile per $t > 0$. Inoltre $u(t) \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ per ogni $t > 0$ e

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \quad \text{per ogni } t > 0. \quad (8.6)$$

Infatti, poiché $g \in L^2(\Omega)$ e $\mu_n > 0$, risulta

$$|\exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq (g, v_n)_{L^2(\Omega)}^2$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (g, v_n)_{L^2(\Omega)}^2 = \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty$$

(per l'identità di Bessel-Parseval). Pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)} v_n(x)$$

è convergente in $L^2(\Omega)$, uniformemente per $t \geq 0$.

In particolare, poiché le somme parziali sono funzioni continue nella variabile t , l'applicazione $t \mapsto u(t) = S(t)g$ è anch'essa continua.

Essendo $\mu_n \exp(-\mu_n t) \leq \frac{1}{te}$,¹ risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n \exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \frac{1}{t^2 e^2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Allora la serie che definisce $Au(t)$ è convergente. Questo implica $u(t) \in D(A)$, per ogni $t > 0$. Differenziando la serie (8.5) termine a termine e osservando che la serie delle derivate è anche convergente, si ottiene la (8.6).

Una volta che si è costruito il semigruppò $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ generato da A , rimane da vedere **in che senso una traiettoria del semigruppò** $t \mapsto u(t) = S(t)g$ **fornisce una soluzione al problema (8.1)**. La rappresentazione (8.5) contiene la risposta a questa domanda. Qui, per brevità, diamo alcune indicazioni.

Condizione iniziale. Poiché $u(0) = S(0)g = g \in L^2(\Omega)$, la condizione

¹Per $\xi \geq 0$ e t fissato, la funzione $\xi \mapsto \xi \exp(-\xi t)$ ha massimo in $\xi_0 = \frac{1}{t}$. Perciò $\mu_n \exp(-\mu_n t) \leq \max_{\xi \geq 0} \xi \exp(-\xi t) = \frac{1}{te}$.

iniziale $u(x, 0) = g(x)$ ($x \in \Omega$) è soddisfatta come identità tra funzioni di $L^2(\Omega)$.

Condizione di Dirichlet. Poiché $D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$, allora $u(t)$ soddisfa la condizione omogenea di Dirichlet, per ogni $t \geq 0$.

Soluzioni deboli. Con un procedimento di approssimazione, si può dimostrare che la funzione $u = u(x, t)$ fornisce una soluzione all'equazione del calore nel senso delle distribuzioni, cioè : per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times]0, +\infty[)$ risulta

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{+\infty} (u\phi_t + u\Delta\phi) dt = 0.$$

Osservazione 8.1.4. Per ulteriori questioni relative a Principio del massimo, unicità e regolarità della soluzione, si rinvia a [5] e anche al Quaderno [7]. Qui non è superfluo richiamare il fatto che l'equazione del calore ha un *forte effetto regolarizzante*: la soluzione $u(x, t)$ è C^∞ in x per ogni $t > 0$, anche se il dato iniziale g è discontinuo. Questo effetto implica, in particolare, che l'equazione del calore è *irreversibile rispetto alla variabile tempo t* (cfr. [7]).

8.1.1 Esempio unidimensionale: conduzione termica in una barra con gli estremi fissi

Sia $\Omega =]0, \pi[\subset \mathbb{R}$ e assegnato $g \in L^2(]0, \pi[)$, consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8.7)$$

Gli autovalori dell'operatore $-u_{xx}$ sono $\mu_n = n^2$ e le rispettive autofunzioni (normalizzate) sono $v_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$. Allora la formula (8.5) dà la soluzione del problema (8.7) come somma di una serie di Fourier di seni:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \exp(-n^2 t) \left(\int_0^\pi g(y) \sin(ny) dy \right) \sin(nx).$$

8.2 Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde

Sia Ω aperto, limitato, connesso e regolare di \mathbb{R}^N e consideriamo il seguente **problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde**: determinare $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times]0, +\infty[\\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \Omega, \end{cases} \quad (8.8)$$

assegnati $g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $h \in H_0^1(\Omega)$.

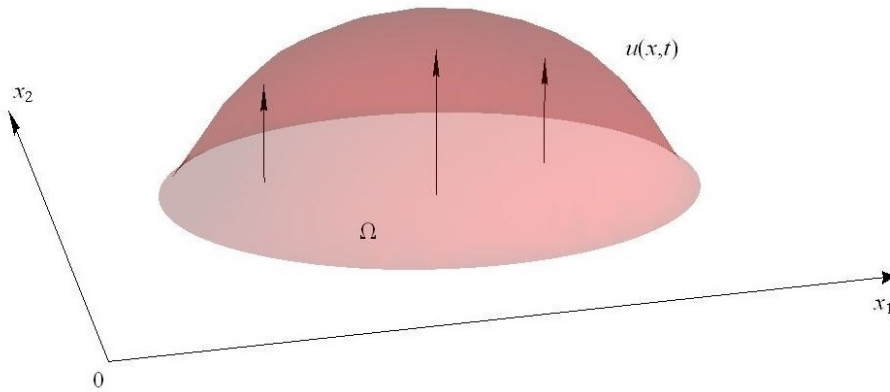


Figura 8.2: Membrana elastica che occupa l'aperto limitato Ω del piano, fissata lungo la frontiera $\partial\Omega$, soggetta a piccole vibrazioni verticali. La funzione $u(x, t)$ rappresenta la configurazione di u nel punto x della membrana al tempo t .

Osservazione 8.2.1. La condizione $u = 0$ su $\partial\Omega \times]0, +\infty[$ significa che la corda (o la membrana) è fissata su $\partial\Omega$; la configurazione iniziale è descritta da g e la velocità iniziale è descritta da h . La coppia (g, h) rappresenta il dato di Cauchy.

