Note di Matematica Vol.I, 113-126 (1981)

CATENE DI CERCHI OTTENIBILI MEDIANTE PUNTI PSEUDOREGOLARI RISPETTO AD UNA CONICA DI UN PIANO DI GALOIS(°)

Mauro CAPURSI (°°)

Summary. *Let* Q *be an elliptic quadric of* PG(3,q),q *odd: the study of certain sets of* (q+3)/2 *circles on* Q, *so-called chains, is important for the theory of translation planes (cfr. [1]). Here one studies the chains with the property that the planes of* (q+1)/2 *or* (q-1)/2 *circles of the chains all meet in one point and one gaves various examples.*

1. INTRODUZIONE. In [1] A. Bruen dimostra che a partire da certe famiglie di (q+3)/2 cerchi di una quadrica ellittica dello spazio PG(3,q),q dispari, si possono costruire dei piani di traslazione d'ordine q^2: questo fatto giustifica l'interesse suscitato nella ricerca di dette famiglie, che Bruen chiama catene di cerchi. In questa nota, facendo uso dei punti pseudoregolari rispetto ad una conica irriducibile, si costruiscono certi archi mediante i quali si dimostra che su ogni quadrica ellittica di PG(3,q), q = =7,11, esistono catene di cerchi con la proprietà che solo i piani di

(°) Istituto di Geometria - Universita degli studi, BARI.

(°°) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. durante la permanenza, quale visiting professor, di G.Korchmaros.

$(q+1)/2$ cerchi della catena passano per uno stesso punto, mentre se $q = 7,9,11,13$ allora solo i piani di $(q-1)/2$ cerchi passano per uno stesso punto; si ottengono poi, per $q=7,9,11$, nuovi esempi di catene di cerchi.

2. ALCUNE PROPRIETA' DEI PUNTI PSEUDOREGOLARI.

Siano A,B,P tre punti distinti e allineati di un piano affine AG(2,q) sul campo di Galois GF(q),q dispari: si dice che P è *esterno* oppure *interno* al segmento AB a seconda che il rapporto semplice (ABP) è un elemento quadrato o non quadrato del campo GF(q).

Siano ora A e B due punti distinti di una conica a centro C di AG(2,q): poiché i punti esterni al segmento AB sono tutti esterni a C, mentre quelli interni ad AB sono tutti interni a C oppure quelli esterni ad AB sono tutti interni a C, mentre quelli interni ad AB sono tutti esterni a C, ha senso la seguente:

Definizione 1. Una retta r, secante la conica C nei punti A e B, si dice *regolare* rispetto a C se ogni suo punto esterno (interno) al segmento AB è esterno (interno) a C; in contrapposizione la secante r si dirà *pseudoregolare* rispetto a C se ogni suo punto esterno (interno) al segmento AB è interno (esterno) a C.

Definizione 2. Un punto P di AG(2,q) non appartenente a C si dice *pseudoregolare* rispetto a C se ogni secante di C passante per P è pseudoregolare rispetto a C.

Il problema dell'esistenza di punti pseudoregolari rispetto ad una conica irriducibile C di AG(2,q) è stato risolto in [5] da B. Segre: in particolare egli ha dimostrato che, se C è un'iperbole, nessun punto di un asintoto è pseudoregolare rispetto a C, fatta al più eccezione per il centro;

invece punti pseudoregolari rispetto a C e non appartenenti ad alcun asintoto esistono solo se $q = 7,9,11,13$. Il centro di C è pseudoregolare se $q \equiv 3 \pmod 4$.

Si supponga per tutto questo numero che $q = 7,9,11,13$ e che C sia un'iperbole di $AG(2,q)$: si assuma nel piano un riferimento affine in modo tale che l'equazione di C sia $xy = a$ e si denoti con $\square C(\Delta C)$ l'insieme dei punti di C aventi coordinate $(x,a/x)$ con x elemento quadrato non nullo (non quadrato) di $GF(q)$.

Se si attribuiscono ai punti di $\square C$ uno stesso colore e a quelli di ΔC uno stesso colore, diverso dal precedente, un facile calcolo dimostra:

PROPOSIZIONE 2.1. *Tutte e sole le secanti a* C *che congiungono punti equicolorati (eterocolorati) sono regolari (pseudoregolari) rispetto a* C.

