

Capitolo 2

Spazi di Hilbert

2.1 Spazi di Hilbert (Spazi con prodotto scalare)

Scopo di questo capitolo è mostrare come la definizione e le proprietà del prodotto scalare in \mathbb{K}^N , le nozioni di base, proiezione ortogonale, possono essere estese a spazi vettoriali a dimensione infinita

Sia H uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} dei numeri reali o complessi. Un *prodotto scalare* su H è un funzionale

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

che, a ciascuna coppia di elementi $u, v \in H$ associa un numero $(u, v) \in \mathbb{K}$ con le seguenti proprietà. Per ogni $u, v, w \in H$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha:

- (i) $(u, v) = \overline{(v, u)}$, dove la barra in alto denota la coniugazione complessa;
- (ii) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$;
- (iii) $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$;
- (iv) $(u, u) \geq 0$ e $(u, u) = 0$ se e solo se $u = 0$.

Osserviamo che le precedenti proprietà implicano che

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w), \quad (u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v).$$

Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le proprietà (i) – (iii) affermano che un prodotto scalare su \mathbb{R} è simmetrico e bilineare.

A partire dal prodotto scalare, definiamo

$$\boxed{\|u\| := (u, u)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{per ogni } u \in H. \quad (2.1)$$

Proposizione 2.1.1 (Due disuguaglianze fondamentali). *Per ogni $u, v \in H$ si ha:*

$$(I) \quad |(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad (\text{Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz});$$

$$(II) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{Disuguaglianza triangolare o di Minkowski}).$$

Dimostrazione.

(I) Se $v = 0$ la disuguaglianza è ovvia. Sia allora $v \neq 0$ e poniamo

$$a := (u, u), \quad b := (u, v), \quad c := (v, v).$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ risulta

$$0 \leq (u + \lambda v, u + \lambda v) = a + b\bar{\lambda} + \lambda\bar{b} + c\lambda\bar{\lambda}.$$

Scelto $\lambda = -\frac{b}{c}$, otteniamo

$$0 \leq a + b \left(-\frac{\bar{b}}{c} \right) + \bar{b} \left(-\frac{b}{c} \right) + c \left(-\frac{b}{c} \right) \left(-\frac{\bar{b}}{c} \right) = a - \frac{b\bar{b}}{c}.$$

Poiché $c = (v, v) > 0$, moltiplicando ambo i membri per c otteniamo

$$0 \leq ac - |b|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - |(u, v)|^2,$$

da cui la tesi.

(II) Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\Re(u, v) \leq |(u, v)| \leq \|u\| \|v\|.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + (u, v) + (v, u) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(u, v) \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

Prendendo le radici quadrate otteniamo la tesi. □

Osservazione 2.1.2. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica che, fissato $v \in H$, il funzionale $u \in H \mapsto (u, v) \in \mathbb{K}$ è Lipschitziano di costante $\|v\|$.

Il funzionale (2.1) verifica evidentemente le proprietà di una norma (N_1) e (N_2). La disuguaglianza triangolare mostra che (2.1) verifica anche la proprietà (N_3), pertanto (2.1) definisce una norma su H (detta **norma di Hilbert**, in quanto associata ad un prodotto scalare).

L'esistenza in H di un prodotto scalare consente di introdurre in questo spazio non solo la norma (cioè "la lunghezza") di un vettore $u \in H$, ma anche "l'angolo" ϑ formato da due vettori $u, v \in H \setminus \{0\}$; precisamente, l'angolo ϑ determinato dai vettori $u, v \in H \setminus \{0\}$ è definito da

$$\cos \vartheta := \Re \left(\frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \right).$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta che il secondo membro è compreso tra -1 e 1 e determina un angolo $\vartheta \in [0, \pi]$.

È immediata la verifica delle seguenti identità:

- *Identità del parallelogramma:*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

- *Identità di Pitagora:* se $u, v \in H$ sono **ortogonali** (cioè $(u, v) = 0$), allora

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Osservazione 2.1.3. È utile sapere se una data norma su uno spazio vettoriale X (reale, complesso) è una norma di Hilbert, cioè se esiste un prodotto scalare (\cdot, \cdot) su X tale che $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ per ogni $u \in X$.

Segnaliamo due criteri (a seconda che il campo degli scalari sia \mathbb{R} o \mathbb{C}) espressi di seguito.

Caratterizzazione delle norme di Hilbert su spazi di Hilbert reali

Teorema 2.1.4 (di Fréchet-von Neumann-Jordan). *Se la norma $\|\cdot\|$ in uno spazio vettoriale reale X soddisfa l'identità del parallelogramma*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{per ogni } u, v \in X,$$

allora $\|\cdot\|$ è una norma di Hilbert su X .

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale reale munito di una norma $\|\cdot\|$ soddisfacente l'identità del parallelogramma

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \text{per ogni } a, b \in X.$$

Proviamo che la quantità definita da

$$(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \quad \text{per ogni } u, v \in X$$

(i) è un prodotto scalare reale su X ,

(ii) soddisfa $(u, u) = \|u\|^2$,

pertanto $\|\cdot\|$ è una norma di Hilbert.

La verifica di (ii) è immediata.