Riscriviamo (8.8) come sistema del primo ordine, ponendo $v := u_t$. Allora (8.8) diviene

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times]0, +\infty[, \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ v(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \Omega. \end{cases} \quad (8.9)$$

Applichiamo la teoria dei semigrupperi nello spazio $X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,² munito della norma³

$$\|(u, v)\|_X := (B[u, u] + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

dove $B[u_1, u_2] := \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx$, per ogni $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ e ricordiamo che risulta

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (\text{energia potenziale elastica}) \quad (\beta > 0) \quad (8.10)$$

per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.

Definiamo l'operatore non limitato

$$A : D(A) \subseteq H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\boxed{A(u, v) := (v, \Delta u)}$$

$$\text{per ogni } (u, v) \in D(A) := [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega). \quad (8.11)$$

Proviamo che A verifica le ipotesi del Teorema 7.4.1.

Teorema 8.2.2 (Semigruppero di soluzioni del problema iperbolico lineare (8.8)).

L'operatore A genera un Semigruppero di contrazione $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ su $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Dimostrazione.

(1) $D(A)$ è chiaramente denso in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

(2) Proviamo che A è chiuso. Sia $((u_k, v_k))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$, con

$$(u_k, v_k) \rightarrow (u, v), \quad A(u_k, v_k) \rightarrow (f_1, f_2)$$

in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Poiché $A(u_k, v_k) = (v_k, \Delta u_k)$, concludiamo che

$$f_1 = v \quad \text{e} \quad \Delta u_k \rightarrow f_2 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega).$$

Ne segue che

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in} \quad H^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta u = f_2 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega).$$

²Notiamo che la condizione $u = 0$ su $\partial\Omega \times]0, +\infty[$ è incorporata nello spazio X . La condizione $u_t = v = 0$ su $\partial\Omega \times]0, +\infty[$ è una conseguenza di $u = 0$ su $\partial\Omega \times]0, +\infty[$.

³La quantità $\|(u, v)\|_X^2$ rappresenta la *energia totale della membrana vibrante*. Il termine $B[u, u]$ rappresenta l'*energia potenziale elastica*, mentre $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2$ rappresenta l'*energia cinetica*.

Pertanto $(u, v) \in D(A)$, $A(u, v) = (v, \Delta u) = (f_1, f_2)$.

(3) Sia $\lambda > 0$, $(f_1, f_2) \in X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e consideriamo l'equazione

$$\lambda(u, v) - A(u, v) = (f_1, f_2),$$

equivalente alle *due equazioni scalari*

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1 & (u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \\ \lambda v - \Delta u = f_2 & (v \in H_0^1(\Omega)). \end{cases} \quad (8.12)$$

Da (8.12) segue

$$\lambda^2 u - \Delta u = \lambda f_1 + f_2. \quad (8.13)$$

Poiché $\lambda^2 > 0$, la (8.10) e la teoria della regolarità implicano che esiste un'unica soluzione u di (8.13). Definito $v := \lambda u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$, abbiamo provato che (8.12) ha un'unica soluzione (u, v) . Ne segue che $\rho(A) \supseteq (0, +\infty)$. Utilizzando la (8.12), scriviamo $(u, v) = R_\lambda(f_1, f_2)$.

Ora, dalla seconda equazione in (8.12), deduciamo

$$\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, v] = (f_2, v)_{L^2(\Omega)}.$$

Sostituendo $v = \lambda u - f_1$, otteniamo (per la disuguaglianza generalizzata di Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} \lambda (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, u]) &= (f_2, v)_{L^2(\Omega)} + B[u, f_1] \\ &\leq (\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[f_1, f_1])^{\frac{1}{2}} (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, u])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Allora, dalla definizione di norma in X ,

$$\|(u, v)\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|(f_1, f_2)\|_X,$$

quindi

$$\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

concludendo così la dimostrazione. \square

Osservazione 8.2.3 (Rappresentazione di soluzioni del problema (8.8) in termini di autofunzioni di $-\Delta$).

Essendo Ω limitato, il problema (8.8) può essere risolto da una decomposizione in una base ortonormale di Hilbert di $L^2(\Omega)$, come è stato fatto per l'equazione del calore. Sia (cfr. 6.4.5) $(v_n)_n$ una base ortonormale di Hilbert di autofunzioni dell'operatore $-\Delta$ con condizione omogenea di Dirichlet.

Si ha dunque che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ ed è soluzione del seguente

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ricerchiamo una soluzione di (8.8) sotto forma di serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) v_n(x).$$

Si vede facilmente che le funzioni della sola variabile t , $a_n(t)$, devono soddisfare

$$a_n''(t) + \mu_n a_n(t) = 0,$$

con $\mu_n > 0$, pertanto

$$a_n(t) = a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n} t) + \frac{a_n'(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n} t).$$

Quindi, la soluzione u di (8.8) è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n} t) + \frac{a_n'(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n} t) \right) v_n(x), \quad (8.14)$$

dove le costanti $a_n(0)$ e $a_n'(0)$ sono rispettivamente i coefficienti di Fourier di g e di h nella base $(v_n)_n$, cioè

$$a_n(0) = (g, v_n)_{L^2(\Omega)}, \quad a_n'(0) = (h, v_n)_{L^2(\Omega)}.$$

In altre parole, $a_n(0)$ e $a_n'(0)$ sono determinate dalle relazioni

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) v_n(x), \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(0) v_n(x).$$

Risulta

$$\begin{aligned} B[g, g] &= (\nabla g, \nabla g) = (-\Delta g, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mu_n (g, v_n)_{L^2(\Omega)} v_n, (g, v_n)_{L^2(\Omega)} v_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (g, v_n)_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (a_n(0))^2 < +\infty. \end{aligned}$$

