CAPITOLO 6

Lagrangiane nulle

In questo capitolo studiamo particolari sistemi di equazioni alle derivate parziali non lineari per i quali *ogni* funzione regolare è una soluzione.

6.1. Definizione e proprietà.

DEFINIZIONE 6.1.1. La funzione $F(x, u(x), \nabla u(x))$, $F : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{n\times N} \to \mathbb{R}$, si dice LAGRANGIANA NULLA se il sistema di equazioni di Eulero (2.23)

$$-D_\alpha F_{p^i_\alpha}(x, u(x), \nabla u(x)) + F_{u^i}(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \text{ in } \Omega \;\; (i = 1, \dots, N)$$

è soddisfatto da ogni funzione $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

OSSERVAZIONE 6.1.2. L'importanza delle Lagrangiane nulle risiede nel fatto che la corrispondente energia $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$ dipende solo dalle condizioni al contorno.

TEOREMA 6.1.3 (LAGRANGIANE NULLE E CONDIZIONI AL CONTORNO). *Sia F una Lagrangiana nulla. Siano u e $v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tali che $u \equiv v$ su $\partial\Omega$. Allora $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[v]$.*

DIM. Poniamo $G(\tau) := \mathcal{F}[\tau u + (1-\tau)v]$ con $\tau \in [0,1]$ e
$z := \tau u + (1-\tau)v$. Risulta

$$\begin{aligned} G'(\tau) &= \int_\Omega \left[F_{p^i_\alpha}(x, z, \nabla z)(u^i_{x_\alpha} - v^i_{x_\alpha}) + F_{z^i}(x, z, \nabla z)(u^i - v^i)\right] dx \\ &= \int_\Omega \left[-D_\alpha F_{p^i_\alpha}(x, z, \nabla z) + F_{z^i}(x, z, \nabla z)\right](u^i - v^i)\, dx = 0. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che z è soluzione del sistema di Eulero, in quanto per ipotesi F è una Lagrangiana nulla.

Osservato che $G'(\tau) = 0$ con $\tau \in [0,1]$ implica $G(\tau) = \text{cost}$ per ogni $\tau \in [0,1]$ e quindi, in particolare, $G(1) = G(0)$, abbiamo

$$\int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\, dx = \int_\Omega F(x, v(x), \nabla v(x))\, dx$$

cioè $\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[v]$. $\square$

Nel caso scalare ($N = 1$) le sole Lagrangiane nulle sono quelle $F(x, u, p)$ lineari nella variabile p.
Nel caso dei sistemi ($N > 1$), tuttavia, ci sono esempi importanti.

Notazione: Sia p una matrice $n \times n$; denotiamo con $\operatorname{cof} p$ la *matrice dei cofattori* di p, il cui elemento $(i, \alpha)-$esimo è $(\operatorname{cof} p)^i_\alpha = (-1)^{i+\alpha} \det(p)^i_\alpha$, dove $\det(p)^i_\alpha$ è il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da p elimando la $i-$esima riga e la $\alpha-$esima colonna.

Il lemma successivo esprime una *proprietà analitica dei cofattori della matrice Jacobiana di una funzione regolare.*

Lemma 6.1.4 (righe a divergenza nulla).
Sia $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *di classe* $C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. *Allora*

$$D_\alpha(cof\,\nabla u)^i_\alpha = 0 \quad in\ \Omega \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{6.54}$$

Dim.

1. Sia $p \in \mathbb{R}^{n \times n}$; risulta:

$$\det p = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\alpha}\, p^i_\alpha \det(p)^i_\alpha = \sum_{i=1}^{n} p^i_\alpha\, (\operatorname{cof} p)^i_\alpha\,,$$

   e quindi

$$(\det p)\ \delta_{\alpha\,\beta} = \sum_{i=1}^{n} p^i_\alpha\, (\operatorname{cof} p)^i_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n). \tag{6.55}$$

   Così in particolare

$$\frac{\partial \det p}{\partial p^i_j} = (\operatorname{cof} p)^i_j \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{6.56}$$