Proviamo (i). È immediato verificare che $(u, v) = (v, u)$.

Inoltre

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w) \quad \text{per ogni } u, v, w \in X.$$

Per provarlo, si usa l'identità del parallelogramma prima con $a=u, b=v$; poi, con $a=u+w, b=v+w$; infine, con $a=u+v+w, b=w$.

Osserviamo che risulta $(-u, v) = -(u, v)$ e $(u, 2v) = 2(u, v)$. Per provare che $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, v \in X$, si considera dapprima il caso $\lambda \in \mathbb{N}$, poi $\lambda \in \mathbb{Q}$ e infine $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Caratterizzazione delle norme di Hilbert su spazi di Hilbert complessi

Teorema 2.1.5. *Sia X uno spazio vettoriale complesso munito di una norma $\|\cdot\|$ soddisfacente l'identità del parallelogramma*

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) \quad \text{per ogni } a, b \in X.$$

La quantità definita da

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + \|u - iv\|^2 - \|u + iv\|^2) \quad \text{per ogni } u, v \in X$$

(i) è un prodotto scalare complesso su X ,

(ii) soddisfa $(u, u) = \|u\|^2$,

pertanto $\|\cdot\|$ è una norma di Hilbert su X .

Definizione 2.1.6. Uno spazio vettoriale H si dice *spazio di Hilbert* (reale, complesso) se è uno spazio vettoriale (reale, complesso) munito di un prodotto scalare (reale, complesso) ed è *completo* rispetto alla norma di Hilbert (2.1).

Esempi 2.1.7 (di spazi di Hilbert).

(1) Lo spazio \mathbb{R}^N , munito del prodotto scalare

$$(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$$

è uno spazio di Hilbert su \mathbb{R} .

(2) Lo spazio ℓ^2 (cfr. 1.4.6) è uno spazio di Hilbert su \mathbb{C} con il prodotto scalare

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \overline{y_k}.$$

2.2 Proiezione su un convesso chiuso

Teorema 2.2.1 (Teorema della proiezione su un convesso, chiuso, non vuoto di uno spazio di Hilbert reale). *Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ uno spazio di Hilbert reale; sia $K \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto. Allora, per ogni $f \in H$ esiste un unico $u = u_f \in K$ tale che*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| \quad (= d(f, K)) . \quad (2.2)$$

Inoltre u è caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$\begin{cases} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.3)$$

Osservazione 2.2.2. La disuguaglianza in (2.3) esprime il fatto che l'angolo determinato dai vettori $f - u$ e $v - u$ è maggiore o uguale di $\pi/2$.

Dimostrazione.

Esistenza. Sia

$$d := \inf_{v \in K} \|f - v\|.$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore esiste $(v_n) \subset K$ tale che

$$d_n := \|f - v_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$$

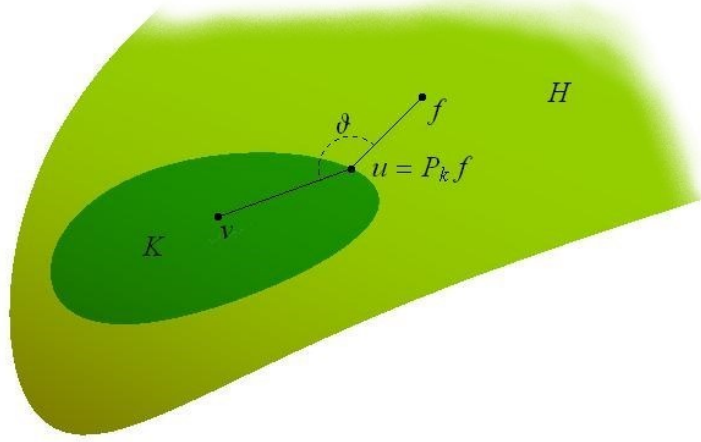


Figura 2.1: Proiezione di f sul convesso K .

(cioè, esiste $(v_n) \subset K$ successione “minimizzante” per $\|f - \cdot\|$).
 Posto $u = f - v_n$ e $v = f - v_m$ nell'identità del parallelogramma, si ha

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2)$$

e quindi

$$\left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2.$$

Poiché $v_n, v_m \in K$ e K è convesso, risulta $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ e quindi

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d.$$

Pertanto

$$0 \leq \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2) - d^2$$

e quindi esiste il limite per $n, m \rightarrow +\infty$ di $\|v_n - v_m\|$ ed è $= 0$. Dunque la successione $(v_n) \subset K$ è di Cauchy in H . Poiché H è completo e K è chiuso, esiste $u = u_f \in K$ tale che $\|v_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Osservato che

$$d \leq \|f - u\| \leq \|f - v_n\| + \|v_n - u\|,$$

passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ risulta

$$\|f - u\| = d.$$

Si è dunque provata l'esistenza.

Equivalenza (2.2) \iff (2.3).