L'ipotesi

$$(g, h) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (a_n(0))^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n'(0))^2 < +\infty.$$

Proviamo ora che, poiché $(g, h) \in X$, la serie (8.14) è convergente in $L^2(\Omega)$. Infatti,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} \left\| \left(a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n}t) + \frac{a'_n(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n}t) \right) v_n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left(a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n}t) + \frac{a'_n(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n}t) \right) \right|^2 \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mu_n (a_n(0))^2 \frac{\cos^2(\sqrt{\mu_n}t)}{\mu_n} + \frac{(a'_n(0))^2}{\mu_n} \sin^2(\sqrt{\mu_n}t) \right) \\ &\leq \frac{2}{\mu_1} \left(B[g, g] + \|h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \frac{2}{\mu_1} \|(g, h)\|_X^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Avendo costruito, in modo univoco, il semigruppoo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, occorre esplicitare **in che senso le traiettorie $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$ forniscono una soluzione del problema (8.8)**.

La (8.14) contiene la risposta a questa domanda. Qui, per brevità, diamo alcune indicazioni.

Le condizioni di Cauchy e di Dirichlet sono soddisfatte.

Sia $(g, h) \in X$. Poiché l'applicazione $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$ è continua per $t \geq 0$, segue che

$$\|u(t) - g\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|v(t) - h\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Quindi le condizioni di Cauchy in (8.8) sono soddisfatte. Inoltre, la condizione di Dirichlet in (8.8) è soddisfatta perché $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ per ogni $t \geq 0$.

L'equazione delle onde è soddisfatta nel senso delle distribuzioni.

La traiettoria $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$ è di classe C^1 e soddisfa

$$\frac{d}{dt}(u, u_t) = A(u, u_t) = (u_t, \Delta u) \quad \text{per ogni } t > 0$$

e

$$u(0) = g, u_t(0) = h.$$

Con un procedimento di approssimazione, si può dimostrare che la funzione $u = u(x, t)$ fornisce una soluzione all'equazione delle onde nel senso delle distribuzioni, cioè: per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times]0, +\infty[)$ risulta

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{+\infty} (u\phi_{tt} + \nabla_x u \cdot \nabla_x \phi) dt = 0.$$

Osservazione 8.2.4. Per ulteriori questioni relative ad unicità, regolarità della soluzione, si rinvia, a [5] e anche al Quaderno [7]. Qui non è superfluo richiamare alcune peculiarità dell'equazione delle onde:

- (1) Diversamente dall'equazione del calore, l'equazione delle onde *non ha alcun effetto regolarizzante sui dati di Cauchy*; ad eccezione del caso unidimensionale $N = 1$, si ha che per la soluzione $u(x, t)$ si può verificare la **perdita di almeno un ordine di derivazione, rispetto alla regolarità dei dati**.
- (2) In \mathbb{R}^N , quando la dimensione $N > 1$ è *dispari*, ad esempio $N = 3$, un segnale acustico o ottico concentrato in un punto x all'istante $t = 0$ è concentrato all'istante $t > 0$ sulla sfera di centro x e raggio t (**Principio di Huygens**). Se la dimensione N è *pari* (per esempio $N = 2$) il segnale persiste in x , smorzandosi nel tempo, ma non svanendo completamente.
- (3) In \mathbb{R}^3 , **La soluzione decade per tempi lunghi:**

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{come} \quad \frac{1}{t} \quad \text{per} \quad t \rightarrow +\infty.$$

*“ Glory is like a circle in the water,
which never ceaseth to enlarge itself,
till by broad spreading, it disperses to naught.”*

William Shakespeare (Henry VI)

8.2.1 Esempio unidimensionale: movimenti di una corda omogenea con gli estremi fissi

Sia $\Omega =]0, \pi[\subset \mathbb{R}$, assegnati $g \in H_0^1(]0, \pi[)$ e $h \in L^2(]0, \pi[)$, consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8.15)$$

La formula (8.14) dà la soluzione del problema (8.15) come somma di una serie di Fourier di seni:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \left[\left(\int_0^\pi g(y) \sin(ny) dy \right) \cos(nt) \right]$$

$$+ \left(\int_0^\pi h(y) \sin(ny) dy \right) \frac{\sin(nt)}{n} \Big] \sin(nx).$$

(cfr. anche [7] per una dimostrazione di questo esempio unidimensionale).

Osservazione 8.2.5. Anche più generali equazioni evolutive di tipo parabolico e di tipo iperbolico (con coefficienti regolari che non dipendono dalla variabile t) possono essere studiate applicando la teoria dei Semigrupp di operatori lineari, usando, ove necessario, il Teorema 7.4.5 invece del Teorema 7.4.1.

8.3 Esercizi proposti per i Capitoli 6-8

1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto, connesso, limitato e regolare. Scrivere la formulazione debole in $L^2(\Omega)$ del problema di Neumann omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.16}$$

dove ν è il versore normale uscente da $\partial\Omega$. Fornire, inoltre, la caratterizzazione variazionale degli autovalori.

Soluzione. Per la formulazione debole di (8.16), si moltiplicano ambo i membri dell'equazione $-\Delta h = \mu h$ per $v \in H^1(\Omega)$ e si integra per parti (applicando le identità di Green, cfr. [7]); tenendo presente che $\frac{\partial h}{\partial \nu} = 0$ in $\partial\Omega$, si ottiene:

$$\int_\Omega \nabla h \cdot \nabla v dx = \mu \int_\Omega h v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Per quanto riguarda la formulazione variazionale degli autovalori $(\mu_n)_n$, si ottiene, in analogia al caso Laplace-Dirichlet,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla h|^2 dx}{\int_\Omega h^2 dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla h|^2 dx}{\int_\Omega h^2 dx} \right\}. \end{aligned}$$

□

2. Ripetere l'esercizio precedente per il problema di Robin omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta h = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.17)$$

con $\beta > 0$.

