

Geometria intrinseca delle superfici

In questo capitolo studiamo principalmente, di una superficie regolare, proprietà e concetti di natura intrinseca, ossia che dipendono soltanto dalla prima forma fondamentale e quindi sono invarianti per isometrie. Ad esempio, sono di natura intrinseca: la distanza (intrinseca), la derivata covariante (di Levi-Civita), il concetto di curva geodetica e quello di curvatura gaussiana (“Teorema egregium” di Gauss). Proprietà che dipendono dall’operatore forma, ovvero dalla seconda forma fondamentale, e quindi dalla loro “forma” in \mathbb{R}^3 , si dicono proprietà estrinseche. Superfici congruenti, ossia superfici che hanno “stessa forma” in \mathbb{R}^3 , sono superfici isometriche che hanno “stesso” operatore forma.

5.1. Distanza intrinseca

Uno dei concetti più importanti nell’ambito della geometria intrinseca di una superficie è quello di distanza che adesso introduciamo.

Sia M una superficie regolare (connessa) di \mathbb{R}^3 . Se p e q sono due punti di M , possiamo considerare la distanza euclidea

$$d_0(p, q) = \|q - p\|,$$

ed è ben noto che la curva che realizza tale distanza e il segmento che congiunge p e q , segmento che in generale non si trova sulla superficie. Vogliamo definire una distanza intrinseca tra p e q , ovvero una distanza che si basi solo su misure fatte sulla superficie M .

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ è una curva differenziabile di M con sostegno $\gamma([a, b])$ che non si può ricoprire con una sola parametrizzazione (D, φ) , allora $\gamma([a, b])$ (in quanto compatto) lo si può ricoprire con un numero finito di domini $\varphi_i(D_i)$ e

$$L(\gamma) := \sum_{i=1}^r L(\gamma_i) \geq 0,$$

dove ogni arco γ_i ha sostegno contenuto in $\varphi_i(D_i)$. Se γ è una curva differenziabile a tratti, $L(\gamma)$ è definita come somma finita delle lunghezze degli archi differenziabili. Ora, sia $C(p, q)$ l’insieme di tutte le curve differenziabili a tratti che congiungono p e q . Si può provare (usando il fatto che M è connessa) che $C(p, q)$ è non vuoto. Possiamo quindi definire la funzione

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+, (p, q) \mapsto d(p, q) = \inf_{\gamma \in C(p, q)} L(\gamma) \geq 0.$$

Proposizione 5.1. *La funzione d definisce una distanza su M (detta distanza intrinseca), ovvero per ogni $p, q, x \in M$ sono verificate le seguenti proprietà:*

- (1) $d(p, q) = d(q, p)$,
- (2) $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$,
- (3) $d(p, q) \geq 0$, $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Basta osservare che se $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ congiunge p a q , allora $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1 - t)$ congiunge q a p e $L(\gamma) = L(\gamma^{-1})$.

(2) Dalle definizioni di $d(p, x)$ e $d(x, q)$ segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\gamma_1 \in C(p, x)$ ed esiste $\gamma_2 \in C(x, q)$ tali che

$$L(\gamma_1) < d(p, x) + \varepsilon/2, \quad L(\gamma_2) < d(x, q) + \varepsilon/2.$$

Allora,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \in C(p, q), \quad L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) < d(p, x) + d(x, q) + \varepsilon,$$

e quindi

$$d(p, q) = \inf_{\sigma \in C(p, q)} L(\sigma) \leq L(\gamma) < d(p, x) + d(x, q) + \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Pertanto, $d(p, q) \leq d(p, x) + d(x, q)$.

(3) L'implicazione $p = q \Rightarrow d(p, q) = 0$ è banale. Proviamo che

$$d(p, q) = 0 \Rightarrow p = q, \quad \text{cioè } p \neq q \Rightarrow d(p, q) > 0.$$

Supponiamo $p \neq q$. Sia (D, φ) una parametrizzazione locale con $\varphi(x_0) = p$, $x_0 = (u_0, v_0)$, e $q \notin \varphi(D)$. Sia $r > 0$ tale che il disco chiuso $\bar{B}(x_0, r) \subset D$. Consideriamo ora una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, $\gamma \in C(p, q)$. Poiché $q = \gamma(1) \notin \varphi(\bar{B}(x_0, r))$, la componente connessa di 0 in $\gamma^{-1}(\varphi(\bar{B}(x_0, r)))$ è del tipo $[0, \delta]$ con $\delta < 1$. Allora, posto $\tilde{\gamma} = \varphi^{-1} \circ \gamma|_{[0, \delta]}$, si ha

$$L(\gamma|_{[0, \delta]}) = \int_0^\delta \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^\delta \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt = L(\tilde{\gamma}) \geq r$$

in quanto $\tilde{\gamma}(\delta) \in \partial \bar{B}(x_0, r) = \mathbb{S}^1(x_0, r)$. Pertanto,

$$L(\gamma) \geq L(\gamma|_{[0, \delta]}) \geq r \quad \text{per ogni } \gamma \in C(p, q),$$

e quindi

$$d(p, q) = \inf L(\gamma) \geq r > 0.$$

□

Esempio 5.2. La distanza euclidea

Se la superficie M è il piano euclideo \mathbb{R}^2 , la corrispondente funzione d è la distanza euclidea d_0 . Basta osservare che il segmento $\gamma_0(t) = (1 - t)p + tq$, $t \in [0, 1]$, ha $L(\gamma_0) = \|q - p\|$ e, per ogni $\gamma \in C(p, q)$, la disuguaglianza

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \geq \dot{\gamma}(t) \cdot \left(\frac{q - p}{\|q - p\|} \right)$$

implica

$$L(\gamma) \geq \|q - p\| = L(\gamma_0).$$

Esempio 5.3. La distanza sulla sfera

Sia \mathbb{S}^2 la sfera canonica di centro C_0 e raggio r . Proviamo che per ogni $p, q \in \mathbb{S}^2$, $p \neq q$, esiste una curva differenziabile minimale γ che li congiunge (ed è unica se $q \neq -p$). Più precisamente,

$$d(p, q) = L(\gamma) = r \vartheta(p, q),$$

dove γ è l'arco più corto della circonferenza di raggio massimo che congiunge p e q , e $\vartheta(p, q)$ è l'angolo convesso individuato da p e q (pensati come vettori).

Siano p e q due punti di \mathbb{S}^2 , $p \neq q$, e sia Γ la circonferenza di raggio massimo per p e q . Denotiamo con π il piano che contiene Γ . Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane con origine in C_0 e piano coordinato $\pi_{yz} = \pi$. Sia $(D, \varphi, (u, v))$ il corrispondente sistema di coordinate geografiche, u colatitudine e v longitudine (cf. Esercizio 3.12). Allora, siccome p e q hanno stessa longitudine, possiamo assumere $p = \varphi(u_0, v_0)$ e $q = \varphi(u_1, v_1 = v_0)$ con $u_1 \geq u_0$, $u_0, u_1 \in [0, \pi]$. Se $\gamma_0(t)$, $t \in [0, 1]$, è l'arco (più corto) di Γ che congiunge p a q : $\gamma_0(0) = p$ e $\gamma_0(1) = q$, si ha che

$$L(\gamma_0) = r \vartheta(p, q) = r(u_1 - u_0).$$

Ora, sia $\gamma(t)$ una generica curva di \mathbb{S}^2 che, per semplicità di notazione, assumiamo differenziabile, che congiunge p a q . Quindi,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \varphi(u(t), v(t)) = (r \operatorname{sen} u(t) \cos v(t), r \operatorname{sen} u(t) \operatorname{sen} v(t), r \cos u(t)) \\ &= (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

con $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$ e $v(0) = v(1) = v_0$. Rispetto alla parametrizzazione definita dalle coordinate geografiche, $\varphi_u = (r \cos u \cos v, r \cos u \operatorname{sen} v, -r \operatorname{sen} u)$ e $\varphi_v = (-r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u \cos v, 0)$, per cui i coefficienti della prima forma fondamentale sono

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \operatorname{sen}^2 u.$$

Allora

$$\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = r^2 u'(t)^2 + r^2 (v'(t))^2 \operatorname{sen}^2 u(t)$$

e quindi (se γ fosse differenziabile a tratti dovremmo considerare una somma finita di integrali)

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt = r \int_0^1 \sqrt{u'(t)^2 + (v'(t))^2 \operatorname{sen}^2 u(t)} dt \\ &\geq r \int_0^1 |u'(t)| dt = r(u_1 - u_0) = L(\gamma_0). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in C(p, q)} L(\gamma) = L(\gamma_0) = r(u_1 - u_0).$$

Osservazione 5.4. Si noti che nei due esempi precedenti, per ogni $p, q \in M$ esiste sempre una curva differenziabile $\gamma \in C(p, q)$ tale che $L(\gamma) = d(p, q)$. Ciò

non vale sempre, ad esempio se consideriamo la superficie $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e i punti $p = (-1, 0), q = (1, 0)$, si ha:

$$d(p, q) = 2 \quad \text{ma non esiste } \gamma \in C(p, q) \text{ tale che } L(\gamma) = 2.$$

In ogni caso, se M è una arbitraria superficie regolare (connessa) si ha

$$d(p, q) \geq d_0(p, q) \quad \text{per ogni } p, q \in M,$$

dove d_0 è la distanza euclidea.

5.2. Superfici isometriche

In questa sezione studieremo il concetto di superfici isometriche. Tale concetto, come vedremo, è di natura intrinseca, ovvero dipende solo dalla prima forma fondamentale. In particolare, come una conseguenza del Teorema egregium di Gauss, si ottiene che la curvatura gaussiana è invariante per isometrie (locali) e quindi è un invariante intrinseco della superficie.

Definizione 5.5. *Siano M_1, M_2 due superfici regolari di \mathbb{R}^3 . Diremo che un diffeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ è una isometria se il suo differenziale conserva la prima forma fondamentale, ovvero*

$$(5.1) \quad f_{*p} v_p \cdot f_{*p} w_p = v_p \cdot w_p \quad \forall p \in M_1 \text{ e } \forall v_p, w_p \in T_p M_1.$$

Diremo che $f : M_1 \rightarrow M_2$ è una isometria locale se per ogni $p \in M_1$ esistono U_1 intorno aperto di p in M_1 e U_2 intorno aperto di $f(p)$ in M_2 tali che $f : U_1 \rightarrow U_2$ sia una isometria.

Diremo che due superfici M_1, M_2 sono isometriche se esiste una isometria $f : M_1 \rightarrow M_2$. Diremo che M_1, M_2 sono localmente isometriche se per ogni $p \in M_1$ esistono U_1 intorno aperto di p in M_1 e U_2 intorno aperto di $f(p)$ in M_2 tali che $f : U_1 \rightarrow U_2$ sia una isometria. Una proprietà geometrica (o una quantità geometrica, o un oggetto geometrico) di una superficie regolare M diremo che è un **invariante intrinseco** della stessa superficie se è invariante per isometrie.

Osservazione 5.6. Se il differenziale di un'applicazione differenziabile $f : M_1 \rightarrow M_2$ conserva la prima forma fondamentale in un fissato punto p , allora il differenziale f_{*p} è un isomorfismo e quindi f è un diffeomorfismo locale definito su un intorno di p .

L'aspetto fondamentale delle superfici (localmente) isometriche è che sono caratterizzate dal fatto di avere la "stessa" prima forma fondamentale. In termini più precisi abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 5.7. *Siano M_1, M_2 due superfici regolari di \mathbb{R}^3 . Allora, M_1, M_2 sono localmente isometriche se e solo se per ogni fissato $p_1 \in M_1$ esistono una parametrizzazione locale (D, φ) di M_1 , $p_1 \in \varphi(D)$, e una parametrizzazione locale $(D, \bar{\varphi})$ di M_2 tali che*

$$E(u, v) = \bar{E}(u, v), \quad F(u, v) = \bar{F}(u, v) \quad \text{e} \quad G(u, v) = \bar{G}(u, v) \quad \forall (u, v) \in D.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano M_1, M_2 localmente isometriche. Per definizione esistono un intorno U_1 di p_1 in M_1 , un aperto U_2 in M_2 e un'isometria $f : U_1 \subset M_1 \rightarrow U_2 \subset M_2$. Allora, presa una parametrizzazione locale (D, φ) di M_1 con $p_1 \in \varphi(D) \subset U_1$, l'applicazione $\bar{\varphi} = f \circ \varphi : D \rightarrow M_2$ definisce una parametrizzazione locale di M_2 . Rispetto a queste parametrizzazioni, se $p = \varphi(u, v)$, si ha $f(p) = f(\varphi(u, v)) = \bar{\varphi}(u, v)$. Inoltre, si ottiene

$$\bar{E}(u, v) = \bar{\varphi}_u \cdot \bar{\varphi}_u = f_*\varphi_u \cdot f_*\varphi_u = \varphi_u \cdot \varphi_u = E(u, v),$$

e analogamente per gli altri coefficienti della prima forma fondamentale.

Viceversa, fissato $p_1 \in M_1$, consideriamo (D, φ) e $(D, \bar{\varphi})$ parametrizzazioni come nell'enunciato. Allora $f = \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : U_1 = \varphi(D) \rightarrow U_2 = \bar{\varphi}(D)$ è chiaramente un diffeomorfismo. Inoltre, tale f è una isometria. Infatti, tenendo presente la definizione di differenziale, si ha

$$f_*\varphi_u \cdot f_*\varphi_u = (f \circ \varphi)_u \cdot (f \circ \varphi)_u = \bar{\varphi}_u \circ \bar{\varphi}_u = \bar{E}(u, v) = E(u, v) = \varphi_u \circ \varphi_u;$$

analogamente

$$f_*\varphi_u \cdot f_*\varphi_v = \varphi_u \circ \varphi_v \quad \text{e} \quad f_*\varphi_v \cdot f_*\varphi_v = \varphi_v \circ \varphi_v.$$

Pertanto, M_1, M_2 sono localmente isometriche. □

Una caratterizzazione delle isometrie è la seguente

Proposizione 5.8. *Sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ un diffeomorfismo (risp. diffeomorfismo locale) tra superfici. Allora, f è una isometria (risp. isometria locale) se e solo se f conserva la lunghezza di curve, ovvero $L(\gamma) = L(f(\gamma))$ per ogni curva differenziabile di M_1 .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ una isometria locale. Se $\gamma_1(t)$ è una curva differenziabile di M_1 , allora la curva $\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t))$ ha velocità scalare $\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \|f_*(\dot{\gamma}_1(t))\| = \|\dot{\gamma}_1(t)\|$, e quindi $L(\gamma_1) = L(f(\gamma_1))$.

Viceversa, assumiamo che $L(\gamma) = L(f(\gamma))$ per ogni curva differenziabile di M_1 . Consideriamo un punto $p \in M_1$ e un vettore tangente $v_p \in T_p M_1$. Sia $\gamma_1(t)$, $|t| < \varepsilon$, una curva differenziabile di M_1 con $\gamma_1(0) = p$, $\dot{\gamma}_1(0) = v_p$. La curva $\gamma_2(t) = f(\gamma_1(t))$ ha velocità scalare

$$\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \|f_*(\dot{\gamma}_1(t))\|.$$

Fissato $t_0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, poniamo

$$L_{\gamma_1}(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt \quad \text{e} \quad L_{\gamma_2}(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt.$$

Poichè f conserva la lunghezza di curve, si ha $L_{\gamma_1}(t) = L_{\gamma_2}(t)$ e quindi

$$\left(\int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt \right)' = \left(\int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt \right)',$$

da cui segue

$$\|\dot{\gamma}_1(t)\| = \|\dot{\gamma}_2(t)\|.$$

In particolare, per $t = 0$ si ha

$$\|v_p\| = \|\dot{\gamma}_1(0)\| = \|\dot{\gamma}_2(0)\| = \|f_{*p}(\dot{\gamma}_1(0))\| = \|f_{*p}(v_p)\|,$$

e quindi f è una isometria. \square

Corollario 5.9. *La distanza definita su una superficie (cf. Sezione 5.1) è un invariante intrinseco della stessa superficie. In altre parole, se $f : M_1 \rightarrow M_2$ è una isometria tra superfici regolari, allora*

$$d_1(p, q) = d_2(f(p), f(q)) \quad \text{per ogni } p, q \in M_1.$$

Osservazione 5.10. Si noti che del Corollario 5.9 vale anche il viceversa. Più precisamente, si può dimostrare che se $f : M_1 \rightarrow M_2$ è un'applicazione suriettiva tra superfici regolari che conserva le distanze, allora f è una isometria.

Esercizio 5.11. Si verifichi che l'insieme $\text{Iso}(M)$ di tutte le isometrie di una superficie regolare M è un gruppo rispetto alla usuale composizione. $\text{Iso}(M)$ è detto *gruppo delle isometrie* di M .

La seguente proposizione ci dice come si possono costruire isometrie di una superficie.

Proposizione 5.12. *Se F è un'isometria dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 e M_1, M_2 sono due superfici regolari di \mathbb{R}^3 con $F(M_1) = M_2$, allora $f = F|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$ è un'isometria tra superfici e $f_{*p} = F_{*p}|_{T_p M_1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Se F è un'isometria di \mathbb{R}^3 , allora F è bigettiva, F, F^{-1} sono differenziabili e F_{*p} conserva il prodotto scalare. Ne segue che anche $f = F|_{M_1} : M_1 \rightarrow M_2$ è bigettiva e che f, f^{-1} sono differenziabili. Inoltre, prendendo $p \in M_1$ e $v_p \in T_p M_1$, e quindi una curva differenziabile $\gamma(t)$ di M_1 con $\gamma(0) = p$ e $v_p = \dot{\gamma}(0)$, si ha

$$f_{*p}v_p = f_{*p}\dot{\gamma}(0) = (f \circ \dot{\gamma})(0) = (F \circ \dot{\gamma})(0) = F_{*p}v_p.$$

Ciò implica che $f_{*p} = F_{*p}|_{T_p M_1}$ e che f_{*p} conserva il prodotto scalare. Pertanto, f è un'isometria tra superfici. \square

Il seguente teorema determina le isometrie della sfera canonica \mathbb{S}^2 (di centro l'origine e raggio 1).

Teorema 5.13. *Le isometrie della sfera canonica \mathbb{S}^2 sono tutte e sole le restrizioni a \mathbb{S}^2 delle trasformazioni ortogonali di \mathbb{R}^3 . Quindi, il gruppo delle isometrie $\text{Iso}(\mathbb{S}^2)$ si può identificare con $O(3)$ gruppo delle matrici ortogonali di ordine 3.*

DIMOSTRAZIONE. Le trasformazioni ortogonali sono isometrie di \mathbb{R}^3 e quindi, applicando la proposizione precedente, per provare che la restrizione a \mathbb{S}^2 di una trasformazione ortogonale F è una isometria, basta verificare che $F(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$. Se $p \in \mathbb{S}^2$, allora $\|p\|^2 = 1$ implica $\|F(p)\|^2 = \|p\|^2 = 1$ e quindi $F(p) \in \mathbb{S}^2$, cioè $F(\mathbb{S}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$. Essendo F ortogonale, anche F^{-1} lo è, per cui

$F^{-1}(\mathbb{S}^2) \subseteq \mathbb{S}^2$. Applicando F si ottiene $\mathbb{S}^2 = F(F^{-1}(\mathbb{S}^2)) \subseteq F(\mathbb{S}^2)$ e quindi $F(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2$.

Viceversa, sia ora f un'isometria della sfera \mathbb{S}^2 . Proviamo che f è la restrizione ad \mathbb{S}^2 di una trasformazione ortogonale F di \mathbb{R}^3 . Ricordiamo che la distanza su \mathbb{S}^2 è definita in questo modo (cf. Esempio 5.3):

$$d(x, y) = \vartheta(x, \hat{y}) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^2,$$

dove ϑ è l'angolo convesso tra x e y . Allora, poiché f è un'isometria di \mathbb{S}^2 , applicando il Corollario 5.9, si ha

$$\vartheta(x, \hat{y}) = \vartheta(f(x), \hat{f(y)})$$

e quindi

$$(5.2) \quad x \cdot y = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{S}^2,$$

cioè f conserva il prodotto scalare di vettori unitari di \mathbb{R}^3 . Adesso consideriamo l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto F(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Allora, $F|_{\mathbb{S}^2} = f$. Inoltre, F conserva il prodotto scalare di \mathbb{R}^3 . Infatti, usando la (5.2), per $x, y \in \mathbb{R}^3, x, y \neq 0$, si ha

$$F(x) \cdot F(y) = \|x\| \|y\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = x \cdot y.$$

Poiché F conserva il prodotto scalare, è facile vedere che è anche lineare e quindi una trasformazione ortogonale. \square

Omogeneità

Una superficie regolare M di \mathbb{R}^3 si dice *omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste una isometria di M tale che $f(p) = q$.

- Il **piano euclideo** (\mathbb{R}^2, g_0) è banalmente omogeneo. Per ogni $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, la traslazione definita da $F(p) = p + v, v = p_2 - p_1$, soddisfa la proprietà $F(p_1) = p_2$.

- **Omogeneità della sfera.** Verifichiamo che la sfera canonica \mathbb{S}^2 è omogenea. Siano $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^2$ con $p_1 \neq p_2$, altrimenti come isometria si considera l'identità. Sia E^2 il piano per l'origine (che è il centro della sfera) e per i punti p_1 e p_2 . Indichiamo con R la rotazione nel piano E^2 che porta p_1 in p_2 . Se $\{e_1, e_2\}$ è una base ortonormale di E^2 e $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^3 , allora la trasformazione T di \mathbb{R}^3 definita da $T(e_1) = R(e_1), T(e_2) = R(e_2), T(e_3) = e_3$ è una trasformazione ortogonale e quindi un'isometria di \mathbb{S}^2 (cf. Teorema 5.13). Tale isometria soddisfa $T(p_1) = R(p_1) = p_2$.

Esempio 5.14. L'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \text{ (cilindro } x^2 + y^2 = 1), \\ (u, v) \mapsto (e^{iu}, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

è un esempio di isometria locale. Infatti, consideriamo su \mathbb{R}^2 la parametrizzazione locale

$$\varphi : D =]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (u, v, 0) \equiv (u, v)$$

e su M la parametrizzazione locale

$$\bar{\varphi} : \bar{D} = D \rightarrow M, \bar{\varphi} : (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (\cos \bar{u}, \sin \bar{u}, \bar{v}).$$

Rispetto a queste parametrizzazioni, risulta

$$\tilde{f} = \bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : (u, v) \xrightarrow{\varphi} (u, v) \xrightarrow{f} (\cos u, \sin u, v) \xrightarrow{\bar{\varphi}^{-1}} (\bar{u}, \bar{v}) = (u, v)$$

cioè $\tilde{f} = I_d$. Quindi lo jacobiano $J(f)_p = I_d$, da cui segue che f_{*p} conserva il prodotto scalare. Inoltre, f localmente è un diffeomorfismo, ma non è bigettiva, pertanto f è un'isometria locale. Osserviamo che se consideriamo la superficie M_1 data dalla striscia di piano $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ e la superficie M_2 data dal cilindro privato di una retta generatrice, ad esempio l'asse delle z , allora le due superfici sono isometriche, tuttavia esse non sono congruenti (cf. Osservazione 5.32).