(2.3) \implies (2.2). Sia $v \in K$. Per il teorema di Carnot "generalizzato" si ha

$$\|f - u\|^2 + \|v - u\|^2 - 2(f - u, v - u) = \|f - v\|^2$$

e quindi, ricordando che per ipotesi $(f - u, v - u) \leq 0$,

$$\|f - u\|^2 - \|f - v\|^2 = 2(f - u, v - u) - \|v - u\|^2 \leq 0$$

da cui

$$\|f - u\| \leq \|f - v\| \quad \forall v \in K.$$

(2.2) \implies (2.3). Sia $v \in K$. Posto

$$w = (1 - t)u + tv = u + t(v - u) \quad t \in]0, 1],$$

si ha $w \in K$ e per ipotesi

$$\|f - u\| \leq \|f - w\| = \|(f - u) - t(v - u)\|,$$

da cui

$$\|f - u\|^2 \leq \|f - u\|^2 + t^2\|v - u\|^2 - 2t(f - u, v - u)$$

e quindi

$$2(f - u, v - u) \leq t\|v - u\|^2.$$

Passando al limite per $t \rightarrow 0^+$ risulta

$$(f - u, v - u) \leq 0.$$

Unicità. Siano $u_1, u_2 \in K$ tali che

$$\begin{cases} (f - u_1, v - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2, v - u_2) \leq 0 \end{cases} \quad \forall v \in K.$$

In particolare

$$\begin{cases} (f - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \end{cases} ,$$

da cui

$$\begin{cases} (f - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ (u_2 - f, u_2 - u_1) \leq 0 \end{cases} ,$$

e quindi

$$0 \leq (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0,$$

cioè

$$u_1 = u_2.$$

□

Definizione 2.2.3. Nelle ipotesi del teorema precedente definiamo l'operatore "proiezione su K "

$$\begin{aligned} P_K : H &\rightarrow K \\ f &\mapsto P_K(f) = u \quad (\text{proiezione di } f \text{ su } K) \end{aligned}$$

dove u è l'unico elemento di K tale che

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|.$$

Corollario 2.2.4. Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert reale, M un suo sottospazio vettoriale chiuso e sia $f \in H$; allora $u = P_M f$ è caratterizzato da

$$\begin{cases} u \in M \\ (f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M \quad (\text{i.e. } (f - u) \perp M, \text{ ovvero } f - u \text{ è ortogonale a } M). \end{cases} \quad (2.4)$$

Dimostrazione. Proviamo l'equivalenza: (2.3) \iff (2.4).

(2.4) \implies (2.3). Poiché $u \in M$ risulta

$$(f - u, v - u) = 0 \quad \forall v \in M.$$

(2.3) \implies (2.4) Dall'ipotesi segue che

$$(f - u, \lambda v - u) \leq 0 \quad \forall v \in M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

pertanto

$$\lambda(f - u, v) \leq (f - u, u) \quad \forall v \in M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M.$$

□

Osservazione 2.2.5. Abbiamo già riconosciuto (cfr. Osservazione 2.1.2) che, in uno spazio di Hilbert, preso $f \in H$, l'applicazione $u \mapsto (f, u)$ è un funzionale lineare e continuo su H ; è notevole il fatto che **tutti** i funzionali lineari e continui su H sono rappresentati mediante il prodotto scalare per un opportuno vettore, come dimostrato nella successiva sezione.

2.3 Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema (di Riesz-Fréchet) di rappresentazione dei funzionali lineari e continui

Indichiamo con H^* il duale (topologico) di H (i.e. lo spazio dei funzionali lineari e continui su H). Sussiste il seguente fondamentale teorema che asserisce l'esistenza di un isomorfismo isometrico tra H e H^* .

Potremo allora identificare i due spazi H e H^* .

Nel seguito, la norma (2.1) potrà anche essere indicata con $\|\cdot\|_H$.

Teorema 2.3.1. (*Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui (di Riesz-Fréchet)*)

Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert reale; allora

$$\forall \varphi \in H^* \quad \exists |u_\varphi \in H : \quad \varphi(v) = (u_\varphi, v) \quad \forall v \in H,$$

inoltre si ha

$$\|u_\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H^*} \left(:= \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H} \right).$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in H^*$. Poniamo

$$M := \varphi^{-1}(\{0\}).$$

M è un sottospazio chiuso di H (sottospazio perché nucleo di φ lineare, e chiuso perché immagine inversa, tramite φ continuo, del chiuso $\{0\}$).

Se $M = H$, risulta $\varphi \equiv 0$ e quindi basta prendere $u_\varphi = 0_H$ per conseguire la tesi.

Supponiamo dunque $M \subsetneq H$ e sia $g_0 \in H \setminus M$. Per il Corollario precedente esiste $g_1 = P_M(g_0) \in M$ tale che

$$(g_0 - g_1, w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Proviamo che

$$(i) \exists g \notin M, \quad \|g\|_H = 1, \quad (g, w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Sia

$$g = \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|_H}.$$

Si ha $\|g\|_H = 1$ $g \notin M$ (se $g \in M$ allora $g_0 = g\|g_0 - g_1\|_H + g_1 \in M$, che è assurdo) ed inoltre

$$(g, w) = \left(\frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|_H}, w \right) = \frac{1}{\|g_0 - g_1\|_H} (g_0 - g_1, w) = 0 \quad \forall w \in M.$$

Sia $v \in H$ e proviamo che

(ii) v può essere decomposto nel seguente modo:

$$v = \lambda g + w \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}, w \in M$$

Basta porre

$$\lambda := \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}, \quad w := v - \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}g$$

(osserviamo che $w \in M$ perché $\varphi(w) = \varphi(v) - \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}\varphi(g) = 0$).

