CAPITOLO 1

Preliminari

1.1 Notazione e premesse

$N \geq 2$ intero positivo;
$\mathbb{R}^N$ spazio Euclideo N-dimensionale;
Ω aperto connesso non vuoto di $\mathbb{R}^N$;
$\overline{\Omega}$ chiusura topologica di Ω;
$\partial\Omega$ frontiera topologica di Ω;

$$|x-y| = \left[\sum_{j=1}^{N}(x_j-y_j)^2\right]^{1/2}$$

distanza euclidea tra $x=(x_1,\dots,x_N)$ e $y=(y_1,\dots,y_N)\in\mathbb{R}^N$;

se $x\in\mathbb{R}^N$ e $E,F\subset\mathbb{R}^N$ si definisce

$$\begin{aligned} d(x,E) &= \inf\big\{|x-y|\,;\, y\in E\big\} \quad \text{(distanza di } x \text{ da } E\text{)},\\ dist(E,F) &= \inf\big\{|x-y|\,;\, x\in E,\ y\in F\big\} \quad \text{(distanza tra } E \text{ e } F\text{)},\\ diam\,E &= \sup\big\{|x-y|\,;\, x,y\in E\big\} \quad \text{(diametro di } E\text{)}; \end{aligned}$$

$x\cdot y = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j y_j$ prodotto scalare di x per y;
$|x| = (x\cdot x)^{1/2}$ norma di x;
$B_r(x) = \big\{y\in\mathbb{R}^N;\ |y-x|<r\big\}$ palla aperta di centro x e raggio $r>0$;
$\overline{B}_r(x) = \big\{y\in\mathbb{R}^N;\ |y-x|\leq r\big\}$ palla chiusa di centro x e raggio $r>0$;
$\partial B_r(x) = \big\{y\in\mathbb{R}^N;\ |y-x|=r\big\}$ sfera di centro x e raggio $r>0$;

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\, x \geq 0\}$;
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ multi-indice;
$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$ lunghezza del multi-indice α;
$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ \cdots \ \cdot \alpha_N!$;
$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ \cdots \ \cdot x_N^{\alpha_N} \quad \forall\, x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$;

si denoterà indifferentemente con ∂_{x_j}, ∂_j, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ la derivata parziale rispetto alla j-esima componente di $x \in \mathbb{R}^N$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}};$$

$C^0(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continue in Ω;
$C^k(\Omega)$, per $k = 1, 2, \dots, \infty$, è lo spazio delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tali che esiste $D^\alpha u \in C^0(\Omega)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $0 \leq |\alpha| \leq k$;
$C^0(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni continue in Ω che hanno un prolungamento continuo a $\overline{\Omega}$, i.e.

$$\exists \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \Omega}} u(x) = u(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \partial\Omega;$$

analogamente si definisce $C^k(\overline{\Omega})$ per $k = 1, 2, \dots, \infty$;

si definisce supporto di $u \in C^0(\Omega)$:

$$supp\, u = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}};$$

$C_0^0(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni continue in Ω a supporto compatto contenuto in Ω; analogamente si definisce $C_0^k(\Omega)$.

Inoltre

$$u = (u_1, \dots, u_m) \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m) \iff u_j \in C^k(\Omega) \quad \forall\, j = 1, 2, \dots, m\,,$$

e analoga notazione si userà per gli altri spazi funzionali i cui elementi siano funzioni vettoriali.

Sia $0 < \alpha \leq 1$. $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni hölderiane in Ω con esponente α, cioè lo spazio delle funzioni $u \in C^0(\overline{\Omega})$ tali che

$$\exists\, c > 0 \text{ per cui } |u(x') - u(x'')| \leq c\, |x' - x''|^\alpha \quad \forall\, x', x'' \in \Omega;$$

per $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ si ha

$$[u]_{0,\alpha} = \sup_{\substack{x', x'' \in \Omega \\ x' \neq x''}} \frac{|u(x') - u(x'')|}{|x' - x''|^\alpha} \leq c < +\infty$$

($[u]_{0,\alpha}$ si chiama modulo di α-hölderianità di u).

