Capitolo 7

Teoria dei Semigruppi di operatori lineari

7.1 Semigruppi e semigruppi di contrazione: proprietà differenziali. Generatori.

Sia A una matrice $N \times N$. Assegnato $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, *il problema di Cauchy*

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u(t)} = A\mathbf{u(t)}(t \geq 0), \mathbf{u(0)} = \mathbf{b}$$

ha un'unica soluzione

$$\boldsymbol{u(t)} = \mathbf{exp}\,\boldsymbol{(tA)b},$$

dove

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

(serie di Taylor assolutamente convergente). Evidentemente

$$A^0 = I,$$

$$\exp(tA)\exp(sA) = \exp((t+s)A),$$

per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ (la famiglia $\{\exp(tA); t \in \mathbb{R}\}$ ha la "proprietà di gruppo"). Se A è un operatore lineare limitato il cui dominio è un sottospazio di uno spazio a dimensione infinita, la formula

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

esprime ancora una serie di Taylor assolutamente convergente.

La teoria dei Semigruppi di operatori lineari rappresenta una estensione del precedente risultato agli *operatori A lineari non limitati in spazi a dimensione infinita* (ad esempio, A operatore di derivazione, o più in generale A operatore a derivate parziali coinvolgente variabili anche spaziali oltre che t, lineare, necessariamente chiuso (cfr. Capitolo 8).

Se A è lineare ma non limitato in X spazio di Banach, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ non può utilizzarsi per definire $\exp(tA)$, in quanto il dominio di A^k diviene più piccolo al crescere di k. La formula

$$\exp(tA) = \lim_{k\to+\infty} \left(I + \frac{t}{k}A\right)^k$$

non è utile per lo stesso motivo. Una buona definizione è

$$\exp(tA) = \lim_{k\to+\infty} \left(I - \frac{t}{k}A\right)^{-k}$$

in quanto, a meno di un fattore costante, l'operatore $(I - \frac{t}{k}A)^{-1}$ è il risolvente di A (cfr. Paragrafo 7.3), e può essere iterato anche se A non è limitato.

In dimensione infinita, se A è lineare ma non limitato in X spazio di Banach, $\exp(tA)$ può essere costruito anche usando un opportuno metodo di approssimazione per A con operatori A_λ lineari e limitati, utilizzando *stime indipendenti da* λ (cfr., ad esempio, *le regolarizzanti di A (di Yosida),* A_λ*, definite nella dimostrazione del Teorema 7.4.1*).

Ora, prima di dare la definizione di semigruppo e di generatore (infinitesimale) del semigruppo, assumiamo, in modo informale, che $u : [0, +\infty[\to X$ (X spazio di Banach reale) sia l'unica soluzione di

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t)(t \geq 0), u(0) = u_0 \tag{7.1}$$

dove $A : D(A) \to X$ è un assegnato operatore lineare, possibilmente non limitato, $D(A)$ è un sottospazio di X e $u_0 \in X$ è il dato iniziale assegnato. Per evidenziare esplicitamente la dipendenza di $u(t)$ dal dato iniziale u_0, poniamo

$$u(t) = S(t)u_0.$$

Allora

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = AS(t)u_0,$$

cioè

$$\lim_{h\to0^+} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = AS(t)u_0. \tag{7.2}$$

Per ogni $t \geq 0$ possiamo riguardare $S(t)$ come operatore da X in X. Evidentemente $S(t) : X \to X$ è lineare. Inoltre $S(0)u_0 = u_0$ $(u_0 \in X)$, e la condizione che rifletta l'assunzione che il problema (7.1) abbia un'unica soluzione per ogni dato u_0 assegnato sarà data da

$$S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 \quad (t, s \geq 0, u_0 \in X). \tag{7.3}$$

Infine, è ragionevole supporre che per ogni $u_0 \in X$ l'applicazione $t \mapsto S(t)u_0$ sia continua da $[0, +\infty[$ in X. Da (7.2), assunta la (7.3), si ha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)S(t)u_0 - S(t)u_0}{h} = AS(t)u_0$$

e quindi

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = Au,$$

e questo motiva la successiva definizione di A quale generatore (infinitesimale) del semigruppo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Definizione 7.1.1. Sia X uno spazio di Banach reale. Una famiglia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ di operatori lineari e limitati da X in X si chiama **semigruppo** se soddisfa le seguenti condizioni:

(1) $S(0)u = u$ $(u \in X)$,

(2) $S(t+s)u = S(t)S(s)u = S(s)S(t)u$ $(t, s \geq 0, u \in X)$,

(3) l'applicazione $t \mapsto S(t)u$ è continua da $[0, +\infty[$ in X.