Ora

$$\begin{aligned} (g, v) &= \left(g, \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}g + w \right) = \left(g, \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}g \right) + (g, w) = \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}(g, g) \\ &= \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}\|g\|_H^2 = \frac{\varphi(v)}{\varphi(g)}, \end{aligned}$$

per cui, posto $u_\varphi = \varphi(g)g$, si ha

$$\varphi(v) = (\varphi(g)g, v) = (u_\varphi, v) \quad \forall v \in H.$$

Si è dunque provata l'esistenza.

Per provare l'unicità, siano $u_1, u_2 \in H$ tali che

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= (u_1, v) \quad \forall v \in H \\ \varphi(v) &= (u_2, v) \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Allora

$$(u_1, v) - (u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H,$$

pertanto

$$(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H$$

e in particolare

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

da cui

$$u_1 = u_2.$$

Resta da provare che

$$\|u_\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H^*}$$

dove

$$\|\varphi\|_{H^*} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H}.$$

Poiché

$$\varphi(v) = (u_\varphi, v) \quad \forall v \in H,$$

dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|\varphi(v)| = |(u_\varphi, v)| \leq \|u_\varphi\|_H \cdot \|v\|_H \quad \forall v \in H.$$

Pertanto

$$\frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H} \leq \|u_\varphi\|_H \quad \forall v \in H, \quad v \neq 0$$

da cui segue che

$$\|\varphi\|_{H^*} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\varphi(v)|}{\|v\|_H} \leq \|u_\varphi\|_H.$$

Inoltre, preso $v = u_\varphi$, si ha $\varphi(u_\varphi) = (u_\varphi, u_\varphi)$ e quindi

$$|\varphi(u_\varphi)| = \|u_\varphi\|_H^2$$

ovvero, osservato che $\|u_\varphi\|_H \neq 0$,

$$\frac{|\varphi(u_\varphi)|}{\|u_\varphi\|_H} = \|u_\varphi\|_H,$$

ne segue evidentemente la tesi. □

Osservazione 2.3.2. I precedenti Teoremi 2.2.1 e 2.3.1 possono essere enunciati per uno spazio di Hilbert H complesso con le opportune sostituzioni:

Teorema 2.3.3 (Teorema della proiezione su un convesso, chiuso, non vuoto di uno spazio di Hilbert complesso). *Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ uno spazio di Hilbert complesso; sia $K \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto. Allora, per ogni $f \in H$ esiste un unico $u = u_f \in K$ tale che*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| \quad (= d(f, K)) .$$

Inoltre u è caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$\begin{cases} u \in K \\ \Re(f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K. \end{cases}$$

Teorema 2.3.4 (Teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui (di **Riesz-Fréchet**)). Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert complesso; allora

$$\forall \varphi \in H^* \quad \exists! u_\varphi \in H : \quad \varphi(v) = (v, u_\varphi) \quad \forall v \in H,$$

inoltre si ha

$$\|u_\varphi\|_H = \|\varphi\|_{H^*}.$$

Per le dimostrazioni dei due teoremi, si veda la Sezione 11.4 in [5].

Osservazione 2.3.5. Sia H uno spazio di Hilbert e V un suo sottospazio; in virtù del Teorema di Riesz-Fréchet possiamo definire il sottospazio ortogonale di V

$$V^\perp = \{u \in H : (u, v) = 0 \quad \forall v \in V\}$$

come sottospazio di H .

Evidentemente, $H^\perp = \{0_H\}$, $\{0_H\}^\perp = H$ e $V \cap V^\perp = \{0_H\}$.

Se V è **chiuso**, abbiamo $V \oplus V^\perp = H$. Infatti, ogni $f \in H$ può scriversi come

$$f = P_V f + (f - P_V f)$$

ed il secondo addendo appartiene a V^\perp per il Corollario 2.2.4.

Inoltre

- V^\perp è **chiuso**: infatti, se $u_n \in V^\perp$ e $u_n \rightarrow u$, allora, per ogni $a \in V$, $(u, a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, a) = 0$ e quindi $u \in V^\perp$.
- $(V^\perp)^\perp = \overline{V}$ (cfr. 5.1.3).

2.4 Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Nella Proposizione che segue è illustrato un procedimento induttivo per trasformare un sistema linearmente indipendente in un sistema ortonormale.