2. Posto ora $p = \nabla u$ in (6.55), abbiamo

$$(\det \nabla u)\ \delta_{\alpha\,\beta} = \sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta \ \ (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)\,;$$

differenziamo rispetto a x_β ambo i membri:

$$\Big((\det \nabla u)\ \delta_{\alpha\,\beta}\Big)_{x_\beta} \quad = \quad \sum_{i,j=1}^{n} \Big((\det \nabla u)\ \delta_{\alpha\,\beta}\Big)_{u^i_{x_j}} \cdot u^i_{x_j\,x_\beta}$$

$$\overset{\text{per (6.56)}}{=} \quad \sum_{i,j=1}^{n} (\operatorname{cof} \nabla u)^i_j\, u^i_{x_j\,x_\beta}\, \delta_{\alpha\,\beta}$$

e

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta\right)_{x_\beta} = \sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha\,x_\beta}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta + \sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta, x_\beta}.$$

Sommando su $\beta = 1, \ldots, n$ abbiamo

$$\sum_{i,j,\beta=1}^{n} \delta_{\alpha\,\beta}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_j\, u^i_{x_j\,x_\beta} = \sum_{i,\beta=1}^{n} \Big[u^i_{x_\alpha\,x_\beta}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_\beta + u^i_{x_\alpha}\, (\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta, x_\beta}\Big]$$

per $\alpha = 1, \ldots, n$. Quindi

$$\sum_{i=1}^{n} u^i_{x_\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{n} (\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta, x_\beta}\right) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n). \tag{6.57}$$

3. Se $\det \nabla u(x_0) \neq 0$, deduciamo da (6.57) che

$$\sum_{\beta=1}^{n} (\operatorname{cof} \nabla u)^i_{\beta, x_\beta} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ in } x_0.$$

Se invece $\det \nabla u(x_0) = 0$, sia $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\det(\nabla u(x_0) + \varepsilon I) \neq 0$, e applichiamo i passi 1.-3. a $\overline{u} := u + \varepsilon x$; poi per $\varepsilon \to 0^+$ segue la tesi. □

Teorema 6.1.5 (determinanti e Lagrangiane nulle).
La Lagrangiana (funzione determinante) $F(p) = \det p$, con $p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una Lagrangiana nulla.

Dim. Proviamo che per ogni $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si ha
$D_\alpha F_{p^i_\alpha}(\nabla u(x)) = 0$ in Ω $(i = 1, \ldots, n)$.
Poiché $F_{p^i_\alpha}(p) = (\operatorname{cof} p)^i_\alpha$ $(i, \alpha = 1, \ldots, n)$ (cfr. (6.56)), per il lemma 6.1.4 si ha

$$D_\alpha F_{p^i_\alpha}(\nabla u(x)) = D_\alpha\, (\operatorname{cof} \nabla u(x))^i_\alpha = 0 \text{ in } \Omega \ \ (i = 1, \ldots, n).$$

□

6.2. Debole continuità dei determinanti. Applicazione a funzionali policonvessi.

Vi sono interessanti sistemi, sia dal punto di vista matematico sia fisico, che vogliamo ora studiare nell'ambito del Calcolo delle Variazioni, e che hanno come energia una Lagrangiana policonvessa.

Teorema 6.2.1 (debole continuità dei determinanti).
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera lipschitziana.

(i) *Se $n < m < \infty$,*
$u_h \rightharpoonup u$ *in* $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \det \nabla u_h \rightharpoonup \det \nabla u$ *in* $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$.

(ii) *Se $m = \infty$,*
$u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *in* $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; \det \nabla u_h \overset{*}{\rightharpoonup} \det \nabla u$ *in* $L^{\infty}(\Omega)$.

Dim. Ci limitiamo a provare il caso (i), poiché per il caso (ii) la dimostrazione è analoga.

1. Ricordiamo innanzitutto che se $p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vale
$$\det p = \sum_{\alpha=1}^{n} p^i_\alpha \, (\mathrm{cof}\, p)^i_\alpha \qquad (i = 1, \cdots, n).$$
2. Sia ora $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $w = (w^1, w^2, \cdots, w^n)$. Allora
$$\det \nabla w = \sum_{\alpha=1}^{n} w^i_{x_\alpha} \, (\mathrm{cof}\, \nabla w)^i_\alpha \qquad (i = 1, \cdots, n), \tag{6.58}$$
e tenuto conto della (6.54) del lemma 6.1.4, (6.58) diventa
$$\det \nabla w = \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \left(w^i \, (\mathrm{cof}\, \nabla w)^i_\alpha \right) \qquad (i = 1, \cdots, n), \tag{6.59}$$
cioè, *il determinante della matrice gradiente può scriversi come una divergenza.*
Allora, da (6.59), se $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ si ha
$$\int_\Omega \varphi \, \det \nabla w \, dx = -\sum_{\alpha=1}^{n} \int_\Omega \varphi_{x_\alpha} \, w^i \, (\mathrm{cof}\, \nabla w)^i_\alpha \, dx \;\; (i = 1, \cdots, n). \tag{6.60}$$
3. Abbiamo stabilito l'identità (6.60) per $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$; allora, con un procedimento di approssimazione abbiamo anche per ogni $h \in \mathbb{N}$:
$$\int_\Omega \varphi \, \det \nabla u_h \, dx = -\sum_{\alpha=1}^{n} \int_\Omega \varphi_{x_\alpha} \, u^i_h \, (\mathrm{cof}\, \nabla u_h)^i_\alpha \, dx \;\; (i = 1, \cdots, n). \tag{6.61}$$