Inoltre, si dice che $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ è un **semigruppo di contrazione (o contrattivo)** se risulta anche $||S(t)||_{B(X)} \leq 1$, $(t \geq 0)$.

Assumiamo d'ora in avanti che $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sia un semigruppo di contrazione su X.

Definizione 7.1.2. Posto

$$Au := \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}$$

con $u \in D(A) := \{u \in X : \exists \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \in X\}$, l'operatore lineare

$$A : D(A) \to X$$

si chiama il **generatore (infinitesimale)** del semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Osservazione 7.1.3. Il generatore (infinitesimale) A del semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ è (essenzialmente) la derivata destra nel punto $t = 0$ di $t \to S(t)u$, cioè $S'_+(0)u = Au$.

Teorema 7.1.4 (Proprietà differenziali dei semigruppi).
Sia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di contrazione su X con generatore A.
Se $u \in D(A)$, allora:

(i) $S(t)u \in D(A)$ *per ogni* $t \geq 0$;

(ii) $AS(t)u = S(t)Au$ *per ogni* $t > 0$;

(iii) l'applicazione $t \mapsto S(t)u$ *è differenziabile per ogni* $t > 0$, *e risulta*

(iv) $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$ $(t > 0)$.

Dimostrazione.
1. Sia $u \in D(A)$, allora

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{S(s)S(t)u - S(t)u}{s} = \lim_{s\to 0^+} \frac{S(t)S(s)u - S(t)u}{s} =$$

$$S(t) \lim_{s\to 0^+} \frac{S(s)u - u}{s} = S(t)Au.$$

Pertanto $S(t)u \in D(A)$ e $AS(t)u = S(t)Au$. Risultano così provate (i) e (ii).

2. Sia $u \in D(A)$ e $t > 0$. Allora, per le proprietà dei semigruppi,

$$\lim_{h\to 0^+} \left[\frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au\right] = \lim_{h\to 0^+} \left[S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right) - S(t)Au\right]$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \left[S(t-h)\left(\frac{S(h)u-u}{h} - Au\right) + (S(t-h)Au - S(t)Au)\right] = 0,$$

poiché $\frac{S(h)u-u}{h} \to Au$ e $||S(t-h)||_{B(X)} \leq 1$. Inoltre, poiché $Au \in X$ è ben definita, l'applicazione $s \mapsto S(s)Au$ è continua.
La stima del limite precedente mostra che l'applicazione $t \mapsto u(t) = S(t)u$ ha derivata sinistra

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au.$$

Per la derivata destra si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)u - S(t)u}{h} = S(t) \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = S(t)Au.$$

Pertanto. per ogni $t > 0$, l'applicazione $t \mapsto S(t)u$ è differenziabile, con derivata $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$. Risultano così provate le (iii) e (iv). $\square$

Osservazione 7.1.5. Per (ii) il semigruppo di contrazione su X $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e il suo generatore A commutano su $D(A)$.
Inoltre, poiché l'applicazione $t \mapsto AS(t)u = S(t)Au$ è continua, l'applicazione $t \mapsto S(t)u$ è C^1 per $t > 0$, se $u \in D(A)$.

Osservazione 7.1.6. Dal Teorema 7.1.4, si deduce che:
per ogni $u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\quad u_0 \in D(A)$, l'unica soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = Au & \text{in} \quad \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

è la funzione

$$\boxed{u(x,t) = (S(t))(u_0(x)).}$$

Infatti, $\frac{d}{dt}u(x,t) = \frac{d}{dt}(S(t))(u_0(x)) \underbrace{=}_{7.1.4(iv)} A\underbrace{(S(t))(u_0(x))}_{=u(x,t)} = Au(x,t)$

e $u(x,0) = (S(0))(u_0(x)) \underbrace{=}_{7.1.1(1)} u_0(x)$.

7.2 Proprietà dei generatori

Sussiste il seguente risultato.