Soluzione. Si procede come nel precedente esercizio, osservando che $\frac{\partial h}{\partial \nu} = -\beta h$ in $\partial\Omega$. Si ottiene che la formulazione debole di (8.17) è

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h v \, d\mathcal{H}^{N-1} = \mu \int_{\Omega} h v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

dove \mathcal{H}^{N-1} è la misura di Hausdorff $(N-1)$ -dimensionale, cfr. [7]. La formulazione variazionale degli autovalori $(\mu_n)_n$ è data da:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^\perp \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h^2 \, d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h^2 \, d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\}. \end{aligned}$$

□

3. Scrivere la caratterizzazione variazionale degli autovalori $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per i problemi **unidimensionali**

- Problema di Dirichlet omogeneo in $[0, 1]$;
- Problema di Neumann omogeneo in $[0, \pi]$;
- Problema con condizioni miste Dirichlet-Neumann in $[0, 1]$;
- Problema con condizioni periodiche in $[-\pi, \pi]$;

e mostrare che, utilizzando tale caratterizzazione, si ottengono gli autovalori calcolati nella sezione 6.3.

Negli esercizi che seguono, indicheremo l'esponenziale di una matrice quadrata Q con il simbolo e^Q invece di $\exp(Q)$.

4. Data la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, determinare la matrice esponenziale e^{tA} .

Soluzione. Risulta

$$A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix};$$

A^2 è matrice diagonale, pertanto

$$A^{2j} = \begin{pmatrix} (-1)^j a^{2j} & 0 \\ 0 & (-1)^j a^{2j} \end{pmatrix},$$

e

$$A^{2j+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^j a^{2j+1} \\ (-1)^{j+1} a^{2j+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} + \dots - \frac{(-1)^j (at)^{2j}}{(2j)!} \dots & \frac{at}{1!} - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \dots \\ \frac{-at}{1!} + \frac{(at)^3}{3!} - \frac{(at)^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} + \dots - \frac{(-1)^j (at)^{2j}}{(2j)!} \dots \end{pmatrix}.$$

In definitiva

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(at) & \sin(at) \\ -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}.$$

□

5. Ripetere l'esercizio precedente per la matrice $B := \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$, con $a, b \neq 0$.

Soluzione. Risulta

$B = bI + A$, dove A è la matrice data nell'esercizio precedente.

Allora

$$e^{tB} = e^{bIt} \cdot e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{bt} \cos(at) & e^{bt} \sin(at) \\ -e^{bt} \sin(at) & e^{bt} \cos(at) \end{pmatrix}.$$

□

6. Semigruppato di traslazione in $BUC(\mathbb{R})$ o in $C_0(\mathbb{R})$

Sia $X = BUC(\mathbb{R})$ o $C_0(\mathbb{R})$, dove $BUC(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni uniformemente continue e limitate in \mathbb{R} e $C_0(\mathbb{R})$ consiste delle funzioni $u \in BUC(\mathbb{R})$ tali che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = 0$.

X è uno spazio di Banach, munito della norma $\|\cdot\|_\infty$.

Sia

$$(S_1(t)u)(x) = u(x+t),$$

dove $t \geq 0, u \in X, x \in \mathbb{R}$.

Provare che $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigruppato fortemente continuo e contrattivo in X e che il suo generatore è $A_1 = \frac{d}{dx}$ con dominio

$$D(A_1) = \{u \in X; u \text{ derivabile}, u' \in X\} = C_0^1(\mathbb{R}).$$

7. Semigruppato di moltiplicazione in $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$

Sia $w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile e limitata superiormente. Definiamo l'operatore lineare in $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$,

$$u \in L^p(\mathbb{R}^N) \mapsto (S_{2,w}(t)u)(x) = e^{tw(x)}u(x), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Provare che $\{S_{2,w}(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigruppato fortemente continuo in $L^p(\mathbb{R}^N)$; determinarne il generatore infinitesimale e il dominio.

Soluzione. È immediato verificare che l'operatore lineare $S_{2,w}(t)$ soddisfa la legge di semigruppato. Inoltre $S_{2,w}(t)$ definisce un operatore lineare e limitato in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Infatti,

$$\|S_{2,w}(t)u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \int_{\mathbb{R}^N} |e^{tw(x)}u(x)|^p dx \leq e^{pt \sup w} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Proviamo che $\{S_{2,w}(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigruppato fortemente continuo in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Infatti,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{tw(x)}u(x) = u(x) \quad \text{q.o.}$$

e, per $t \in [0, 1]$

$$|e^{tw(x)}u(x) - u(x)|^p \leq (e^{\sup w} + 1)^p |u(x)|^p \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

da cui, per il Teorema di Convergenza Dominata,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_{2,w}(t)u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Infine, proviamo che il generatore infinitesimale $A_{2,w}$ è l'operatore di moltiplicazione $M_w : D(M_w) \ni u \mapsto wu \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con dominio

$$D(M_w) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^N); wu \in L^p(\mathbb{R}^N)\}.$$