Esempio: $\Omega = B_1(0)$, $u(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

$C^{0,1}(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni lipschitziane in Ω;

$$u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \iff \forall\, \beta \in \mathbb{N}_0^N,\, 0 \le |\beta| < k, \quad D^\beta u \in C^0(\overline{\Omega}) \,\wedge\, D^k u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\,.$$

Esempio di funzione di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\rho : x \in \mathbb{R}^N \mapsto \rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \ge 1\,, \end{cases}$$

$supp\, \rho = \overline{B}_1(0)$.
Infatti $\rho(x) = v\big(|x|^2 - 1\big)$ dove

$$v(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}} & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t \ge 0 \end{cases}$$

e $v \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1.2 Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Definizione 1.2.1. Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ si chiama σ-algebra se

(i) $\emptyset,\, \mathbb{R}^N \in \mathcal{F}$,

(ii) $E \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbb{R}^N \setminus E \in \mathcal{F}$,

(iii) se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ allora $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$.

Il seguente teorema indica l'esistenza in $\mathbb{R}^N$ di una σ-algebra $\mathcal{M}$ e di una misura su $\mathcal{M}$, con le caratteristiche richieste sopra.

Teorema 1.2.2. *In $\mathbb{R}^N$ esiste una σ-algebra $\mathcal{M}$ e una misura*

$$|\cdot| \,:\, \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$$

con le seguenti proprietà:

(i) ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, e quindi ogni sottoinsieme chiuso, appartiene a $\mathcal{M}$;

(ii) se $\Omega \in \mathcal{M}$ e ha misura nulla allora ogni sottoinsieme di Ω appartiene a $\mathcal{M}$ e ha misura nulla;

(iii) se $\Omega = \big\{x \in \mathbb{R}^N\,;\; a_i < x_i < b_i\,,\;\; i = 1, 2, \ldots, N\big\}$ allora $|\Omega| = \displaystyle\prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$;

(iv) se $(\Omega_n) \subset \mathcal{M}$ e gli insiemi Ω_n sono a due a due disgiunti, allora

$$\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n\right| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\Omega_n|$$

(proprietà di σ-additività o additività numerabile).

Osservazione 1.2.3. Gli insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{M}$ sono gli insiemi *misurabili secondo Lebesgue* e la misura $|\cdot|$, denotata anche con $\mathcal{L}^N(\cdot)$, si chiama *misura di Lebesgue N-dimensionale.*

Nel seguito porremo $\omega_N = |B_1(0)|$ e quindi

$$\omega_N r^N = |B_r(0)|, \qquad N\omega_N r^{N-1} = |\partial B_r(0)|\,.$$

Osservazione 1.2.4. Esempi di insiemi aventi misura di Lebesgue nulla sono i seguenti:

(i) in $\mathbb{R}$, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e in generale tutti gli insiemi costituiti da una infinità numerabile di punti;

(ii) in $\mathbb{R}^2$, rette e archi di curva regolari;

(iii) in $\mathbb{R}^3$, rette, piani e loro sottoinsiemi, curve e superfici regolari.

Osservazione 1.2.5. Si dice che una proprietà vale *quasi ovunque* in $\Omega \in \mathcal{M}$, o in forma abbreviata q.o. in Ω, se è vera in tutti i punti di Ω tranne che in un sottoinsieme avente misura di Lebesgue nulla.

1.3 Funzioni misurabili

Definizione 1.3.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile. Una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice misurabile se $u^{-1}(C)$ è misurabile per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset \mathbb{R}$.

Osservazione 1.3.2. Valgono le seguenti proprietà:

(i) se u è una funzione continua allora u è misurabile;

(ii) somma e prodotto di funzioni misurabili sono misurabili;

(iii) massimo limite, minimo limite e limiti puntuali di successioni di funzioni misurabili sono misurabili.

Definizione 1.3.3. Sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile. L'*estremo superiore essenziale* di u è così definito:

$$\text{sup ess}\, u \;:=\; \inf\{c \in \mathbb{R}\,;\; u \le c \;\text{ q.o. in } \Omega\}\;.$$

Osservazione 1.3.4. Se $u = \chi_{\mathbb{Q}}$, la funzione caratteristica dei razionali, si ha $\sup u = 1$ ma sup ess $u = 0$, essendo $|\mathbb{Q}| = 0$.