Proposizione 2.4.1. Sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ un sistema linearmente indipendente di elementi di uno spazio di Hilbert H infinito-dimensionale. Allora in H esiste un sistema ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ ¹ tale che

$$E_n := \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Per definizione, sia

$$e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Se, per ipotesi induttiva, e_1, \dots, e_{n-1} sono stati costruiti, sia \tilde{v}_n la proiezione ortogonale di v_n su $E_{n-1} = \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\} = \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Allora, definiamo

$$e_n := \frac{v_n - \tilde{v}_n}{\|v_n - \tilde{v}_n\|}.$$

Osserviamo che $v_n \neq \tilde{v}_n$, poiché $v_n \notin \text{span} \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$. Quindi e_n è ben definito ed ha norma uno. Inoltre, e_n è ortogonale a tutti i vettori e_1, \dots, e_{n-1} , pertanto la tesi è dimostrata. \square

Osserviamo che la proiezione ortogonale di v_n su E_{n-1} è data da

$$\tilde{v}_n = \sum_{k=1}^{n-1} (v_n, e_k) e_k$$

e quindi e_n è dato dalla formula esplicita

$$e_n = \frac{v_n - \sum_{k=1}^{n-1} (v_n, e_k) e_k}{\left\| v_n - \sum_{k=1}^{n-1} (v_n, e_k) e_k \right\|}.$$

2.5 Somme di Hilbert. Basi hilbertiane ortonormali (sistemi ortonormali completi)

Se $\{e_1, \dots, e_N\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^N , allora ogni vettore $x \in \mathbb{R}^N$ è esprimibile (in modo unico) come combinazione lineare finita nella forma

$$x = \sum_{k=1}^N (x, e_k) e_k, \quad (2.5)$$

¹cioè, $\|e_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $(e_n, e_m) = 0$ se $n \neq m$.

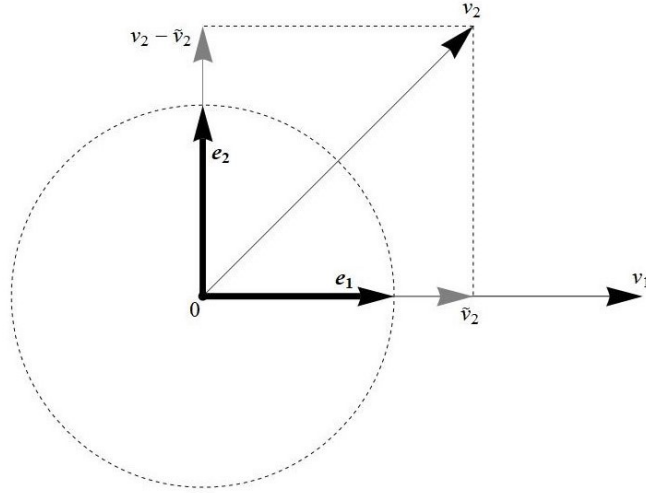


Figura 2.2: Il procedimento di ortonormalizzazione applicato ai vettori v_1, v_2 .

dove $(x, e_k)e_k$ rappresenta la proiezione ortogonale del vettore x sul sotto-spazio unidimensionale $\text{span}\{e_k\}$.²

In uno spazio di Hilbert H a dimensione infinita, la precedente somma finita (2.5) “*dovrebbe*” essere sostituita da una serie (infinita). È importante sapere in quali casi la corrispondente serie converge e quando si ha

²Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione

$$\left\| x - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right\|^2$$

ha valore minimo per $a_k = (x, e_k)$.
Infatti,

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right\|^2 &= \left(x - \sum_{k=1}^N a_k e_k, x - \sum_{k=1}^N a_k e_k \right) \\ &= (x, x) - 2 \left(x, \sum_{k=1}^N a_k e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^N a_k e_k, \sum_{k=1}^N a_k e_k \right) \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^N a_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^N a_k^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N (x, e_k)^2 + \sum_{k=1}^N (a_k - (x, e_k))^2. \end{aligned}$$

Evidentemente, il minimo di questa espressione si ottiene quando l'ultimo addendo è uguale a zero, cioè per $a_k = (x, e_k)$ per $k \in \{1, 2, \dots, N\}$.

l'uguaglianza

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k) e_k, \quad (2.6)$$

per ogni $u \in H$.

Definizione 2.5.1 (Somma di Hilbert). Sia H uno spazio di Hilbert e sia $(H_n)_n$ una successione di suoi sottospazi chiusi. Si dice che H è *somma di Hilbert* dei sottospazi H_n e si scrive

$$H = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H_n,$$

se

- (a) gli H_n sono mutualmente ortogonali, cioè $(u, v) = 0$ per ogni $u \in H_m$, $v \in H_n$, con $m \neq n$;
- (b) lo spazio vettoriale $\text{span} \{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n \}$ è denso in H .

Teorema 2.5.2. *Sia H la somma di Hilbert dei sottospazi chiusi $(H_n)_n$. Assegnato $u \in H$, poniamo*

$$u_n := P_{H_n} u$$

e

$$s_n := \sum_{k=1}^n u_k.$$

Allora, risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = u \quad (2.7)$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2. \quad (2.8)$$

(*identità di Bessel-Parseval*).

Alla dimostrazione del Teorema 2.5.2 premettiamo il seguente risultato.