Si nota subito che il semigruppoo $\{S_{2,w}(t)\}_{t \geq 0}$ è ω -contrattivo con $\omega = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} w$ e $C = 1$, e dunque, essendo anche fortemente continuo, per il Teorema 7.4.5 si ha che $(\omega, +\infty) \subset \rho(A_{2,w})$. Risulta, per ogni $u \in D(A_{2,w})$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{e^{tw}u - u}{t} - A_{2,w}u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tw(x)}u(x) - u(x)}{t} = (A_{2,w}u)(x)$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tw(x)}u(x) - u(x)}{t} = w(x)u(x) = (M_w u)(x),$$

e dall'unicità del limite segue subito che $A_{2,w}u = M_w u$ per ogni $u \in D(A_{2,w})$. Infine, notiamo che presi $u \in D(M_w)$ e $\lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}^N} w$ si ha che $\lambda \in \rho(A_{2,w}) \cap \rho(M_w)$ e dunque, posta $f := (\lambda I - M_w)u$ si ha subito che

$$u = R(\lambda, M_w)f = R(\lambda, A_{2,w})f \in D(A_{2,w})$$

e questo prova che $A_{2,w} = M_w$ con $D(A_{2,w}) = D(M_w)$. □

8. Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente, mostrare che, se $w \leq 0$, allora il semigruppoo $\{S_{2,w}(t)\}_{t \geq 0}$ è contrattivo.

9. **Semigruppoo di Markov in $C_b(\mathbb{R}^N)$**

In questo esempio consideriamo una famiglia di operatori che verifica la legge di semigruppoo ma non verifica necessariamente la condizione di forte continuità.

Sia $C_b(\mathbb{R}^N)$ lo spazio di Banach delle funzioni continue e limitate in \mathbb{R}^N , munito della norma $\|\cdot\|_\infty$.

Una famiglia di operatori $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ su $C_b(\mathbb{R}^N)$ si dice **semigruppoo di Markov** se verifica la legge di semigruppoo e $T(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$, dove $\mathbf{1}$ è la funzione di costante valore 1.

Sia $p : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto (0, +\infty)$ una **funzione di transizione di Markov su \mathbb{R}^N** , cioè una funzione misurabile, soddisfacente le

seguenti proprietà :

$$(i) \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, y) u(y) dy = u(x), \quad \forall u \in C_b(\mathbb{R}^N), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N;$$

$$(ii) \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, y) dy = 1, \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ (} p \text{ è la densità di una misura di probabilità } \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N \text{);}$$

(iii) (**Equazione di Chapman-Kolmogorov**)

$$p(t + s, x, y) = \int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, z) p(t, z, y) dz, \quad \forall t, s > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Per ogni funzione p di transizione di Markov, consideriamo la famiglia di operatori lineari $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$ definita da

$$(T_p(0)u)(x) := u(x),$$

$$(T_p(t)u)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, y) u(y) dy \quad \forall t > 0,$$

per ogni $u \in C_b(\mathbb{R}^N)$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Provare che la famiglia di operatori $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigruppato di Markov, è contrattivo in $C_b(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} (T_p(t)u)(x) = u(x)$ per ogni $u \in C_b(\mathbb{R}^N)$ e $x \in \mathbb{R}^N$, ma in generale $\{T_p(t)\}_{t \geq 0}$ non è fortemente continuo in $C_b(\mathbb{R}^N)$ (per un controesempio si veda l'Esercizio 10).

Soluzione.

(1) Per $t \rightarrow 0^+$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (T_p(t)u)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, y) u(y) dy = \underbrace{u(x)}_{\text{(per (i))}}$$

per ogni $u \in C_b(\mathbb{R}^N)$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

(2) Risulta

$$\begin{aligned} (T_p(t+s)u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} p(t+s, x, y) u(y) dy \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, z) p(t, z, y) u(y) dy dz}_{\text{(per (iii))}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, z) dz \int_{\mathbb{R}^N} p(t, z, y) u(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} p(s, x, z) (T_p(t)u)(z) dz = (T_p(s)T_p(t)u)(x), \\
 &\forall t, s > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N.
 \end{aligned}$$

Cioè è soddisfatta la legge di semigrupp.

(3) Inoltre, $T_p(t)$ definisce un operatore lineare e limitato su $C_b(\mathbb{R}^N)$, $T_p(t) \in B(C_b(\mathbb{R}^N))$, per ogni $t > 0$; infatti,

$$|(T_p(t)u)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, y) |u(y)| dy \leq \|u\|_\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} p(t, x, y) dy}_{(=1, \text{ per (ii)})} = \|u\|_\infty$$

per ogni $t > 0$ ed ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Quindi, $\|T_p(t)u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, pertanto $T_p(t)$ è contrattivo.

Infine $T_p(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ per (ii). □

10. Semigrupp del calore in $L^2(\mathbb{R}^N)$

Sia

$$(S_3(t)u)(x) := (K_t * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y) u(y) dy, u \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad (8.18)$$

(cfr., ad esempio, [7] per definizione e proprietà del prodotto di convoluzione $*$) dove

$$K_t(z) = K(z, t) = \frac{\exp(-\frac{|z|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}},$$

$z \in \mathbb{R}^N, t > 0$ e poniamo $(S_3(0)u)(x) = u(x)$.

Provare che $\{S_3(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigrupp fortemente continuo e contrattivo in $L^2(\mathbb{R}^N)$ (**semigrupp del calore, o di Gauss-Weierstrass**, cfr., ad esempio, [7] Cap. 11); determinarne il generatore infinitesimale A_3 e il dominio.

Soluzione. Proviamo che per ogni $t, s > 0$ si ha

$$(S_3(t+s)u)(x) = (S_3(t)S_3(s)u)(x).$$

Risulta

$$(S_3(t+s)u)(x) = (K_{t+s} * u)(x)$$

e

$$(S_3(t)S_3(s)u)(x) = (K_t * (K_s * u))(x) = ((K_t * K_s) * u)(x).$$

Allora è sufficiente provare che:

$$K_{t+s}(z) = (K_t * K_s)(z),$$

per ogni $t, s > 0$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^N$.