Teorema 7.2.1 (Proprietà dei generatori).
Sia $A : D(A) \to X$ il generatore infinitesimale del semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Allora:
(i) Il dominio $D(A)$ è denso in X;
(ii) A è un operatore chiuso. [1]

[1] $A : D(A) \to X$ **operatore chiuso** se e solo se per ogni $u_k \in D(A)$ $(k = 1, 2, ...)$ e $u_k \to u$, $Au_k \to v$ per $k \to +\infty \Rightarrow \ u \in D(A)$ e $Au = v$.
Ovviamente un operatore continuo è chiuso, ma un operatore chiuso non è necessariamente continuo. L'operatore di derivazione $T = \frac{d}{dt}$ non è continuo (cfr. 1.6.11), ma è un operatore chiuso.
Infatti, siano $u_k \in D(T) = C^1([0,1]; \mathbb{R}, \|.\|_\infty + \|.'\|_\infty)$ $(k = 1, 2, ...)$, $u_k \to u$, $Tu_k \to v$ per $k \to +\infty$. Poiché la convergenza in $C^0([0,1]; \mathbb{R}, \|.\|_\infty)$ è uniforme, si ha :

$$\int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t \lim_{k\to+\infty} Tu_k(\tau)d\tau = \lim_{k\to+\infty} \int_0^t Tu_k(\tau)d\tau = \lim_{k\to+\infty} [u_k(t) - u_k(0)] = u(t) - u(0),$$

cioè

$$u(t) = u(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau.$$

Quindi $u \in D(T)$ e $Tu = v$.

Dimostrazione.
1. Fissiamo $u \in X$ e consideriamo l'approssimazione

$$U_\epsilon := \epsilon^{-1} \int_0^\epsilon S(s)uds.$$

Poiché l'applicazione $t \mapsto S(t)u$ è continua, si ha

$$U_\epsilon \to u$$

per $\epsilon \to 0^+$.
Per provare (i) dimostriamo che $U_\epsilon \in D(A)$ per ogni $\epsilon > 0$.
Poiché $D(A)$ è un sottospazio vettoriale, è sufficiente provare che

$$u_\epsilon := \epsilon U_\epsilon = \int_0^\epsilon S(s)uds \in D(A).$$

Per $0 < h < \epsilon$ risulta

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)u_\epsilon - u_\epsilon}{h} &= \frac{1}{h}\left[S(h)\left(\int_0^\epsilon S(s)uds\right) - \left(\int_0^\epsilon S(s)uds\right)\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\epsilon (S(s+h)u - S(s)u)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_\epsilon^{\epsilon+h} S(s)uds - \frac{1}{h}\int_0^h S(s)uds \to S(\epsilon)u - u \quad \text{per } h \to 0^+.
\end{aligned}$$

Questo prova che $u_\epsilon \in D(A)$ per ogni $\epsilon > 0$. .
2. Per dimostrare (ii), sia $(u_k, Au_k)_k$ con $u_k \in D(A)$ e $u_k \to u$, $Au_k \to v$, per qualche $u, v \in X$.
Proviamo che $u \in D(A)$ e $Au = v$.
Per $k \geq 1$, poiché $u_k \in D(A)$, il teorema precedente implica

$$S(h)u_k - u_k = \int_0^h \left(\frac{d}{dt}S(t)u_k\right)dt = \int_0^h S(t)Au_k dt.$$

Per $k \to +\infty$, si ha

$$S(h)u - u = \int_0^h S(t)vdt.$$

Pertanto

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h S(t)vdt = v.$$

Per definizione, questo significa che $u \in D(A)$ e $Au = v$. □

Osservazione 7.2.2. Ora, il problema fondamentale è quello di determinare quali operatori A generano semigruppi di contrazione (la risposta a questa questione sarà data dal Teorema di Hille-Yosida 7.4.1).

Il legame cruciale tra un semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e il suo generatore A è dato dall' "operatore risolvente".

7.3 Risolventi e proprietà

Definizione 7.3.1. Sia A un operatore lineare, chiuso in uno spazio di Banach X, con dominio $D(A)$.

Un numero reale λ appartiene a $\rho(A)$, l'insieme risolvente di A, se l'operatore

$$\lambda I - A : D(A) \to X$$

è iniettivo e suriettivo.