Lemma 2.5.3. *Sia $(v_n)_n$ una successione in H tale che*

$$(v_m, v_n) = 0 \quad \forall m \neq n \quad (2.9)$$

e

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|v_k\|^2 < +\infty. \quad (2.10)$$

Posto

$$s_n := \sum_{k=1}^n v_k,$$

si ha : esiste in H il limite

$$s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

e, inoltre,

$$\|s\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \|v_k\|^2. \quad (2.11)$$

Dimostrazione. Osserviamo che per $m > n$ si ha (tenuto conto di (2.9) e dell'identità di Pitagora)

$$\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \|v_k\|^2 \rightarrow 0,$$

per $n, m \rightarrow +\infty$ in virtù di (2.10). Quindi, $(s_n)_n$ è una successione di Cauchy, pertanto esiste in H il limite $s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$. D'altra parte, si ha

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|v_k\|^2.$$

Per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene la (2.11). □

Dimostrazione del Teorema 2.5.2. Poiché $u_n = P_{H_n} u$, si ha per il Corollario 2.2.4

$$(u - u_n, v) = 0 \quad \forall v \in H_n$$

e, in particolare (preso $v = u_n \in H_n$),

$$(u, u_n) = \|u_n\|^2.$$

Sommando queste uguaglianze, otteniamo

$$(u, s_n) = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2.$$

Ma abbiamo anche

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 = \|s_n\|^2, \quad (2.12)$$

e quindi

$$(u, s_n) = \|s_n\|^2.$$

Ne segue che $\|s_n\| \leq \|u\|$ (per la Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) e perciò

$$\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leq \|u\|^2.$$

Per il Lemma 2.5.3 esiste $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

Proviamo che $s = u$ (cioè identifichiamo s). Sia

$$F = \text{span} \left\{ \bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n \right\}.$$

Dimostriamo che

$$s = P_{\bar{F}}u.$$

Infatti,

$$(u - s_n, v) = 0 \quad \forall v \in H_m, \quad m \leq n$$

(basta osservare che $u - s_n = (u - u_m) - \sum_{k \neq m} u_k$).

Per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$(u - s, v) = 0 \quad \forall v \in H_m, \quad \forall m$$

e quindi

$$(u - s, v) = 0 \quad \forall v \in F,$$

che implica

$$(u - s, v) = 0 \quad \forall v \in \bar{F}.$$

D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in F$, e al limite $s \in \bar{F}$. Questo prova che $s = P_{\bar{F}}u$.

Per (b) della definizione di Somma di Hilbert, risulta $\bar{F} = H$ e quindi $s = u$.

Da (2.12) per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo l'identità di Bessel-Parseval

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2.$$

□

La successiva definizione tratta la generalizzazione, nel caso infinito dimensionale, della nozione di base ortonormale.

Definizione 2.5.4. Una successione $(e_n)_n$ in H si dice *base ortonormale* di H (o *base di Hilbert*, o semplicemente una *base*; da alcuni autori $(e_n)_n$ è anche chiamata *sistema ortonormale completo*) se soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) $\|e_n\| = 1 \forall n$ e $(e_m, e_n) = 0 \forall m \neq n$,
- (ii) lo spazio vettoriale $\text{span}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ è denso in H .

Corollario 2.5.5. (del Teorema 2.5.2) Sia $(e_n)_n$ una base ortonormale di H . Allora per ogni $u \in H$, si ha

$$u = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k) e_k, \quad \text{cioè} \quad u = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (u, e_k) e_k \quad (2.13)$$

e

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{+\infty} (u, e_k)(v, e_k) \quad \forall v \in H.$$

In particolare

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(u, e_k)|^2.$$

Viceversa:

Data $(\alpha_n)_n \subset \ell^2$, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ converge ad un certo $u \in H$ tale che $(u, e_k) = \alpha_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal Teorema 2.5.2 e dal Lemma 2.5.3, osservato che H è la somma di Hilbert degli spazi $H_n = \mathbb{C}e_n$ e che $P_{H_n}u = (u, e_n)e_n$. \square

Teorema 2.5.6. Ogni spazio di Hilbert H **separabile** ha una base di Hilbert numerabile.

Dimostrazione. Sia $(v_n)_n$ un sottoinsieme numerabile e denso di H .

Sia $F_k := \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. La successione $(F_k)_k$ è non decrescente, formata da spazi a dimensione finita e tale che

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k \quad \text{è denso in } H.$$

Scegliamo un vettore unitario $e_1 \in F_1$. Se $F_2 \neq F_1$, allora esiste $e_2 \in F_2$ tale che $\{e_1, e_2\}$ è una base ortonormale di F_2 . Iterando la stessa costruzione, otteniamo una base di Hilbert ortonormale di H . \square

Osservazione 2.5.7. Il Teorema precedente combinato col Corollario 2.5.5 mostra che **gli spazi di Hilbert separabili sono isomorfi e isometrici (per l'identità di Parseval) allo spazio ℓ^2 .**

Osservazione 2.5.8. La separabilità garantisce il fatto di avere una infinità al più numerabile di direzioni indipendenti a due a due ortogonali.

Se lo spazio di Hilbert H è non separabile si può ancora provare (usando il Lemma di Zorn) l'esistenza di una base ortonormale non numerabile $(e_i)_{i \in I}$.

Osservazione 2.5.9. Il concetto di base in dimensione infinita richiede il passaggio da combinazioni lineari *finite* (cfr. (2.5)) a combinazioni lineari *infinite* ma con coefficienti a quadrato sommabile (cfr. (2.13)).