Per provarlo, utilizziamo la trasformata (parziale) di Fourier \mathcal{F} rispetto alla variabile spaziale.⁴ Otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((K_t * K_s))(\xi) &= \mathcal{F}(K_t)(\xi) \cdot \mathcal{F}(K_s)(\xi)^5 = \exp(-t|\xi|^2) \cdot \exp(-s|\xi|^2) \\ &= \exp(-(t+s)|\xi|^2) = \mathcal{F}(K_{t+s})(\xi). \end{aligned}$$

Per l'iniettività della trasformata di Fourier, si ha

$$(K_t * K_s)(z) = K_{t+s}(z), \quad \text{per ogni } t, s > 0 \text{ e per ogni } z \in \mathbb{R}^N.$$

Inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_3(t)u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$$

(cfr., ad esempio, [7]).

Proviamo che il semigruppato S_3 è contrattivo. Si ha, infatti, in virtù della disuguaglianza di Young per le convoluzioni,

$$\|(S_3(t)u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|K_t * u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \underbrace{\|K_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{=1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

per ogni $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, da cui $\|S_3(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R}^N))} \leq 1$ per ogni $t > 0$.

Per determinare il generatore infinitesimale A_3 , applichiamo la trasformata di Fourier \mathcal{F} a $\frac{(S_3(t)u)(x) - u(x)}{t}$.

Risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{S_3(t)u - u}{t}\right)(\xi) &= \frac{\mathcal{F}(K_t)(\xi) \cdot \mathcal{F}(u)(\xi) - \mathcal{F}(u)(\xi)}{t} \\ &= \frac{\mathcal{F}(K_t)(\xi) - 1}{t} \mathcal{F}(u)(\xi) = \left(\frac{\exp(-t|\xi|^2) - 1}{t}\right) \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &= \left(\frac{\exp(-t|\xi|^2) - 1}{t|\xi|^2}\right) |\xi|^2 \mathcal{F}(u)(\xi) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -|\xi|^2 \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=} \mathcal{F}(\Delta u)(\xi). \end{aligned} \tag{8.19}$$

(cfr. [7] Prop.10.2.4)

⁴Cfr., ad esempio, [7] cap. 10, per definizione e proprietà di \mathcal{F} . Osserviamo esplicitamente che qui, a differenza di [7], prendiamo, nella definizione di trasformata di Fourier, come *carattere* $\exp(-ix \cdot \xi)$ invece di $\exp(-2\pi ix \cdot \xi)$, cioè $\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \exp(-ix \cdot \xi) dx$.

⁵ $\mathcal{F}(K_t)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\exp(\frac{-|x|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp(-ix \cdot \xi) dx = \exp(-t|\xi|^2), \xi \in \mathbb{R}^N$.

Per l'iniettività di \mathcal{F} , deduciamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_3(t)u(x) - u(x)}{t} = (\Delta u)(x) \quad (8.20)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Ora, sia $u \in D(A_3)$. Poiché $\frac{S_3(t)u-u}{t}$ tende a A_3u in $L^2(\mathbb{R}^N)$ per $t \rightarrow 0^+$ allora vi tende per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Da (8.20) e per l'unicità del limite segue dunque che $A_3u = \Delta u$ per ogni $u \in D(A_3)$.

Viceversa, sia $u \in D(\Delta)$. Notiamo preliminarmente che

$$D(\Delta) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^N), \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)\} = H^2(\mathbb{R}^N).$$

Per verificare quest'ultima uguaglianza basta osservare che, integrando opportunamente per parti, per ogni $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ risulta

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u \Delta u dx \leq \|u \Delta u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \frac{(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)})^2}{2} < \infty \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|D^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N (D_{ij}u)^2 dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N (D_{ij}u)(D_{jj}u) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N (D_{ii}u)(D_{jj}u) dx = \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

da cui, per densità di $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ in $H^2(\mathbb{R}^N)$, si ha la tesi; inoltre, segue immediatamente l'equivalenza tra la norma $H^2(\mathbb{R}^N)$ e la norma del grafico di Δ .

Proviamo dunque che per ogni $u \in D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^N)$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{S_3(t)u - u}{t} - \Delta u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0. \quad (8.21)$$

Notiamo che, per ogni $t > 0$, da (8.19) e dal Teorema di Plancherel abbiamo che

$$\left\| \frac{S_3(t)u - u}{t} - \Delta u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \left\| \left(\frac{\exp(-t|\cdot|^2) - 1}{t} + |\cdot|^2 \right) \mathcal{F}u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (8.22)$$

Inoltre, per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\exp(-t|\xi|^2) - 1}{t} + |\xi|^2 \right) \mathcal{F}u(\xi) \right|^2 &\leq \left(\frac{1 - \exp(-t|\xi|^2)}{t} + |\xi|^2 \right)^2 |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \\ &\leq 4|\xi|^4 |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \\ &= 4|\mathcal{F}(\Delta u)(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Usando il Teorema di Convergenza Dominata e (8.22) si prova completamente (8.21), concludendo così che $A_3 = \Delta$ con $D(A_3) = H^2(\mathbb{R}^N)$.

Osserviamo che la definizione (8.18) può essere usata per definire un semigruppato di Markov in $C_b(\mathbb{R}^N)$. In questo caso la funzione di transizione di Markov p è

$$p(t, x, y) = K_t(x - y) = \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^N, t > 0.$$

La proprietà (i) segue, ad esempio, dal Teorema 11.1.2. in [7]; la proprietà (ii) si verifica elementarmente; la proprietà (iii) si può provare utilizzando la trasformata di Fourier in maniera simile alla prima parte dell'esercizio.

