

Indice

1	Il campo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ dei numeri complessi	11
1.1	Numeri complessi: richiami e complementi	11
1.2	Radici algebriche, logaritmi naturali in \mathbb{C} e potenza ad esponente complesso. Polidromia e superficie di Riemann	18
2	Funzioni olomorfe	27
2.1	La derivazione in senso complesso. Teorema di Cauchy-Riemann	27
2.2	Regole di derivazione. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa	32
2.3	Integrale curvilineo delle funzioni complesse	38
2.4	Primitive di una funzione complessa. Forme differenziali	39
2.5	Logaritmo olomorfo	40
2.6	Funzioni armoniche e armoniche coniugate	41
2.7	Funzioni olomorfe e trasformazioni conformi	43
2.8	Teorema dell'integrale nullo e formula integrale di Cauchy	46
2.9	Teorema di Morera. Teorema della media integrale di Gauss. Principio del massimo (minimo) modulo	49
3	Olomorfia e analiticit�	53
3.1	Olomorfia di integrali curvilinei rispetto a parametri complessi. Formula integrale di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa	53
3.2	Serie di potenze in \mathbb{C}	56
3.3	Teorema di Taylor. Teorema di convergenza di Weierstrass. Olomorfia della somma di una serie di potenze nel disco aperto di convergenza	57

3.4	Prodotto e divisione di serie di potenze	63
4	Funzioni intere e teoremi di Liouville. Zeri di una funzione olomorfa. Prolungamento olomorfo	67
4.1	Primo e secondo teorema di Liouville	67
4.2	Teorema fondamentale dell'Algebra	68
4.3	Zeri di una funzione olomorfa	69
4.4	Prolungamento olomorfo: unicità	70
4.5	Esistenza di almeno un punto di non prolungabilità olomorfa sulla frontiera del disco aperto di convergenza di un serie di potenze	71
4.6	Prolungamento olomorfo attraverso una curva. Principio di riflessione di Schwarz	73
4.7	Trasformazione conforme del disco aperto unitario su sé stesso	76
5	Serie di Laurent	81
5.1	Sviluppo in una corona circolare	81
5.2	Sviluppo in serie di Laurent in un punto singolare isolato al finito. Teorema di Riemann sulle singolarità isolate eliminabili	84
5.3	Caratterizzazione delle singolarità isolate	87
5.4	Comportamento di una funzione olomorfa all'infinito (complesso)	90
5.5	Comportamento in un intorno di una singolarità essenziale isolata: Teorema di Casorati -Weierstrass e Teorema di Picard	91
6	Teoria dei residui	95
6.1	Residuo integrale di una funzione in un suo punto singolare isolato	95
6.2	Calcolo dei residui	96
6.3	Primo e secondo Teorema dei residui	103
6.4	Indice di avvolgimento di una curva ed estensione del primo Teorema dei residui	105
7	Applicazione del calcolo dei residui	107
7.1	Calcolo di integrali curvilinei	107
7.2	Calcolo di integrali definiti tra 0 e 2π di funzioni razionali di $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$	112

7.3	Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali	115
7.4	Teoremi di Jordan del grande e del piccolo cerchio. Lemma di Jordan	121
7.5	Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per una funzione esponenziale. For- mula di Heaviside	127
7.6	Integrandi che presentano singolarità sulla retta reale	129
7.7	Integrali di funzioni polidrome	139
7.8	Integrali di Fresnel	145
7.9	Somma di alcune serie	149
7.10	Indicatore logaritmico. Principio dell'argomento. Teorema di Rouché. Un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra	153
8	Integrali Euleriani di I e II specie. Trasformata di Laplace	161
8.1	Integrali Euleriani di I e II specie (funzioni Beta e Gamma): definizione e proprietà	161
8.2	Trasformata di Laplace: definizione e proprietà	168
8.3	Cenni sull'inversione della trasformata di Laplace	184
8.4	Alcune applicazioni: il metodo della Trasformata di Lapla- ce per le equazioni differenziali e per le equazioni integrali di Volterra	189
9	Esercizi proposti	201