Definizione 1.3.5. Una funzione misurabile $s : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice funzione *semplice* se assume un numero finito di valori $a_1, a_2, \dots, a_k$.
Se s è una funzione semplice che assume i valori $a_1, a_2, \dots, a_k$ sugli insiemi misurabili e a due a due disgiunti $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ contenuti in Ω, possiamo scrivere

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{\Omega_i} \, .$$

Teorema 1.3.6. *Se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile allora esiste una successione (s_n) di funzioni semplici convergente ad u in ogni punto di Ω.*
Inoltre, se u è non negativa, si può scegliere (s_n) monotona crescente in Ω.

1.4 Integrale di Lebesgue

Introduciamo ora la definizione di integrale di Lebesgue per una funzione misurabile

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

con Ω insieme misurabile.

Per una funzione semplice s si definisce

$$\int_\Omega s(x)\, d\mathcal{L}^N(x) := \sum_{i=1}^{k} a_i \; |\Omega_i|$$

con la convenzione che se $a_i = 0$ e $|\Omega_i| = +\infty$ allora $a_i \; |\Omega_i| = 0$.

Per $u \geq 0$ misurabile, definiamo

$$\int_\Omega u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) := \sup \int_\Omega s(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di s tra tutte le funzioni semplici minori o uguali a u su Ω.

In generale, per una funzione misurabile u , osservato che

$$u = u^+ - u^-$$

dove $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$ sono rispettivamente la parte positiva e negativa di u, si definisce

$$\int_\Omega u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) := \int_\Omega u^+(x)\, d\mathcal{L}^N(x) - \int_\Omega u^-(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

a condizione che almeno uno dei due integrali sia finito.

La funzione u è detta **sommabile** in Ω se entrambi gli integrali sono finiti. Si dice invece che u è **integrabile** in Ω se è sommabile o ha integrale pari a $+\infty$ o $-\infty$.
Segue dalla definizione che una funzione misurabile u è sommabile se e solo se $|u|$ è sommabile.

Esempio. La funzione $u(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è sommabile in $]0, +\infty[$, risultando [1]

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, d\mathcal{L}^{\,1}(x) = +\infty\,.$$

Si osservi che l'integrale di Riemann generalizzato della funzione u esiste finito; si può infatti provare che

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

1.5 Alcuni teoremi fondamentali

Teorema 1.5.1. *(Teorema di Beppo Levi o della convergenza monotona)*
Sia (u_n) una successione di funzioni misurabili, tali che

$$0 \le u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n \le u_{n+1} \le \cdots\,.$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{n\to+\infty} u_n\, d\mathcal{L}^{\,N}(x) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n\, d\mathcal{L}^{\,N}(x)\,.$$

Teorema 1.5.2. *(Lemma di Fatou)*
Sia (u_n) una successione di funzioni non negative e sommabili. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to+\infty} u_n\, d\mathcal{L}^{\,N}(x) \;\le\; \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n\, d\mathcal{L}^{\,N}(x)\,.$$

Teorema 1.5.3. *(Teorema di Lebesgue o della convergenza dominata)*
Sia (u_n) una successione di funzioni integrabili con

$$u_n \to u \quad \textit{q.o.}\,,$$

e supponiamo, inoltre, che esista una funzione v sommabile tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \le v \quad \textit{q.o.}\,.$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n\, d\mathcal{L}^{\,N}(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} u\, d\mathcal{L}^{\,N}(x)\,.$$

---

[1] Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, d\mathcal{L}^{\,1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, d\mathcal{L}^{\,1}(x) \ge \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\operatorname{sen} x|\, d\mathcal{L}^{\,1}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi} = +\infty\,.$$

Teorema 1.5.4. *(Teorema di Fubini)*
Siano

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ -\infty \le a_i < x_i < b_i \le +\infty \,, \ \ i = 1, 2, \dots, N\}$$

e

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R}^m \ : \ -\infty \le c_j < y_j < d_j \le +\infty \,, \ \ j = 1, 2, \dots, m\}$$

Sia u sommabile su $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{N+m}$. Allora

(i) per quasi ogni $x \in E_1$, la funzione $u(x,\cdot)$ è misurabile in E_2;

(ii) la funzione

$$v(x) = \int_{E_2} u(x,y)\, d\mathcal{L}^m(y)$$

è sommabile in E_1 e risulta

$$\int_E u(x,y)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^m(y) = \int_{E_1} d\mathcal{L}^N(x) \int_{E_2} u(x,y)\, d\mathcal{L}^m(y)\,;$$