Ora poiché $n < m$ e $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, la successione $\{u_h\}$, per l'immersione continua di Morrey 1.3.5(iii), risulta essere limitata in $C^{0,1-\frac{n}{m}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Per il criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà 1.3.13, deduciamo che $u_h \rightrightarrows u$ in Ω.
Dall'identità (6.61) potremo concludere che

$$\begin{aligned} \lim_{h \to +\infty} \int_\Omega \varphi \det \nabla u_h \, dx &= -\sum_{\alpha=1}^{n} \int_\Omega \varphi_{x_\alpha} u^i \left(\operatorname{cof} \nabla u\right)_\alpha^i \, dx \qquad (6.62) \\ &= \int_\Omega \varphi \det \nabla u \, dx, \end{aligned}$$

se proviamo che

$$\lim_{h \to +\infty} \int_\Omega \psi \left(\operatorname{cof} \nabla u_h\right)_\alpha^i \, dx = \int_\Omega \psi \left(\operatorname{cof} \nabla u\right)_\alpha^i \, dx \qquad (6.63)$$

per $i, \alpha = 1, \cdots, n$ e per ogni $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Per questo basta osservare che $\left(\operatorname{cof} \nabla u_h\right)_\alpha^i$ è il determinante di una matrice $(n-1) \times (n-1)$, che può essere analizzata come prima potendosi scrivere come somma di determinanti di appropriate sottomatrici $(n-2) \times (n-2)$, per fattori uniformemente convergenti. Possiamo continuare e mostrare così l'ovvio fatto che gli elementi delle matrici ∇u_h convergono debolmente ai corrispondenti elementi della matrice ∇u.
In questo modo è verificata la (6.63), e quindi la validità della (6.62).

4. Infine, poiché $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $|\det \nabla u_h| \leq c\, |\nabla u_h|^n$, ne segue che la successione $\{\det \nabla u_h\}$ è limitata in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$.
Quindi ogni sottosuccessione ha una sottosuccessione debolmente convergente in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$, che, per la (6.62), può solo convergere al $\det \nabla u$.

□

Utilizziamo il teorema 6.2.1 per provare un risultato di debole semicontinuità inferiore analogo al teorema 3.3.1, assumendo che la funzione F sia una particolare Lagrangiana policonvessa (cfr. Definizione 5.1.13).
Sia $n = N$.

Teorema 6.2.2 (sequenziale debole semicontinuità inferiore per funzionali policonvessi).
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Sia $n < m < \infty$. Supponiamo che la Lagrangiana $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia tale che, posto $r := \det p$,

(i) *$L(x, u, p, r)$, $L_p(x, u, p, r)$ e $L_r(x, u, p, r)$ sono continue;*
(ii) *L è limitata inferiormente;*
(iii) *per ogni fissato $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^n$ la funzione $(p, r) \mapsto L(x, u, p, r)$ è convessa (cioè $F(x, u, p) = L(x, u, p, r)$ è policonvessa).*

Allora il funzionale

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\,dx = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\,dx$$

è seq. deb. s.c.i. in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Dim. Sia $\{u_h\}$ una successione tale che $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Allora, per il teorema 6.2.1(i), $\det \nabla u_h \rightharpoonup \det \nabla u$ in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$.
Possiamo ora argomentare quasi esattamente come nella dimostrazione del teorema 3.3.1.
Infatti sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega'$ lipschitziana. Per il teorema di Rellich-Kondrachov 1.3.16 possiamo assumere che, a meno di estratte, $u_h \to u$ in $L^1(\Omega', \mathbb{R}^n)$ e quindi anche $u_h \to u$ q.o. in Ω'.
Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un compatto $K_\varepsilon \subset \Omega'$ tale che $|\Omega' - K_\varepsilon| < \varepsilon$ e $u_h \rightrightarrows u$ in K_ε (per il teorema di Severini-Egorov 1.1.14), u e ∇u sono continue in K_ε (per il teorema di Lusin 1.1.15); inoltre, per il teorema di assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, segue che

$$\int_{K_\varepsilon} L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\,dx \geq \int_{\Omega'} L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\,dx - \varepsilon.$$