Richiamiamo, ora, che, se $\lambda \in \rho(A)$, l'*operatore risolvente di A*, $R_\lambda : X \to X$ è definito da

$$\boldsymbol{R_\lambda u = R(\lambda, A)u := (\lambda I - A)^{-1}u}.$$

Per il Teorema del Grafico Chiuso, $R_\lambda : X \to D(A) \subseteq X$ è un operatore lineare e limitato. Inoltre,

$$AR_\lambda u = R_\lambda A u, \quad se \quad u \in D(A).$$

Teorema 7.3.2 (Proprietà degli operatori risolventi).
*(i) Se λ e $\mu \in \rho(A)$, valgono le **identità***

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$$

e

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda.$$

*(ii) (**Formula integrale per l'operatore risolvente**)*
Sia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigruppo di contrazione e sia A il suo generatore. Allora per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\lambda \in \rho(A)$$

e

$$R_\lambda u = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S(t) u dt \qquad (u \in X).$$

Inoltre,

$$||R_\lambda||_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in X$ si ha

$$v := R_\lambda u - R_\mu u = (\lambda I - A)^{-1}u - (\mu I - A)^{-1}u \in D(A),$$

$$(\lambda I - A)v = u - (\lambda I - \mu I + \mu I - A)(\mu I - A)^{-1}u = (\mu - \lambda)(\mu I - A)^{-1}u.$$

Applicando l'operatore $(\lambda I - A)^{-1}$ ad entrambi i membri dell'identità precedente, otteniamo

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu.$$

Ora, usando l'identità provata prima, per ogni $\lambda \neq \mu \in \rho(A)$ si ha

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\mu - \lambda} = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\lambda - \mu} = R_\mu R_\lambda.$$

È così provata la (i).
Dimostriamo (ii).
1. Per ipotesi il semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ è contrattivo, cioè $||S(t)||_{B(X)} \leq 1$, e $\lambda > 0$, pertanto l'operatore

$$Q_\lambda u := \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)u dt$$

è ben definito. Infatti

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)u dt \right\|_X &\leq \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)||S(t)||_{B(X)}||u||_X \quad dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)||u||_X dt = \frac{1}{\lambda}||u||_X.\end{aligned} \tag{7.4}$$

La stima (7.4) mostra che Q_λ è un operatore lineare e limitato, con norma $||Q_\lambda||_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$.
2. Proviamo, ora, che

$$(\lambda I - A)Q_\lambda u = u \quad \text{per ogni } u \in X. \tag{7.5}$$

Infatti, per ogni $h > 0$ e per ogni $u \in X$, si ha

$$\frac{S(h)Q_\lambda u - Q_\lambda u}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t+h)udt - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)udt\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{+\infty} \exp(-\lambda(s-h))S(s)uds - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)udt\right)$$
$$= \frac{1}{h}\bigg(\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda(s-h))S(s)uds - \int_0^{h} \exp(-\lambda(s-h))S(s)uds$$
$$- \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)udt\bigg)$$
$$= \left(\frac{\exp(\lambda h) - 1}{h}\right)\int_0^{+\infty} \exp\left(-\lambda s\right) S(s)uds$$
$$- \left(\frac{\exp(\lambda h)}{h}\right)\int_0^{h} \exp\left(-\lambda s\right) S(s)uds.$$

Per $h \to 0^+$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)Q_\lambda u - Q_\lambda u}{h} = \lambda Q_\lambda u - u.$$

Per la definizione di generatore, questo significa che

$$Q_\lambda u \in D(A) \quad \text{e} \quad AQ_\lambda u = \lambda Q_\lambda u - u,$$

e ciò prova la (7.5).
3. La (7.5) mostra che l'applicazione

$$v \mapsto (\lambda I - A)v : D(A) \to X$$

è suriettiva. Proviamo che questa applicazione è anche iniettiva.
Se $u \in D(A)$, allora

$$AQ_\lambda u = A\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)udt = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)AS(t)udt$$
$$= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)S(t)Audt = Q_\lambda Au.$$

(Il passaggio di A sotto il segno di integrale è giustificato dal fatto che A è un operatore chiuso). Ciò prova la relazione commutativa

$$Q_\lambda(\lambda I - A)u = (\lambda I - A)Q_\lambda u \quad \text{per ogni } u \in D(A). \tag{7.6}$$

Se, ora, $(\lambda I - A)u = (\lambda I - A)v$, per la (7.6) e la (7.5) si ha

$$u = Q_\lambda(\lambda I - A)u = Q_\lambda(\lambda I - A)v = v,$$

e ciò prova la iniettività della precedente applicazione.
Concludiamo che

$$\lambda \in \rho(A) \quad \text{e} \quad Q_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda.$$

□

Osservazione 7.3.3. Per (ii) del teorema precedente, l'operatore risolvente R_λ è la Trasformata di Laplace del semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

7.4 Teorema (di Hille-Yosida) di esistenza (ed unicità) del semigruppo di contrazione generato da un operatore lineare

Il teorema che segue esprime una caratterizzazione dei generatori di semigruppi di contrazione, stabilendo sotto quali condizioni esiste un semigruppo di contrazione $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ generato da un operatore $A : D(A) \subset X \to X$, (cioè, il teorema mostra come ricostruire il semigruppo di contrazione $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ dal suo generatore A). Il risultato è di grande utilità per risolvere equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo (cfr. Capitolo 8).