Sia ora P un punto, diverso dal centro di C, pseudoregolare rispetto a C e si denoti con L l'iperbole passante per P e avente gli stessi asintoti di C: poiché l'iperbole C è mutata in sé dal gruppo di affinità di $AG(2,q)$ aventi equazioni

$$x' = fx \qquad y' = (1/f)y,$$

e tali affinità trasformano in sé gli insiemi $\square C$ e ΔC oppure li scambiano (a seconda che f è un elemento quadrato o non quadrato di $GF(q)$), trasformano in sé l'iperbole L e operano transitivamente sui punti di essa, ne segue che i punti di L sono tutti pseudoregolari rispetto a C. In più si osservi che ogni secante a C, la quale congiunga due suoi punti equicolorati, è esterna a L: infatti, se così non fosse, dovrebbe esistere un punto P appartenente a L e alla secante e, poiché P è pseudoregolare rispetto a C, per la proposizione precedente la secante in oggetto deve congiungere due punti eterocolorati, il che è falso.

Dalle considerazioni precedenti si ha:

PROPOSIZIONE 2.2. *Se* C *è un'iperbole di* AG(2,q) *avente equazione* $xy = a$ *e se* L *è l'iperbole avente gli stessi asintoti di* C *e passante per un punto, diverso dal centro di* C *e pseudoregolare rispetto a* C, *allora gli insiemi* $\square C$ *e* ΔC *sono due* (q-1)/2 *archi le cui secanti sono rette esterne all'iperbole* L.

Siano $GF(q)=\{0,1,\dots,q-1\}$ se q=7,11,13 e $GF(9)=\{0,1,2,t,t+1, t+2,2t,2t+1, 2t+2\}$ essendo t una radice del polinomio x^2+x+2 irriducibile in GF(3): dal citato lavoro di Segre, si deduce che fissata nel piano AG(2,q) l'iperbole L di equazione $xy = 1$, si possono determinare due iperboli (se q = 7,9,11) o una sola (se q=13) rispetto a ciascuna delle quali i punti di L sono tutti pseudoregolari. Per le equazioni di tali iperboli si hanno i seguenti casi:

a) q = 7 $\mathcal{C}_1$: $xy = 6$

b) q = 11 $\mathcal{C}_2$: $xy = 7$

c) q = 7 $\mathcal{C}_3$: $xy = 2$

d) q = 9 $\mathcal{C}_4$: $xy = t + 1$

e) q = 9 $\mathcal{C}_5$: $xy = 2t$

f) q = 11 $\mathcal{C}_6$: $xy = 5$

g) q = 13 $\mathcal{C}_7$: $xy = 7$.

Si osservi che ciascun punto della precedente iperbole $\mathcal{C}_i$ è esterno oppure interno a L a seconda che i = 1,2 oppure i = 3,4,...,7; indicato poi con O l'origine del riferimento, ogni secante a $\mathcal{C}_i$ passante per O è esterna alla conica L se i = 1,2, mentre è ad essa secante negli altri casi.

Definizione 3. Un k-arco in un piano PG(2,q) (q qualsiasi) si dirà *interno (esterno)* ad una conica irriducibile del piano se ogni punto dell'arco è interno (esterno) alla conica, mentre si dirà *sghembo* rispetto alla conica se ogni secante dell'arco è esterna alla conica.

Con le notazioni precedenti, da quanto detto si desume subito la seguente:

PROPOSIZIONE 2.3. *Se* L *è l'iperbole di* AG(2,q) *di equazione* $xy=1$, *gli insiemi* $\square\mathscr{C}_i$ *e* $\Delta\mathscr{C}_i$ *per* $i = 3,4,\dots,7$ *sono* $(q-1)/2$ *archi interni a* L *e sghembi rispetto ad essa, mentre per* $i = 1,2$ *gli insiemi* $(\square\mathscr{C}_i) \cup \{0\}$ *e* $(\Delta\mathscr{C}_i) \cup \{0\}$ *sono* $(q+1)/2$ *archi esterni a* L *e sghembi rispetto ad essa.*

3. CATENE DI CERCHI E CATENE PARZIALI PLANARI. ESEMPI.

In questo numero si denoti con Q una quadrica ellittica dello spazio PG(3,q), q dispari qualsiasi, e sia F un insieme di cerchi di Q avente le seguenti proprietà:

(i) l'intersezione di due qualsiasi cerchi di F è un insieme ridotto a due punti distinti;

(ii) l'intersezione di tre qualsiasi cerchi di F è l'insieme vuoto.