(iii) per quasi ogni $y \in E_2$, la funzione $u(\cdot, y)$ è misurabile in E_1;

(iv) la funzione

$$w(y) = \int_{E_1} u(x,y)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

è sommabile in E_2 e risulta

$$\int_E u(x,y)\, d\mathcal{L}^N(x)\, d\mathcal{L}^m(y) = \int_{E_2} d\mathcal{L}^m(y) \int_{E_1} u(x,y)\, d\mathcal{L}^N(x)\,.$$

Infine il teorema fondamentale del Calcolo si estende all'integrale di Lebesgue nella forma seguente.

Teorema 1.5.5. *(Teorema di differenziazione di Lebesgue)*
Sia $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ localmente sommabile.
Allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$

$$\exists \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} u(y)\, d\mathcal{L}^N(y) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} u(y)\, d\mathcal{L}^N(y) = u(x)$$

(tali x si chiamano punti di Lebesgue di u).

In particolare, se u è sommabile in $\mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x u(t)\, d\mathcal{L}^1(t) = u(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

1.6 Teorema di compattezza (di Ascoli (1884) - Arzelà (1894/5))

Definizione 1.6.1. Una successione di funzioni reali (u_j) definite in Ω (aperto connesso non vuoto di $\mathbb{R}^N$) si dice equilimitata se esiste $M > 0$ tale che

$$\sup_{x\in\Omega} |u_j(x)| \leq M \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

La successione (u_j) si dice equicontinua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ implica

$$|u_j(x') - u_j(x'')| \leq \varepsilon\,,$$

per ogni $x', x'' \in \Omega$, per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.6.2. *Sia (u_j) una successione di funzioni reali definite in Ω, equilimitata ed equicontinua. Allora esiste una successione estratta (u_{j_h}) da (u_j) e una funzione continua $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che*

(i) $u_{j_h}(x) \longrightarrow u(x)$ *per ogni $x \in \Omega$;*

(ii) $u_{j_h} \rightrightarrows u$ *uniformemente sui sottoinsiemi compatti $K \subset \Omega$.*

Dimostrazione.
(i) Sia $\mathcal{R}_\Omega$ l'insieme dei punti di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ le cui coordinate sono razionali. Tale insieme è numerabile e denso in Ω.
Sia $x_1 \in \mathcal{R}_\Omega$. Poiché la successione di numeri reali $(u_j(x_1))$ è limitata, per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $(u_{j1}(x_1))$ convergente a un numero reale, sia $u(x_1)$, cioè $u_{j1}(x_1) \longrightarrow u(x_1)$.
Consideriamo allora la successione di funzioni (u_{j1}), che è una sottosuccessione di quella data (u_j); sia $x_2 \in \mathcal{R}_\Omega$ e consideriamo la successione di numeri reali $(u_{j1}(x_2))$.
Anch'essa è limitata, pertanto esiste una sottosuccessione $u_{j2}(x_2) \longrightarrow u(x_2)$.
Allora, proseguendo il procedimento di estrazione successiva, possiamo costruire infinite successioni la h-esima delle quali è denotata con (u_{jh}), con le proprietà seguenti: ciascuna è sottosuccessione della precedente; per ogni h fissato la successione di numeri reali $(u_{jh}(x_h))$ converge, cioè $u_{jh}(x_h) \longrightarrow u(x_h)$.
Osserviamo inoltre che, per ogni h fissato, risulta $u_{jh}(x_m) \longrightarrow u(x_m)$ per ogni $m = 1, 2 \ldots, h-1$.
Consideriamo la successione "diagonale" (u_{hh}), che, dunque, ha all'h-esimo posto la h-esima funzione della h-esima successione, e osserviamo che essa è una

sottosuccessione della successione (u_j) di partenza.

$$
\begin{array}{cccccccc}
u_{11}(x_1) & & u_{21}(x_1) & & u_{31}(x_1) & \dots & u_{h1}(x_1) & \dots \\
 & \searrow & & & & & & \\
u_{12}(x_2) & & u_{22}(x_2) & & u_{32}(x_2) & \dots & u_{h2}(x_2) & \dots \\
 & & & \searrow & & & & \\
u_{13}(x_3) & & u_{23}(x_3) & & u_{33}(x_3) & \dots & u_{h3}(x_3) & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow & \vdots & \\
u_{1h}(x_h) & & u_{2h}(x_h) & & u_{3h}(x_h) & \dots & u_{hh}(x_h) & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow
\end{array}
$$