Esercizio 5.15. Sia data l'isometria locale (considerata nell'esempio precedente) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow M = S^1 \times \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto (e^{iu}, v) = (\cos u, \sin u, v)$. Si considerino nel piano $\mathbb{R}^2(x, y)$ le rette $r_1 : x = u_0$, $r_2 : y = v_0$, $r_3 : y = bx$. Riconoscere le curve $\gamma_i = f(r_i)$, per $i = 1, 2, 3$, del cilindro M .

Osservazione 5.16. Sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ un'isometria (locale), e siano (D_1, φ_1) , (D_2, φ_2) parametrizzazioni locali di M_1 e M_2 in p e $f(p)$ rispettivamente. Siano A_I e B_I le matrici dei coefficienti della prima forma fondamentale di M_1 e M_2 rispetto alle parametrizzazioni considerate, e sia $J(f)$ la matrice jacobiana associata a f rispetto alle stesse parametrizzazioni. Dalla definizione di differenziale (cf. Section 3.6) segue che $J(f)$ è la matrice associata all'applicazione lineare f_* rispetto alle basi coordinate, pertanto la condizione (5.1) che definisce un'isometria (locale) è equivalente alla condizione matriciale:

$$(5.3) \quad A_I = (J(f))^T B_I J(f),$$

dove $(J(f))^T$ è la trasposta di $J(f)$.

Esempio 5.17. Consideriamo il cono rotondo $M_0 : z^2 - (x^2 + y^2) = 0$, $z > 0$. Più precisamente, M_0 è un semicono di vertice l'origine.

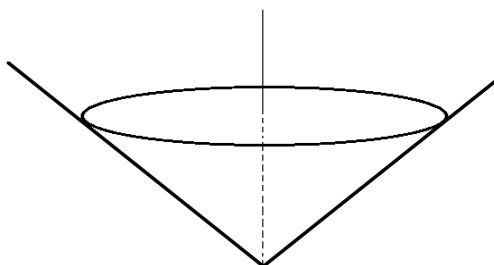


FIGURA 1. Semicono rotondo.

Osserviamo che l'intera superficie M_0 è descritta da

$$\varphi(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v \cos u, v \sin u, v), \text{ con } u \in [0, 2\pi[\text{ e } v > 0.$$

Si noti che $\pi/4$ è l'angolo di semiapertura del cono considerato (cf. Figura 1). Proviamo che M_0 è localmente isometrico al piano \mathbb{R}^2 , e a tal fine verifichiamo che l'applicazione

$$f : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3, p = \varphi(u, v) \mapsto f(p) = \left(v \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u, v \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u, 0 \right),$$

è un'isometria locale. La coppia (D, φ) , $D = \{(u, v) : u \in]0, 2\pi[, v > 0\}$, definisce una parametrizzazione locale di M_0 , e $\bar{\varphi} : (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ è una parametrizzazione globale per il piano. Rispetto alla parametrizzazione (D, φ) , abbiamo $\varphi_u = \frac{\sqrt{2}}{2}(-v \sin u, v \cos u, 0)$ e $\varphi_v = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos u, \sin u, 1)$, e quindi la matrice dei coefficienti della prima forma fondamentale di M_0 è

$$A_I = \begin{pmatrix} v^2/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, la matrice dei coefficienti della prima forma fondamentale per \mathbb{R}^2 è

$$B_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altronde, rispetto alle fissate parametrizzazioni,

$$f \equiv \bar{\varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi : (u, v) \mapsto (f_1(u, v), f_2(u, v)) = \left(v \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u, v \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u \right),$$

e quindi la matrice jacobiana di f è data da

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} v \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u & \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u \\ \frac{\sqrt{2}}{2} v \cos \frac{\sqrt{2}}{2} u & \sin \frac{\sqrt{2}}{2} u \end{pmatrix}.$$

Infine, un facile calcolo mostra che

$$(J(f))^t B_I J(f) = (J(f))^t J(f) = \begin{pmatrix} v^2/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_I.$$

Pertanto, per quanto detto nell'Osservazione 5.16, f è un'isometria locale.

Esercizio 5.18. Ripetere lo svolgimento dell'Esempio 5.17 dove

$$M_0 : z = k\sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0), \text{ con } k \text{ costante positiva.}$$

Esempio 5.19. Sia Σ la superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva semplice regolare $\gamma(v) : x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u)$, $u \in]a, b[$, intorno all'asse z . Una rappresentazione parametrica locale di Σ è data da

$$\varphi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \text{ con } u \in]a, b[\text{ e } v \in]0, 2\pi[.$$

Abbiamo visto (cf. Esempio 3.64) che i coefficienti della 1^a forma fondamentale sono dati da

$$E = \|\varphi_u\|^2 = \|\dot{\gamma}(u)\|^2, \quad G = \|\varphi_v\|^2 = f^2(u) > 0 \quad \text{e} \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v = 0.$$

In particolare, se come curva consideriamo la *catenaria*

$$\gamma(u) : x = a \cosh u, y = 0, z = au, \quad a = \text{cost} \neq 0, \quad u \in \mathbb{R},$$

la corrispondente superficie di rotazione, detta *catenoide*, ha la seguente parametrizzazione regolare

$$\varphi(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au), \quad \text{con } u \in \mathbb{R} \text{ e } v \in]0, 2\pi[.$$

Pertanto, rispetto a questa parametrizzazione, i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$E = a^2(1 + \sinh^2 u) = a^2 \cosh^2 u, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2 \cosh^2 u.$$

Facciamo vedere che la *catenoide* è *localmente isometrica all'elicoide*.

Ricordiamo che una rappresentazione parametrica regolare dell'elicoide, denotando con (\bar{u}, \bar{v}) i parametri, è data da (cf. Esempio 3.65)

$$\bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} \cos \bar{v}, \bar{u} \sin \bar{v}, a\bar{v}), \quad (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[.$$

Sull'elicoide consideriamo il seguente cambiamento di parametri:

$$\bar{v} = v, \quad \bar{u} = a \sinh u, \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[.$$

Tale cambio di parametri è ammissibile in quanto la corrispondenza è biunivoca, e la matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} a \cosh u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per ogni (u, v) . Rispetto a nuovi parametri (u, v) , l'elicoide è parametrizzato da

$$\psi(u, v) = (a \sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, av), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[,$$

e i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da

$$E = a^2 \cosh^2 u, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2 \cosh^2 u.$$

Dalla Proposizione 5.7, segue che la *catenoide* e l'*elicoide* sono superfici localmente isometriche.

Esercizio 5.20. Si consideri l'elicoide M : $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$. Si verifichi che le seguenti trasformazioni definiscono isometrie di M .

- $R_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, 0, 0) - (0, y, z)$, (simmetria ortogonale rispetto all'asse x);
- $R_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (0, y, 0) - (x, 0, z)$; (simmetria ortogonale rispetto all'asse y);
- $T_a : \varphi(u, v) \mapsto \varphi(u, v + a)$, dove $a \in \mathbb{R}$.

Osservazione 5.21. Sia M una superficie regolare di \mathbb{R}^3 . Consideriamo una dilatazione (detta anche omotetia)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (ax, ay, az), \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Se A è una quantità relativa alla superficie M , con \bar{A} denotiamo la corrispondente quantità della superficie $\bar{M} = f(M)$. Allora, i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di \bar{M} sono dati da

$$(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}) = a^2(E, F, G) \quad e \quad (\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) = a(l, m, n).$$

Quindi, per la curvatura gaussiana e la curvatura media di \bar{M} si ha

$$\bar{K} = a^{-2}K \quad e \quad \bar{H} = a^{-1}H.$$

In particolare, superfici a curvatura gaussiana costante si possono sempre ricondurre ai casi di

$$K = 1, 0, -1.$$

Per la verifica di quanto enunciato si può procedere nel seguente modo.

Primo passo: osservare che

$$\bar{\varphi}_u = a\varphi_u, \quad \bar{\varphi}_v = a\varphi_v, \quad \bar{N}_{f(p)} = N_p \quad (\text{come parti vettoriali}).$$

Secondo passo: calcolare $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ applicando la definizione, calcolare $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ applicando la (b) del Teorema 4.7, e infine calcolare \bar{K}, \bar{H} applicando la (4.6) e la (4.7).

Adesso proviamo il famoso

Teorema 5.22. (Teorema egregium di Gauss) *La curvatura gaussiana di una superficie regolare M di \mathbb{R}^3 è invariante per isometrie (locali), ovvero dipende solo dalla prima forma fondamentale, quindi è un invariante intrinseco della superficie.*

DIMOSTRAZIONE. Sia M una superficie regolare. Consideriamo una parametrizzazione locale $(D, \varphi, (u, v))$ e sia $N = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / \sqrt{EG - F^2}$. Ricordiamo che vale la (4.15) la quale si può anche scrivere nella forma

$$N_u \wedge N_v = K(u, v)(\varphi_u \wedge \varphi_v).$$

Moltiplicando scalarmente tale formula per $\varphi_u \wedge \varphi_v$, abbiamo

$$K\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = (N_u \wedge N_v) \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v),$$

e tenendo presente l'identità

$$(v_1 \wedge v_2) \cdot (w_1 \wedge w_2) = (v_1 \cdot w_1)(v_2 \cdot w_2) - (v_1 \cdot w_2)(v_2 \cdot w_1),$$

si ha

$$(5.4) \quad K\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 = (N_u \cdot \varphi_u)(N_v \cdot \varphi_v) - (N_u \cdot \varphi_v)(N_v \cdot \varphi_u).$$

Poi dalla definizione di N segue che

$$N_u = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(\varphi_{uu} \wedge \varphi_v + \varphi_u \wedge \varphi_{vu}) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \varphi_u \wedge \varphi_v,$$

$$N_v = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(\varphi_{uv} \wedge \varphi_v + \varphi_u \wedge \varphi_{vv}) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \varphi_u \wedge \varphi_v,$$

e quindi

$$\begin{aligned} N_u \cdot \varphi_u &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_{uu} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u, & N_u \cdot \varphi_v &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_u \wedge \varphi_{vv} \cdot \varphi_v, \\ N_v \cdot \varphi_u &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_{uv} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u, & N_v \cdot \varphi_v &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \varphi_u \wedge \varphi_{vv} \cdot \varphi_v. \end{aligned}$$

Allora, la (5.4) diventa

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= (\varphi_{uu} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u)(\varphi_u \wedge \varphi_{vv} \cdot \varphi_v) - (\varphi_{uv} \wedge \varphi_v \cdot \varphi_u)(\varphi_u \wedge \varphi_{uv} \cdot \varphi_v) \\ &= (\varphi_{uu} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v)(\varphi_{vv} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v) - (\varphi_{uv} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v)(\varphi_{uv} \wedge \varphi_u \cdot \varphi_v). \end{aligned}$$

Usando l'espressione del prodotto misto in termini matriciali, si ha

$$K(EG - F^2)^2 = \det \left(\begin{pmatrix} \varphi_{uu} \\ \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix} (\varphi_{vv} \varphi_u \varphi_v) \right) - \det \left(\begin{pmatrix} \varphi_{uv} \\ \varphi_u \\ \varphi_v \end{pmatrix} (\varphi_{uv} \varphi_u \varphi_v) \right),$$

dove $\varphi_{uu}, \varphi_{vv}, \varphi_{uv}, \varphi_{uv}, \varphi_v$ sono considerati come vettori riga oppure come vettori colonna. Sviluppando si ottiene

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= \det \begin{pmatrix} \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} & \varphi_{uu} \cdot \varphi_u & \varphi_{uu} \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_{vv} & \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_{vv} & \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix} \\ &\quad - \det \begin{pmatrix} \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} & \varphi_{uv} \cdot \varphi_u & \varphi_{uv} \cdot \varphi_v \\ \varphi_u \cdot \varphi_{uv} & \varphi_u \cdot \varphi_u & \varphi_u \cdot \varphi_v \\ \varphi_v \cdot \varphi_{uv} & \varphi_v \cdot \varphi_u & \varphi_v \cdot \varphi_v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e quindi, tenendo conto che

$$\varphi_u \cdot \varphi_{vv} = (F_v - (1/2)G_u) \quad \text{e} \quad \varphi_{uu} \cdot \varphi_v = (F_u - (1/2)E_v),$$

si ha

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= (\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv})(EG - F^2) - (\varphi_u \cdot \varphi_{vv})(G\varphi_{uu} \cdot \varphi_u - F\varphi_{uu} \cdot \varphi_v) \\ &\quad + (\varphi_v \cdot \varphi_{vv})(F\varphi_{uu} \cdot \varphi_u - E\varphi_{uu} \cdot \varphi_v) - (\varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv})(EG - F^2) \\ &\quad + (\varphi_u \cdot \varphi_{uv})(G\varphi_{uv} \cdot \varphi_u - F\varphi_{uv} \cdot \varphi_v) \\ &\quad - (\varphi_v \cdot \varphi_{uv})(F\varphi_{uv} \cdot \varphi_u - E\varphi_{uv} \cdot \varphi_v) \\ &= (\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv})(EG - F^2) \\ &\quad - (F_v - (1/2)G_u) \left[(1/2)E_u G - F(F_u - (1/2)E_v) \right] \\ &\quad + (1/2)G_v \left[(1/2)E_u F - E(F_u - (1/2)E_v) \right] \\ &\quad + (1/4)E_v(E_v G - FG_u) - (1/4)G_u(FE_v - EG_u). \end{aligned}$$

Osserviamo che tutti i termini, tranne il primo, dipendono esplicitamente solo dalla prima forma fondamentale. Esaminiamo quindi il termine

$$(\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv}).$$

Derivando $(1/2)E_v = \varphi_u \cdot \varphi_{uv}$ rispetto a v , e $F_v - (1/2)G_u = \varphi_u \cdot \varphi_{vv}$ rispetto a u , otteniamo

$$\begin{aligned}\varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv} + \varphi_u \cdot \varphi_{uvv} &= (1/2)E_{vv}, \\ \varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} + \varphi_u \cdot \varphi_{vvu} &= F_{uv} - (1/2)G_{uu},\end{aligned}$$

e quindi

$$(\varphi_{uu} \cdot \varphi_{vv} - \varphi_{uv} \cdot \varphi_{uv}) = F_{uv} - (1/2)G_{uu} - (1/2)E_{vv}.$$

Pertanto la curvatura gaussiana dipende solo dalla prima forma fondamentale e quindi, tenendo presente la Proposizione 5.7, la curvatura gaussiana è invariante per isometrie locali. \square

Osservazione 5.23. Dalla dimostrazione del Teorema egregium di Gauss segue che la curvatura gaussiana è data dalla seguente formula:

$$\begin{aligned}(5.5) \quad K(EG - F^2)^2 &= \left[F_{uv} - (1/2)G_{uu} - (1/2)E_{vv} \right] (EG - F^2) \\ &\quad - (F_v - (1/2)G_u) \left[(1/2)E_u G - F(F_u - (1/2)E_v) \right] \\ &\quad + (1/2)G_v \left[(1/2)E_u F - E(F_u - (1/2)E_v) \right] \\ &\quad + (1/4)E_v (E_v G - F G_u) - (1/4)G_u (F E_v - E G_u).\end{aligned}$$

In particolare, se $F = 0$ (la parametrizzazione considerata ha curve coordinate ortogonali) la formula precedente diventa

$$\begin{aligned}(5.6) \quad K(EG)^2 &= -(1/2)EG(E_{vv} + G_{uu}) \\ &\quad + (1/4) \left[G E_u G_u + G E_v^2 + E E_v G_v + E G_u^2 \right],\end{aligned}$$

che si può anche scrivere nella forma più compatta

$$(5.7) \quad K(EG)^2 = -(1/2)EG(E_{vv} + G_{uu}) + (1/4)G_u(EG)_u + (1/4)E_v(EG)_v.$$

Pertanto, per $F = 0$ e $E(u, v) = G(u, v) = f(u, v)$, ossia in coordinate isoterme, la (5.7) diventa

$$K = -\frac{1}{2f} \Delta(\log f),$$

ossia la (4.8).

Osservazione 5.24. Da notare che l'inverso del Teorema 5.22 non è vero. Infatti, esistono superfici regolari aventi stessa curvatura gaussiana ma che non sono localmente isometriche. Ad esempio, le superfici M_1, M_2 parametrizzate da $\varphi_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ e $\varphi_2(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u)$, con $(u, v) \in D =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, hanno stessa curvatura gaussiana : $K_1(u, v) = K_2(u, v)$ ma non sono localmente isometriche (cf. [9] Esercizio 3, p.237). Tuttavia, superfici regolari M_1, M_2 che hanno curvatura gaussiana $K_1(u, v) = \text{cost.} = K_2(u, v)$ sono localmente isometriche (cf. [15] Teorema 4.30, p.155).

Infine, possiamo dare una formula più compatta che esprime la curvatura gaussiana in termini dei derivati di una opportuna base ortonormale.

Fissata una parametrizzazione locale (D, φ) di una superficie regolare M , applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori della base $\{\varphi_u, \varphi_v\}$, otteniamo per lo spazio tangente la base ortonormale:

$$X = \frac{\varphi_u}{\sqrt{E}}, \quad Y = \frac{\tilde{Y}}{\|\tilde{Y}\|} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}(\varphi_v - (F/E)\varphi_u),$$

dove

$$\tilde{Y} = \varphi_v - \frac{(\varphi_v \cdot \varphi_u)}{(\varphi_u \cdot \varphi_u)}\varphi_u = \varphi_v - (F/E)\varphi_u.$$

Pertanto, il campo normale

$$(5.8) \quad N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = X \wedge Y.$$

Quindi $\{X, Y, N\}$ è una terna (di campi vettoriali) ortonormale definita sull'aperto $\varphi(D)$ di M .

Proposizione 5.25. *Con le notazioni sopra introdotte, la curvatura gaussiana è data da*

$$K(u, v) = \frac{(X_u \cdot Y_v) - (X_v \cdot Y_u)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto osserviamo che i campi derivati X_u, X_v, Y_u, Y_v , tenendo conto del fatto che X e Y sono dei versori, si esprimono con:

$$(5.9) \quad \begin{cases} X_u = (X_u \cdot Y)Y + (X_u \cdot N)N, \\ X_v = (X_v \cdot Y)Y + (X_v \cdot N)N, \\ Y_u = (Y_u \cdot X)X + (Y_u \cdot N)N, \\ Y_v = (Y_v \cdot X)X + (Y_v \cdot N)N. \end{cases}$$

Abbiamo osservato che la (4.15) si può anche scrivere nella forma

$$N_u \wedge N_v = K(u, v)(\varphi_u \wedge \varphi_v) = K(u, v)\|(\varphi_u \wedge \varphi_v)\|N.$$

e quindi

$$(5.10) \quad (N_u \wedge N_v) \cdot N = K\sqrt{EG - F^2}.$$

Inoltre, possiamo scrivere N_u ed N_v come segue:

$$N_u = \langle N_u, X \rangle X + \langle N_u, Y \rangle Y, \quad N_v = \langle N_v, X \rangle X + \langle N_v, Y \rangle Y.$$

Quindi, applicando la (5.8),

$$\begin{aligned} (N_u \wedge N_v) \cdot N &= (N_u \wedge N_v) \cdot (X \wedge Y) \\ &= \left((N_u \cdot X)(N_v \cdot Y) - (N_u \cdot Y)(N_v \cdot X) \right) (X \wedge Y) \cdot (X \wedge Y) \\ &= (X_u \cdot N)(N \cdot Y_v) - (Y_u \cdot N)(N \cdot X_v). \end{aligned}$$

D'altronde, usando la (5.9), otteniamo

$$X_u \cdot Y_v = (X_u \cdot N)(Y_v \cdot N) \quad \text{e} \quad Y_u \cdot X_v = (Y_u \cdot N)(X_v \cdot N).$$

Pertanto,

$$(X_u \cdot N)(Y_v \cdot N) - (Y_u \cdot N)(X_v \cdot N) = X_u \cdot Y_v - Y_u \cdot X_v,$$

e quindi

$$(N_u \wedge N_v) \cdot N = X_u \cdot Y_v - Y_u \cdot X_v.$$

Questa formula e la (5.10) implicano il risultato enunciato. \square

5.3. Superfici congruenti

La geometria di una superficie regolare di \mathbb{R}^3 può essere studiata da due punti di vista, quello intrinseco (tema principale di questo capitolo) e quello estrinseco che studia la “forma” della superficie in \mathbb{R}^3 . In questa sezione, al fine di meglio capire la natura della geometria intrinseca, studiamo alcuni aspetti della geometria estrinseca. La proprietà che due superfici abbiano la stessa “forma” in \mathbb{R}^3 si esprime dicendo che esse sono congruenti, Quindi, superfici congruenti differiscono solo per la loro posizione nello spazio.

Definizione 5.26. *Due superfici regolari M, \bar{M} di \mathbb{R}^3 si dicono congruenti se esiste un’isometria F di \mathbb{R}^3 tale che $F(M) = \bar{M}$.*

Esempio 5.27. Le sfere

$\mathbb{S}^2(0, r) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e $\mathbb{S}^2(p_0, r) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ sono congruenti (basta applicare una traslazione). Le superfici

$$M_1 : z = xy \quad \text{e} \quad M_2 : z = (x^2 + y^2)/2$$

sono congruenti. La rotazione (di 45° intorno all’asse z) definita da $F(E_1) = (\sqrt{2}/2)E_1 + (\sqrt{2}/2)E_2$, $F(E_2) = -(\sqrt{2}/2)E_1 + (\sqrt{2}/2)E_2$ e $F(E_3) = E_3$, trasforma la superficie M_1 nella superficie M_2 .

Proviamo che superfici congruenti sono in particolare isometriche, e inoltre hanno “stesso” operatore forma.