Si vede facilmente che la cardinalità $|F|$ dell'insieme F è al più $(q+3)/2$: se $|F| < (q+3)/2$, l'insieme F si dirà *catena parziale* di cerchi, mentre se $|F| = (q+3)/2$, F si dirà semplicemente *catena* di cerchi di Q e in questo caso ogni punto di ciascun cerchio di F appartiene esattamente a due cerchi della catena.

Definizione 4. Una catena parziale o non di cerchi di Q si dice *plana-*

re rispetto ad un piano Π (ovviamente non tangente a Q) se i poli rispetto a Q dei piani di tali cerchi appartengono a Π ossia se i piani dei cerchi s'intersecano nel polo di Π rispetto a Q.

In [2] Bruen e Thas dimostrano che ogni quadrica ellittica di PG(3,q), q = 3,5, possiede catene planari di cerchi. Nasce così la questione di vedere se esistono catene parziali planari di cerchi che possono essere completate in modo da ottenere catene di cerchi che non siano planari.

Intanto, posto $t = (q+3)/2$, si dimostra:

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia* F' *una catena parziale di cerchi di* Q *avente cardinalità* t-1 *e planare rispetto ad un piano* Π *: se F' si completa in una catena* F *di cerchi di* Q, *non planare rispetto a* Π *, allora il cerchio di* F *non appartenente a* F' *è l'intersezione di* Q *con* Π .

Dimostrazione. Siano $F' = \{C_1,\dots,C_{t-1}\}$, $F = \{C_1,\dots,C_t\}$ e si denoti con X_m $(1 \le m \le t)$ il polo rispetto a Q del piano Π_m del cerchio C_m e con A quello di Π. Fissato $X \in C_t$, sia C_i $(1 \le i \le t-1)$ l'altro cerchio di F passante per X: si dimostra subito che la retta AX è tangente in X alla quadrica Q. Infatti, se così non fosse, esisterebbe un punto $Y \ne X$ appartenente a $Q \cap AX$, sicché Y apparterrebbe a C_i in quanto Π_i contiene A e X. Poiché $Y \notin C_t$ (altrimenti essendo A,X,Y allineati e $X \in C_t$, allora Π_t passerebbe per A mentre ciò è escluso per ipotesi) esiste un unico cerchio C_h $(1 \le h \le t-1,\ h \ne i)$ contenente il punto Y; ne segue che il piano Π_h contiene la retta AY, sicché $X \in Q \cap \Pi_h = C_h$ e pertanto $X \in C_i \cap C_h \cap C_t$, il che è contro la (ii).

Si conclude che AX è tangente in X a Q e di conseguenza $X \in \Pi \cap Q$: ne segue perciò l'asserto.

Conseguenza di quanto ora dimostrato è la seguente:

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia* Π *un piano non tangente a* Q*; condizione necessaria e sufficiente affinché esista una catena parziale di cerchi di* Q*, avente cardinalità* t-1 *e planare rispetto al piano* Π *, la quale si completi in una catena di cerchi di* Q*, non planare rispetto a* Π *, è che esista in* Π *un* (t-1)*-arco esterno alla conica* $L = Q \cap \Pi$ *e sghembo rispetto ad essa.*

Per la dimostrazione basta scegliere come arco l'insieme dei poli rispetto a Q dei piani dei cerchi della catena parziale.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia* F' *una catena parziale di cerchi di* Q *avente cardinalità* t-2 *e planare rispetto ad un piano* Π *non tangente a* Q *.*
Condizione necessaria affinché F' *si completi in una catena* F *di cerchi di* Q*, la quale non contenga alcuna catena parziale di cardinalità* t-1 *che sia planare rispetto a* Π *e tale che i piani dei due cerchi di* F *non appartenenti a* F' *siano distinti da* Π *e con esso formanti fascio, è che esista in* Π *un* (t-2)*-arco interno alla conica* $L = Q \cap \Pi$ *e sghembo rispetto ad essa.*

Dimostrazione. Siano $F = \{ C_1,\dots,C_t \}$, $F' = \{ C_1,\dots,C_{t-2} \}$ e si denoti con X_m $(1 \leq m \leq t)$ il polo rispetto a Q del piano Π_m del cerchio C_m e con A quello di Π . Dalle (i) e (ii) si ha subito che l'insieme $H = \{ X_1,\dots,X_{t-2} \}$ è un (t-2)-arco di Π sghembo rispetto alla conica L. Si farà vedere che i punti di H sono tutti interni a L. Si osservi intanto che L non fa parte di F, in quanto $\Pi \neq \Pi_{t-1}, \Pi_t$. Inoltre, essendo i tre piani Π , Π_{t-1} e Π_t appartenenti ad uno stesso fascio, l'asse di tale fascio sega L nei due punti d'intersezione di C_{t-1} con C_t.