Proposizione 2.5.10. *Ogni sottospazio chiuso H_0 di uno spazio di Hilbert H separabile è separabile.*

Dimostrazione. Sia $(e_n)_n$ una base ortonormale di H e sia v_n la proiezione di e_n su H_0 , $v_n := P_{H_0} e_n$.

Allora, $V := \text{span} \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ è denso in H_0 (cfr. Corollario 4.2.3 e successiva osservazione). A tal fine, proviamo che, se $\varphi \in H_0^* = H_0$ con $(\varphi, v) = 0$ per ogni $v \in V$, allora $(\varphi, u) = 0$ per ogni $u \in H_0$. Si ha

$$(\varphi, u) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n)(\varphi, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, v_n)(\varphi, v_n) = 0,$$

dove la penultima uguaglianza dipende dal fatto che $u, \varphi \in H_0$ e l'ultima dal fatto che φ si annulla su V .

Sia ora

$$\begin{aligned} A &:= \text{span}_{\mathbb{Q}} \{v_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \left\{ v \in H_0 : \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } v = \sum_{n=1}^k a_n v_n, \text{ con } a_n \in \mathbb{Q} \right\}. \end{aligned}$$

L'insieme A è numerabile ed è denso in H_0 , pertanto H_0 è separabile. \square

2.6 Basi ortonormali e Serie di Fourier complesse nello spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$,

Nel Capitolo 5 proveremo una tecnica generale per costruire basi ortonormali in spazi di Hilbert reali e separabili, precisamente prendendo gli autovettori di un operatore lineare, compatto e autoaggiunto (*base spettrale*, cfr. 5.11.1). Come applicazione, nel Capitolo 6 si costruiscono *basi speciali di L^2* ³ formate da autofunzioni di operatori differenziali (cfr. Teorema 6.2.11 e Teorema 6.4.5, e alcuni degli Esercizi proposti per i Capitoli 1-5).

³Per gli spazi di Hilbert L^2 cfr., ad esempio, [2], [5].

Vediamo ora una applicazione della teoria sviluppata nei paragrafi precedenti in questo capitolo, ad un particolare spazio di funzioni a valori complessi $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$, (spazio di Hilbert su \mathbb{C} , separabile) con prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

In questo spazio, le funzioni

$$v_k(x) = \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono ortonormali.

Infatti,

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_{k_1}(x) \overline{v_{k_2}(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ik_1x) \exp(-ik_2x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k_1 \neq k_2, \\ 1, & \text{se } k_1 = k_2. \end{cases}$$

Lo span dell'insieme numerabile $F = \{v_k : k \in \mathbb{Z}\}$ è denso in $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$, cioè

$$\overline{\text{span}(F)} = L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C}).$$

Infatti, fissata $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione continua $u_\epsilon : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tale che

$$\|u_\epsilon - u\|_{L^2([-\pi, \pi])} < \epsilon, \quad u_\epsilon(-\pi) = u_\epsilon(\pi) \quad (2.14)$$

Inoltre, esiste un polinomio trigonometrico complesso, sia

$$p(x) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k \exp(ikx) \in \text{span}(F)$$

($N \geq 0$ intero, i coefficienti $\alpha_k \in \mathbb{C}$), tale che ⁴

$$\|u_\epsilon - p\|_{C^0([-\pi, \pi])} < \epsilon \quad (2.15)$$

Osserviamo che, per (2.15), risulta

$$\|u_\epsilon - p\|_{L^2([-\pi, \pi])} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u_\epsilon(x) - p(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi} \|u_\epsilon - p\|_{C^0([-\pi, \pi])} < \sqrt{2\pi} \epsilon. \quad (2.16)$$

⁴È conseguenza del Teorema di Stone-Weierstrass-Complesso (cfr., ad esempio, Corollario B.13 in [1]).

Da (2.14) e (2.16) segue la tesi.

Pertanto $F = \{v_k : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base di Hilbert di $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ (cfr. Definizione 2.5.4).

Data $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$, consideriamo la serie complessa trigonometrica

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}},$$

$$a_k := (u, v_k) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Per il Corollario 2.5.5, questa serie converge a u in $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$, cioè

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| u - \sum_{k=-N}^N a_k v_k \right\|_{L^2([-\pi, \pi])} = 0.$$

Riassumendo, sussiste il seguente risultato:

Proposizione 2.6.1. *Sia $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$.*

Definiti i coefficienti

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \exp(-ikx) dx,$$

si ha la convergenza

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| u(x) - \sum_{k=-N}^N c_k \exp(ikx) \right|^2 dx = 0.$$

Ne segue che per ogni $u \in L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$, una sottosuccessione delle somme parziali della serie di Fourier, $\sum_{k=-N}^N c_{n_k} \exp(in_k x)$, converge a u quasi ovunque in $(-\pi, \pi)$.⁵

Il Teorema dimostrato da L. Carleson nel 1966 afferma che *l'intera successione delle somme parziali della serie di Fourier, $\sum_{k=-N}^N c_k \exp(ikx)$, converge a u quasi ovunque in $(-\pi, \pi)$.*⁶

⁵cfr. teorema 4.9 in [5]

⁶Nel 1915 Lusin propose il seguente problema: la condizione $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$ è sufficiente ad assicurare la convergenza q.o. della serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)$? In altre parole, la serie di Fourier di una funzione in L^2 converge q.o.? Il miglior risultato, precedente quello di Carleson, fu provato nel 1925 da Kolmogoroff-Seliverstov-Plessner: posto $s_N u(x) = \sum_{k=-N}^N c_k \exp(ikx)$, risulta $s_N u(x) = o((\lg N)^{\frac{1}{2}})$, q.o.