Teorema 5.28. *Siano M, \bar{M} superfici regolari congruenti e sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un’isometria tale che $F(M) = \bar{M}$. Allora,*

- (1) $f = F|_M : M \rightarrow \bar{M}$ è un’isometria tra superfici;
- (2) f conserva gli operatori forma nel senso che (scegliendo in modo opportuno i campi normali) vale la seguente relazione

$$f_{*p} \circ S_p = \bar{S}_{f(p)} \circ f_{*p} \quad \text{per ogni } p \in M.$$

DIMOSTRAZIONE. La proprietà (1) è stata provata nella Proposizione 5.12. Proviamo la (2). Sia N un campo unitario differenziabile normale a M e definito in un intorno U di p in M . Sia $\bar{N} := F_*N$, cioè $\bar{N}_{F(q)} = F_{*q}N_q$ per ogni $q \in U$. \bar{N} è un campo vettoriale differenziabile definito su $F(U) = f(U) \subset \bar{M}$ intorno di $f(p)$ in \bar{M} . Per $q \in U$, l’applicazione $F_{*q} : T_q\mathbb{R}^3 \rightarrow T_{f(q)}\mathbb{R}^3$ è un isomorfismo e conserva il prodotto scalare. Anche l’applicazione $f_{*q} : T_qM \rightarrow T_{f(q)}\bar{M}$ è un isomorfismo che conserva il prodotto scalare in quanto $f_{*q} = F_{*q}|_{T_qM}$. Poi da $N_q \cdot v_q = 0$ per ogni $v_q \in T_qM$, applicando F_{*q} si ha

$$F_{*q}N_q \cdot F_{*q}v_q = N_q \cdot v_q = 0 \quad \forall v_q \in T_qM,$$

per cui

$$F_{*q}N_q \cdot w_{f(q)} = 0 \quad \forall w_{f(q)} \in T_{f(q)}\bar{M} = F_{*q}(T_qM).$$

Pertanto $\bar{N} = F_*N$ è normale a \bar{M} . Inoltre

$$\|\bar{N}_{\bar{q}}\| = \|\bar{N}_{f(q)}\| = \|F_{*q}N_q\| = 1 \quad \forall \bar{q} \in F(U) = f(U), \bar{q} = f(q),$$

ovvero \bar{N} è unitario. Ora, siano S_p l'operatore forma definito da N e $\bar{S}_{f(p)}$ l'operatore forma definito da \bar{N} . Sia $v_p \in T_pM$, quindi sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v_p$, e sia $\bar{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) = F(\gamma(t))$ la corrispondente curva differenziabile di \bar{M} . La curva $\bar{\gamma}$ soddisfa

$$\bar{\gamma}(0) = F(\gamma(0)) = F(p) = f(p) \quad \text{e} \quad \dot{\bar{\gamma}}(0) = F_{*p}\dot{\gamma}(0) = F_{*p}v_p = f_{*p}v_p.$$

Allora,

$N(t) = N(\gamma(t))$ è un campo vettoriale differenziabile lungo γ , e

$\bar{N}(t) = F_{*\gamma(t)}N(t)$ è un campo vettoriale differenziabile lungo $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$.

Poiché F è isometria di \mathbb{R}^3 , e quindi un'applicazione affine, applicando la (1) del Teorema 1.79, si ha $(F_*N(t))' = F_*N'(t)$ ovvero $\bar{N}'(t) = F_*N'(t)$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} f_{*p}S_p v_p &= F_{*p}S_p v_p = -F_{*p}N'(0) = -(F_*N)'(0) = -\bar{N}'(0) = -\bar{N}'(\bar{\gamma}(0)) \\ &= \bar{S}_{f(p)}(\dot{\bar{\gamma}}(0)) = \bar{S}_{f(p)}f_{*p}v_p. \end{aligned}$$

□

Il Teorema 5.22 ci dice che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie. Dal Teorema 5.28 si ottiene il seguente

Corollario 5.29. *Curvature principali e media, oltre alla gaussiana, sono invarianti per superfici congruenti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano M, \bar{M} superfici regolari congruenti e sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria tale che $F(M) = \bar{M}$. Consideriamo l'isometria $f = F|_M$ e un punto $p \in M$. Se $S_p \underline{e}_i = k_i(p) \underline{e}_i$, $i = 1, 2$, allora applicando la (2) del Teorema 5.28 si ha

$$\bar{S}_{f(p)} f_{*p} \underline{e}_i = f_{*p} S_p \underline{e}_i = f_{*p} k_i(p) \underline{e}_i = k_i(p) f_{*p} \underline{e}_i.$$

Pertanto, $f_{*p} \bar{e}_i$ sono vettori principali di \bar{M} in $f(p)$ con curvature principali

$$\bar{k}_i(f(p)) = k_i(p), \quad i = 1, 2.$$

In particolare, la curvatura di Gauss $\bar{K}(f(p)) = K(p)$ e la curvatura media $\bar{H}(f(p)) = H(p)$. □

Del Teorema precedente, vale anche il viceversa, ovvero superfici isometriche che hanno “stesso” operatore forma sono congruenti. Più precisamente, abbiamo

Teorema 5.30. *Sia $f : M \rightarrow \bar{M}$ un'isometria tra superfici regolari (connesse, orientate) che conserva gli operatori forma, cioè $f_{*p}S_p = \bar{S}_{f(p)}f_{*p}$ per ogni $p \in M$. Allora, M e \bar{M} sono congruenti, cioè esiste F isometria di \mathbb{R}^3 tale che $f = F|_M$. Se vale $f_{*p}S_p = -\bar{S}_{f(p)}f_{*p}$ per ogni $p \in M$, basta invertire l'orientazione di M (oppure di \bar{M}).*

DIMOSTRAZIONE. (sunto) Siano N, \bar{N} campi vettoriali unitari normali alle superfici M, \bar{M} rispettivamente. Fissato $p \in M$, il differenziale $f_{*p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}\bar{M}$ è una trasformazione ortogonale e quindi trasforma basi ortonormali in basi ortonormali, per cui applicando la Proposizione 1.61, esiste una sola isometria F di \mathbb{R}^3 tale che

$$F(p) = f(p), \quad F_{*p}v_p = f_{*p}v_p \text{ per ogni } v_p \in T_pM, \quad F_{*p}N_p = \bar{N}_{f(p)}.$$

La seconda parte della dimostrazione del teorema consiste nel provare che l'isometria F considerata soddisfa $F(q) = f(q)$ per ogni $q \in M$ (cf., ad esempio, [17], Teorema 8.3, p. 299). \square

Osservazione 5.31. I Teoremi 5.28 e 5.30 corrispondono al teorema fondamentale sulle curve. Più precisamente, la condizione “ M, \bar{M} sono isometriche” corrisponde alla condizione “le curve α, β hanno stessa velocità scalare e sono definite sullo stesso intervallo” e la condizione “ M, \bar{M} hanno stesso operatore forma” corrisponde a “ $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ e $\tau_\alpha = \pm\tau_\beta$ ”.

Osservazione 5.32. Esistono esempi di superfici isometriche ma non congruenti. Nell'Esempio 5.14 è stato osservato che la striscia di piano $M =]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ e la superficie $\bar{M} = \varphi(]0, 2\pi[\times \mathbb{R})$ dove $\varphi(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$ sono isometriche. Tuttavia, le due superfici non sono congruenti, ad esempio M è a punti planari mentre \bar{M} (che è un cilindro circolare retto privato di una retta generatrice) è a punti parabolici.

In conclusione lo studio geometrico di una superficie M di \mathbb{R}^3 può essere fatto da un punto di vista intrinseco, cioè studiando quelle proprietà geometriche che dipendono solo dalla prima forma fondamentale e quindi sono invarianti per isometrie di M , oppure da un punto di vista estrinseco, cioè studiando quelle proprietà geometriche che dipendono, oltre che dalla prima forma fondamentale, anche dalla seconda forma fondamentale e quindi legate alla forma di M in \mathbb{R}^3 . Una generalizzazione, in arbitraria dimensione, dello studio intrinseco di una superficie porta allo studio della geometria riemanniana.

Esercizio 5.33. Sia data la superficie $M : z = xy$. Si verifichi che la trasformazione ortogonale F definita da

$$F(E_1) = E_2, \quad F(E_2) = -E_1, \quad F(E_3) = -E_3,$$

soddisfa $F(M) = M$.

Esercizio 5.34. Verificare che curve asintotiche, linee di curvatura, indicatrici di Dupin e punti ombelicali sono invarianti per superfici congruenti.

5.4. Derivata covariante e curve geodetiche

Le curve geodetiche sono curve speciali di una superficie, esse svolgono un ruolo analogo a quello svolto dalle rette nella geometria euclidea del piano. Iniziamo col definire la *derivata covariante* che è un concetto di derivata intrinseca sulla superficie.

Derivata covariante. Siano M una superficie regolare e $\gamma(t)$, $t \in I$, una curva differenziabile di M . Se $(D, \varphi, (u, v))$ è una parametrizzazione locale di M con $\gamma(I) \cap \varphi(D)$ non vuota, posto $\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t))$, denotiamo con

$$\varphi_u(t) = \varphi_u(u(t), v(t)) \text{ e } \varphi_v(t) = \varphi_v(u(t), v(t)).$$

i campi vettoriali coordinati definiti lungo l'arco di γ contenuto in $\varphi(D)$. Un campo vettoriale differenziabile lungo γ e tangente a M è un campo vettoriale $V(t)$ che localmente si esprime con

$$(5.11) \quad V(t) = a_1(t)\varphi_u(t) + a_2(t)\varphi_v(t)$$

dove le componenti $a_1(t), a_2(t)$ sono funzioni differenziabili di t . In particolare, $V(t)$ è un campo vettoriale differenziabile lungo γ come curva di \mathbb{R}^3 . Denotiamo con $\mathfrak{X}(\gamma)$ lo spazio vettoriale di tutti i campi vettoriali differenziabili lungo γ tangenti ad M .

Definizione 5.35. *La derivata covariante di un campo vettoriale $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è il campo vettoriale $\frac{DV}{dt} \in \mathfrak{X}(\gamma)$ definito da*

$$\frac{DV}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)^\top,$$

dove $\left(\frac{dV}{dt}\right)^\top$ denota la proiezione ortogonale di $\frac{dV}{dt} \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^3$, ossia di $V'(t)$, sul piano tangente $T_{\gamma(t)}M$, ovvero la sua componente tangente.

Denotiamo con N un campo vettoriale unitario e normale alla superficie M , in generale N è definito solo localmente. Siccome $V(t) \cdot N(t) = 0$, dalla definizione di $\frac{DV}{dt}$ segue che

$$\frac{dV}{dt} = \frac{DV}{dt} + \left(\frac{dV}{dt} \cdot N(t)\right)N(t) = \frac{DV}{dt} - (V(t) \cdot N'(t))N(t),$$

e quindi si ottiene l'**equazione di Gauss**:

$$(5.12) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{DV}{dt} + (V(t) \cdot S(\dot{\gamma}(t)))N(t) = \frac{DV}{dt} + \mathcal{II}_{\gamma(t)}(V(t), \dot{\gamma}(t))N(t).$$

Notiamo che l'operatore D/dt è un endomorfismo di $\mathfrak{X}(\gamma)$. Inoltre, per ogni $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$ e per ogni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, valgono le proprietà

$$(5.13) \quad \frac{D}{dt}(fV) = f'(t)V + f \frac{DV}{dt},$$

$$(5.14) \quad \frac{d}{dt}(V \cdot W) = \frac{DV}{dt} \cdot W + V \cdot \frac{DW}{dt}.$$

La prima si ottiene considerando le componenti tangenti di entrambi i membri di $(fV)' = f'(t)V + fV'(t)$. Per la seconda basta applicare l'equazione di Gauss a $(V \cdot W)' = V' \cdot W + V \cdot W'$.

Determiniamo ora l'espressione di DV/dt rispetto alla fissata parametrizzazione locale. Derivando $V(t)$ dato dalla (5.11), e ricordando le formule che esprimono $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vv}$ in termini dei coefficienti di Christoffel (cf. Sezione 4.2), otteniamo

$$\begin{aligned} V'(t) &= a'_1(t) \varphi_u(t) + a_1(t) \varphi'_u(t) + a'_2(t) \varphi_v(t) + a_2(t) \varphi'_v(t) \\ &= a'_1(t) \varphi_u(t) + a'_2(t) \varphi_v(t) + a_1(t)(u' \varphi_{uu} + v' \varphi_{uv})(t) \\ &\quad + a_2(t)(u' \varphi_{vu} + v' \varphi_{vv})(t) \\ &= a'_1(t) \varphi_u(t) + a'_2(t) \varphi_v(t) + a_1(t)u'(t)(\Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + \ell N)(t) \\ &\quad + a_2(t)v'(t)(\Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + nN)(t) \\ &\quad + (a_1(t)v'(t) + a_2(t)u'(t))(\Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + mN)(t). \end{aligned}$$

Di conseguenza, prendendo le componenti tangenti di entrambi i membri, si ha

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \left(a'_1(t) + a_1(t)(u' \Gamma_{11}^1 + v' \Gamma_{12}^1)(t) + a_2(t)(u' \Gamma_{12}^1 + v' \Gamma_{22}^1)(t) \right) \varphi_u(t) \\ &\quad + \left(a'_2(t) + a_1(t)(u' \Gamma_{11}^2 + v' \Gamma_{12}^2)(t) + a_2(t)(u' \Gamma_{12}^2 + v' \Gamma_{22}^2)(t) \right) \varphi_v(t). \end{aligned}$$

Ponendo $x_1 = u, x_2 = v, \partial_1 = \varphi_u$ e $\partial_2 = \varphi_v$, e ricordando che $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, la formula precedente si può esprimere in forma compatta:

$$(5.15) \quad \frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(a'_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 a_i(t)x'_j(t)\Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Dalla (5.15) segue che la derivata covariante dipende, oltre che dalla curva e dalle componenti di V , solo dai simboli di Christoffel e quindi dalla prima forma fondamentale. Pertanto, *la derivata covariante è una derivata intrinseca della superficie.*

Curve geodetiche. Se M è il piano euclideo, i coefficienti di Christoffel sono nulli e quindi dalla (5.15) segue che $V(t)$ soddisfa $DV/dt = 0$ se e solo se le sue componenti $a_k(t)$ sono costanti lungo γ , ossia $V(t)$ è parallelo lungo γ . In generale, per una superficie regolare M di \mathbb{R}^3 abbiamo la seguente

Definizione 5.36. *Un campo vettoriale $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ si dice che è un campo vettoriale parallelo lungo γ se in un intorno di ogni punto di γ si ha*

$$\frac{DV}{dt} = 0 \quad \forall t \in I.$$

Non vogliamo sviluppare la teoria generale dei campi vettoriali paralleli su una superficie, ma siamo interessati a una particolare classe di campi vettoriali paralleli. Data una curva differenziabile $\gamma(t)$, il campo tangente $\dot{\gamma}(t)$ è un elemento di $\mathfrak{X}(\gamma)$ e quindi si può considerare la sua derivata covariante.

Definizione 5.37. Una curva differenziabile γ della superficie M si dice **curva geodetica** se il campo tangente $\dot{\gamma}(t)$ è parallelo lungo γ , ovvero

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \quad \forall t \in I,$$

in un intorno di ogni punto di γ .

Dall'equazione di Gauss (5.12) segue che $\gamma(t)$ è una curva geodetica se e solo se il vettore accelerazione $\ddot{\gamma}(t)$ è normale al piano tangente, ossia $\ddot{\gamma}(t)$ è parallelo alla normale alla superficie. Quindi, per una curva geodetica si ha

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I,$$

per cui

$$(\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 2\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = 0.$$

In particolare, se $\gamma(t)$ è una geodetica non banale, $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{cost} \neq 0$, cioè la parametrizzazione è regolare e il vettore velocità ha lunghezza costante non nulla. In particolare, tale curva può essere riparametrizzata mediante l'ascissa curvilinea.

Proposizione 5.38. Se una superficie regolare M contiene una curva γ che è una (parte di) retta, allora γ è una geodetica (come insieme di punti). In particolare, le rette generatrici di una superficie rigata regolare sono geodetiche per la superficie.

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che γ si può parametrizzare con $\gamma(t) = p_0 + tv$, e quindi $\ddot{\gamma}(t) = 0$. \square

Supponiamo ora che la superficie M sia orientata. Quindi su M è fissato campo unitario normale N , equivalentemente una 2-forma d'area Ω . Indichiamo con J la corrispondente struttura complessa, allora J è definita da (cf. Sezione 3.10)

$$JX = N \wedge Y, \quad \text{equivalentemente (in modo intrinseco)} \quad JX \cdot Y = \Omega(X, Y),$$

dove $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. In particolare, $JX \cdot X = 0$ per ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile regolare di M e sia $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ un campo vettoriale unitario. Allora,

$$0 = \frac{d}{dt}(V \cdot V) = 2 \frac{DV}{dt} \cdot V$$

implica che $\frac{DV}{dt}$ è ortogonale a $V(t)$, per cui sarà parallelo a $JV(t)$, ossia

$$\frac{DV}{dt} = \lambda(t) JV(t).$$

La quantità $\left[\frac{DV}{dt}\right] = \lambda(t)$ si dice *valore algebrico della derivata covariante* in t , e chiaramente dipende dall'orientazione di N . In particolare, se $\gamma(s)$ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea, $\frac{D\dot{\gamma}}{ds}$ è parallelo a $J(\dot{\gamma}(s)) = N \wedge \dot{\gamma}(s)$.

Definizione 5.39. La funzione $k_g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto k_g(s)$, definita da

$$(5.16) \quad \begin{aligned} k_g(s) &:= \frac{D\dot{\gamma}}{ds} \cdot J(\dot{\gamma}(s)) = \ddot{\gamma}(s) \cdot J(\dot{\gamma}(s)) \\ &= (N \wedge \dot{\gamma}(s)) \cdot \ddot{\gamma}(s) = \Omega(\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s)) \end{aligned}$$

è detta **curvatura geodetica** di γ .

Di conseguenza,

$$(5.17) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{ds} = k_g(s)J(\dot{\gamma}(s)).$$

Se la superficie non è orientabile la scelta locale di N può cambiare lungo γ , d'altronde cambiando N con $-N$ la curvatura geodetica cambia di segno, per cui per superfici non orientabili il valore assoluto della curvatura geodetica (che indichiamo sempre con k_g) è ben definito. In particolare,

$$k_g^2(s) = \left\| \frac{D\dot{\gamma}}{ds} \right\|^2.$$

Quindi, otteniamo

Proposizione 5.40. La curva $\gamma(s)$ è una geodetica se e solo se la curvatura geodetica è identicamente nulla.

Dal Teorema di Meusnier segue che la curvatura normale $k_n(s) = (\ddot{\gamma}(s) \cdot N_{\gamma(s)})$, inoltre ricordando che $\kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$ è l'usuale curvatura di $\gamma(s)$ come curva di \mathbb{R}^3 , dall'equazione di Gauss

$$(5.18) \quad \ddot{\gamma}(s) = \frac{D\dot{\gamma}}{ds} + (\ddot{\gamma}(s) \cdot N_{\gamma(s)})N_{\gamma(s)}$$

si ha la seguente relazione fra le tre curvature:

$$(5.19) \quad \kappa^2(s) = k_g^2(s) + k_n^2(s).$$

Proposizione 5.41. Se la curva $\gamma(s)$ è una curva sezione normale di M in ogni suo punto, allora $\gamma(s)$ è una curva geodetica.

DIMOSTRAZIONE. Se $\gamma(s)$ è una curva sezione normale di M in ogni suo punto, dalla Proposizione 4.39 segue che $\kappa^2(s) = k_n^2(s)$, e quindi la (5.19) ci dice che la curva $\gamma(s)$ è una curva geodetica. \square

Osservazione 5.42. Sia M una superficie regolare orientata e sia J la corrispondente struttura complessa. Se $\gamma(s)$ è una curva regolare di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea, posto

$$\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s) \quad \text{e} \quad \vec{n}(s) = J\dot{\gamma}(s),$$

la base ortonormale $(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$ è il riferimento di Frenet tangente a M lungo la curva γ (come curva della superficie M). Tenendo presente la (5.17) e che $D\vec{n}(s)/ds$ è ortogonale a \vec{n} , le corrispondenti **formule di Frenet** sono

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = k_g(s)\vec{n}(s), \quad \frac{D\vec{n}}{ds} = -k_g(s)\vec{t}(s).$$

Quindi, la curvatura geodetica $k_g(s)$ è la curvatura di γ nell'ambito della teoria delle curve di Frenet su una superficie.

Esercizio 5.43. Sia M una superficie regolare orientata e sia N un fissato campo unitario normale alla superficie. Sia $\gamma(s)$ una curva regolare di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Lungo la curva γ consideriamo il riferimento ortonormale di $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$

$$\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s), \quad N(s) = N(\gamma(s)), \quad \vec{n}(s) = N(s) \wedge T(s) = J\dot{\gamma}(s).$$

$(\vec{t}(s), N(s), \vec{n}(s))$ è detto triedro di Darboux. Mostrare che

$$(5.20) \quad \begin{cases} \vec{t}'(s) &= a(s)N(s) + b(s)\vec{n}(s), \\ N'(s) &= -a(s)\vec{t}(s) - c(s)\vec{n}(s), \\ \vec{n}'(s) &= -b(s)\vec{t}(s) + c(s)N(s). \end{cases}$$

Tali formule sono l'analogo delle formule di Frenet per il triedro di Darboux. Stabilire il significato geometrico dei coefficienti provando quanto segue.

• 1) $a(s)$ è la curvatura normale $k_n(s)$, e quindi $a(s) = 0$ se e solo se $\gamma(s)$ è una curva asintotica.

• 2) $b(s)$ è la curvatura geodetica $k_g(s)$, e quindi $b(s) = 0$ se e solo se $\gamma(s)$ è una curva geodetica.

• 3) $-c(s) = \vec{n}(s) \cdot N'(s) = -\mathcal{I}I(\vec{t}(s), \vec{n}(s))$ è la **torsione geodetica** $\tau_g(s)$ di γ , e $c(s) = 0$ se e solo se $\gamma(s)$ è un linea principale.

Quindi, il sistema (5.20) diventa

$$\begin{cases} \vec{t}'(s) &= k_n(s)N(s) + k_g(s)\vec{n}(s), \\ N'(s) &= -k_n(s)\vec{t}(s) + \tau_g(s)\vec{n}(s), \\ \vec{n}'(s) &= -k_g(s)\vec{t}(s) - \tau_g(s)N(s). \end{cases}$$

Infine, verificare che:

• 4) se la curvatura geodetica $k_g(s) = 0$, usando la (5.19), la seconda parte del Teorema di Meusnier e la seconda formula di Frenet, si ha $\tau_g^2(s) = \tau^2(s)$ dove $\tau(s)$ è l'usuale torsione di $\gamma(s)$.

Esempio 5.44. Sia M la sfera canonica \mathbb{S}^2 di raggio R e sia $\gamma(s)$ il parallelo di colatitudine ϑ ($0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$) della sfera \mathbb{S}^2 . Allora $\gamma(s)$ ha raggio $r = R \sin \vartheta$ e quindi curvatura $\kappa(s) = 1/(R \sin \vartheta)$. Inoltre, considerando il campo normale N alla sfera orientato verso l'interno e usando il Teorema di Meusnier, la curvatura normale $k_n(s) = \kappa(s) \cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta) = \kappa(s) \sin \vartheta = 1/R$. Di conseguenza, applicando la (5.19), si ottiene che la curvatura geodetica è data da

$$k_g(p) = \sqrt{\kappa^2(p) - k_n^2(p)} = \frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta} (= \text{cost.}) \quad \forall p \in \gamma.$$

In particolare, dalla Proposizione 5.40, otteniamo che il parallelo $\gamma(s)$ è una curva geodetica se e solo se $\vartheta = \pi/2$, ovvero $\gamma(s)$ è una circonferenza di raggio massimo.