Si supponga per assurdo ora che esista $i \in \{1,\dots,t-2\}$ tale che X_i non sia interno a L; esso è allora esterno a L, sicché la sua polare rispetto a L interseca tale conica in due punti distinti A e B, nessuno dei quali, per le osservazioni precedenti, può appartenere all'intersezione di C_{t-1} con C_t. Ne segue che il punto A, per esempio, poiché appartiene a C_i, deve appartenere ad un unico altro cerchio C_h di F', distinto da C_i e di conseguenza A appartiene alle polari di X_i e X_h rispetto a L, sicché la retta X_iX_h è tangente a L in A, il che è assurdo.

Da quanto sin qui dimostrato, si desume che l'esistenza di catene di cerchi di Q, ottenute completando certe catene parziali di Q nel modo precisato nelle proposizioni 3.2 e 3.3, è subordinata all'esistenza di certi archi piani interni o esterni ad una conica irriducibile e sghembi rispetto ad essa; tali archi, a norma della prop. 2.3 certamente esistono per alcuni valori di q.

Si daranno ora esempi di catene: a tal fine per ogni insieme $\{X_1,\dots,X_h\}$ di punti di PG(3,q) non appartenenti alla quadrica Q, si denoterà con $Q(X_1,\dots,X_h)$ l'insieme degli h cerchi ottenuti intersecando Q con i piani polari rispetto a Q dei punti dati; inoltre se F è una catena di cerchi di Q, s'indicherà con $F(\sigma)$ ogni catena parziale contenuta in F e planare rispetto ad un piano σ.

Sia ora Π un piano non tangente a Q:si può sempre scegliere in PG(3,q) un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1,x_2,x_3,x_4) in modo tale che il punto di coordinate (0,0,1,0) sia il polo di Π rispetto a Q, mentre Π e Q abbiano equazioni rispettivamente $x_3 = 0$ e

$$x_1x_2 + \alpha x_3^2 - x_4^2 = 0$$

essendo α un arbitrario elemento non quadrato di GF(q) che dipende dalla scelta del punto unità del riferimento. Si denotino poi con AG(2,q) il piano affine, subordinato al piano proiettivo Π ed avente per retta impropria quella di equazione $x_3 = x_4 = 0$, e con (x,y) le coordinate affini di un punto di $AG(2,q)$: la conica L di $AG(2,q)$, contenuta nell'intersezione di Q con Π, è l'iperbole di equazionee $xy = 1$.

Esempio 1. Se $q = 7$, sia $\mathscr{C}_1$ la conica definita in a). Posto

$A_1(1,6,0,1)$, $A_2(2,3,0,1)$, $A_3(4,5,0,1)$, $B_1(6,1,0,1)$

$B_2(5,4,0,1)$, $B_3(3,2,0,1)$ $A_4=B_4(0,0,0,1)$, $A_5=B_5(0,0,1,0)$,

allora

$$\square\mathscr{C}_1 = \{A_1,A_2,A_3\} \qquad \Delta\mathscr{C}_1 = \{B_1,B_2,B_3\}$$

e quindi per le prop. 2.3 e 3.2 $F_1 = Q(A_1,\dots,A_5)$ e $G_1 = Q(B_1,\dots,B_5)$ sono catene di cerchi di Q, non planari rispetto a Π, ottenute completando rispettivamente le catene parziali $Q(A_1,\dots,A_4)$ e $Q(B_1,\dots,B_4)$, le quali sono planari rispetto a Π.

Esempio 2. Analogamente se $q = 11$, tenuto conto della b), si ponga

$A_1(1,7,0,1)$, $A_2(3,6,0,1)$, $A_3(4,10,0,1)$, $A_4(5,8,0,1)$

$A_5(9,2,0,1)$, $B_1(10,4,0,1)$, $B_2(8,5,0,1)$, $B_3(7,1,0,1)$

$B_4(6,3,0,1)$, $B_5(2,9,0,1)$, $A_6=B_6(0,0,0,1)$, $A_7=B_7(0,0,1,0)$.