Teorema 7.4.1 (di Hille-Yosida). *Sia X uno spazio di Banach e $A : D(A) \subseteq X \to X$ un operatore lineare. Allora, sono equivalenti le proposizioni:*

(i) A è il generatore di un semigruppo di contrazione.

(ii) A è un operatore densamente definito e chiuso. Inoltre,

$$(0, +\infty) \subset \rho(A)$$

e

$$||R_\lambda||_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad \textit{per ogni} \quad \lambda > 0.$$

Dimostrazione. Il fatto che (i) implica (ii) è stato già provato (cfr. Proprietà dei generatori 7.2.1 e formula integrale per l'operatore risolvente 7.3.2, (ii)). Assumiamo allora che valga (ii) e per provare (i) costruiamo un semigruppo di contrazione avente A come generatore.

1. Per l'ipotesi, fissato $\lambda > 0$, l'operatore risolvente $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} \in B(X)$ è ben definito. Definiamo l'operatore lineare e limitato

$$\boxed{A_\lambda := -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda} = \lambda A R_\lambda$$

(A_λ **regolarizzanti di Yosida di** A).

2. Proviamo preliminarmente che

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda u = Au \quad \text{per ogni} \quad u \in D(A)}. \tag{7.7}$$

Infatti, dall'identità $\lambda R_\lambda u - u = AR_\lambda u = R_\lambda Au$ ($u \in D(A)$), segue

$$\|\lambda R_\lambda u - u\|_X \le \|R_\lambda\|_{B(X)} \cdot \|Au\|_X \le \frac{1}{\lambda}\|Au\|_X \to 0 \text{ per } \lambda \to +\infty,$$

e quindi

$$\lambda R_\lambda u \to u \quad \text{per } \lambda \to +\infty, \quad u \in D(A). \tag{7.8}$$

Poiché $\|\lambda R_\lambda\|_{B(X)} \le 1$ e $D(A)$ è denso in X, il limite precedente vale per ogni $u \in X$, cioè

$$\boxed{\lambda R_\lambda u \to u \quad \text{per } \lambda \to +\infty, \quad u \in X}. \tag{7.9}$$

[2] Ora, se $u \in D(A)$, allora

$$A_\lambda u = \lambda AR_\lambda u = \lambda R_\lambda Au.$$

Per (7.9), considerato Au al posto di u, resta provata la (7.7).

3. Poiché ciascun operatore A_λ è limitato, possiamo costruire l'esponenziale

$$\exp(tA_\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A_\lambda^k = \exp(-\lambda t)\exp(\lambda^2 t R_\lambda) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k.$$

Definiamo

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) &:= \exp(tA_\lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A_\lambda^k = \exp(-\lambda t)\exp(\lambda^2 t R_\lambda) = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k. \end{aligned}$$

[2] Infatti, per ogni $u \in X$ e ogni $\epsilon > 0$, esiste $v \in D(A)$ tale che $\|u - v\|_X < \epsilon$. Risulta:

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R_\lambda u - u\|_X &\le \limsup_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R_\lambda u - \lambda R_\lambda v\|_X + \limsup_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R_\lambda v - v\|_X + \|v - u\|_X \\ &\le \limsup_{\lambda\to+\infty} \|\lambda R_\lambda\|_{B(X)} \cdot \|u - v\|_X + 0 + \|u - v\|_X \le 1 \cdot \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Poiché $\epsilon > 0$ è arbitrario, resta provata la (7.9).

Essendo, per ipotesi, $\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$, risulta

$$\begin{aligned}\|S_\lambda(t)\|_{B(X)} &= \|\exp(tA_\lambda)\|_{B(X)}\\ &\leq \exp(-\lambda t)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda^2 t)^k}{k!}||R_\lambda||^k_{B(X)} \leq \exp(-\lambda t)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1.\end{aligned}$$

Di conseguenza $\{S_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ è un semigruppo di contrazione, ed è facile provare che il suo generatore è A_λ , con $D(A_\lambda) = X$.