Esempio 5.45. Ogni curva $\gamma(s)$ della sfera canonica \mathbb{S}^2 di raggio R ha torsione geodetica nulla. Infatti,

$$\begin{aligned}\tau_g(s) &= \vec{n}(s) \cdot N'(s) = \vec{n}(s) \cdot (1/R)\dot{\gamma}(s) \\ &= (1/R)J(\dot{\gamma}(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) = 0.\end{aligned}$$

Torniamo ora al caso generale. Siano quindi M una superficie regolare e $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M . Rispetto a una fissata parametrizzazione locale, $\gamma(t) = \varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \varphi(u(t), v(t)) = \varphi(x_1(t), x_2(t))$ e quindi

$$\dot{\gamma}(t) = u'(t)\varphi_u(t) + v'(t)\varphi_v(t) = x'_1(t)\partial_1(t) + x'_2(t)\partial_2(t).$$

Prendendo $V(t) = \dot{\gamma}(t)$, la (5.15) diventa

$$(5.21) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \sum_{k=1}^2 \left(x''_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 x'_i(t)x'_j(t)\Gamma_{ij}^k(t) \right) \partial_k(t).$$

Pertanto, $\gamma(t)$ è una curva geodetica se e solo se è soddisfatto il seguente sistema di equazioni

$$x''_k(t) + \sum_{i,j=1}^2 x'_i(t)x'_j(t)\Gamma_{ij}^k(t), \quad k = 1, 2.$$

In forma più esplicita, $\gamma(t)$ è una curva geodetica se e solo se è soddisfatto il seguente sistema di equazioni

$$(5.22) \quad \begin{cases} u''(t) + \Gamma_{11}^1(t)(u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^1(t)u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1(t)(v'(t))^2 = 0, \\ v''(t) + \Gamma_{11}^2(t)(u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^2(t)u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2(t)(v'(t))^2 = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari del secondo ordine. Se imponiamo che $\gamma(0) = p_0 = \varphi(u_0, v_0)$ e $\dot{\gamma}(0) = V_0 \in T_{p_0}M$, $V_0 = a_0\varphi_u^0 + b_0\varphi_v^0$, abbiamo le condizioni iniziali

$$u(0) = u_0, v(0) = v_0 \text{ e } u'(0) = a_0, v'(0) = b_0$$

associate al sistema (5.22). Pertanto, dalla teoria delle ODE si ha l'esistenza e l'unicità della curva geodetica con le fissate condizioni iniziali. In altre parole, abbiamo il seguente

Teorema 5.46. *Per ogni $p_0 \in M$ e per ogni $V_0 \in T_{p_0}M$, esiste un $\varepsilon > 0$ ed esiste un'unica geodetica $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p_0$ e $\dot{\gamma}(0) = V_0$.*

Se γ e σ sono due curve geodetiche definite in un intervallo aperto I con $\gamma(0) = \sigma(0)$ e $\dot{\gamma}(0) = \dot{\sigma}(0)$. Per il Teorema 5.46, tali curve coincidono in un intorno di 0. Sia $] -a, a[\subset I$ tale che $\gamma(t) = \sigma(t)$ per ogni $t \in] -a, a[$. Per continuità si ha $\gamma(a) = \sigma(a)$ e $\dot{\gamma}(a) = \dot{\sigma}(a)$. Quindi, applicando il Teorema 5.46, si ha che γ e σ coincidono anche su un intorno destro di a . Analogamente su un intorno sinistro di $-a$. Così procedendo si ha che $\gamma(t) = \sigma(t)$ per ogni $t \in I$. Di conseguenza, si ha l'unicità anche della *geodetica massimale* $\gamma : I \rightarrow M$.

Esempio 5.47. Abbiamo visto che per il piano euclideo un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ è parallelo se e solo se $V(t) = \text{cost.}$ Di conseguenza, una curva $\gamma(t)$ è una curva geodetica (con $\gamma(0) = p_0$ e $\dot{\gamma}(0) = V_0$) se e solo se γ è una retta parametrizzata da $\gamma(t) = tV_0 + p_0$.

Osserviamo che il concetto di curva geodetica dipende oltre che dalla sua “forma” anche dalla sua parametrizzazione. Ad esempio, la semiretta $\gamma(t) = (t^2, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, del piano euclideo non soddisfa il sistema (5.22). Se γ è una geodetica (come insieme di punti), un parametro t per cui $\gamma(t)$ risulti geodetica si dice *parametro ammissibile*. Scrivendo $\gamma(t)$ geodetica intendiamo che t è parametro ammissibile.

Esercizio 5.48. Sia γ una curva geodetica parametrizzata con t parametro ammissibile e sia $t = t(s)$, $\frac{dt}{ds} \neq 0$, un cambiamento di parametro. Posto $\gamma(s) = \gamma(t(s))$, si verifichi che

$$\gamma(s) \text{ è geodetica se e solo se } t = as + b, a \neq 0.$$

Se $\gamma(t)$ è geodetica, sappiamo che $\|\dot{\gamma}(t)\| = a$ (cost. $\neq 0$). Allora, l'ascissa curvilinea

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt = at + b, a \neq 0.$$

Pertanto, per una curva geodetica l'ascissa curvilinea è un parametro ammissibile.

Osservazione 5.49. Sia $\varphi : D \rightarrow M, (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$, una superficie parametrizzata. Allora,

$$(5.23) \quad \frac{D}{du} \varphi_v = \frac{D}{dv} \varphi_u.$$

Infatti $\frac{D}{du} \varphi_v = (\varphi_{uv})^\top = (\varphi_{vu})^\top = \frac{D}{dv} \varphi_u$.

Il nostro prossimo obiettivo è provare che il concetto di curva geodetica è invariante per isometrie. Intanto proviamo che la derivata covariante è invariante per isometrie, ossia proviamo il seguente Teorema.

Teorema 5.50. Sia $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un'isometria tra superfici regolari e sia $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M . Posto $\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$, per ogni $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ si ha:

$$(5.24) \quad (f_*)_{\gamma(t)} \frac{DV}{dt} = \frac{\tilde{D}}{dt} (f_*)_{\gamma(t)} V,$$

dove D/dt e \tilde{D}/dt sono le derivate covarianti lungo γ e $\tilde{\gamma}$ rispettivamente.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un'isometria. Allora, applicando la Proposizione 5.7, presa una parametrizzazione locale (D, φ) di M , l'applicazione $\tilde{\varphi} = f \circ \varphi : D \rightarrow \tilde{M}$ definisce una parametrizzazione locale di \tilde{M} . Inoltre, rispetto a queste parametrizzazioni, se $p = \varphi(u, v)$, si ha $f(p) = f(\varphi(u, v)) = \tilde{\varphi}(u, v)$, $f_* \varphi_u = \tilde{\varphi}_u$, $f_* \varphi_v = \tilde{\varphi}_v$, e quindi

$$\bar{E}(u, v) = \bar{\varphi}_u \cdot \bar{\varphi}_u = f_*\varphi_u \cdot f_*\varphi_u = \varphi_u \cdot \varphi_u = E(u, v).$$

Analogamente per gli altri coefficienti della prima forma fondamentale. In particolare, per i coefficienti di Christoffel (che sono determinati, come visto, dalla prima forma fondamentale) si ha $\bar{\Gamma}_{ij}^k(u, v) = \Gamma_{ij}^k(u, v)$. Per provare la (5.24), consideriamo prima il caso $V(t) = \varphi_u(t)$. In tal caso $(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u = \bar{\varphi}_u(t)$. Applicando la (5.15) si ha

$$\frac{D\varphi_u}{dt} = (u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1)(t)\varphi_u(t) + (u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)(t)\varphi_v(t),$$

e quindi

$$\begin{aligned} (f_*)_{\gamma(t)} \frac{D\varphi_u}{dt} &= (u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1)(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u(t) + (u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2)(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v(t) \\ &= (u'(t)\Gamma_{11}^1 + v'(t)\Gamma_{12}^1)(t)\bar{\varphi}_u(t) + (u'(t)\Gamma_{11}^2 + v'(t)\Gamma_{12}^2)(t)\bar{\varphi}_v(t) \\ &= \frac{\tilde{D}\bar{\varphi}_u}{dt} = \frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u. \end{aligned}$$

Analogamente $(f_*)_{\gamma(t)} \frac{D\varphi_v}{dt} = \frac{D}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v$. Ora, consideriamo il caso generale $V(t) = a_1(t)\varphi_u(t) + a_2(t)\varphi_v(t)$. Allora,

$$(f_*)_{\gamma(t)}V = a_1(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u(t) + a_2(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v(t) = a_1(t)\bar{\varphi}_u(t) + a_2(t)\bar{\varphi}_v(t),$$

$$\frac{DV}{dt} = a_1(t)\frac{D\varphi_u}{dt} + a_1'(t)\varphi_u(t) + a_2(t)\frac{D\varphi_v}{dt} + a_2'(t)\varphi_v(t),$$

e quindi

$$\begin{aligned} (f_*)_{\gamma(t)} \frac{DV}{dt} &= a_1(t)(f_*)_{\gamma(t)} \frac{D\varphi_u}{dt} + a_1'(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u(t) \\ &\quad + a_2(t)(f_*)_{\gamma(t)} \frac{D\varphi_v}{dt} + a_2'(t)(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v(t) \\ &= a_1(t) \frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_u + a_1'(t)\bar{\varphi}_u(t) \\ &\quad + a_2(t) \frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}\varphi_v + a_2'(t)\bar{\varphi}_v(t) \\ &= a_1(t) \frac{\tilde{D}\bar{\varphi}_u}{dt} + a_1'(t)\bar{\varphi}_u(t) + a_2(t) \frac{\tilde{D}\bar{\varphi}_v}{dt} + a_2'(t)\bar{\varphi}_v(t) \\ &= \frac{\tilde{D}}{dt}(a_1(t)\bar{\varphi}_u(t) + a_2(t)\bar{\varphi}_v(t)) \\ &= \frac{\tilde{D}}{dt}(f_*)_{\gamma(t)}V(t). \end{aligned}$$

□

Corollario 5.51. *Siano $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un'isometria, $\gamma(t)$ una curva differenziabile di M e $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Posto $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, si hanno le seguenti proprietà.*

a) V è parallelo lungo γ se e solo se $(F_*)_{\gamma(t)}V$ è parallelo lungo $\tilde{\gamma}$.

b) $\gamma(t)$ è una geodetica di M se e solo se $\tilde{\gamma}(t)$ è una geodetica di \tilde{M} .

5.5. La connessione di Levi-Civita delle superfici

In questa sezione vogliamo estendere il concetto di derivata covariante al caso di campi vettoriali definiti su una superficie regolare M (o su un aperto di M), e quindi introdurre la connessione di Levi-Civita su M .

Ricordiamo che $\mathfrak{X}(M)$ è l'insieme di tutti i campi vettoriali differenziabili tangenti a M e definiti su M . Consideriamo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $W_p \in T_pM$. Intanto, definiamo la derivata covariante di X rispetto al vettore tangente W_p che indichiamo con $\nabla_{W_p}X$. Consideriamo una curva differenziabile $\gamma(t)$ di M con $\gamma(0) = p$ e $W_p = \dot{\gamma}(0)$, allora definiamo

$$\nabla_{W_p}X := \frac{DX}{dt}(0) \in T_pM, \text{ dove } X(t) = X(\gamma(t)) \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

Rispetto a una fissata parametrizzazione locale, posto $W_p = w^1\partial_1(p) + w^2\partial_2(p)$, $X = X^1\partial_1 + X^2\partial_2$, $x_1 = u, x_2 = v, \partial_1 = \varphi_u$ e $\partial_2 = \varphi_v$, tenendo conto che

$$\frac{dX^k}{dt}(0) = \dot{\gamma}(0)(X^k) = W_p(X^k),$$

dalla (5.15) segue che

$$\nabla_{W_p}X = \sum_{k=1}^2 \left(W_p(X^k) + \sum_{i,j=1}^2 X^i(p)w^j\Gamma_{ij}^k(p) \right) \partial_k(p).$$

Quindi, la definizione di $\nabla_{W_p}X$ non dipende dalla curva considerata. Se consideriamo due campi vettoriali $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, allora si pone

$$(\nabla_Y X)_p := (\nabla_{Y_p} X).$$

Quindi, localmente

$$\nabla_Y X = \sum_{k=1}^2 \left(Y(X^k) + \sum_{i,j=1}^2 X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k$$

da cui si evince che $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$. In particolare,

$$\begin{aligned} \nabla_{\varphi_u} \varphi_u &= \nabla_{\partial_1} \partial_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k \partial_k = (\varphi_{uu})^\top, \\ \nabla_{\varphi_v} \varphi_u &= \nabla_{\partial_2} \partial_1 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k \partial_k = (\varphi_{uv})^\top = \nabla_{\varphi_u} \varphi_v, \\ \nabla_{\varphi_v} \varphi_v &= \nabla_{\partial_2} \partial_2 = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k \partial_k = (\varphi_{vv})^\top. \end{aligned}$$

L'operatore

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

che prende il nome di **connessione lineare**, soddisfa le seguenti proprietà (da verificare per esercizio):

$$(5.25) \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$(5.26) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$(5.27) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (\nabla_Xf)Y,$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e per ogni $f, g \in \mathcal{F}(M)$, dove $\nabla_Xf := X(f)$. L'operatore $\nabla_Y : X \mapsto \nabla_YX$, si dice *derivata covariante rispetto a Y*. Nel caso di $M = \mathbb{R}^2$, i coefficienti Γ_{ij}^k sono nulli, quindi ritroviamo la *connessione euclidea* di \mathbb{R}^2 (cf. Sezione (1.3)):

$$\bar{\nabla}_YX = \sum_{k=1}^2 Y(X^k)\partial_k = (Y(X^1), Y(X^2)).$$

Notiamo che, usando le connessioni lineari $\bar{\nabla}$ di \mathbb{R}^3 e ∇ di M , l'equazione di Gauss (5.12) si può esprimere nella forma

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(t)}V = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}V + \mathcal{I}\mathcal{L}_{\gamma(t)}(V(t), \dot{\gamma}(t))N(t),$$

dove γ è una curva differenziabile di M . Di conseguenza, per $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e per $p \in M$, abbiamo l'equazione di Gauss per campi vettoriali

$$(5.28) \quad (\bar{\nabla}_XY)_p = (\nabla_XY)_p + \mathcal{I}\mathcal{L}_p(X_p, Y_p)N_p.$$

Pertanto, la *connessione lineare* ∇ che abbiamo definito su M è esattamente quella indotta, mediante l'equazione di Gauss, dalla *connessione lineare euclidea* $\bar{\nabla}$ di \mathbb{R}^3 . Quindi, ci aspettiamo un legame tra ∇ e la prima forma fondamentale di M . Infatti, abbiamo la seguente

Proposizione 5.52. *La connessione lineare ∇ definita su M è simmetrica:*

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y],$$

ed è compatibile con la prima forma fondamentale:

$$(5.29) \quad X(Y \cdot Z) = (\nabla_XY) \cdot Z + Y \cdot (\nabla_XZ) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

*Inoltre, ∇ (detta **connessione di Levi-Civita**) è univocamente determinata dalla prima forma fondamentale:*

$$(5.30) \quad (\nabla_YX \cdot Z) = \frac{1}{2} \left(X(Y \cdot Z) + Y(X \cdot Z) - Z(X \cdot Y) \right. \\ \left. - Y \cdot [X, Z] - X \cdot [Y, Z] - Z \cdot [X, Y] \right).$$

La (5.30) è nota in letteratura col nome formula di Koszul.

DIMOSTRAZIONE. La simmetria di $\bar{\nabla}$ (cf. Proposizione 1.41) e la (5.28) implicano la simmetria di ∇ . Inoltre, la compatibilità della connessione euclidea $\bar{\nabla}$ con il prodotto scalare euclideo è data da (cf. Proposizione 1.41)

$$(5.31) \quad X(Y \cdot Z) = (\bar{\nabla}_XY) \cdot Z + Y \cdot (\bar{\nabla}_XZ).$$

Le equazioni (5.28) e (5.31) implicano la (5.29). Infine, usando la simmetria di ∇ e la compatibilità di ∇ con la prima forma fondamentale, si ha

$$\begin{aligned} X(Y \cdot Z) &= (\nabla_X Y \cdot Z) + (Y \cdot \nabla_X Z) \\ &= ([X, Y] + \nabla_Y X) \cdot Z + Y \cdot ([X, Z] + \nabla_Z X), \\ Y(X \cdot Z) &= (\nabla_Y X \cdot Z) + (X \cdot \nabla_Y Z) = (\nabla_Y X \cdot Z) + X \cdot ([Y, Z] + \nabla_Z Y), \\ -Z(X \cdot Y) &= -(\nabla_Z X \cdot Y) - (X \cdot \nabla_Z Y), \end{aligned}$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Sommando si ottiene la (5.30). La (5.30) mostra che ∇ è univocamente determinata dalla prima forma fondamentale in quanto il prodotto scalare indotto è definito positivo e quindi non degenere. \square

Infine, osserviamo che se $F : M \rightarrow \tilde{M}$ è una isometria tra superfici regolari, il Teorema 5.50 vale anche nella seguente forma

$$(5.32) \quad F_*(\nabla_Y X) = \tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

dove F_*X è il campo vettoriale definito dalla (3.19). Quindi, *la connessione lineare ∇ definita sulla superficie è invariante per isometrie*. La dimostrazione della (5.32) segue dal Teorema 5.50. Infatti, per $q \in \tilde{M}, q = F(p), p \in M$, abbiamo

$$\begin{aligned} (F_*(\nabla_Y X))_q &= F_{*p}(\nabla_Y X)_p = F_{*p}(\nabla_{Y_p} X) = F_{*\gamma(0)}(\nabla_{\dot{\gamma}(0)} X) \\ &= \left(F_{*\gamma(t)} \frac{DX}{dt} \right) (0) = \left(\frac{\tilde{D}}{dt} F_{*\gamma(t)} X \right) (0) = \tilde{\nabla}_{F_{*p}\dot{\gamma}(0)} F_*X \\ &= \tilde{\nabla}_{F_{*p}Y_p} F_*X = \tilde{\nabla}_{(F_*Y)_q} F_*X = \left(\tilde{\nabla}_{F_*Y} F_*X \right)_q, \end{aligned}$$

dove la γ è una curva differenziabile con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = Y_p$.

5.6. Curvatura gaussiana e tensore di curvatura

Scopo di questa sezione è esprimere la curvatura gaussiana di una superficie in termini del tensore di curvatura associato alla connessione di Levi-Civita (tensore che si esprime con la derivata covariante seconda). Quindi, un altro modo per vedere che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie.

Sia M una superficie regolare di \mathbb{R}^3 . Indichiamo con N un campo unitario normale alla superficie che sappiamo è definito solo localmente (in generale). Siano p un punto di M ed S l'operatore forma in p . Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, il campo vettoriale $S(X)$ è definito da (cf. anche Osservazione 4.3)

$$S(X)(p) := S(X_p) = -\bar{\nabla}_{X_p} N = -(\bar{\nabla}_X N)_p, \quad \text{ovvero} \quad SX = -\bar{\nabla}_X N,$$

dove N è pensato definito in un intorno del punto p in \mathbb{R}^3 , $p \in M$. Se $\{X_p, Y_p\}$ è una base arbitraria di $T_p M$, applicando la stessa dimostrazione del punto (a) del Teorema 4.7, si ha che la matrice che rappresenta l'operatore forma S rispetto alla base $\{X_p, Y_p\}$ è data da

$$S = \begin{pmatrix} X_p \cdot X_p & X_p \cdot Y_p \\ X_p \cdot Y_p & Y_p \cdot Y_p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (SX_p) \cdot X_p & (SY_p) \cdot X_p \\ (SX_p) \cdot Y_p & (SY_p) \cdot Y_p \end{pmatrix}.$$

Quindi la curvatura gaussiana $K(p)$ è data da

$$(5.33) \quad K(p) = \det S = \frac{((SX_p) \cdot X_p)((SY_p) \cdot Y_p) - ((SX_p) \cdot Y_p)^2}{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - (X_p \cdot Y_p)^2}.$$

Osserviamo che la quantità

$$A(X_p, Y_p) := \|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - (X_p \cdot Y_p)^2 = \|X_p \wedge Y_p\|^2$$

è il quadrato dell'area del parallelogramma costruito sui vettori X_p, Y_p .

Ricordiamo che la connessione di Levi-Civita della superficie M è la componente tangente dell'equazione di Gauss (5.28)

$$(\bar{\nabla}_X Y) = (\nabla_X Y) + ((SX) \cdot Y)N,$$

ovvero per ogni $p \in M$:

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p + ((SX_p) \cdot Y_p)N_p.$$

Inoltre, un tensore T di tipo $(1, 3)$ su M è definito come un'applicazione

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y, Z) \mapsto T(X, Y, Z),$$

$\mathcal{F}(M)$ -lineare in X, Y, Z .

Definizione 5.53. *Il tensore di curvatura associato alla connessione di Levi-Civita $\bar{\nabla}$ della superficie M è il tensore R di tipo $(1, 3)$ definito da*

$$R(X, Y)Z := -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z.$$

Verifichiamo che R è effettivamente un tensore, cioè un'applicazione $\mathcal{F}(M)$ -lineare in X, Y, Z . Intanto osserviamo che la connessione lineare euclidea di \mathbb{R}^n , e quindi anche di \mathbb{R}^3 , soddisfa

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X (Y(Z^1), \dots, Y(Z^n)) = (X(Y(Z^1)), \dots, X(Y(Z^n))) \\ \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_Y (X(Z^1), \dots, X(Z^n)) = (Y(X(Z^1)), \dots, Y(X(Z^n))) \\ \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z &= ([X, Y](Z^1), \dots, [X, Y](Z^n)) \\ &= (X(Y(Z^1)) - Y(X(Z^1)), \dots, X(Y(Z^n)) - Y(X(Z^n))). \end{aligned}$$

Quindi,

$$(5.34) \quad -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = 0.$$

D'altronde, calcolando la derivata covariante seconda usando $SX = -\bar{\nabla}_X N$ e l'equazione di Gauss, si ottiene

$$\begin{aligned} -\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= -\bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + (S(Y) \cdot Z)N) \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z - (S(X) \cdot \nabla_Y Z)N \\ &\quad - X((SY) \cdot Z)N - ((SY) \cdot Z)\bar{\nabla}_X N \\ &= -\nabla_X \nabla_Y Z + ((SY) \cdot Z)S(X) - ((SX) \cdot \nabla_Y Z + X((SY) \cdot Z))N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_Y \left(\nabla_X Z + (S(X) \cdot Z)N \right) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + (S(Y) \cdot \nabla_X Z)N + Y(S(X) \cdot Z)N + (S(X) \cdot Z) \bar{\nabla}_Y N \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z - (S(X) \cdot Z)S(Y) + \left((S(Y) \cdot \nabla_X Z + Y(S(X) \cdot Z)) \right) N, \\
\bar{\nabla}_{[X,Y]} Z &= \nabla_{[X,Y]} Z + S([X, Y]) \cdot Z N.
\end{aligned}$$

Sostituendo queste formule nella (5.34), separando la componente tangente e ponendola uguale a zero si ottiene

$$-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z = (S(X) \cdot Z)SY - (S(Y) \cdot Z)SX,$$

quindi otteniamo

$$(5.35) \quad R(X, Y)Z = (S(X) \cdot Z)SY - (S(Y) \cdot Z)SX,$$

e in un fissato punto p abbiamo

$$R(X_p, Y_p)Z_p = (S(X_p) \cdot Z_p)SY_p - (S(Y_p) \cdot Z_p)SX_p.$$

L'espressione alla destra della (5.35) è $\mathcal{F}(M)$ -lineare in X, Y, Z , pertanto definisce un tensore di tipo $(1, 3)$ su M . In particolare, dalla (5.35) abbiamo

$$R(X, Y)X = ((SX) \cdot X)SY - ((SY) \cdot X)SX$$

e quindi

$$(5.36) \quad (R(X, Y)X) \cdot Y = ((SX) \cdot X)((SY) \cdot Y) - ((SY) \cdot X)((SX) \cdot Y).$$

La (5.36) e la (5.33) implicano che la curvatura gaussiana si può esprimere con la seguente formula

$$(5.37) \quad K(p) = \frac{(R(X_p, Y_p)X_p) \cdot Y_p}{A(X_p, Y_p)}.$$

Si noti che l'espressione alla destra della (5.37) non dipende dalla base scelta in $T_p M$, e quindi se E_1, E_2 è una base ortonormale di $T_p M$ si ha

$$K(p) = (R(E_1, E_2)E_1) \cdot E_2.$$

Inoltre, siccome la connessione ∇ è invariante per isometrie (cf. (5.32)), dalla (5.37) si ottiene che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco della superficie (*Teorema egregium di Gauss*).