Infatti, u_{11} in quanto elemento della sottosuccessione (u_{j1}) è una delle funzioni u_j e corrisponde ad una certa scelta $j = j_1$; la funzione u_{22}, particolare tra le funzioni u_{j2} è pure una delle u_j e corrisponde ad una certa scelta $j = j_2$, eccetera.
Ora si ha $j_1 < j_2$ in quanto l'indice j_2 che compete a u_{22}, seconda funzione della seconda successione, è almeno pari all'indice che compete a u_{21}, seconda funzione della prima sottosuccessione, dunque strettamente maggiore dell'indice che individua u_{11}, cioè di j_1; allo stesso modo si procede nel confronto degli indici successivi.
Inoltre $u_{hh}(x)$ converge per ogni $x \in \mathcal{R}_\Omega$.
Sia ora $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$. Per l'ipotesi di equicontinuità e poiché $\mathcal{R}_\Omega$ è denso in Ω, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ tale che $|x - x_\varepsilon| < \varepsilon$ e

$$
\begin{aligned}
|u_{hh}(x) - u_{kk}(x)| &\leq |u_{hh}(x) - u_{hh}(x_\varepsilon)| + |u_{kk}(x) - u_{kk}(x_\varepsilon)| + |u_{hh}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| \\
&\leq 2\varepsilon + |u_{hh}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)|
\end{aligned}
$$

dove nella prima disuguaglianza si è applicata la proprietà triangolare.
Poiché $x_\varepsilon \in \mathcal{R}_\Omega$ e $(u_{hh}(x_\varepsilon))$ è convergente, esiste $\nu(x_\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{hh}(x_\varepsilon) - u_{kk}(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon$ per ogni $h, k > \nu(x_\varepsilon)$. Perciò, per ogni tale h e k si ha

$$|u_{hh}(x) - u_{kk}(x)| \leq 2\,\varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon\,.$$

Questo implica che, per ogni $x \in \Omega \setminus \mathcal{R}_\Omega$, $(u_{hh}(x))$ è una successione di numeri reali di Cauchy, quindi convergente.
In definitiva esiste una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\quad u_{hh}(x) \longrightarrow u(x) \quad$ per ogni $x \in \Omega$.
Inoltre, da

$$|u(x) - u(y)| = \lim_{h \to +\infty} |u_{hh}(x) - u_{hh}(y)| \qquad \text{per ogni } x, y \in \Omega\,,$$

e dalla equicontinuità della successione (u_{hh}) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$$

per ogni $x, y \in \Omega$.

(ii) Dimostriamo ora che la successione (u_{hh}) converge uniformemente in ogni compatto K di Ω. Sia allora K un compatto di Ω e fissiamo $\varepsilon > 0$. La collezione di palle $B_\varepsilon(x)$ di raggio ε e con centro nei punti $x \in \Omega$ ricoprono K, e possiamo selezionare un sottoricoprimento <u>finito</u>, sia $B_\varepsilon(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.
Selezioniamo un $\nu(k) \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande tale che $|u_{hh}(x_i) - u(x_i)| \leq \varepsilon$ per ogni $h > \nu(k)$, per ogni $i = 1, 2, \dots, k$. Ciascun punto $x \in K$ è contenuto in qualche palla $B_\varepsilon(x_i)$. Pertanto, per l'ipotesi di equicontinuità si ha

$$
\begin{aligned}
|u_{hh}(x) - u(x)| &\leq |u_{hh}(x) - u_{hh}(x_i)| + |u_{hh}(x_i) - u(x_i)| + |u(x) - u(x_i)| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon\,. \quad \square
\end{aligned}
$$

Più in generale sussiste il seguente risultato.

Teorema 1.6.3. *(Teorema di compattezza in $C^0(X,Y)$)*
Sia X uno spazio topologico separabile[2] *e sia (Y,d) uno spazio metrico completo. Sia U un sottoinsieme non vuoto di $C^0(X,Y)$ tale che*

(i) U è equicontinuo[3] *in X,*

(ii) per ogni $x \in X$ la chiusura dell'insieme $\{u(x)\,;\ u \in U\}$ è un sottoinsieme compatto di Y.