4. Dimostriamo che, per $\lambda \to +\infty$, la famiglia di operatori uniformemente limitati $\exp(tA_\lambda)$ converge a un operatore limitato $S(t)$. Siano allora $\lambda, \mu > 0$ e stimiamo la differenza $\exp(tA_\lambda) - \exp(tA_\mu)$. La relazione di commutatività $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, implica $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$; quindi $A_\mu \exp(tA_\lambda) = \exp(tA_\lambda)A_\mu$ per ogni $t > 0$. Per ogni $u \in X$ si ha:

$$\begin{aligned}\exp(tA_\lambda)u - \exp(tA_\mu)u &= \int_0^t \frac{d}{ds}[\exp((t-s)A_\mu)\cdot\exp(sA_\lambda)u]ds\\ &= \int_0^t [\exp((t-s)A_\mu)\cdot\exp(sA_\lambda)(A_\lambda u - A_\mu u)]ds,\end{aligned}$$

essendo

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA_\lambda)u) = A_\lambda\exp(tA_\lambda)u = \exp(tA_\lambda)A_\lambda u.$$

Ne segue che (tenuto conto di (7.7))

$$\|\exp(tA_\lambda) - \exp(tA_\mu)\|_{B(X)} \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\|_X \to 0 \qquad \text{per } \lambda, \mu \to +\infty.$$

Quindi è ben definito il seguente limite

$$S(t)u := \lim_{\lambda\to+\infty} S_\lambda(t)u \quad \text{per ogni} \;\; t \geq 0,\;\; u \in D(A). \tag{7.10}$$

Inoltre, poiché $||S_\lambda(t)||_{B(X)} \leq 1$, il limite (7.10) esiste per ogni $u \in X$, uniformemente in t sugli intervalli limitati.
Verifichiamo che $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ è un semigruppo di contrazione. Infatti,

$$S(0)u = u$$

e

$$\begin{aligned}S(t)S(s)u &= \lim_{\lambda\to+\infty}\exp(tA_\lambda)\exp(sA_\lambda)u\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\exp((t+s)A_\lambda)u = S(t+s)u.\end{aligned}$$

Per ogni fissato $u \in X$, l'applicazione $t \mapsto S(t)u$ è continua essendo il limite delle applicazioni $t \mapsto \exp(tA_\lambda)u$, uniformemente per t in intervalli limitati. Infine, per ogni $t \geq 0$ e $u \in X$ con $\|u\|_X \leq 1$, si ha la stima

$$\begin{aligned}\|S(t)u\|_X &= \lim_{\lambda\to+\infty} \|\exp(tA_\lambda)u\|_X \\ &\leq \limsup_{\lambda\to+\infty} \|\exp(tA_\lambda)\|_{B(X)}\|u\|_X \leq \|u\|_X \leq 1.\end{aligned}$$

5. Resta da dimostrare che A è il generatore del semigruppo di contrazione $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Indichiamo con B questo generatore. Per quanto visto prima, sappiamo che B è operatore lineare, chiuso con $D(B)$ denso in X. Proviamo che $B = A$.

Poiché A_λ è il generatore del semigruppo $\{\exp(tA_\lambda)\}_{t\geq 0}$, per ogni $\lambda > 0$ si ha:

$$S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u\, ds. \tag{7.11}$$

Inoltre, se $u \in D(A)$, per la disuguaglianza triangolare, si ha:

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u - S(s)Au\|_X \leq \|S_\lambda(s)\|_{B(X)}\|A_\lambda u - Au\|_X + \|(S_\lambda(s) - S(s))Au\|_X \to 0$$

per $\lambda \to +\infty$, uniformemente per s in intervalli limitati. Passando al limite per $\lambda \to +\infty$ in (7.11), deduciamo

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)Auds, \quad \text{per ogni} \;\; t \geq 0,\; u \in D(A).$$

Di conseguenza, $D(A) \subseteq D(B)$ e

$$Bu = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)Au\, ds = Au \quad (u \in D(A)).$$