Allora si hanno le seguenti catene di cerchi di Q $F_2 = Q(A_1,\dots, A_7)$ e

$G_2 = Q(B_1,\dots,B_7)$ le quali non sono planari rispetto a Π ma completano rispettivamente le catene parziali $Q(A_1,\dots,A_6)$ e $Q(B_1,\dots,B_6)$, le quali sono planari rispetto a Π .

Si osservi che le catene F_i e G_i $(i = 1,2)$ sono proiettivamente equivalenti, nel senso che esiste una collineazione di PG(3,q) che trasforma in se la quadrica Q e il punto A_i nel punto B_i.[1]

Dagli esempio 1 e 2 si ha:

COROLLARIO. *Ogni quadrica ellittica di* PG(3,q), $q = 7,11$, *ha catene di cerchi non planari rispetto ad un assegnato piano e contenenti una catena parziale di cardinalità* $(q+1)/2$ *e planare rispetto al piano dato.*

Esempio 3. Sia $q = 7$: scegliendo opportunamente il punto unità del riferimento, la quadrica Q abbia equazione $x_1x_2 + 3x_3^2 - x_4^2 = 0$.

Indicata con $\mathscr{C}_3$ l'iperbole di AG(2,7) definita in c), si ponga

$A_1(1,2,0,1)$, $A_2(2,1,0,1)$, $A_3(4,4,0,1)$, $B_1(6,5,0,1)$

$B_2(5,6,0,1)$, $B_3(3,3,0,1)$, $A_4=B_4(0,0,1,1)$, $A_5=B_5(0,0,6,1)$.

Poiché

$$\square\,\mathscr{C}_3 = \{A_1,A_2,A_3\} \qquad \triangle\,\mathscr{C}_3 = \{B_1,B_2,B_3\},$$

tali insiemi, per la proposizione 2.3, sono 3-archi interni a L e sghembi

(1) Le catene F_1 e F_2 sono state determinate da G.Korchmáros in [3] .

rispetto ad essa.

Con calcoli diretti si può verificare che $F_3 = Q(A_1,\dots,A_5)$ e $G_3 = Q(B_1,\dots,B_5)$ sono catene di cerchi di Q, per le quali risulta che $Q(A_1,A_2,A_3) = F_3(\Pi)$ e $Q(B_1,B_2,B_3) = G_3(\Pi)$; inoltre F_3 e G_3 non contengono alcuna catena parziale di cardinalità 4 e planare rispetto a Π .

I successivi esempi danno luogo a catene dello stesso tipo dell'esempio precedente: tali catene si ottengono considerando rispettivamente le iperboli definite in d), e), f), g).

Esempio 4. Sia q = 9 e Q abbia equazione $x_1x_2+tx_3^2-x_4^2 = 0$. Si ponga

$A_1(1,t+1,0,1)$, $A_2(2,2t+2,0,1)$, $A_3(t+2,t,0,1)$, $A_4(2t+1,2t,0,1)$

$B_1(t,t+2,0,1)$, $B_2(2t,2t+1,0,1)$, $B_3(t+1,1,0,1)$, $B_4(2t+2,2,0,1)$

$A_5=B_5(0,0,t+1,1)$, $A_6=B_6(0,0,2t+2,1)$

allora $F_4 = Q(A_1,\dots,A_6)$ e $G_4 = Q(B_1,\dots,B_6)$ sono catene di cerchi per le quali si ha $Q(A_1,\dots,A_4) = F_4(\Pi)$ e $Q(B_1,\dots,B_4) = G_4(\Pi)$.

Esempio 5. Sia q = 9 e Q abbia la precedente equazione. Si ponga

$A_1(1,2t,0,1)$, $A_2(2,t,0,1)$, $A_3(t+2,t+1,0,1)$, $A_4(2t+1,2t+2,0,1)$

$B_1(t,2,0,1)$, $B_2(2t,1,0,1)$, $B_3(t+1,t+2,0,1)$, $B_4(2t+2,2t+1,0,1)$

$A_5=B_5(0,0,t+2,1)$, $A_6=B_6(0,0,2t+1,1)$.

Allora $F_5 = Q(A_1,\dots,A_6)$ e $G_5 = Q(B_1,\dots,B_6)$ sono catene di cerchi per cui $Q(A_1,\dots,A_4) = F_5(\Pi)$ e $Q(B_1,\dots,B_4) = G_5(\Pi)$.