Il tensore di curvatura R di tipo $(0, 4)$, detto anche **tensore di curvatura di Riemann** della superficie M , è definito da

$$R(X, Y, Z, W) := (R(X, Y)Z) \cdot W.$$

Ovviamente è anche definito il tensore di curvatura di tipo $(0, 4)$ in un fissato punto p di M , basta porre

$$R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) := (R(X_p, Y_p)Z_p) \cdot W_p.$$

Proposizione 5.54. *Il tensore di curvatura R soddisfa le seguenti proprietà:*

- 1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ e quindi $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$,
- 2) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

- 3) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$,
 4) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$ (1^a identità di Bianchi).

DIMOSTRAZIONE. La 1) segue direttamente dalla definizione di $R(X, Y)Z$. La 2) segue dalla (5.35) tenendo conto che l'operatore S è simmetrico. La 3) si può ottenere come conseguenza della 1) e della 2). La 4) si ottiene con un calcolo diretto usando la (5.35) e la simmetria dell'operatore S . \square

Osserviamo che per la sfera \mathbb{S}^2 di raggio r , l'operatore forma $S = -(1/r)I$ e quindi il tensore di curvatura assume la seguente semplice forma

$$R(X, Y)Z = K_0((X \cdot Z)Y - (Y \cdot Z)X)$$

dove $K_0 = (1/r^2)$ è la curvatura gaussiana della sfera. Più in generale, vale il seguente

Teorema 5.55. *Per ogni superficie regolare M di \mathbb{R}^3 il tensore di curvatura è dato da*

$$R(X, Y)Z = K((X \cdot Z)Y - (Y \cdot Z)X),$$

dove K è la funzione curvatura gaussiana della superficie.

DIMOSTRAZIONE. Sia R_0 il tensore di tipo $(1, 3)$ definito da

$$R_0(X, Y)Z = ((X \cdot Z)Y - (Y \cdot Z)X).$$

Proviamo che $R = KR_0$, ovvero $R = K(p)R_0$ in ogni fissato punto p di M . Sia (e_1, e_2) una base ortonormale di vettori principali in p , quindi

$$S(e_1) = k_1(p)e_1 \quad \text{e} \quad S(e_2) = k_2(p)e_2,$$

dove $k_1(p), k_2(p)$ sono le curvatures principali in p . Siccome R e $K(p)R_0$ sono due tensori, per dimostrare che coincidono basta verificare che

$$R(e_i, e_j)W = K(p)R_0(e_i, e_j)W \quad \text{per ogni } i, j = 1, 2 \text{ e per ogni } W \in T_pM.$$

Dalla 1) della Proposizione 5.54, si ha

$$R(e_i, e_i)W = 0 \quad \text{e} \quad R(e_1, e_2)W = -R(e_2, e_1)W.$$

Inoltre, dalla definizione di R_0 si ha

$$R_0(e_i, e_i)W = 0 \quad \text{e} \quad R_0(e_1, e_2)W = -R_0(e_2, e_1)W.$$

Quindi, basta verificare che $R(e_1, e_2)W = K(p)R_0(e_1, e_2)W$. Applicando la (5.35) e la definizioni di R_0 , abbiamo

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)W &= ((Se_1) \cdot W)Se_2 - ((Se_2) \cdot W)Se_1 \\ &= k_1(p)k_2(p)((e_1 \cdot W)e_2 - (e_2 \cdot W)e_1) \\ &= K(p)((e_1 \cdot W)e_2 - (e_2 \cdot W)e_1) \\ &= K(p)R_0(e_1, e_2)W. \end{aligned}$$

\square

Osservazione 5.56. Fissata una base ortonormale (e_1, e_2) di T_pM , indichiamo con J_0 la struttura complessa di T_pM definita da $J_0e_1 = e_2$ e $J_0e_2 = -e_1$, quindi una rotazione di 90° . Osserviamo che il tensore R_0 soddisfa

$$R_0(e_1, e_2) = J_0 .$$

Infatti, $R_0(e_1, e_2) : T_pM \rightarrow T_pM$ è un endomorfismo e

$$R_0(e_1, e_2)W = ((e_1 \cdot W)e_2 - (e_2 \cdot W)e_1) = J_0(W).$$

Infine, vogliamo definire la **derivata covariante seconda** $\nabla^2 Z$ di un fissato $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Se T è un tensore di tipo $(1, 1)$, ossia un endomorfismo di $\mathfrak{X}(M)$, ∇T denota il tensore di tipo $(1, 2)$ definito da

$$(\nabla T)(X, Y) = (\nabla_X T)Y := \nabla_X TY - T(\nabla_X Y).$$

Fissato $Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\nabla Z : X \mapsto \nabla_X Z$ si può pensare come un tensore di tipo $(1, 1)$ su M . Pertanto, la derivata covariante seconda di Z è definita da

$$(\nabla^2 Z)(X, Y) = \nabla_{X,Y}^2 Z := (\nabla_X \nabla_Y Z)(Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. $\nabla^2 Z$ è un tensore di tipo $(1, 2)$ su M , ossia è $\mathcal{F}(M)$ -lineare in X, Y . Siccome ∇ è simmetrica, otteniamo:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z = -\nabla_{X,Y}^2 Z + \nabla_{Y,X}^2 Z.$$

Quindi, $R(X, Y)Z$ è la parte antisimmetrica del tensore $\nabla^2 Z$. Pertanto, abbiamo

Proposizione 5.57. *Il tensore di curvatura R stima la non invertibilità della derivata covariante seconda di un campo di vettori.*

Osservazione 5.58. La presentazione intrinseca della curvatura gaussiana fatta in questa sezione si presta in modo naturale ad essere generalizzata in dimensione arbitraria e a introdurre quindi il concetto di curvatura sezionale per le varietà riemanniane di dimensione n . Si noti che, in dimensione $n > 2$, il tensore di curvatura di Riemann R associato alla varietà riemanniana è un oggetto analitico in generale non facile da maneggiare.

5.7. Esempi di curve geodetiche

In questa sezione determiniamo le curve geodetiche di alcune superfici più significative. Iniziamo con le seguenti due proposizioni.

Proposizione 5.59. *Sia M una superficie regolare. Se il sostegno $\sigma(I)$ di una curva differenziabile $\sigma : I \rightarrow M$ è il luogo dei punti fissi di un'isometria f di M , cioè $\sigma(I) = \{p \in M : f(p) = p\}$, allora σ (opportunamente parametrizzata) è una curva geodetica di M .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in \sigma(I)$, $p = \sigma(t_0)$. Posto $V_0 = \dot{\sigma}(t_0)$, per il Teorema di esistenza e unicità delle geodetiche, esiste un'unica geodetica $\gamma(s)$, $s \in]-\delta, +\delta[$, tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V_0$. Poiché f è una isometria, $\gamma_1 = f \circ \gamma$ è una geodetica con $\gamma_1(0) = f(\gamma(0)) = f(p) = p$ e $\dot{\gamma}_1(0) = (f \circ \dot{\gamma})(0) =$

$(f_*)_p \dot{\gamma}(0) = (f_*)_p \dot{\sigma}(t_0) = (f \circ \sigma)'(t_0) = \dot{\sigma}(t_0) = V_0$. Dunque, per l'unicità della geodetica γ con le fissate condizioni iniziali, avremo $(f \circ \gamma)(s) = \gamma(s)$ per ogni $s \in]-\delta, +\delta[$ e quindi $\gamma(]-\delta, +\delta[) \subset \sigma(I)$. Ciò prova che σ è una geodetica in un intorno di p e quindi, per l'arbitrarietà di p , σ è una geodetica (come insieme di punti). \square

Esercizio 5.60. Determinare le isometrie del piano euclideo per le quali è possibile applicare la Proposizione 5.59.

Proposizione 5.61. Sia $M : \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una superficie regolare. Allora, le seguenti proprietà sono equivalenti:

- a) la curva delle u ($v = v_0$) è una curva geodetica;
- b) la componente tangente $(\varphi_{uu})^\top = 0$;
- c) $\nabla_{\varphi_u} \varphi_u = 0$ (ovvero, $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$).

Analoghe proprietà valgono per caratterizzare le curve delle v come curve geodetiche (basta sostituire φ_u con φ_v , e $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$ con $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$).

DIMOSTRAZIONE. La curva delle u definita da $v = v_0$ (cost.) si parametrizza con $u(t) = t, v(t) = v_0$. Pertanto le equazioni (5.22) che caratterizzano le geodetiche, in questo caso, si riducono a $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$. D'altronde,

$$(\varphi_{uu})^\top = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v.$$

In modo analogo si procede per le curve delle v . \square

Osservazione 5.62. Ricordiamo che la nozione di curva geodetica è chiaramente di natura locale, quindi anche le isometrie locali trasformano geodetiche in geodetiche.

Esempio 5.63. Piano euclideo

Le geodetiche di un piano (euclideo) di \mathbb{R}^3 sono tutte e sole le rette (opportunitamente parametrizzate) o segmenti di retta di tale piano. Infatti, in questo caso $\gamma(t)$ come curva di \mathbb{R}^3 è data da $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, e la derivata covariante

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \frac{d\dot{\gamma}}{dt} = \ddot{\gamma}(t)$$

e quindi:

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0 \Leftrightarrow (x_1''(t), x_2''(t), x_3''(t)) = 0 \Leftrightarrow \gamma(t) = tv + x_0.$$

Esempio 5.64. Piano euclideo in coordinate polari

Consideriamo il piano euclideo \mathbb{R}^2 privato del semiasse positivo delle x . Ricordiamo che rispetto alle coordinate cartesiane $(u, v) = (x, y)$ i coefficienti della prima forma fondamentale \mathcal{I} sono $E = G = 1$ ed $F = 0$. Consideriamo adesso come nuove coordinate le coordinate polari $(\bar{u}, \bar{v}) = (\varrho, \vartheta)$ definite da

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta, \quad \varrho > 0, \quad \vartheta \in]0, 2\pi[.$$

Vogliamo determinare le equazioni differenziali delle geodetiche rispetto alle coordinate polari. In questo caso la matrice (3.13) del cambiamento di parametri

$$J_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Pertanto, indicati con $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ i coefficienti di \mathcal{I} rispetto alla parametrizzazione delle coordinate polari, applicando la (3.20) si ha :

$$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\varrho \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\varrho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \varrho \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi, dalla (4.5) segue che i coefficienti di Christoffel Γ_{ij}^k non nulli sono

$$(5.38) \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = (1/\varrho) \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^1 = -\varrho.$$

Ora sia $\gamma(t) = (\varrho(t), \vartheta(t))$ una curva parametrizzata a velocità unitaria, quindi

$$(5.39) \quad (\varrho')^2 + \varrho^2(\vartheta')^2 = 1.$$

Usando il sistema (5.22), tenendo conto della (5.38), si ha che $\gamma(t)$ è una curva geodetica se e solo se

$$(5.40) \quad \varrho'' - \varrho(\vartheta')^2 = 0$$

$$(5.41) \quad \varrho \vartheta'' + 2\varrho' \vartheta' = 0.$$

Si vede facilmente che la (5.41) è equivalente alla

$$(5.42) \quad \varrho^2 \vartheta' = c_0 \text{ (costante),}$$

e quindi

$$\varrho^2 (\vartheta')^2 = \frac{c_0^2}{\varrho^2}.$$

Sostituendo quest'ultima nella (5.39), si ha

$$(\varrho')^2 = 1 - \frac{c_0^2}{\varrho^2}.$$

Quindi

$$(5.43) \quad \varrho' = \pm \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\varrho^2}}.$$

Si noti che la (5.40), sostituendo la (5.42), diventa $\varrho'' - c_0^2/\varrho^3 = 0$ che è identicamente soddisfatta come conseguenza della (5.43), pertanto la (5.40) si può

tralasciare. Dalla (5.42), e dalla (5.43) col segno positivo, abbiamo

$$(5.44) \quad \frac{d\vartheta}{d\rho} = \frac{c_0}{\rho^2 \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\rho^2}}}$$

Integrando si ottiene

$$\vartheta = \vartheta_0 + \arccos \frac{c_0}{\rho}, \quad \text{e quindi} \quad \cos(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{c_0}{\rho}$$

che è (ovviamente) l'equazione di una retta in coordinate polari (cf. Figura 2).

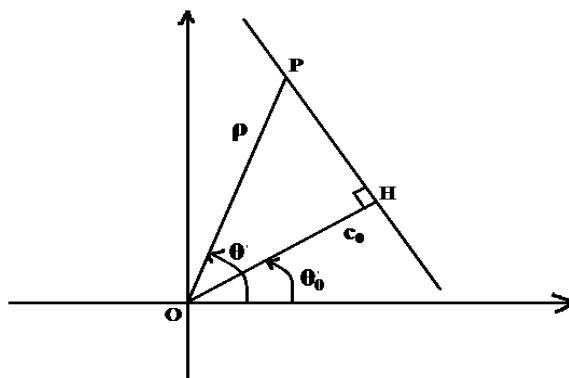


FIGURA 2. Retta di equazione $\cos(\theta - \theta_0) = \frac{OH}{OP} = \frac{c_0}{\rho}$.

D'altronde, sviluppando il coseno si ha

$$\rho \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \rho \sin \vartheta \sin \vartheta_0 = c_0$$

e sostituendo le coordinate $x = \rho \cos \vartheta$ e $y = \rho \sin \vartheta$, si ottiene la stessa retta con equazione cartesiana $(\cos \vartheta_0)x + (\sin \vartheta_0)y = c_0$.

Esempio 5.65. Sfera canonica \mathbb{S}^2

Le geodetiche massimali della sfera canonica \mathbb{S}^2 sono tutte e sole le circonferenze (opportunamente parametrizzate) di raggio massimo.

DIMOSTRAZIONE. Sia \mathbb{S}^2 la sfera di centro l'origine O e raggio R . Sia σ una circonferenza di raggio massimo di \mathbb{S}^2 e sia E il piano per il centro O e contenente σ . Consideriamo due vettori V_1, V_2 unitari e ortogonali del piano E applicati in O . Allora, si può scrivere

$$\sigma(t) = R(\cos t)V_1 + R(\sin t)V_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi, $\dot{\sigma}(t) = R(-\sin t)V_1 + R(\cos t)V_2$, e

$$\frac{d\dot{\sigma}}{dt} = \ddot{\sigma}(t) = R(-\cos t)V_1 + R(-\sin t)V_2 = -\sigma(t) = -N_\sigma(t)$$

è ortogonale a $T_{\sigma(t)}\mathbb{S}^2 = \sigma(t)^\perp$, per cui

$$\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = (\ddot{\sigma}(t))^\top = 0.$$

Pertanto, le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche per \mathbb{S}^2 .

Viceversa, sia $\gamma(t)$ un arco geodetico, parametrizzato a velocità unitaria, con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V_p$. Allora, $V_1 = (1/R)p$ e $V_2 = V_p$, pensati come vettori applicati nell'origine (centro della sfera), sono ortonormali e la curva

$$\sigma(t) = R\left(\cos \frac{t}{R}\right)V_1 + R\left(\sin \frac{t}{R}\right)V_2, \quad t \in \mathbb{R},$$

è una circonferenza di raggio massimo della sfera \mathbb{S}^2 che soddisfa le condizioni $\sigma(0) = p$ e $\dot{\sigma}(0) = V_p$. Pertanto, per l'unicità delle curve geodetiche con fissate condizioni iniziali, l'arco di curva γ sarà contenuto nella circonferenza σ .

Un altro metodo per vedere che le circonferenze di raggio massimo sono curve geodetiche di \mathbb{S}^2 è il seguente. Sia σ una circonferenza di raggio massimo di \mathbb{S}^2 e sia E il piano per il centro O di \mathbb{S}^2 tale che $\sigma = E \cap \mathbb{S}^2$. Consideriamo la riflessione Φ di \mathbb{R}^3 rispetto al piano E :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp &\longrightarrow \mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp \\ x = x_E + x_{E^\perp} &\longmapsto \Phi(x) = x_E - x_{E^\perp}. \end{aligned}$$

Φ è una trasformazione ortogonale di \mathbb{R}^3 . Quindi, per il Teorema 5.13, $\phi = \Phi|_{\mathbb{S}^2}$ è una isometria di \mathbb{S}^2 . D'altronde il piano E è l'autospazio di Φ relativo all'autovalore $+1$. Pertanto, applicando la Proposizione 5.59, la circonferenza

$$\sigma = \mathbb{S}^2 \cap E = \{x \in \mathbb{S}^2 : x \in E\} = \{x \in \mathbb{S}^2 : \phi(x) = x\}$$

è una curva geodetica. \square

Esempio 5.66. Cilindro circolare retto

Consideriamo il cilindro circolare retto $M : x^2 + y^2 = 1$. Questo è un caso particolare dell'Esempio 3.15, ottenuto con $f(u) = 1$ e $g(u) = u$, pertanto una parametrizzazione locale di M è $\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, u)$. Siccome i coefficienti di Christoffel Γ_{ij}^k sono tutti nulli (cf. Esempio 4.9), dal sistema (5.22) segue che una curva $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ di M è una curva geodetica se e solo se sono soddisfatte le equazioni

$$u''(t) = 0 \quad \text{e} \quad v''(t) = 0.$$

Quindi le geodetiche del cilindro M sono tutte e sole le curve del tipo

$$\gamma(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d),$$

dove a, b, c, d sono costanti.

- Se $a = c = 0$, la curva si riduce a un punto (geodetica banale).
- Se $a \neq 0$ e $c \neq 0$, allora $\gamma(t)$ è un'elica circolare.
- Se $a = 0$ (e $c \neq 0$), allora $\gamma(t)$ è una retta generatrice (un meridiano).
- Se $c = 0$ (e $a \neq 0$), la curva $\gamma(t)$ è una circonferenza (un parallelo).

Esempio 5.67. Cilindro retto su una curva piana

Sia $\gamma(u)$, $u \in I$ (intervallo aperto di \mathbb{R}), una curva semplice regolare piana,

parametrizzata a velocità unitaria, e sia V_0 un vettore unitario di \mathbb{R}^3 ortogonale al piano di γ . Sia M il *cilindro generalizzato* avente γ come curva direttrice e generatrici parallele a V_0 . Un tale cilindro è detto *cilindro retto su una curva piana*. Allora, M è una superficie regolare e le curve geodetiche di M sono tutte e sole le curve $\sigma(t)$ parametrizzate a velocità costante che formano un angolo costante con V_0 , ovvero le curve che sono eliche cilindriche (cf. Definizione 2.39) dette anche curve di Lancret.

DIMOSTRAZIONE. Intanto, per quanto osservato nell'Esempio 3.18 e nell'Esercizio 3.21 segue che M è una superficie regolare parametrizzata da

$$(5.45) \quad \varphi(u, v) = \gamma(u) + v V_0, \quad (u, v) \in D = I \times \mathbb{R}.$$

Dalla (5.45) segue che $\varphi_u = \dot{\gamma}(u)$ e $\varphi_v = V_0$. Inoltre, $\gamma(u) \cdot V_0$ è costante (in quanto γ è contenuta in un piano ortogonale a V_0). Allora,

$$E = \|\dot{\gamma}(u)\|^2 = 1, \quad F = \dot{\gamma}(u) \cdot V_0 = 0, \quad G = \|V_0\|^2 = 1,$$

e quindi dalla (4.5) segue che tutti i coefficienti di Christoffel Γ_{ij}^k sono nulli. Sia ora $\sigma(t)$ una curva di M parametrizzata a velocità costante, quindi

$$\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t)) = \gamma(u(t)) + v(t) V_0, \quad \dot{\sigma}(t) = u'(t)\dot{\gamma}(u) + v'(t)V_0.$$

Applicando la (5.22), la curva $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ è geodetica se e solo se sono soddisfatte le equazioni $u''(t) = 0$ e $v''(t) = 0$, ossia le funzioni

$$u'(t) \quad \text{e} \quad v'(t) \quad \text{sono costanti.}$$

D'altronde, $(u')^2 + (v')^2 = \|\dot{\sigma}(t)\|^2 = c^2$ ($c > 0$ costante), per cui

$$(*) \quad \text{la curva } \sigma(t) = \varphi(u(t), v(t)) \text{ è geodetica se e solo se } v' \text{ è costante.}$$

Inoltre,

$$\dot{\sigma}(t) \cdot V_0 = (u'\dot{\gamma}(u) + v'V_0) \cdot V_0 = v'$$

e

$$\dot{\sigma}(t) \cdot V_0 = \|\dot{\sigma}(t)\| \cos \vartheta(t) = c \cos \vartheta(t),$$

dove $\vartheta(t)$ è l'angolo convesso tra la curva $\dot{\sigma}(t)$ e V_0 . Pertanto, dalla (*) segue che la curva $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ è geodetica se e solo se $\vartheta(t)$ è costante. \square

Esempio 5.68. Superficie di rotazione

Consideriamo una superficie di rotazione M di \mathbb{R}^3 ottenuta ruotando una curva regolare piana semplice γ intorno ad un asse del piano della curva e che non intersechi la stessa curva. Supponiamo che il piano di γ sia il piano xz , l'asse di rotazione sia l'asse z e la curva γ sia parametrizzata da $x = f(u) > 0, y = 0, z = g(u), u$ ascissa curvilinea, pertanto M (ottenuta ruotando γ intorno all'asse z) ha equazioni parametriche $x = f(u)\cos v, y = f(u)\sin v, z = g(u)$ (cf. Esempio 3.15). Sia $\varphi(u, v)$ la corrispondente parametrizzazione locale di M . Sappiamo che i coefficienti della prima forma fondamentale sono dati da (cf. Esempio 3.64)

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = f^2(u).$$

Inoltre, il campo normale ad M è dato da

$$(5.46) \quad N = (-g'(u)\cos v, -g'(u)\sin v, f'(u)).$$

Per le curve geodetiche della suddetta superficie di rotazione M abbiamo quanto segue.