Allora ogni successione $(u_j) \subset U$ ha una sottosuccessione (u_{j_h}) convergente puntualmente in X ad una funzione $u \in C^0(X,Y)$.
Inoltre la convergenza è uniforme su ogni sottoinsieme compatto K di X.

1.7 Operatore Divergenza, Operatore Gradiente e Operatore di Laplace

Operatore Divergenza. Sia $u \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Si definisce

$$div\, u := \sum_{j=1}^{N} \partial_j u_j\,.$$

Operatore Gradiente. Sia $u \in C^1(\Omega)$. Si definisce

$$\nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_N u).$$

Operatore di Laplace. Sia $u \in C^2(\Omega)$. Si definisce

$$\Delta u := div \nabla u = \sum_{j=1}^{N} \partial_{jj} u\,.$$

1.8 Misura di Hausdorff

La misura di Lebesgue non permette di distinguere tra loro insiemi di misura nulla, né di assegnare una dimensione a tali insiemi. Per questo scopo sono state introdotte numerose misure. Quella di Hausdorff si è rivelata molto utile nello studio delle equazioni a derivate parziali.

Misura di Hausdorff k-dimensionale *(1918).*
Sia $E \subset \mathbb{R}^N$, k intero positivo $0 < k \leq N$, $\delta > 0$; definiamo

$$\mathcal{H}^k_\delta(E) := \omega_k\, 2^{-k}\ \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (diam E_j)^k\ ;\ E \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\ ,\ diam E_j < \delta \right\}.$$

[2] X contiene un sottoinsieme denso e numerabile.
[3] Per ogni $x \in X$, l'insieme U è equicontinuo in x *se e solo se* per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno di x, $V(x)$, tale che
$$d\,(u(t), u(x)) < \varepsilon \qquad \text{per ogni } t \in V(x) \text{ e per ogni } u \in U.$$

Se δ decresce l'estremo inferiore è fatto su una famiglia più piccola di ricoprimenti di E, sicché $\mathcal{H}^k_\delta(E)$ cresce $\big($ i.e. $0 < \delta' < \delta \Rightarrow \mathcal{H}^k_{\delta'}(E) \geq \mathcal{H}^k_\delta(E)$, quindi la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^k_\delta(E)$ è non-crescente $\big)$.
Allora

$$\exists \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^k_\delta(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^k_\delta(E) := \mathcal{H}^k(E);$$

$\mathcal{H}^k(E)$ si chiama la **misura di Hausdorff k-dimensionale di E**.

Si pone $\mathcal{H}^0(E) = card\, E$ (cardinalità di E).

Proprietà delle misure di Hausdorff:

(i) Se $E \subset \mathbb{R}^N$ è misurabile, si ha $\mathcal{H}^N(E) = \mathcal{L}^N(E)$;

(ii) $0 < \mathcal{H}^k(E) < +\infty \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{H}^m(E) = 0 & \forall\, m > k \\ \mathcal{H}^m(E) = +\infty & \forall\, m < k; \end{cases}$

(iii) $\mathcal{H}^k(E + x) = \mathcal{H}^k(E) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$ (invarianza per traslazioni);

(iv) $\mathcal{H}^k(\lambda E) = \lambda^k \mathcal{H}^k(E) \quad \forall\, \lambda > 0$ ($\mathcal{H}^k$ è omogenea di grado k)

dove $\lambda E = \big\{\lambda x;\, x \in E\big\}$.

1.9 Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ (Gauss-Green)

Teorema 1.9.1. *Sia $\overline{\Omega}$ connesso, compatto di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1 a tratti*[4] *e sia $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\int_\Omega div\, u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \cdot \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

dove $\nu(\xi)$ è il **versore normale esterno** *applicato a $\xi \in \partial\Omega$ (ove definito).*

Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, allora

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi)\, \nu_i(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \qquad (i = 1, \dots, N)\,.$$

Teorema 1.9.2. *(Teorema di integrazione per parti)*
Se $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, allora

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)\, v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = -\int_\Omega u(x)\, v_{x_i}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \,+\, \int_{\partial\Omega} u(\xi)\, v(\xi)\, \nu_i(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$
$$(i = 1, \dots, N)\,.$$