Osserviamo che $\{S_3(t)\}_{t \geq 0}$ come semigruppato di Markov su $C_b(\mathbb{R}^N)$ non è fortemente continuo (manca il requisito (3) della Definizione 7.1.1), in quanto l'applicazione $t \mapsto S_3(t)u$ non è continua in $[0, +\infty[$ per ogni $u \in C_b(\mathbb{R}^N)$, ma lo è solo localmente. \square

11. Semigruppato di Poisson in $L^2(\mathbb{R})$

Sia $u \in L^2(\mathbb{R})$, $z \in \mathbb{R}$, $0 < t < +\infty$ e $P_t(z)$ il nucleo di Poisson

$$P_t(z) := \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + z^2}.$$

Definiamo ⁶

$$\begin{aligned} (S_4(t)u)(x) &:= (P_t * u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x - y)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + (x - y)^2} u(y)dy \end{aligned}$$

⁶Questo integrale rappresenta una funzione armonica nel semipiano superiore con u valore alla frontiera.

e poniamo $(S_4(0)u)(x) = u(x)$.

Verificare che $\{S_4(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigruppoo fortemente continuo e contrattivo in $L^2(\mathbb{R})$ e provare che il generatore infinitesimale A_4 è dato da

$$A_4u = -\mathcal{H}u',$$

dove \mathcal{H} è la trasformata di Hilbert,⁷ con $D(A_4) = H^1(\mathbb{R})$.

Soluzione. Con il cambiamento di variabile $x - y = z$, si ha

$$(P_t * u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + (x - y)^2} u(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + z^2} u(x - z) dz.$$

Risulta, per ogni $t, s > 0$:⁸

$$\begin{aligned} P_t(P_s * u)(x) &= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_s u(x - z)}{t^2 + z^2} dz \\ &= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + z^2} \left(\frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{s^2 + (x - z - \xi)^2} u(\xi) d\xi \right) dz \\ &= \frac{st}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + z^2)(s^2 + (x - z - \xi)^2)} dz \right) u(\xi) d\xi \end{aligned}$$

⁷Se $u \in L^2(\mathbb{R})$, la trasformata di Hilbert di u è definita da $(\mathcal{H}u)(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y)}{x - y} dy$ (l'integrale esiste, a valor principale, per quasi ogni x). Risulta $\mathcal{H}u \in L^2(\mathbb{R})$, $\|\mathcal{H}u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $\mathcal{H}(\mathcal{H}u) = -u$. Pertanto \mathcal{H} è una isometria di $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$, di periodo 4.

⁸L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + z^2)(s^2 + (x - z - \xi)^2)} dz$$

può essere calcolato col teorema dei residui (cfr., ad esempio, [8] 7.3), applicato alla funzione della variabile complessa w , $f(w) = \frac{1}{(t^2 + w^2)(s^2 + (\tau - w)^2)}$, considerando il dominio regolare

$$\overline{B}_R(0) \cap \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \geq 0\},$$

con $R > 0$ sufficientemente grande in modo che $\overline{B}_R(0) \cap \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \geq 0\}$ contenga i poli del primo ordine di $f(w)$, $w_1 = it$, $w_3 = \tau + is$, dove $\tau := x - \xi$.

Risulta

$$\text{Res}(f, w_1) = -\frac{i}{2t(\tau + is - it)(\tau - is - it)},$$

$$\text{Res}(f, w_3) = -\frac{i}{2s(\tau + is - it)(\tau + is + it)}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + z^2)(s^2 + (x - z - \xi)^2)} dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, w_1) + \text{Res}(f, w_3)] \\ &= \frac{\pi}{st} \frac{\tau(t + s) + i(s - t)(t + s)}{(\tau + is - it)(\tau - is - it)(\tau + is + it)} = \frac{\pi}{st} \frac{(t + s)}{(\tau^2 + (t + s)^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{st}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{st(t+s)^2 + (x-\xi)^2} \right) u(\xi) d\xi \\ &= \frac{t+s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+s)^2 + (x-\xi)^2} u(\xi) d\xi = (P_{t+s} * u)(x). \end{aligned}$$

Inoltre:

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_4(t)u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ (cfr., ad esempio, [7]),
- $\|S_4(t)\|_{B(L^2(\mathbb{R}))} \leq 1$ per ogni $t \geq 0$.

Per determinare il generatore infinitesimale A_4 , ricordiamo preliminarmente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x-y) dy = 1$$

per ogni $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Proviamo che, se $u \in H^1(\mathbb{R})$, allora⁹

$$(-\Delta)^{1/2}u(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x) - u(y)}{(x-y)^2} dy < +\infty$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x) - u(y)}{(x-y)^2} dy &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{u'(x+t(y-x))(x-y)}{(x-y)^2} dt \right) dy \\ &\stackrel{t(x-y)=z}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x-z)z/t}{(z/t)^2} \frac{dz}{t} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x-z)}{z} dz \right) dt \quad (8.23) \\ &= \mathcal{H}u'(x) < +\infty \text{ q.o.}, \end{aligned}$$

in quanto $u' \in L^2(\mathbb{R})$, dove in tutte le uguaglianze l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ va inteso nel senso del valor principale di Cauchy.

Proviamo che l'operatore $A_4 : H^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definito da $A_4u = -\mathcal{H}u'$ è il generatore infinitesimale del semigruppato di Poisson. Sia per semplicità $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (spazio di Schwartz) e proviamo preliminarmente che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_4(t)u(x) - u(x)}{t} = -\mathcal{H}u'(x) \quad (8.24)$$

⁹L'operatore $(-\Delta)^{1/2}$ è l'operatore $\frac{1}{2}$ -Laplaciano frazionario in dimensione 1.