- 1) Se $\sigma(t)$ è un parallelo (ossia $u = u_0$), allora $\sigma(t)$ è una curva geodetica se e solo se il campo normale $N_{\sigma(t)}$ è ortogonale all'asse di rotazione, equivalentemente u_0 è un punto critico per la funzione $f(u)$.

- 2) Sia $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva regolare di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Se $\sigma(t)$ è una curva geodetica, allora è soddisfatto il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$(5.47) \quad (u'(t))^2 + f^2(u(t))(v'(t))^2 = 1, \quad f^2(u(t))v'(t) = c,$$

dove c è una costante associata alla geodetica. Se $\sigma(t)$ non è un parallelo, allora vale anche il viceversa. Inoltre, la costante $c = 0$ se e solo se $\sigma(t)$ è un meridiano. In particolare, ogni meridiano (ossia $v = v_0$) è una curva geodetica.

- 3) Per ogni curva geodetica $\sigma(t)$ vale la relazione di Clairaut

$$f(u(t))\sin \vartheta(t) = c,$$

dove $\vartheta(t)$ è l'angolo convesso tra $\dot{\sigma}(t)$ e il meridiano per $\sigma(t)$. Se $\sigma(t)$ è un meridiano, si ha $\vartheta = 0$ e $c = 0$. Se $\sigma(t)$ è un parallelo, si ha $\vartheta = \pi/2$ e $f(u) = c$ è il raggio del parallelo. Viceversa, se $\sigma(t)$ non è un parallelo e soddisfa la relazione di Clairaut, allora $\sigma(t)$ è una curva geodetica.

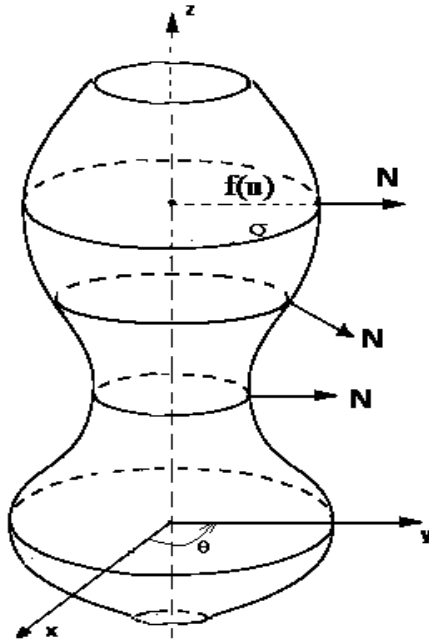


FIGURA 3. Geodetiche su una superficie di rotazione.

DIMOSTRAZIONE. Dall'Esempio 4.9 sappiamo che i coefficienti di Christoffel Γ_{ij}^k di M sono dati da

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -f(u)f'(u), \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f'(u)}{f(u)}.$$

Dunque, per una curva $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ di M la (5.21) diventa

$$(5.48) \quad \frac{D\dot{\sigma}}{dt} = (u'' - f(u)f'(u)(v')^2)(t)\varphi_u(t) + (v'' + 2\frac{f'(u)}{f(u)}u'v')(t)\varphi_v(t),$$

e quindi la curva $\sigma(t)$ è una curva geodetica se, e solo se, sono soddisfatte le seguenti equazioni differenziali:

$$(5.49) \quad u''(t) - f(u)f'(u)(v'(t))^2 = 0, \quad v''(t) + 2\frac{f'(u)}{f(u)}u'(t)v'(t) = 0.$$

1) Sia $\sigma(t)$, con t ascissa curvilinea, un parallelo di M , cioè $\sigma(t) = \varphi(u_0, v(t))$. Allora, $\dot{\sigma}(t) = (0, v'(t)) = v'(t)\varphi_v(t)$ e

$$1 = \dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) = f^2(u_0)(v'(t))^2 \text{ implica } (v'(t))^2 = 1/f^2(u_0) = \text{cost.},$$

da cui segue $v''(t) = 0$. Dunque la seconda equazione del sistema (5.49) è identicamente soddisfatta. Mentre la prima equazione diventa

$$f(u_0)f'(u_0)(v'(t))^2 = 0.$$

Siccome $f(u_0) \neq 0$, il parallelo $\sigma(t)$ è una geodetica se e solo se $f'(u_0) = 0$. D'altronde, dalla (5.46) segue che $f'(u_0) = 0$ se e solo se $N_{\sigma(t)}$ (campo normale ad M in $\sigma(t)$) è ortogonale all'asse di rotazione (cf. Figura 3).

2) Sia $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Da

$$\begin{aligned} (f^2(u(t))v'(t))' &= 2f(u)f'(u)u'(t)v'(t) + f^2(u(t))v''(t) \\ &= f^2(u(t))\left(2\frac{f'(u)}{f(u)}u'(t)v'(t) + v''(t)\right), \end{aligned}$$

dove $f^2(u) > 0$, segue che $f^2(u(t))v'(t)$ è cost. se e solo se

$$2(f'(u)/f(u))u'(t)v'(t) + v''(t) = 0.$$

Inoltre, $\|\dot{\sigma}(t)\| = 1$, ossia $(u'(t))^2 + f^2(t)(v'(t))^2 = 1$. Allora, se $\sigma(t)$ è geodetica, dal sistema (5.49) abbiamo il sistema (5.47).

Viceversa, assumiamo che $\sigma(t)$ non sia un parallelo e sia soddisfatto il sistema (5.47). Allora, vale la seconda equazione del sistema (5.49) in quanto, come visto prima, è equivalente alla seconda equazione del sistema (5.47). Inoltre, derivando la prima della (5.47), si ha

$$0 = 2u'u'' + 2f(u)f'(u)u'(v')^2 + 2f^2v'v''.$$

Da questa, usando la seconda equazione del sistema (5.49), ossia la

$$2(f'(u)/f(u))u'(t)v'(t) + v''(t) = 0,$$

si ha

$$\begin{aligned} 0 &= 2u'u'' + 2f(u)f'(u)u'(v')^2 - 2f^2(u)v' \left(2 \frac{f'(u)}{f(u)} u'v' \right) \\ &= 2u' \left(u'' - f'(u)f(u)(v')^2 \right). \end{aligned}$$

Se fosse $(u'' - f'(u)f(u)(v')^2)(t_0) \neq 0$ in qualche t_0 , allora sarebbe $u'(t) = 0$ in un intorno di t_0 e quindi si avrebbe $u(t) = u_0$ nello stesso intorno, per cui $\sigma(t)$ dovrebbe essere un parallelo in un intorno di t_0 che è una contraddizione. Pertanto, si ha $u'' - f'(u)f(u)(v')^2 = 0$ ovvero la prima equazione della (5.49), e quindi $\sigma(t)$ è una curva geodetica. Inoltre, da $f^2(u(t))v'(t) = c$ segue che

la costante $c = 0 \Leftrightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow v(t) = v_0 \Leftrightarrow \sigma(t)$ è un meridiano di M .

In particolare, ogni meridiano $\sigma(t) = \varphi(u(t), v_0)$, con t ascissa curvilinea, soddisfa il sistema (5.47) e quindi è una curva geodetica di M .

3) Proviamo che ogni curva geodetica $\sigma(t)$ soddisfa la relazione di Clairaut. Siccome $E = 1$, $F = 0$, $G = f^2(u)$, allora $E_1 = \varphi_u$ e $E_2 = (1/f)\varphi_v$ è base ortonormale lungo σ e quindi possiamo scrivere

$$\dot{\sigma}(t) = \cos \vartheta(t)E_1 + \sin \vartheta(t)E_2,$$

dove $\vartheta(t)$ è l'angolo convesso tra $\dot{\sigma}(t)$ e φ_u (vettore tangente al meridiano per $\sigma(t)$). Da

$$E_1 \wedge \dot{\sigma}(t) = E_1 \wedge (\cos \vartheta(t)E_1 + \sin \vartheta(t)E_2) = (1/f)\sin \vartheta(t)\varphi_u \wedge \varphi_v$$

e

$$E_1 \wedge \dot{\sigma}(t) = \varphi_u \wedge (u'\varphi_u + v'\varphi_v)(t) = (v'\varphi_u \wedge \varphi_v)(t),$$

si ottiene $\sin \vartheta(t) = fv'(t)$ che con la seconda della (5.47) implica la relazione di Clairaut.

Viceversa, supponiamo che $\sigma(t)$, sempre con t ascissa curvilinea, soddisfi la relazione di Clairaut $f \sin \vartheta = c$. Procedendo come prima si ha $\sin \vartheta(t) = fv'(t)$, e quindi la relazione di Clairaut implica la seconda della (5.47). La prima della (5.47) vale in quanto $\sigma(t)$ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Siccome, $\sigma(t)$ non è un parallelo, dalla 2) segue che $\sigma(t)$ è una curva geodetica. \square

Osservazione 5.69. Sia $\sigma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ una curva regolare della superficie di rotazione M considerata nell'Esempio 5.68. Assumiamo che $\sigma(t)$ sia una curva geodetica parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Allora è soddisfatto il sistema di equazioni differenziali (5.47):

$$(u'(t))^2 + f^2(u(t))(v'(t))^2 = 1, \quad f^2(u(t))v'(t) = c.$$

Assumiamo inoltre che σ non sia un meridiano, quindi la costante $c \neq 0$. Cambiando parametrizzazione, se necessario, possiamo assumere $v'(t) > 0$ e quindi $c > 0$. Dal sistema (5.47), segue

$$\begin{aligned}(u'(t))^2 &= 1 - f^2(u(t))(v'(t))^2 = 1 - f^2(u(t))c^2/f^4(u(t)) \\ &= (f^2(u(t)) - c^2)/f^2(u(t)).\end{aligned}$$

Quindi, deve essere

$$f(u(t)) \geq c, \quad \text{per ogni } t.$$

Ciò significa che la geodetica si trova nella parte di superficie i cui punti sono a distanza $\geq c$ dall'asse.

Esempio 5.70. Superficie torica

La superficie torica è una superficie di rotazione e quindi valgono i risultati dell'Esempio 5.68. In particolare, un meridiano è costituito da due circonferenze che saranno quindi geodetiche; tra i paralleli solo quello di raggio massimo e quello di raggio minimo sono geodetiche.

Esempio 5.71. Superficie tubolare

Consideriamo la superficie M , intorno tubolare di raggio $r > 0$ della curva di Frenet $\gamma(u)$, quindi la superficie parametrizzata da (cf. Esempio 4.28)

$$\varphi(u, v) = \gamma(u) + r(\cos v)\vec{n}(u) + r(\sin v)\vec{b}(u)$$

con la condizione $\kappa(u)r < 1$. Vogliamo vedere se per questa superficie le curve coordinate sono curve geodetiche. Proviamo che le curve delle v sono sempre curve geodetiche. Come visto nell'Esempio 4.28, abbiamo

$$\begin{aligned}N &= -\cos v \vec{n}(u) - \sin v \vec{b}(u), \\ \varphi_{uu} &= -r(\kappa'(u)\cos v - \tau(u)\kappa(u)\sin v)\vec{t}(u) \\ &\quad + ((1 - r\kappa(u)\cos v)\kappa(u) - r\tau'(u)\sin v - r\tau^2(u)\cos v)\vec{n}(u) \\ &\quad + r(\tau'(u)\cos v - \tau^2(u)\sin v)\vec{b}(u), \\ \varphi_{vv} &= -r\cos v \vec{n}(u) - r\sin v \vec{b}(u) = rN, \\ \ell &= \varphi_{uu} \cdot N = r\tau^2(u) - \kappa(u)\cos v(1 - r\kappa(u)\cos v).\end{aligned}$$

Da queste formule si ottiene che la componente tangente $\varphi_{vv}^\top = 0$, e quindi dalla Proposizione 5.61 segue che le curve delle v sono curve geodetiche.

Consideriamo ora il caso in cui la curva di Frenet $\gamma(u)$ abbia curvatura costante $\kappa(u) = \kappa_0 > 0$ e torsione costante $\tau(u) = \tau_0$ (in particolare può essere $\tau_0 = 0$). In tal caso,

$$\begin{aligned}\varphi_{uu} &= (r\tau_0\kappa_0\sin v)\vec{t}(u) + ((1 - r\kappa_0\cos v)\kappa_0 - r\tau_0^2\cos v)\vec{n}(u) \\ &\quad - (r\tau_0^2\sin v)\vec{b}(u), \\ \varphi_{uu}^\top &= \varphi_{uu} - (\varphi_{uu} \cdot N)N = \varphi_{uu} - \ell N \\ &= (r\tau_0\kappa_0\sin v)\vec{t}(u) + (\kappa_0\sin^2 v(1 - r\kappa_0\cos v))\vec{n}(u) \\ &\quad - \kappa_0\cos v\sin v(1 - r\kappa_0\cos v)\vec{b}(u).\end{aligned}$$

Pertanto, se $\gamma(u)$ è una (parte di) elica circolare oppure una (parte di) circonferenza, dalla Proposizione 5.61 segue che le curve delle u sono curve geodetiche se, e solo se, $\sin v = 0$ (quindi per $v = 0, \pi$).

Esercizio 5.72. Verificare che se M è una superficie regolare di \mathbb{R}^3 simmetrica rispetto a un piano E (per l'origine), allora la curva $\gamma = E \cap M$ è una curva geodetica (come insieme di punti) per M . Applicare questo risultato al caso dell'ellissoide: $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

Esercizio 5.73. Si consideri la curva piana $\gamma : y^2 - z^2 = 1, x = 0$. Sia M_1 la superficie di rotazione ottenuta ruotando γ intorno all'asse z e sia M_2 la superficie di rotazione ottenuta ruotando γ intorno all'asse y . Determinare i paralleli di M_1, M_2 (se esistono) che sono curve geodetiche. Inoltre, determinare tre differenti tipi di geodetiche di M_1 per il punto $p_0 = (0, 1, 0)$.

Esercizio 5.74. Sia M una superficie di rotazione con la proprietà che tutti i paralleli siano curve geodetiche. Dire che tipo di superficie di rotazione è M .

5.8. Geodetiche e curve minimali

Nel caso del piano euclideo, dati due punti p e q esiste sempre una curva geodetica (un segmento di retta) di lunghezza minima che li congiunge. In questa sezione vogliamo studiare la seguente questione “dati due punti p e q di un'arbitraria superficie regolare M , esiste una geodetica di lunghezza minima che li congiunge?”

Definizione 5.75. Sia M una superficie regolare e sia d la funzione distanza intrinseca di M . Una curva differenziabile $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ congiungente due punti p, q , si dice curva minimale se $L(\gamma) = d(p, q)$ cioè se $L(\gamma) \leq L(\sigma)$, per ogni $\sigma \in C(p, q)$.

Nella sezione successiva vedremo che curve minimali sono curve geodetiche. Intanto, vediamo con degli esempi le diverse situazioni che si possono presentare.

1. Sia M il piano euclideo \mathbb{R}^2 . Tra tutte le curve che congiungono due punti $p, q \in \mathbb{R}^2$, il segmento di retta $\gamma(t) = (1-t)p + tq, t \in [0, 1]$, è quello che realizza la minima distanza.

2. Per la sfera canonica \mathbb{S}^2 , abbiamo visto che le curve geodetiche sono tutte e sole le circonferenze di raggio massimo. In tal caso, comunque prendiamo due punti esiste sempre una geodetica minimale che li congiunge. Se $p, q \in \mathbb{S}^2$ non sono antipodali, allora esiste un'unica geodetica minimale γ che li congiunge. Se $p, q \in \mathbb{S}^2$ sono antipodali, esistono infinite geodetiche minimali che li congiungono.

3. Sia $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (piano euclideo privato dell'origine). Se $p = (1, 0)$ e $q = (-1, 0)$, allora non esiste una geodetica che li congiunge.

4. Sia M la superficie cilindrica $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Nell'Esempio 5.66 sono state determinate le geodetiche del cilindro circolare retto M . Un altro modo per determinare le geodetiche di M è il seguente. Poiché il rivestimento $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, $(\vartheta, v) \mapsto (e^{i\vartheta}, v)$ è una isometria locale, le geodetiche di M sono tutte e sole le immagini mediante F delle curve geodetiche del piano euclideo. Quindi, le geodetiche di M sono le rette generatrici (immagini delle rette parallele all'asse delle v), le circonferenze (immagini delle rette parallele all'asse delle ϑ) e le eliche (immagini di rette non parallele agli assi). Se p, q appartengono alla stessa circonferenza, allora esistono due archi di geodetica che li congiungono di cui uno minimale. Se p, q non appartengono alla stessa circonferenza, in tal caso esistono infinite geodetiche che li congiungono le cui lunghezze non sono uguali. Per vedere ciò, consideriamo l'isometria locale F la quale sviluppa il cilindro sul piano (cf. Figura 4).

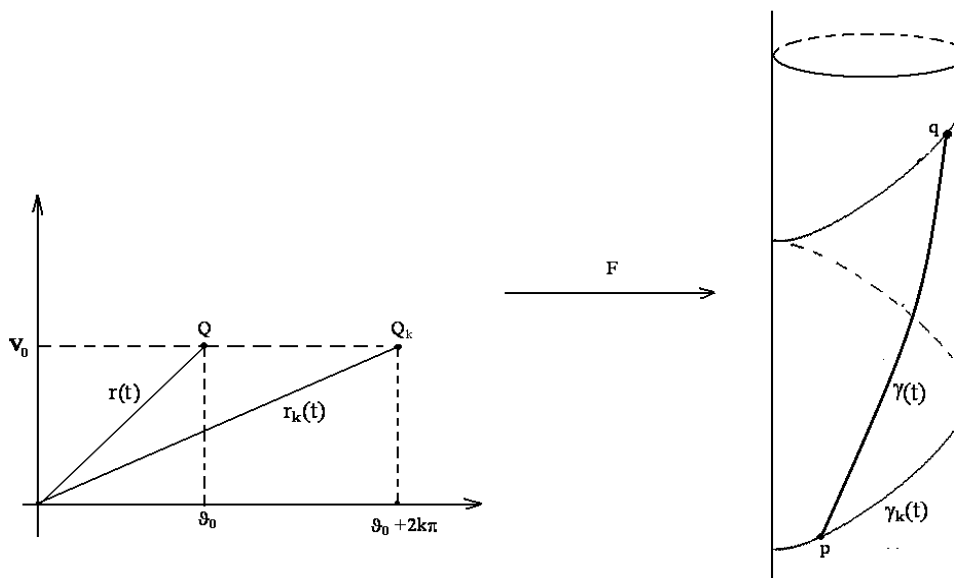


FIGURA 4

Poniamo $F(0, 0) = p$ e $F(\vartheta_0, v_0) = q$ con $\vartheta_0 \neq 0$, quindi con p, q non appartenenti alla stessa generatrice. Se $r(t)$ è il segmento \overline{OQ} , $Q(\vartheta_0, v_0)$, l'elica $\gamma(t) = F(r(t))$ è una geodetica che congiunge p e q . Se consideriamo $Q_k = (\vartheta_0 + 2k\pi, v_0)$, $k \in \mathbb{Z}$, e $r_k(t)$ è il segmento $\overline{OQ_k}$, allora $\gamma_k(t) = F(r_k(t))$ è una geodetica che congiunge, per ogni k , gli stessi punti. La geodetica minimale è l'arco di elica che corrisponde al segmento \overline{OQ} con $Q(\vartheta_0, v_0)$, $0 < \vartheta_0 < 2\pi$. In particolare, se p, q appartengono alla stessa generatrice, vale il discorso di prima: $F(\vartheta_0, v_0) = p$, $F(\vartheta_0 + 2k\pi, v_1) = F(\vartheta_0, v_1) = q$, e la geodetica minimale è il segmento di generatrice che congiunge p e q .

Dal Teorema 5.46 abbiamo l'esistenza e l'unicità (locale) della geodetica con fissate condizioni iniziali. Si può dimostrare, usando la teoria delle equazioni

differenziali, la seguente

Proposizione 5.76. *Per ogni fissato $p_0 \in M$, esistono un intorno aperto U di p_0 , un $\delta > 0$ e un $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $p \in U$ e per ogni $V \in T_p M$, $\|V\| < \delta$, esiste un'unica curva geodetica $\gamma_{p,V}(t)$, definita per $|t| < \varepsilon$, che soddisfa*

$$\gamma_{p,V}(0) = p \quad e \quad \dot{\gamma}_{p,V}(0) = V.$$

Consideriamo la geodetica $\gamma_{p,V}(t)$, definita per $|t| < \varepsilon$. Se λ è una costante $\neq 0$, la curva $\sigma(t) := \gamma_{p,V}(\lambda t)$, $|\lambda t| < \varepsilon$, è una geodetica e verifica le condizioni:

$$\sigma(0) = \gamma_{p,V}(0) = p \quad e \quad \dot{\sigma}(0) = \lambda \dot{\gamma}_{p,V}(0) = \lambda V.$$

Dunque, per l'unicità delle geodetiche con le fissate condizioni iniziali, deve essere

$$\sigma(t) = \gamma_{p,\lambda V}(t) \quad \text{con} \quad |t| < \varepsilon/|\lambda|.$$

Pertanto, per λ costante $\neq 0$, abbiamo la seguente proprietà di omogeneità:

$$(5.50) \quad \gamma_{p,\lambda V}(t) = \gamma_{p,V}(\lambda t) \quad \text{con} \quad |t| < \varepsilon/|\lambda|.$$

Quindi è possibile diminuire la velocità di una geodetica aumentando l'intervallo di tempo (cioè l'intervallo di t), e viceversa. Applicando la (5.50) per $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$, con $\|V\| < \delta$ (dove δ è definito dalla Proposizione 5.76), si ha che

$$\gamma_{p,\frac{\varepsilon}{2}V}(t) \text{ è definita per } |t| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon/2} = 2, \text{ dove } \|(\varepsilon/2)V\| < (\varepsilon/2)\delta.$$

Di conseguenza, per ogni $W \in T_p M$, $\|W\| < \delta_0$, prendendo $\delta_0 < \frac{\varepsilon\delta}{2}$, si ottiene che la geodetica $\gamma_{p,W}(t)$ è definita per $|t| < 2$. Pertanto, abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 5.77. *Per ogni $p_0 \in M$ esiste un intorno aperto U di p_0 e un $\delta_0 > 0$ tale che per ogni $p \in U$ e per ogni $W \in T_p M$, $\|W\| < \delta_0$, la geodetica $\gamma_{p,W}(t)$ è definita per $|t| < 2$ e quindi, in particolare, per $t = 1$.*

Nel seguito, quando il punto p è fissato, la geodetica $\gamma_{p,V}(t)$ la denoteremo semplicemente con $\gamma_V(t)$. La Proposizione 5.77 permette di introdurre la seguente definizione.