Osservazione 2.6.2. Sono note diverse basi ortonormali classiche in $L^2(a, b)$. Ne ricordiamo in particolare una: si chiamano polinomi di Legendre in $(-1, 1)$ i polinomi ottenuti applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (cfr. 2.4) ai vettori

$$1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots$$

2.7 Operatori strettamente positivi e Teorema di invertibilità

Definizione 2.7.1. (Operatori strettamente positivi) Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ uno spazio di Hilbert reale. Si dice che un operatore lineare $T : H \rightarrow H$ è *strettamente positivo* se

$$\exists \beta > 0 \text{ t.c. } (Tu, u) \geq \beta \|u\|^2 \text{ per ogni } u \in H. \quad (2.17)$$

Sussiste il seguente Teorema di invertibilità.

Teorema 2.7.2 (inverso di un operatore strettamente positivo). Sia $(H, (\cdot, \cdot))$ uno spazio di Hilbert reale. Sia $T \in B(H)$ soddisfacente (2.17). Allora, per ogni $f \in H$, esiste un'unica $u = T^{-1}f \in H$ tale che $Tu = f$. Inoltre, l'operatore inverso T^{-1} soddisfa

$$\|T^{-1}\|_{B(H)} \leq \frac{1}{\beta}.$$

Dimostrazione. Proviamo che dall'ipotesi (2.17) segue che l'operatore T è iniettivo e suriettivo.

1. Da (2.17) segue che

$$\beta \|u\|^2 \leq (Tu, u) \leq \|Tu\| \|u\|.$$

Quindi

$$\beta \|u\| \leq \|Tu\|. \quad (2.18)$$

Se $Tu = 0$, allora $u = 0$, pertanto $\ker T = \{0\}$ e T è iniettivo.

Dopo un periodo di cinquanta anni, dalla congettura formulata da Lusin, L. Carleson (nell'articolo del 1966 "On The Convergence And Growth Of Partial Sums Of Fourier Series", Acta Mathematica, 116 (1), 135-157) ha dato risposta affermativa alla congettura, ovvero: se $u \in L^2$, allora $\lim_{N \rightarrow +\infty} s_N u(x) = u(x)$ q.o.

Per quanto riguarda la stima dell'insieme dei punti di divergenza della serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)$, entra in gioco un nuovo concetto, più fine di quello di "misura di Lebesgue nulla", chiamato (in teoria del potenziale) *capacità*.

Per approfondimenti sull'argomento, cfr., ad esempio, R.E. Edwards, *Fourier Series, A Modern Introduction*, vol. I, (1967), e le indicazioni bibliografiche ivi riportate.

2. Ora, dimostriamo che $Im T$ è chiuso. Siano $(v_n)_n \subset Im T$ e $v \in H$ tali che $v_n \rightarrow v$. Proviamo che esiste $u \in H$ tale che $v = Tu$. Sia, allora, $v_n = Tu_n$ con $u_n \in H$. Da (2.18) otteniamo

$$\limsup_{m,n \rightarrow +\infty} \|u_m - u_n\| \leq \limsup_{m,n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \|Tu_m - Tu_n\| = \limsup_{m,n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} \|v_m - v_n\| = 0.$$

Pertanto, la successione $(u_n)_n$ è di Cauchy e converge ad $u \in H$. Risulta, per la continuità di T ,

$$Tu = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v.$$

3. Dimostriamo che $Im T = H$. In caso contrario ($Im T \subsetneq H$), poiché $Im T$ è chiuso, $H = Im T \oplus (Im T)^\perp$ e, quindi, troveremmo un vettore non nullo $w \in (Im T)^\perp$. Questo implicherebbe

$$\beta \|w\|^2 \leq (Tw, w) = 0,$$

cioè una contraddizione.

4. Dai precedenti punti 1, 2 e 3, segue che $T : H \rightarrow H$ è bigettiva; quindi, per ogni $f \in H$, l'equazione $Tu = f$ ha un'unica soluzione

$$u = T^{-1}f.$$

Da (2.18) segue che

$$\|T^{-1}f\| = \|u\| \leq \frac{\|f\|}{\beta}$$

per ogni $f \in H$; pertanto

$$\|T^{-1}\|_{B(H)} \leq \frac{1}{\beta}.$$

□

Osservazione 2.7.3. Il precedente risultato di invertibilità vale anche per operatori $T \in B(H)$ soddisfacenti la condizione

$$\exists \beta > 0 \text{ t.c. } \Re(Tu, u) \geq \beta \|u\|^2 \text{ per ogni } u \in H,$$

evidentemente più debole di (2.17) (cfr. Proposizione 11.28 e successiva osservazione in [5]).