Dimostrazione. Applicare il teorema della divergenza alla funzione prodotto

$$u \cdot v \in C^1(\overline{\Omega})\,. \quad \square$$

[4] i.e. $\partial\Omega$ è di classe C^1 a tratti, ovvero per q.o. $\xi_0 \in \partial\Omega$, esiste $r > 0$ tale che $\partial\Omega \cap B_r(\xi_0)$ è implicitamente rappresentata in un sistema locale di coordinate come insieme di livello di una funzione $\psi \in C^1(B_r(\xi_0))$ tale che $|\nabla\psi(x)| \neq 0 \quad \forall\, x \in B_r(\xi_0)$.

1.10 Le identità di Green

Teorema 1.10.1. *Sia $\overline{\Omega}$ connesso, compatto di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1 a tratti e siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora*

$$\int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) + \int_\Omega v(x)\Delta u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} v(\xi)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

(I identità di Green);

$$\int_\Omega \big[v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)\big]\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} \big[v(\xi)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi)\big]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

(II identità di Green);

dove $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} := \nabla u \cdot \nu$ (derivata normale di u su $\partial\Omega$).

Dimostrazione. Consideriamo $v\nabla u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$; per il teorema della divergenza

$$\int_\Omega div\big(v(x)\nabla u(x)\big)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} v(\xi)\nabla u(\xi) \cdot \nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

e poiché

$$\begin{aligned} div(v\nabla u) = \sum_{j=1}^N \partial_j(v\partial_j u) &= \sum_{j=1}^N \partial_j v\, \partial_j u + \sum_{j=1}^N v\partial_{jj} u \\ &= \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u, \end{aligned}$$

si ha la I identità di Green.
La seconda identità di Green si ottiene sottraendo alla prima la identità

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) + \int_\Omega u(x)\Delta v(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} u(\xi)\frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \quad \square$$

Osservazione 1.10.2. Se nella II identità di Green si sceglie $v \equiv 1$ in $\overline{\Omega}$, si ha

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

1.11 Un criterio di sommabilità

Teorema 1.11.1. *Consideriamo per $N \geq 1$ la funzione*

$$x \in \mathbb{R}^N \to |x|^\lambda \in \mathbb{R}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.
Proviamo che:

$$\int_{B_R(0)} |x|^\lambda\, d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \iff \lambda > -N,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_r(0)} |x|^\lambda\, d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \iff \lambda < -N.$$

Dimostrazione. Sia $0 < r < R$ e consideriamo

$$\int_{B_R(0)\setminus\overline{B}_r(0)} |x|^\lambda \, d\mathcal{L}^N(x)$$

posto $\omega = \dfrac{x}{\varrho}$ con $\varrho = |x|$, $d\mathcal{L}^N(x) = d\mathcal{H}^{N-1}(\varrho\omega)\, d\mathcal{L}^1(\varrho) = \varrho^{N-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\omega)\, d\mathcal{L}^1(\varrho)$ (cfr. e.g. [7], Th.(2.49)), si ha

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)\setminus\overline{B}_r(0)} |x|^\lambda \, d\mathcal{L}^N(x) &= \int_r^R \int_{|\omega|=1} \varrho^{\lambda+N-1}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\omega)\, d\mathcal{L}^1(\varrho) \\
&= \int_{|\omega|=1} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_r^R \varrho^{\lambda+N-1}\, d\mathcal{L}^1(\varrho) \\
&= \begin{cases} N\omega_N \log \frac{R}{r} & \text{se } \lambda = -N \\[2ex] \dfrac{N\omega_N}{\lambda+N}\left[R^{\lambda+N} - r^{\lambda+N}\right] & \text{se } \lambda \neq -N. \end{cases}
\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{B_R(0)} |x|^\lambda \, d\mathcal{L}^N(x) = \lim_{r\to 0^+} \int_{B_R(0)\setminus\overline{B}_r(0)} |x|^\lambda \, d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \iff \lambda > -N,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_r(0)} |x|^\lambda \, d\mathcal{L}^N(x) = \lim_{R\to +\infty} \int_{B_R(0)\setminus\overline{B}_r(0)} |x|^\lambda \, d\mathcal{L}^N(x) < +\infty \iff \lambda < -N. \qquad \square$$