Definizione 5.78. *L'applicazione esponenziale in p è l'applicazione*

$$\begin{aligned} \exp_p : B(0, \delta_0) &= \{W \in T_p M : \|W\| < \delta_0\} \subset T_p M \rightarrow M, \\ W &\mapsto \exp_p W = \gamma_W(1). \end{aligned}$$

Si noti che \exp_p è differenziabile in quanto le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali dipendono differenziabilmente dalle condizioni iniziali, inoltre è definita in generale solo su un intorno del vettore nullo, e $\exp_p 0 = p$. Se \exp_p è definita in $W \in B(0, \delta_0)$, allora $\gamma_W(t)$ è definita per $t \in [-1, 1]$ e

$$(5.51) \quad \gamma_W(t) = \gamma_{tW}(1) = \exp_p(tW) \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Geometricamente, $\exp_p V = \gamma_V(1)$ è un punto di M che si trova sulla geodetica $\gamma_V(t)$ a distanza $\|V\|$ dal punto p nel verso di V . Infatti, siccome $\|\dot{\gamma}_V(t)\| = \text{cost.}$, abbiamo

$$L(\gamma_V|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(t)\| dt = \int_0^1 \|\dot{\gamma}_V(0)\| dt = \int_0^1 \|V\| dt = \|V\|.$$

La seguente proposizione evidenzia la naturalità dell'applicazione esponenziale.

Proposizione 5.79. *L'applicazione esponenziale commuta con le isometrie. Più precisamente, se $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ è un'isometria, allora*

$$f \circ \exp_p V = \exp_{f(p)} \circ f_{*p} V \quad \text{per } V \in B(0, \delta_0) \subset T_p M.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $V \in B(0, \delta_0)$ e $\gamma_V(t)$ la geodetica definita per $t \in [0, 1]$, con $\gamma_V(0) = p$ e $\dot{\gamma}_V(0) = V$. Poiché f è una isometria, la curva $\tilde{\gamma}(t) = f \circ \gamma_V(t)$ è una geodetica e inoltre $\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma_V(0)) = f(p)$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = f_{*p} \dot{\gamma}_V(0) = f_{*p} V$. Pertanto, $f \circ \gamma_V(t) = \gamma_{f_{*p} V}(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$, e quindi:

$$f(\exp_p V) = f(\gamma_V(1)) = \gamma_{f_{*p} V}(1) = \exp_{f(p)} f_{*p} V.$$

□

Esempio 5.80. Nel caso del piano euclideo \mathbb{R}^2 , per $V \in T_p \mathbb{R}^2$, la geodetica $\gamma_V(t) = p + tV$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi,

$$\exp_p : T_p \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_V(1) = V \mapsto p + V.$$

Esempio 5.81. Nel caso della sfera unitaria \mathbb{S}^2 , l'applicazione esponenziale in un fissato punto $p \in \mathbb{S}^2$ è definita su tutto lo spazio tangente $T_p \mathbb{S}^2$ e applica

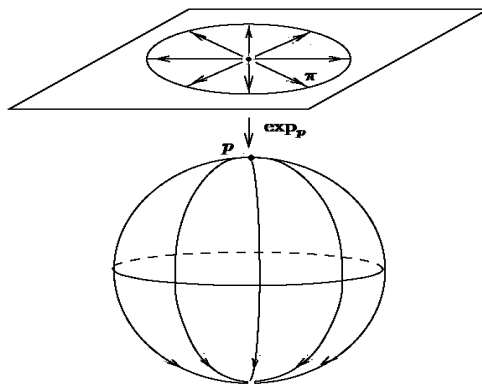


FIGURA 5

la palla aperta $B(0, \pi)$ di centro l'origine e raggio π di $T_p \mathbb{S}^2$ iniettivamente su $\mathbb{S}^2 - \{q\}$, dove q è il punto antipodale di p . Inoltre, \exp_p applica il bordo di $B(0, \pi)$ nel punto q (cf. Figura 5).

Vediamo di giustificare in qualche modo il termine esponenziale dato all'applicazione \exp_p . Fissati $p \in \mathbb{S}^2$ e $V_0 \in T_p\mathbb{S}^2$, indichiamo con \mathbb{S}^1 la geodetica massimale con le fissate condizioni iniziali (p, V_0) , quindi la circonferenza di raggio massimo (della sfera \mathbb{S}^2) passante per p e tangente in p a V_0 . Indichiamo con $T_p\mathbb{S}^1$ il sottospazio 1-dimensionale di $T_p\mathbb{S}^2$ generato dal vettore V_0 , allora \exp_p ristretta a $T_p\mathbb{S}^1$ assume valori in \mathbb{S}^1 .

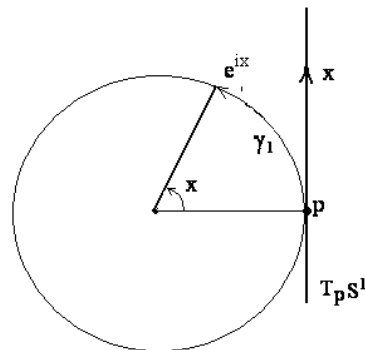


FIGURA 6

In questo caso, per $x \in T_p\mathbb{S}^1$, la geodetica $\gamma_x(t)$, $t \in [0, 1]$, è l'arco di circonferenza γ_1 uscente da p , nel verso definito da x , con $L(\gamma_1) = \|x\|$. Identificato $T_p\mathbb{S}^1$ con \mathbb{R} , x si può pensare come la misura in radianti di un angolo, allora si ha (cf. Figura 6)

$$\exp_p : T_p\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, x \mapsto \gamma_x(1) = e^{ix}.$$

In generale, l'applicazione esponenziale in un fissato punto $p \in M$ definisce solo un diffeomorfismo locale.

Teorema 5.82. *Per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto $B(0)$ dell'origine in T_pM diffeomorfo, mediante l'applicazione \exp_p , a un intorno aperto $U(p)$ di p in M , ossia $\exp_p : B(0) \rightarrow U(p)$, $V \mapsto \gamma_V(1)$, è un diffeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che $\exp_p : B(0, \delta_0) \subset T_pM \rightarrow M$. Indichiamo con f l'applicazione esponenziale \exp_p e consideriamo il suo differenziale $f_* : T_0(T_pM) \rightarrow T_pM$ nell'origine. Per ogni fissato V in $T_0(T_pM)$, che possiamo identificare con T_pM , consideriamo la curva differenziabile $\sigma(t) = tV$ di T_pM . Siccome $\sigma(0) = 0$ e $\dot{\sigma}(0) = V$, abbiamo

$$f_*(V) = f_*(\dot{\sigma}(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_V(t))|_{t=0} = \dot{\gamma}_V(0) = V.$$

Dunque, f_* è l'identità e quindi, applicando il Teorema della funzione inversa, esiste un intorno $B(0)$ dell'origine in T_pM diffeomorfo, mediante l'applicazione \exp_p , a un intorno $U(p)$ di p in M . \square

L'intorno aperto U di p in M definito nel Teorema 5.82, viene detto **intorno normale** del punto p . In particolare, prendendo l'aperto $B(0)$ del tipo $B(0, r)$, l'intorno normale corrispondente $U = \exp_p B(0, r)$ viene detto **palla geodetica** di M centrata in p , in tal caso le geodetiche di U uscenti da p sono dette **geodetiche radiali**. Per $\delta < r$, l'intorno $S(p, \delta) = \exp_p(\partial B(0, \delta))$, è detto **cerchio geodetico** di M centrato in p .

Siccome l'applicazione \exp_p è un diffeomorfismo sull'aperto $B(0)$, allora \exp_p può definire nuove coordinate nell'aperto U che vengono dette *coordinate normali*.

Il seguente teorema esprime la minimalità delle geodetiche radiali.

Teorema 5.83. *Sia $\gamma : [0, c] \rightarrow M$ una geodetica radiale di $U = \exp_p B(0, r)$ palla geodetica centrata in $p = \gamma(0)$. Allora, per ogni $q \in \gamma([0, c])$, l'arco geodetico radiale $\gamma(p, q)$ è l'unica curva minimale che congiunge p e q .*

DIMOSTRAZIONE. ([17], p. 344). □

Sia γ una curva geodetica di M e siano p_1, p_2 due punti nel sostegno di γ . Se p_2 è abbastanza vicino a p_1 , in altre parole se p_2 è contenuto in una palla geodetica centrata in p_1 , allora l'arco geodetico $\gamma(p_1, p_2)$ è radiale e quindi, per il Teorema 5.83, è l'unica curva minimale che congiunge p_1 e p_2 . Pertanto, vale la seguente

Proposizione 5.84. *Ogni curva geodetica di (M, g) è localmente minimale.*

Concludiamo questa sezione con un breve cenno al Teorema di Hopf-Rinow. Nel caso del piano euclideo è ben noto che ogni segmento di retta si può prolungare indefinitamente, per la geodetiche abbiamo la seguente

Definizione 5.85. *Una superficie M è detta geodeticamente completa se ogni geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ può essere estesa a una geodetica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$.*

Il piano euclideo e la sfera canonica sono chiaramente superfici geodeticamente complete. Ricordiamo che esiste anche la nozione di completezza nell'ambito degli spazi metrici: uno *spazio metrico* si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente. D'altronde, una superficie è uno spazio metrico rispetto alla distanza intrinseca d (cf. Sezione 5.1). La topologia indotta dalla distanza intrinseca d è equivalente alla topologia indotta su M dalla topologia euclidea di \mathbb{R}^3 . Il teorema di Hopf-Rinow ci dice non solo che le due nozioni di completezza sono equivalenti, ma sono anche sufficienti per l'esistenza di geodetiche minimali.

Teorema 5.86. *(di Hopf-Rinow) Sia M una superficie (connessa) regolare e sia d la distanza intrinseca di M . Allora, seguenti proprietà sono equivalenti.*

- (1) M è geodeticamente completa.
- (2) (M, d) è uno spazio metrico completo.
- (3) Chiusi e limitati di (M, d) sono compatti.

Inoltre, se una di queste condizioni vale, per ogni $p, q \in M$ esiste una geodetica minimale (non necessariamente unica) che li congiunge.

Esistono superfici complete in cui la geodetica minimale non è unica. Ad esempio, se consideriamo due punti antipodali della sfera canonica, la geodetica minimale che li congiunge non è univocamente determinata. Inoltre, se consideriamo come superficie di \mathbb{R}^3 il semipiano euclideo $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, questa è una superficie in cui comunque prendiamo due punti esiste una geodetica minimale che li congiunge, tuttavia non è una superficie completa, ad esempio la successione $\{p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\}_n$ è una successione di Cauchy che non è convergente in \mathbb{R}_+^2 . Quindi, della seconda parte del Teorema 5.86 non vale il viceversa.

Corollario 5.87. *Una superficie regolare (connessa) compatta è geodeticamente completa.*

Quindi per le superfici regolari connesse compatte di \mathbb{R}^3 (che sono sfere, tori e p -tori, $p > 0$) comunque si considerano due punti esiste sempre una geodetica minimale che li congiunge.

5.9. Energia di una curva

Scopo di questa sezione è studiare l'energia di una curva. Vedremo, come conseguenza della prima formula variazionale dell'energia di una curva, che le curve geodetiche sono punti critici del funzionale energia e che le curve minimali sono necessariamente curve geodetiche.

Sia $\sigma : [a, b] \rightarrow M$, $t \mapsto \sigma(t)$, una curva differenziabile di una superficie regolare M di \mathbb{R}^3 . L'**energia** di σ è definita da

$$E(\sigma) := \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt.$$

Possiamo quindi considerare il funzionale $E : \sigma \mapsto E(\sigma)$ che viene detto *funzionale energia*. Si noti che l'energia di una curva, a differenza della lunghezza, dipende dalla parametrizzazione. Se $\theta : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$, $t \mapsto \theta(t)$, è un cambiamento regolare di parametro, le curve $\tilde{\sigma} : [\alpha, \beta] \rightarrow M$, $\theta \mapsto \tilde{\sigma}(\theta)$ e $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \theta : [a, b] \rightarrow M$, $t \mapsto \sigma(t)$, in generale, non hanno la stessa energia:

$$2E(\sigma) = \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt = \int_a^b \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta(t))\|^2 |\theta'(t)|^2 dt \neq \int_\alpha^\beta \|\dot{\tilde{\sigma}}(\theta)\|^2 d\theta = 2E(\tilde{\sigma}).$$

Lemma 5.88. *Si ha*

$$L^2(\sigma) \leq 2(b-a)E(\sigma),$$

dove l'uguaglianza si ha se e solo se $\sigma(t)$ è parametrizzata a velocità costante (ossia t è proporzionale all'ascissa curvilinea).

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che $L(\sigma) = \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\| dt$. Date due funzioni reali continue f_1, f_2 definite in $[a, b]$, applicando la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$\left(\int_a^b f_1 f_2 dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f_1^2 dt \right) \left(\int_a^b f_2^2 dt \right),$$

dove l'uguaglianza si ha se e solo se la funzione f_2 è proporzionale a f_1 . Applicando la suddetta disuguaglianza alle funzioni $f_1 = \text{cost.} = 1$ e $f_2 = \|\dot{\sigma}(t)\|$, si ha l'enunciato del lemma. \square

Siano D un aperto connesso di \mathbb{R}^2 e $H : D \rightarrow M$, $(t, r) \mapsto H(t, r)$, un'applicazione differenziabile. Fissato il parametro t (rispettivamente r), $H(t, r)$ si può pensare come una curva parametrizzata di M . Allora,

$$\frac{\partial H}{\partial t} : (t, r) \mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{(t,r)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial r} : (t, r) \mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)_{(t,r)}$$

sono *campi differenziabili di vettori lungo H* . Siccome $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t \partial r} \right)^\top = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial r \partial t} \right)^\top$, si ha

$$(5.52) \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{D}{dr} \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Sia

$$H : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad (t, r) \mapsto H(t, r) = \sigma_r(t),$$

una **variazione** della curva $\sigma : [a, b] \rightarrow M$, cioè un'applicazione differenziabile con

$$H(t, 0) = \sigma_0(t) = \sigma(t).$$

Se inoltre, per ogni $r \in (-\epsilon, \epsilon)$, si ha

$$H(a, r) = \sigma_r(a) = \sigma(a) \quad \text{e} \quad H(b, r) = \sigma_r(b) = \sigma(b),$$

allora la **variazione** è detta **propria** (cf. Figura 7). Per ogni fissato $r \in (-\epsilon, \epsilon)$,

$$\sigma_r : [a, b] \rightarrow M, \quad t \mapsto \sigma_r(t) = H(t, r),$$

è una *curva della variazione H* . Se la variazione è propria, tutte le curve $\sigma_r(t)$ hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Per ogni fissato $t \in [a, b]$, la curva

$$\sigma_t : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \quad r \mapsto \sigma_t(r) = H(t, r),$$

è detta **curva trasversa** della variazione (cf. Figura 7). Il vettore velocità $V(t)$ della curva trasversa $\sigma_t(r)$, per $r = 0$, è dato da

$$V(t) = \left(\frac{\partial H(t, r)}{\partial r} \right)_{(t,0)} = \left(\frac{d}{dr} \sigma_t(r) \right)_{|r=0} = \dot{\sigma}_t(0) \in T_{H(t,0)}M = T_{\sigma(t)}M.$$

Quindi, $V(t) \in \mathfrak{X}(\sigma)$ è un campo differenziabile lungo $\sigma_0(t) = \sigma(t)$ che viene detto **campo variazionale** di H . Se la variazione è propria:

$$\sigma_a(r) = H(a, r) = \sigma(a) = p = \text{cost.} \quad \text{e} \quad \sigma_b(r) = H(b, r) = \sigma(b) = q = \text{cost.},$$

e quindi

$$\dot{\sigma}_a(0) = \dot{\sigma}_b(0) = 0, \text{ cioè } V(a) = V(b) = 0.$$

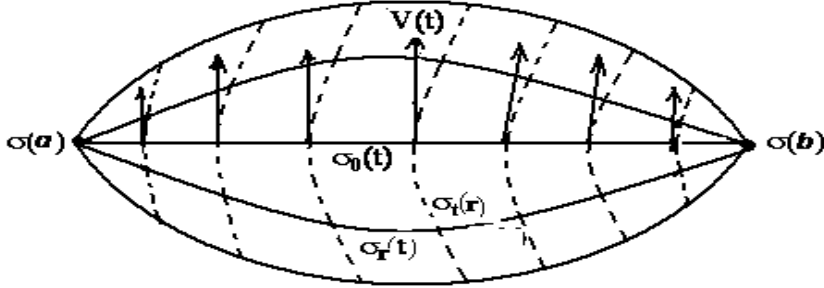


FIGURA 7. Le curve tratteggiate sono le curve trasverse.

La funzione

$$E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad r \mapsto E(r) = E(\sigma_r(t)) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\sigma}_r(t)\|^2 dt$$

è detta **energia** di H .

Teorema 5.89. (formula della variazione prima)

Sia $H(t, r)$ una variazione propria di σ . Allora

$$(5.53) \quad E'(0) = - \int_a^b \left(V(t) \cdot \frac{D\dot{\sigma}}{dt}(t) \right) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la derivata del funzionale energia

$$E'(r) = \frac{dE}{dr} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dr} (\dot{\sigma}_r(t) \cdot \dot{\sigma}_r(t)) dt.$$

$X(r) := \dot{\sigma}_r(t) = \frac{d}{dt} \sigma_r(t) = \frac{\partial}{\partial t} H(t, r)$ è un campo vettoriale lungo la curva trasversa $\sigma_t(r)$. Tenendo presente le proprietà della derivata covariante e la (5.52), si ottiene

$$(5.54) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dr} (\dot{\sigma}_r(t) \cdot \dot{\sigma}_r(t)) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial}{\partial t} H(t, r) \cdot \frac{\partial}{\partial t} H(t, r) \right) \\ &= 2 \left(\frac{D}{dr} \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \\ &= 2 \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

D'altronde,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) = \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

per cui dalla (5.54) segue

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (\dot{\sigma}_r(t) \cdot \dot{\sigma}_r(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right).$$

Pertanto,

$$E'(r) = \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt - \int_a^b \left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt$$

e quindi

$$E'(0) = \left\{ \left[\left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=a}^{t=b} \right\}_{|r=0} - \left\{ \int_a^b \left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt \right\}_{|r=0}.$$

Ricordiamo che

$$\frac{\partial H}{\partial r}(t, 0) = V(t) \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial H}{\partial t}(t, 0) = \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t),$$

per cui,

$$E'(0) = \left\{ \left[\left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=a}^{t=b} \right\}_{r=0} - \int_a^b \left(V(t) \cdot \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \right) dt.$$

Inoltre, poichè la variazione è propria, abbiamo

$$\frac{\partial H}{\partial r}(a, 0) = V(a) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial r}(b, 0) = V(b) = 0,$$

e quindi il termine $A := \left\{ \left[\left(\frac{\partial H}{\partial r} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right) \right]_{t=a}^{t=b} \right\}_{r=0}$ è dato da

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{\partial H}{\partial r}(b, r) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(b, r) \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial r}(a, r) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(a, r) \right) \right]_{|r=0} \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial r}(b, 0) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(b, 0) \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial r}(a, 0) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(a, 0) \right) \\ &= \left(V(b) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(b, 0) \right) - \left(V(a) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(a, 0) \right) = 0. \end{aligned}$$

Dunque la (5.53). □

Definizione 5.90. Una curva differenziabile $\sigma : [a, b] \rightarrow M$, $t \mapsto \sigma(t)$, si dice **punto critico** per il funzionale energia E se per ogni variazione propria $H(t, r) = \sigma_s(t)$ di σ si ha

$$\left(\frac{dE(r)}{dr} \right)_{|r=0} = 0.$$

Dal Teorema 5.89 segue facilmente che le curve geodetiche sono punti critici del funzionale energia. Viceversa, sia $\sigma(t)$ una curva punto critico dell'energia, ossia $E'(0) = 0$ per ogni variazione propria di $\sigma(t)$. Consideriamo il campo di vettori

$$W(t) = f(t) \frac{D}{dt} \dot{\sigma}(t) \in \mathfrak{X}(\sigma),$$

dove $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione differenziabile con $f(t) > 0$ per ogni $t \in]0, 1[$ e $f(0) = f(1) = 0$. Applicando il Teorema 5.82, per ogni $t \in [0, 1]$ esiste U_t intorno normale di $\sigma(t)$, ed esiste un $\delta_t > 0$ tale che $\exp_{\sigma(t)} V$ è definita per $\|V\| < \delta_t$. $\{U_t\}$ è un ricoprimento aperto del compatto $\sigma([0, 1])$, quindi

esiste un sottoricoprimento finito U_1, \dots, U_k di $\sigma([0, 1])$. Prendendo $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$, si ha che $\exp_{\sigma(t)}V$ è definita per ogni $t \in [0, 1]$ e per ogni $V \in T_{\sigma(t)}M$, $\|V\| < \delta$. Posto $\bar{\delta} = \max\{\|W(t)\|, t \in [0, 1]\}$ e $\varepsilon = \delta/\bar{\delta}$, si ha

$$\|rW(t)\| = |r|\|W(t)\| < \varepsilon\|W(t)\| < \varepsilon\bar{\delta} = \delta \quad \forall t \in [0, 1] \text{ e } \forall r \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Quindi, l'applicazione

$$H(t, r) := \exp_{\sigma(t)}rW(t)$$

è definita per ogni $t \in [0, 1]$ e per ogni $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Inoltre, $H(t, r)$ soddisfa:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \exp_{\sigma(t)}0 = \sigma(t), \\ H(0, r) &= \exp_{\sigma(0)}rW(0) = \exp_{\sigma(0)}0 = \sigma(0), \\ H(1, r) &= \exp_{\sigma(1)}rW(1) = \exp_{\sigma(1)}0 = \sigma(1). \end{aligned}$$

Pertanto $H(t, r)$ definisce una variazione propria di σ . Inoltre, il campo variazionale di questa variazione è dato da:

$$\begin{aligned} V(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial r} H(t, r) \right)_{|r=0} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \exp_{\sigma(t)}rW(t) \right)_{|r=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \gamma_{W(t)}(r) \right)_{|r=0} = \dot{\gamma}_{W(t)}(0) = W(t). \end{aligned}$$

Applicando la formula della variazione prima a questa variazione $H(t, r)$, si ha:

$$0 = E'(0) = - \int_0^1 g \left(f(t) \frac{D\dot{\sigma}}{dt}, \frac{D\dot{\sigma}}{dt} \right) dt = - \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D\dot{\sigma}}{dt} \right\|^2 dt.$$

Pertanto, $\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = 0$ e quindi $\sigma(t)$ è una curva geodetica. Dunque, abbiamo provato il seguente

Teorema 5.91. *Sia $\sigma : [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \sigma(t)$, una curva differenziabile. Allora, $\sigma(t)$ è una curva geodetica se e solo se $\sigma(t)$ è punto critico del funzionale energia.*

Osservazione 5.92. Si noti che mentre la nozione di curva geodetica ha carattere locale, la caratterizzazione di curva geodetica come punto critico del funzionale energia ha carattere globale.