Esempio 6. Sia q = 11 e Q abbia equazione $x_1x_2+10x_3^2-x_4^2 = 0$. Se

$A_1(1,5,0,1)$, $A_2(3,9,0,1)$, $A_3(4,4,0,1)$. $A_4(5,1,0,1)$

$A_5(9,3,0,1)$, $B_1(10,6,0,1)$, $B_2(8,2,0,1)$ $B_3(7,7,0,1)$

$B_4(6,10,0,1)$, $B_5(2,8,0,1)$, $A_6=B_6(0,0,3,1)$, $A_7=B_7(0,0,8,1)$

allora si hanno le catene $F_6 = Q(A_1,\ldots,A_7)$ e $G_6 = Q(B_1,\ldots,B_7)$ ove $Q(A_1,\ldots,A_5) = F_6(\Pi)$ e $Q(B_1,\ldots,B_5) = G_6(\Pi)$.

Esempio 7. Sia, infine, q = 13 e Q abbia equazione $x_1x_2+2x_3^2-x_4^2=0$. Se

$A_1(1,7,0,1)$, $A_2(3,11,0,1)$, $A_3(4,5,0,1)$, $A_4(9,8,0,1)$, $A_5(10,2,0,1)$

$A_6(12,6,0,1)$, $B_1(2,10,0,1)$, $B_2(6,12,0,1)$, $B_3(8,9,0,1)$, $B_4(5,4,0,1)$

$B_5(7,1,0,1)$, $B_6(11,3,0,1)$, $A_7=B_7(0,0,2,1)$, $A_8=B_8(0,0,11,1)$,

allora $F_7 = Q(A_1,\ldots,A_8)$ e $G_7 = Q(B_1,\ldots,B_8)$ sono catene di cerchi di Q per i quali si ha $Q(A_1,\ldots,A_6) = F_7(\Pi)$ e $Q(B_1,\ldots,B_6) = G_7(\Pi)$.(2)

Si osservi che le catene F_i e G_i $(i=3,4,\ldots,7)$ sono proiettivamente equivalenti, mentre F_4 e F_5 (come pure G_4 e G_5), pur essendo catene di cerchi di una stessa quadrica di PG(3,9), non sono proiettivamente equivalenti. Si noti ancora che per tutte le catene F_i (G_i) $(i = 3,4,\ldots,7)$ i piani dei cerchi appartenenti a F_i (G_i) ma non a $F_i(\Pi)$ $(G_i(\Pi))$ sono distinte tra di loro e intersecano il piano Π nella retta di equazione $x_3 = x_4 = 0$.

Dagli esempi precedenti si ha:

(2) Le catene F_4 e G_7 sono state determinate da G.Raguso in [4].

COROLLARIO. *Ogni quadrica ellittica di* PG(3,q), q = 7,9,11,13, *ha catene di cerchi non contenenti catene parziali di cardinalità* (q+1)/2 *e planari rispetto ad un assegnato piano, ma contenenti una catena parziale di cardinalità* (q-1)/2,*planare rispetto al dato piano e tale che i piani dei cerchi della catena, non appartenenti alla catena parziale, siano distinti tra di loro e formanti fascio col piano dato.*

BIBLIOGRAFIA

[1] A.A.BRUEN, *Inversive geometry and some new translation planes*, Geometriae Dedicata, 7 (1977), 81-98.

[2] A.A.BRUEN-J.A.THAS, *Flocks, chains and configurations in finite geometries*, Atti Accad.Naz.Lincei,Rendiconti, (8) 59 (1975),744-748.

[3] G.KORCHMÁROS, *Example of chain of circles* in PG(3,q), q = 7,11, J.Combin. Theory Ser.A, 31 (1981).

[4] G.RAGUSO, *Example of a chain of circles on an elliptic quadric of* PG(3,q) q=9,13 (presentato per la pubblicazione).

[5] B.SEGRE, *Proprietà elementari relative ai segmenti ed alle coniche sopra un campo qualsiasi ed una congettura di Seppo Ilkka per il caso dei campi di Galois*, Ann.Mat.Pura Appl., (4) 96 (1973), 289-337.

Lavoro pervenuto alla Redazione l'11 Marzo 1981
ed accettato per la pubblicazione il 6 Aprile 1981
su parere favorevole di U.Bartocci ed A.Cossu