Per provare che $A = B$, rimane da provare che $D(B) \subseteq D(A)$.
Ora, se $\lambda > 0$, allora $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Inoltre, per l'ipotesi,

$$(\lambda I - B)(D(A)) = (\lambda I - A)(D(A)) = X.$$

Quindi l'operatore $(\lambda I - B)|_{D(A)}$ è iniettivo e suriettivo, di conseguenza $D(A) = D(B)$. [3]Pertanto $A = B$ e quindi A è effettivamente il generatore del semigruppo di contrazione $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. □

[3]Più in dettaglio: per provare che $D(B) \subseteq D(A)$, siano $x \in D(B)$ e $\lambda > 0$ (quindi $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$).
Posto $z = \lambda x - Bx$ (per cui $x = R(\lambda, B)z$), si ha $z = (\lambda I - A)R(\lambda, A)z = \lambda R(\lambda, A)z - BR(\lambda, A)z = (\lambda I - B)R(\lambda, A)z$.
Applicando $R(\lambda, B)$ si ottiene $x = R(\lambda, B)z = R(\lambda, A)z \in D(A)$.

Osservazione 7.4.2. La precedente dimostrazione dell'implicazione $(ii) \Rightarrow (i)$ è dovuta a Yosida.
Un'altra dimostrazione della stessa implicazione è dovuta a Hille ed è basata sulle **approssimazioni "backward" di Eulero**

$$\frac{W(t)x - W(t-h)x}{h} = AW(t)x, \quad h > 0$$

per l'equazione

$$\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$$

$(t > 0), \quad x \in D(A)$.
Risolvendo per $W(t)$ si ha:

$$W(t) = (I - hA)^{-1}W(t-h).$$

Posto $h = \frac{t}{n}$ e $t = h, 2h, \ldots$, si ottiene, per induzione,

$$W(t) = \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} W(t-h) =: S_n(t).$$

Si dimostra che :
(1) ciascun $S_n(t)$ è una contrazione,
(2) $S_n(t)$ converge fortemente a un semigruppo il cui generatore è A.

Mostriamo ora che, dato un operatore A soddisfacente le condizioni (ii) del Teorema di Hille-Yosida, il semigruppo generato da A è univocamente determinato.

Teorema 7.4.3 (Unicità del semigruppo generato). *Siano* $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ *due semigruppi di contrazione, aventi lo stesso generatore* A. *Allora*

$$\{S_1(t)\}_{t\geq 0} = \{S_2(t)\}_{t\geq 0}.$$

Dimostrazione. Sia $u \in D(A)$. Allora $S_2(s)u \in D(A)$ e $S_1(t-s)S_2(s)u \in D(A)$, per ogni $0 \leq s \leq t$.
Pertanto, risulta

$$\begin{aligned} S_2(t)u - S_1(t)u &= \int_0^t \frac{d}{ds}[S_1(t-s)S_2(s)u]ds \\ &= \int_0^t [S_1(t-s)(AS_2(s)u) - AS_1(t-s)(S_2(s)u)]ds = 0, \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[S_1(t-s)S_2(s)u] &= \lim_{h\to 0}\frac{S_1(t-s-h)(S_2(s+h)u)-S_1(t-s)S_2(s)u}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{S_1(t-s-h)(S_2(s+h)u-S_2(s)u)}{h}\\ &+ \lim_{h\to 0}\frac{S_1(t-s-h)S_2(s)u-S_1(t-s)S_2(s)u}{h}\\ &= S_1(t-s)(AS_2(s)u)-AS_1(t-s)(S_2(s)u)=0.\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $t \geq 0$, gli operatori lineari e limitati $S_1(t)$ e $S_2(t)$ coincidono sul sottoinsieme denso $D(A)$. Pertanto $S_1(t) = S_2(t)$. □

Definizione 7.4.4. Sia $\omega \in \mathbb{R}$. Un semigruppo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ si dice ω-contrattivo se $||S(t)||_{B(X)} \leq \exp(\omega t)$ per ogni $t \geq 0$.

Una utile variante del precedente Teorema di Hille-Yosida è il risultato che segue (per la dimostrazione cfr., ad esempio, [4]).

Teorema 7.4.5. *Sia A un operatore lineare in uno spazio di Banach X.*

Allora, sono equivalenti le proposizioni:

(i) *A è il generatore di un semigruppo ω-contrattivo.*

(ii) *A è un operatore densamente definito e chiuso. Inoltre,*

$$(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$$

e

$$||R_\lambda||_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda-\omega} \text{ per ogni } \lambda > \omega.$$