Si prova facilmente che $\mathcal{F}((-\Delta)^{1/2}u)(\xi) = |\xi|\mathcal{F}(u)(\xi)$, cfr. E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci: *Hitchhiker's guide to the Fractional Sobolev Spaces*, Bulletin des sciences mathématiques 136.5 (2012), pp. 521-573.

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{S_4(t)u(x) - u(x)}{t} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-y) - u(x)}{t^2 + y^2} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{|y|>1} \frac{u(x-y) - u(x)}{t^2 + y^2} dy + \frac{1}{\pi} \int_{|y|\leq 1} \frac{u(x-y) - u(x)}{t^2 + y^2} dy. \end{aligned}$$

Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$, $|y| > 1$ e $t > 0$ vale

$$\frac{|u(x-y) - u(x)|}{t^2 + y^2} \leq \frac{2\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{y^2} \in L^1(\mathbb{R} \setminus [-1, 1]),$$

per il Teorema di Convergenza Dominata si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>1} \frac{u(x-y) - u(x)}{t^2 + y^2} dy = \frac{1}{\pi} \int_{|y|>1} \frac{u(x-y) - u(x)}{y^2} dy. \quad (8.25)$$

Osserviamo inoltre che per ogni $t > 0$ la funzione

$$\mathbb{R} \ni y \mapsto \frac{y}{t^2 + y^2} \in \mathbb{R}$$

ha simmetria dispari. Pertanto

$$\int_{|y|\leq 1} \frac{y}{t^2 + y^2} dy = 0$$

per ogni $t > 0$. Dunque

$$\int_{|y|\leq 1} \frac{u(x-y) - u(x)}{t^2 + y^2} dy = \int_{|y|\leq 1} \frac{u(x-y) - u(x) - u'(x)y}{t^2 + y^2} dy \quad (8.26)$$

e, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $|y| \leq 1$ e $t > 0$

$$\frac{|u(x-y) - u(x) - u'(x)y|}{t^2 + y^2} \leq \|u''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{y^2}{t^2 + y^2} \leq \|u''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \in L^1((-1, 1))$$

dove la prima disuguaglianza segue dal fatto che $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Utilizzando nuovamente il Teorema di Convergenza Dominata e (8.26) abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|y|\leq 1} \frac{u(x-y) - u(x)}{t^2 + y^2} dy = \frac{1}{\pi} \int_{|y|\leq 1} \frac{u(x-y) - u(x)}{y^2} dy. \quad (8.27)$$

Mettendo insieme (8.25) e (8.27) otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S_4(t)u(x) - u(x)}{t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-y) - u(x)}{y^2} dy = -\mathcal{H}u'(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato (8.23), provando così (8.24).

Per concludere, dimostriamo che il limite in (8.24) non è solo puntuale, ma anche in norma $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Sia $u \in D(A_4)$. Dalla convergenza di $\frac{S_4(t)u-u}{t}$ a A_4u in $L^2(\mathbb{R})$ per $t \rightarrow 0^+$ segue la convergenza puntuale per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, e da (8.24) si ha che $A_4u = -\mathcal{H}u'$ per ogni $u \in D(A_4)$.

Viceversa, poiché $S_4(t)$ è fortemente continuo e contrattivo in $L^2(\mathbb{R})$, per il Teorema di Hille-Yosida 7.4.1, si ha che $(0, +\infty) \subset \rho(A_4)$.

Inoltre, $(0, +\infty) \subset \rho(-(-\Delta)^{1/2})$. Difatti, preso $\lambda > 0$, applicando la trasformata di Fourier all'equazione $\lambda u + (-\Delta)^{1/2}u = f$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, otteniamo

$$\mathcal{F}u = \frac{\mathcal{F}f}{\lambda + |\cdot|} \in L^2(\mathbb{R})$$

e quindi $u \in L^2(\mathbb{R})$ per il Teorema di Plancherel.

Pertanto, presi $u \in D(-(-\Delta)^{1/2})$ e $\lambda > 0$ si ha che $\lambda \in \rho(A_4) \cap \rho(-(-\Delta)^{1/2})$ e posta $f := (\lambda I + (-\Delta)^{1/2})u$, procedendo come nella nota 3 del Capitolo 7 si ha che $u = R(\lambda, A_4)f \in D(A_4)$, e questo prova che $A_4u = -(-\Delta)^{1/2}u = -\mathcal{H}u'$ con $D(A_4) = D(-(-\Delta)^{1/2})$.

Per provare che $D(A_4) = D(-(-\Delta)^{1/2}) = H^1(\mathbb{R})$ osserviamo che, nello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la norma $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R})}$ e la norma del grafico $\|\cdot\|_{G(A_4)}$ sono equivalenti (basta notare che l'operatore \mathcal{H} è invertibile). Inoltre, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è un *core*¹⁰ per $\{S_4(t)\}_{t \geq 0}$ e quindi è denso in $(D(A_4), \|\cdot\|_{G(A_4)})$. Risulta, dunque,

$$H^1(\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R})}} = \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{G(A_4)}} = D(A_4).$$

□

¹⁰Dato un semigruppoo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ con generatore $A : D(A) \rightarrow X$ nello spazio di Banach X , un sottospazio D si dice *core* se è denso in $D(A)$ rispetto alla norma del grafico. Una condizione sufficiente è data dal Teorema del core: se D è denso in X ed è invariante per $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, allora è un core. Per queste nozioni si veda K.J. Engel, R. Nagel: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, Berlin 2000, Def. II.1.6 e Prop. II.1.7.

Nel caso in esame, $D = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ è denso in $X = L^2(\mathbb{R})$ e, poiché per ogni $t \geq 0$ e ogni funzione $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si ha $S_4(t)u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è anche invariante per $\{S_4(t)\}_{t \geq 0}$, dunque è un *core* per il semigruppoo di Poisson.