Un'altra conseguenza del Teorema 5.89 è che una curva minimale è necessariamente una curva geodetica. Più precisamente abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5.93. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M, s \mapsto \gamma(s)$, una curva regolare di M parametrizzata con l'ascissa curvilinea. Se γ è minimale, ossia $L(\gamma) \leq L(\sigma)$ per ogni curva differenziabile a tratti σ che congiunge p a q , allora $\gamma(s)$ è una curva geodetica.*

DIMOSTRAZIONE. La disuguaglianza $L(\gamma) \leq L(\sigma)$ per ogni curva differenziabile a tratti σ che congiunge p a q , vale in particolare per ogni curva differenziabile che congiunge p a q . Sia quindi $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ un'arbitraria

curva differenziabile che congiunge p a q . Siccome γ è parametrizzata con l'ascissa curvilinea, applicando il Lemma 5.88 a γ si ha

$$2(b-a)E(\gamma) = L^2(\gamma).$$

Applicando lo stesso Lemma alla curva σ , si ha

$$L^2(\sigma) \leq 2(b-a)E(\sigma).$$

D'altronde, per ipotesi $L^2(\gamma) \leq L^2(\sigma)$. Quindi, abbiamo

$$E(\gamma) \leq E(\sigma)$$

per ogni curva differenziabile che congiunge p a q , ovvero γ è un minimo assoluto per il funzionale energia. Di conseguenza, si ha $E'(0) = 0$ per ogni variazione propria di γ . Applicando il Teorema 5.91, possiamo concludere che γ è una curva geodetica. \square

5.10. Curve magnetiche su superfici orientabili

Dal punto di vista dei sistemi dinamici, una geodetica corrisponde alla traiettoria di una particella che si muove senza l'azione di un campo magnetico. In questo contesto, le curve magnetiche generalizzano le curve geodetiche. L'approccio allo studio delle curve magnetiche dello spazio \mathbb{R}^3 con le 2-forme chiuse (cf. Sezione 2.8) si presta ad essere generalizzato al caso di una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 2$. Si noti che le curve magnetiche sono state considerate per la prima volta, come osservato in [13], da V.I. Arnold (*Some remarks on flows of line elements and frames*, Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 562–564) e D.V. Anosov and Y.G. Sinai (*Certain smooth ergodic systems*, Uspekhi Mat. Nauk. 22(5) (1967), 107–172; Russian Math. Surveys 22(5) (1967), 103–167).

In questa sezione esponiamo alcuni semplici risultati sulle curve magnetiche, dette anche geodetiche magnetiche [5], nel caso particolare delle superfici regolari di \mathbb{R}^3 . Per maggiori approfondimenti e sviluppi sulla teoria delle curve magnetiche sulle superfici si rinvia a [2],[6] e in particolare al recente articolo di V. Branding e W. Rossman [5], e alla bibliografia in esso riportata.

Sia (M, g) una superficie regolare orientabile e sia N un fissato campo unitario normale che orienta M . Inoltre, sia Ω la 2-forma d'area che definisce la stessa orientazione su M . Consideriamo su M la struttura complessa (naturale) J indotta da N e quindi dalla 2-forma Ω (cf. Sezione 3.10), ovvero

$$\Omega(X, Y) = JX \cdot Y = N \wedge X \cdot Y = X \wedge Y \cdot N.$$

Sappiamo che J è anche una trasformazione ortogonale antisimmetrica:

$$JX \cdot JY = X \cdot Y, \quad JX \cdot Y = -X \cdot JY.$$

Su M possiamo definire il differenziale esterno di una 2-forma con la formula (2.14) (tale formula vale più in generale per varietà differenziabili di dimensione n). Come osservato nella Sezione 3.10, ogni r -forma su una superficie regolare, con $r > 2$, è sempre nulla, e quindi in particolare ogni 2-forma è chiusa.

Come nel caso dello spazio euclideo (cf. Sezione 2.8), possiamo dare la seguente definizione (cf., ad esempio, [6]).

Definizione 5.94. *Un campo magnetico su una superficie regolare orientabile è una fissata 2-forma F .*

Una 2-forma F su M è completamente determinata da una funzione differenziabile $f \in \mathcal{F}(M)$ (cf. Osservazione 3.90) :

$$F = f\Omega.$$

Quindi, se $F = f\Omega$ è la 2-forma che definisce un campo magnetico su M , la funzione f è definita come l'*intensità del campo magnetico*. La corrispondente *forza di Lorentz* Φ , ovvero l'endomorfismo antisimmetrico metricamente equivalente a F , è definita da

$$\Phi X \cdot Y = F(X, Y) = f\Omega(X, Y) = f(JX \cdot Y),$$

e quindi

$$\Phi = fJ.$$

Nel seguito (M, F) denoterà sempre una superficie regolare orientabile di \mathbb{R}^3 (orientata da N , equivalentemente da Ω) con una fissata 2-forma F .

Definizione 5.95. *Sia $\gamma(t)$ una curva regolare parametrizzata di M . La curva $\gamma(t)$ si dice che è una curva magnetica di (M, F) , anche detta geodetica magnetica, se soddisfa l'equazione di Lorentz*

$$(5.55) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \Phi(\dot{\gamma}(t)) = f(\gamma(t)) J(\dot{\gamma}).$$

Qualche osservazione su analogie e differenze con le curve geodetiche.

- Il teorema di esistenza e unicità delle curve geodetiche, con fissate condizioni iniziali, vale anche per le curve magnetiche.
- Le curve magnetiche, così come le curve geodetiche, hanno velocità scalare costante:

$$(\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 2 \frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} \cdot \dot{\gamma}(t) = 2\Phi(\dot{\gamma}(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = 2F(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

- A differenza delle curve geodetiche, assegnato un campo magnetico F , una curva magnetica $\gamma(t)$ associata a F non si può riscalare, essa dipende dalla velocità scalare $\|\dot{\gamma}(t)\|$. Infatti, posto $t = cs$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, e $\beta(s) = \gamma(t(s)) = \gamma(cs)$, si ha $\dot{\beta}(s) = c\dot{\gamma}(t) = c\dot{\gamma}(t(s))$ e quindi

$$\frac{D\dot{\beta}}{ds} = c^2 \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = c^2 \Phi(\dot{\gamma}(t)) = c\Phi(\dot{\beta}(s)).$$

Pertanto, $\beta(s) = \gamma(cs)$ è curva magnetica rispetto al campo magnetico $\tilde{F} = cF$. Di conseguenza vale la seguente

Proposizione 5.96. *Sia F un campo magnetico non banale su una superficie regolare orientabile M . Allora, non esiste una connessione lineare su M le cui geodetiche siano le curve magnetiche di (M, F) .*

• Abbiamo visto (cf. Sezione 5.9) che le curve geodetiche sono punti critici del funzionale energia E . Anche le curve magnetiche di (M, F) possono essere viste, almeno localmente, come soluzioni di un problema variazionale. Infatti, sia U un aperto della superficie M tale che $F = d\omega$ per qualche 1-forma ω (detta *1-forma potenziale*). Siano $p, q \in U$ e $C(p, q)$ l'insieme di tutte le curve differenziabili che congiungono p a q e contenute in U . Per $\gamma \in C(p, q)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, consideriamo il funzionale, detto *funzionale di Landau-Hall*,

$$LH(\gamma) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \omega(\dot{\gamma}) \right) dt = E(\gamma) + \int_a^b \omega(\dot{\gamma}) dt.$$

Si può vedere che una curva $\gamma(t)$ di $C(p, q)$ soddisfa l'equazione di Lorentz (5.55) se e solo se è punto critico del funzionale di Landau-Hall (cf. [2]).

La seguente caratterizzazione delle curve magnetiche è utile per applicazioni numeriche [5].

Proposizione 5.97. *Una curva regolare parametrizzata $\gamma(t)$ di $(M, F = f\Omega)$ è una curva magnetica, ossia soddisfa l'equazione di Lorentz, se e solo se è soddisfatto il seguente sistema di equazioni*

$$(5.56) \quad \|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2 (\text{cost.} \neq 0) \quad e \quad \dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) \wedge N(t) = f(\gamma(t))c^2.$$

In particolare, se $\gamma(t)$ è parametrizzata a velocità scalare costante (uguale a 1), allora $\gamma(t)$ è una curva magnetica se e solo se è soddisfatta l'equazione

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) \wedge N(t) = f(\gamma(t)).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma(t)$ curva magnetica. Per quanto osservato prima, $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2$ ($\text{cost} \neq 0$). Usando le proprietà del prodotto misto, le proprietà di J e l'equazione di Gauss (5.12), otteniamo (omettendo il parametro)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} \wedge N &= \ddot{\gamma} \cdot N \wedge \dot{\gamma} = \ddot{\gamma} \cdot J\dot{\gamma} = \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot J\dot{\gamma} \right) \\ &= f(\gamma)(J\dot{\gamma} \cdot J\dot{\gamma}) \\ &= f(\gamma) \|\dot{\gamma}\|^2 = f(\gamma) c^2. \end{aligned}$$

Ora proviamo il viceversa. Osserviamo che $E_1(t) = (1/c)\dot{\gamma}(t)$ e $E_2(t) = (1/c)J\dot{\gamma}(t)$ formano una base ortonormale lungo γ . Quindi, possiamo scrivere

$$(5.57) \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_1(t) \right) E_1(t) + \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_2(t) \right) E_2(t).$$

Siccome $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = (\text{cost})$, si ha

$$c \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_1(t) \right) = \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot \dot{\gamma}(t) \right) = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t))' = 0.$$

Inoltre,

$$c \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot E_2(t) \right) = \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} \cdot J\dot{\gamma}(t) \right) = (\ddot{\gamma} \cdot N \wedge \dot{\gamma}) = (\dot{\gamma} \cdot \ddot{\gamma} \wedge N) = f(\gamma)c^2.$$

Pertanto, dalla (5.57) si ottiene l'equazione di Lorentz (5.55). \square

Osservazione 5.98. Sia $\gamma(t)$ una curva regolare parametrizzata di $(M, F = f\Omega)$. Allora, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- 1) $\gamma(t)$ è una curva magnetica;
- 2) $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2$ (cost $\neq 0$) e $\Omega(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) = f(\gamma(t))c^2$;
- 3) $\|\dot{\gamma}(t)\|^2 = c^2$ (cost $\neq 0$) e $\Omega(\dot{\gamma}(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}) = f(\gamma(t))c^2$.

Basta osservare, tenendo presente la (5.56) e la Proposizione 5.97, che

$$\Omega(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) = \dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) \wedge N(t) \quad \text{e}$$

$$\Omega(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)) = J(\dot{\gamma}) \cdot \ddot{\gamma} = J(\dot{\gamma}) \cdot \left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt} + (\ddot{\gamma} \cdot N)N \right) = \Omega(\dot{\gamma}(t), \frac{D\dot{\gamma}}{dt}).$$

Si noti che la 3) prescinde dall'ipotesi di immersione di M in \mathbb{R}^3 .

Sia ora $\gamma(s)$ una curva differenziabile regolare di M parametrizzata a velocità unitaria. Allora, lungo γ possiamo considerare (cf. Sezione 5.4) il riferimento di Frenet ($\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$, $\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)$), e la curvatura geodetica

$$k_g(s) := \frac{D\vec{t}}{ds} \cdot \vec{n}(s).$$

Quindi, abbiamo le formule di Frenet

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = k_g(s)\vec{n}(s), \quad \frac{D\vec{n}}{ds} = -k_g(s)\vec{t}(s).$$

Siccome $\Phi(\dot{\gamma}) = fJ(\dot{\gamma}) = fJ(\vec{t}) = f\vec{n}$, l'equazione di Lorentz (5.55) diventa

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = f\vec{n}.$$

D'altronde, dalla prima formula di Frenet

$$\frac{D\vec{t}}{ds} = k_g(s)\vec{n}(s).$$

Pertanto, otteniamo (cf. anche [2])

Teorema 5.99. *Per una curva magnetica $\gamma(s)$ di $(M, F = f\Omega)$, la curvatura geodetica è data da $k_g(s) = f(\gamma(s))$.*

Un campo magnetico F di intensità costante $f = \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, è detto *campo magnetico uniforme*. Consideriamo $\mu \neq 0$, altrimenti ricadiamo nel caso delle curve geodetiche.

Corollario 5.100. *Le curve magnetiche $\gamma(s)$ di (M, F) , dove F è campo magnetico uniforme con intensità $\mu \neq 0$, sono tutte e sole le curve che hanno curvatura geodetica $k_g(s) = \text{cost.} = \mu$.*

Osservazione 5.101. Per una curva magnetica $\gamma(t)$, come nel Teorema 5.99, parametrizzata a velocità scalare $\|\dot{\gamma}(t)\| = \text{cost.} = c > 0$, la curvatura geodetica $k_g(t) = f(\gamma(t))/c$. Infatti, in tal caso il riferimento di Frenet lungo $\gamma(t)$ è ($\vec{t}(t) = \frac{1}{c}\dot{\gamma}(t)$, $\vec{n}(t) = J\vec{t}(t) = \frac{1}{c}J(\dot{\gamma}(t))$) e le corrispondenti formule sono

$$\frac{D\vec{t}}{dt} = c k_g(t) \vec{n}(t), \quad \frac{D\vec{n}}{dt} = -c k_g(t) \vec{t}(t).$$

Pertanto, da

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = f(\gamma(t))J(\dot{\gamma}) \quad \text{e} \quad \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = c k_g(t)J(\dot{\gamma}),$$

si ottiene $c k_g(t) = f(\gamma(t))$.

Esempio 5.102. Le curve magnetiche del piano euclideo

Sia M il piano euclideo \mathbb{R}^2 e sia F il campo magnetico uniforme $F = \mu\Omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, dove Ω è la 2-forma fondamentale $\Omega(X, Y) = JX \cdot Y$ e J è la struttura complessa canonica di \mathbb{R}^2 (cf. Sezione 2.3), quindi $\Omega = dx \wedge dy$. Allora, le curve magnetiche di (\mathbb{R}^2, F) sono tutte e sole (parti di) circonferenze di raggio $r = 1/|\mu|$ del piano \mathbb{R}^2 . Ciò segue dal Corollario 5.100 e dal fatto che le curve regolari di \mathbb{R}^2 di curvatura geodetica costante (ovvero, l'usuale curvatura è costante) sono tutte e sole (parti di) circonferenze di raggio $r = 1/|\mu|$. Oppure, con un calcolo diretto, basta osservare che in questo caso l'equazione di Lorentz

$$\ddot{\gamma} = \mu J\dot{\gamma}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \mu \neq 0,$$

è equivalente al sistema di equazioni differenziali $x'' = -\mu y'$, $y'' = \mu x'$.

Esempio 5.103. Le curve magnetiche della sfera canonica

Sia \mathbb{S}^2 la sfera canonica di raggio R e sia F il campo magnetico uniforme $F = \mu\Omega$, dove Ω è la 2-forma d'area della sfera (cf. Osservazione 3.10). Allora, le curve magnetiche di (\mathbb{S}^2, F) sono tutte e sole (parti di) circonferenze, opportunamente parametrizzate, di raggio $r < R$ di \mathbb{S}^2 . Sia γ una circonferenza di raggio $r < R$ della sfera \mathbb{S}^2 , quindi un parallelo di \mathbb{S}^2 . Parametizziamo γ con

$$\gamma(s) = (r \cos(s/r), r \sin(s/r), \delta), \quad \text{dove } \delta^2 = R^2 - r^2,$$

quindi γ è la sezione di \mathbb{S}^2 con il piano $z = \delta < R$. Allora,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= (-\sin(s/r), \cos(s/r), 0) \quad \text{e} \\ \ddot{\gamma} &= (-(1/r)\cos(s/r), (-1/r)\sin(s/r), 0). \end{aligned}$$

Inoltre, il campo normale lungo γ è dato da

$$N(s) = N(\gamma(s)) = ((r/R)\cos(s/r), (r/R)\sin(s/r), (\delta/R)).$$

Per dimostrare che il parallelo $\gamma(s)$ è una curva magnetica, possiamo procedere in diversi modi.

1) Ricordiamo che nel caso di \mathbb{S}^2 , la struttura complessa J determinata da Ω è definita da $JX = N \wedge X$ (cf. Sezione 3.10), quindi

$$J\dot{\gamma} = N(s) \wedge \dot{\gamma}(s) = (1/R)(-\delta \cos(s/r), -\delta \sin(s/r), r).$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{\gamma}}{ds} &= \ddot{\gamma} - (\ddot{\gamma} \cdot N)N = \ddot{\gamma} + \frac{1}{R}N \\ &= \left(\frac{r^2 - R^2}{rR^2} \cos(s/r), \frac{r^2 - R^2}{rR^2} \operatorname{sen}(s/r), \frac{\delta}{R^2} \right) \\ &= \left(-\frac{\delta^2}{rR^2} \cos(s/r), -\frac{\delta^2}{rR^2} \operatorname{sen}(s/r), \frac{\delta}{R^2} \right) \\ &= \frac{\delta}{R^2} \left(-\frac{\delta}{r} \cos(s/r), -\frac{\delta}{r} \operatorname{sen}(s/r), 1 \right). \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\frac{D\dot{\gamma}}{ds} = \frac{\delta}{Rr} J\dot{\gamma} = \mu J\dot{\gamma}, \quad \text{dove } \mu = \frac{\delta}{Rr},$$

e quindi $\gamma(s)$ soddisfa l'equazione di Lorentz (5.55) con $F = \mu\Omega$.

2) Basta osservare che il parallelo $\gamma(s)$ soddisfa l'equazione

$$\dot{\gamma}(s) \cdot \ddot{\gamma}(s) \wedge N(s) = \frac{\delta}{R} \left((1/r) \operatorname{sen}^2(s/r) + (1/r) \cos^2(s/r) \right) = \mu,$$

con $\mu = \delta/Rr$, e applicare la Proposizione 5.97. Da $\mu = \delta/Rr$ e $\delta^2 = R^2 - r^2$, si ottiene che r, R e μ sono legati da

$$r = R/\sqrt{1 + R^2\mu^2}.$$

3) E' noto che il parallelo $\gamma(s)$ ha curvatura geodetica costante data da (cf. Esempio 5.44)

$$k_g(s) = \frac{\cos \vartheta}{R \operatorname{sen} \vartheta},$$

dove ϑ , ($0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$), è la colatitudine che individua γ . Pertanto, dal Corollario 5.100 segue che $\gamma(s)$ è una curva magnetica con $\mu = k_g$. Inoltre, $\gamma(s)$ ha raggio r dato da

$$r = R \operatorname{sen} \vartheta = \frac{R}{\sqrt{1 + (\cos^2 \vartheta / \operatorname{sen}^2 \vartheta)}} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 k_g^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \mu^2}} < R.$$

Viceversa, data $\gamma(s)$ curva magnetica di $(\mathbb{S}^2, F = \mu\Omega)$ con $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V_p$, consideriamo il parallelo σ di \mathbb{S}^2 dato da $\mathbb{S}^2 \cap \Pi$, dove Π è il piano contenente il vettore tangente $V_p = (p, v) \in T_p \mathbb{S}^2$ (ovvero, contenente la retta per p e parallela a v) e a distanza $\delta = \sqrt{R^2 - r^2}$ dal centro di \mathbb{S}^2 , dove la costante $r = R/\sqrt{1 + R^2\mu^2}$. Il parallelo σ ha raggio r , e per quanto detto prima è curva magnetica di \mathbb{S}^2 con le stesse condizioni iniziali di $\gamma(s)$ e campo magnetico $F = \mu\Omega$. Quindi, per l'unicità delle curve magnetiche con fissate condizioni iniziali, $\gamma(s)$ è contenuta in σ .

Siccome $r < R$, i punti antipodali non si potranno mai congiungere con una curva magnetica di $(\mathbb{S}^2, F = \mu\Omega)$.

Esempio 5.104. Le curve magnetiche del piano iperbolico

Una breve descrizione delle curve magnetiche nel semipiano di Poincaré, come modello di piano iperbolico, è data nell'Osservazione 6.10.

Esempio 5.105. Superficie di rotazione

Sia M una superficie di rotazione come nell'Esempio 5.68. Sia $\sigma(t)$, con t ascissa curvilinea, un parallelo di M , cioè $\sigma(t) = \sigma_{u_0}(t) = \varphi(u_0, v(t))$. Allora, come nella dimostrazione dei risultati dell'Esempio 5.68, la (5.48) diventa

$$\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = -f(u_0)f'(u_0)(v'(t))^2\varphi_u(t),$$

e siccome $1 = \dot{\sigma}(t) \cdot \dot{\sigma}(t) = f^2(u_0)(v'(t))^2$, si ha

$$\frac{D\dot{\sigma}}{dt} = -\frac{f'(u_0)}{f(u_0)}\varphi_u(t).$$

Dunque, il parallelo $\sigma_{u_0}(t)$ ha curvatura geodetica costante che indichiamo con $k_g(u_0)$. Infatti,

$$\|D\dot{\sigma}/dt\|^2 = (f'(u_0))^2/(f(u_0))^2 \quad \text{e quindi} \quad k_g^2(u_0) = (f'(u_0))^2/(f(u_0))^2.$$

D'altronde, ogni superficie di rotazione è orientabile (cf. Esempio 3.82). Pertanto, ogni parallelo $\sigma_{u_0}(t)$ è una curva magnetica di M rispetto al campo magnetico uniforme $F = \mu\Omega$ con $\mu = k_g(u_0)$. Cambiando verso al campo normale N , se necessario, possiamo assumere $k_g(u_0) = f'(u_0)/f(u_0)$. Naturalmente consideriamo il caso $k_g(u_0) \neq 0$, ovvero $f'(u_0) \neq 0$, altrimenti il parallelo $\sigma_{u_0}(t)$ è una curva geodetica.

Esercizio 5.106. Sia M una superficie di rotazione del tipo considerato nell'Esempio 5.105. Assumiamo che tutti i paralleli di M abbiano la stessa curvatura geodetica, ovvero $k_g(u) = k_g(u_0) \neq 0$ per ogni u . Dire che tipo di superficie di rotazione è M . Inoltre, confrontare il risultato di questo esercizio con quello dell'Esercizio 5.74.

Suggerimento: tenere presente la formula (4.9) che esprime la curvatura gaussiana di una superficie di rotazione.

Esercizio 5.107. Sia M il cono ottenuto ruotando la semiretta $\gamma(u) = (au, 0, bu)$, $a^2 + b^2 = 1$, $u > 0$, intorno all'asse delle z . Verificare che per ogni $\mu > 0$ esiste una curva magnetica rispetto al campo magnetico uniforme $F = \mu\Omega$.

Osservazione 5.108. Per uno studio delle curve magnetiche (rispetto a un campo magnetico uniforme) sulla superficie torica si può vedere [2].

Osservazione 5.109. P. Herreros [13] per affrontare un problema sulle superfici relativo alle curve chiuse di curvatura geodetica costante, studia le curve magnetiche su una superficie in presenza di un campo magnetico uniforme.