Inoltre per (iii)

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varepsilon} L(x, u_h(x), \nabla u_h(x), \det \nabla u_h(x))\,dx \geq \\
&\qquad \int_{K_\varepsilon} L(x, u_h(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\,dx \\
&\quad + \int_{K_\varepsilon} [L_p\,(x, u_h(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))] \cdot (\nabla u_h(x) - \nabla u(x))\;dx \\
&\quad + \int_{K_\varepsilon} [L_r\,(x, u_h(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))] \cdot (\det \nabla u_h(x) - \det \nabla u(x))\;dx.
\end{aligned}$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 3.3.1, da $u_h \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $\det \nabla u_h \rightharpoonup \det \nabla u$ in $L^{\frac{m}{n}}(\Omega)$, deduciamo che il limite per $h \to +\infty$ degli ultimi due termini è zero. Ne segue la tesi. $\square$

Con argomentazioni simili a quelle del teorema 3.3.2 possiamo provare il seguente risultato di esistenza.

Teorema 6.2.3 (Esistenza dei minimi per funzionali policonvessi).
Sia $n < m < \infty$*; supponiamo che* $\mathcal{F}[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\,dx$ *sia seq. deb. s.c.i. in* $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *e che la Lagrangiana* $F(x, u, p) = L(x, u, p, r)$ *(con* $r = \det p$*) soddisfi la condizione di coercività (ii) del teorema 3.3.2.*

Allora esiste il minimo di

$$\mathcal{F}[u] = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_{\varphi} = \Big\{ u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n), \;\; u - \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n) \Big\}$$

per ogni $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *con* $\mathcal{F}[\varphi] < +\infty$.

Applicazione (Elasticità non lineare per corpi incomprimibili).
Sia $n = 3$. Consideriamo un corpo elastico che ha inizialmente la configurazione di riferimento Ω.
Sia $u(x) = (u^1(x_1, x_2, x_3), u^2(x_1, x_2, x_3), u^3(x_1, x_2, x_3))$ lo spostamento di Ω e supponiamo che il corpo elastico sia incomprimibile, cioè

$$\det \nabla u = 1.$$

Consideriamo il problema di minimizzare l'energia elastica

$$\mathcal{F}[u] := \int_{\Omega} F(x, \nabla u(x))\, dx = \int_{\Omega} L(x, \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$$

nella classe

$$\mathcal{A}_{\varphi} = \Big\{ u \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3), \;\; u - \varphi \in W_0^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3), \;\; \det \nabla u = 1 \; q.o. \Big\}$$

per $m > 3$, assegnata $\varphi \in W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Teorema 6.2.4 (Minimi con vincolo sul determinante).
Supponiamo che la Lagrangiana $F(x, p) = L(x, p, r)$ *sia di classe* C^1 *e che per ogni fissato* $x \in \Omega$ *la funzione* $(p, r) \mapsto L(x, p, r)$ *sia convessa. Supponiamo inoltre che* L *soddisfi la condizione di coercività (ii) di 3.3.2. Allora esiste il minimo di* $\mathcal{F}[u] = \displaystyle\int_{\Omega} L(x, \nabla u(x), \det \nabla u(x))\, dx$
nella classe $\mathcal{A}_{\varphi}$.

Dim. Selezioniamo una successione minimizzante in $\mathcal{A}_{\varphi}$ con $u_{h_j} \rightharpoonup u$ in $W^{1,m}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Poiché, per il teorema 6.2.2,

$$\mathcal{F}[u] \leq \liminf_{j \to +\infty} \mathcal{F}[u_{h_j}],$$

resta solo da provare che $u \in \mathcal{A}_{\varphi}$.

Per il teorema 6.2.1

$$\det \nabla u_{h_j} \rightharpoonup \det \nabla u \qquad \text{in } L^{\frac{m}{3}}(\Omega);$$

ne deduciamo che $\det \nabla u = 1$ q.o. . $\square$