

SULL'ORDINE MINIMO DEGLI OVALI ASTRATTI (O DI BUEKEN-
HOUT) NON PROIETTIVI E UNICITA' DELL'OVALE ASTRATTO
DI ORDINE SETTE

Giorgio FAINA(°) Giorgio CECCONI(°°).

Summary. - *In a recent paper, with the aid of an electronical calculating machine, the Authors give an example of an abstract oval (in the sense of Buekenhout) of order eight which is not projective. In this work, always with the aid of a computer, they show the uniqueness of the abstract oval of order seven, thus showing that eight is the smallest order possible for a non-projective abstract oval.*

1. INTRODUZIONE.

Un ovale astratto (o di Buekenhout) \mathcal{O} è definito in [5] (cfr. anche [9], [15], [16], [17]) come un qualsiasi insieme con almeno tre elementi, che chiameremo *punti*, dotato di una famiglia di permutazioni involutorie, che chiameremo *involuzioni*, quasi due volte strettamente transitiva nel senso che

1.1.- per ogni due coppie (a_1, a_2) , (b_1, b_2) di punti con $a_i \neq b_j$

(°) Istituto Matematico - Università degli Studi di Perugia

(°°) Centro di Calcolo Elettronico - Università degli Studi di Perugia.

$(i, j=1, 2)$, esiste un'unica involuzione f tale che $f(a_1) = a_2$ ed $f(b_1) = b_2$.

Se \mathcal{O} è costituito da $n+1$ elementi allora l'intero n si dice l'ordine dell'ovale.

Un *isomorfismo* tra due ovali astratti \mathcal{O}_1 ed \mathcal{O}_2 è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi sostegno di \mathcal{O}_1 ed \mathcal{O}_2 che mantiene le involuzioni.

Si conoscono finora i seguenti tre tipi di ovali astratti:

A) *Gli ovali astratti che si ottengono a partire dai gruppi lineari PGL(2, K)*. Dato un campo K , si considerino le sostituzioni lineari fratte su una variabile x a coefficienti in K della forma

$$x \rightarrow (ax+b)/(cx+d), \quad \text{con } ad-bc \neq 0$$

quali permutazioni dell'insieme $K \cup \infty$ definendo le operazioni con il simbolo ∞ come segue:

$$(a\infty + b)/(c\infty + d) = \begin{cases} \infty & \text{se } c = 0 \\ a/c & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$$

$$(ax + b)/(cx + d) = \infty \Rightarrow \begin{cases} x = \infty & \text{se } c = 0 \\ x = -d/c & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$$

Dette permutazioni costituiscono un gruppo tre volte strettamente transitivo su $K \cup \infty$, conosciuto sotto il nome di gruppo lineare PGL(2, K). E' d'immediata verifica che le permutazioni della forma

$$x \rightarrow -x+b \quad b \in K$$

(^)

$$x \rightarrow (ax-b)/(x-a) \quad a, b \in K, a^2 \neq b$$

risultano tutte involuzioni e formano una famiglia di permutazioni quasi due volte strettamente transitiva su $K \cup \infty$. Si osservi che se K è di caratteristica zero o dispari, le $(\hat{\quad})$ esauriscono tutti gli elementi di periodo 2 di $PGL(2,K)$, mentre se la caratteristica è due si ha in più l'elemento unità di $PGL(2,K)$, poiché risulta $-x = x$. Si noti poi che se K è un campo di Galois $GF(p^r)$, p primo, allora l'ovale astratto (finito) così costruito ha per ordine p^r+1 .

B) *Gli ovali astratti che si ottengono dagli ovali proiettivi.*

Un ovale proiettivo è notoriamente un insieme Ω di punti di un piano proiettivo π a tre a tre non allineati e tale che per ogni suo punto passa una sola retta (tangente) che non incontra lo stesso Ω in nessun altro punto. Ad ogni punto $P \in \pi - \Omega$ resta associata una permutazione involutoria \underline{P} definita come segue: \underline{P} associa al generico punto $A \in \Omega$ l'altro punto d'intersezione della retta PA con Ω se PA non è tangente, fissa il punto di contatto se PA è tangente. E' d'immediata verifica che le involuzioni \underline{P} formano una famiglia di permutazioni involutorie quasi due volte strettamente transitiva su Ω , e quindi si ottiene da Ω un ovale astratto \mathcal{O} che chiameremo *ovale astratto proiettivo*. Si noti che se il piano π è finito d'ordine n allora l'ovale astratto \mathcal{O} ora definito ha per ordine lo stesso numero n . Nel caso particolare in cui π sia il piano proiettivo costruito su un campo K e Ω sia data da una conica irriducibile in esso, l'ovale astratto \mathcal{O} che si ottiene nel modo sopradetto, e che diremo *conica astratta*, è isomorfo a quello di tipo A) in quanto il gruppo generato dalle involuzioni \underline{P} risulta allora isomorfo a $PGL(2,K)$.

C) *Ovali astratti non proiettivi.* Gli ovali astratti di questo tipo sono quelli che non si possono ottenere a partire da nessun ovale proiettivo Ω di un piano proiettivo π procedendo come nel caso descritto in B). I soli

ovali di questo tipo finora noti, che d'ora in avanti chiameremo appunto ovali astratti non proiettivi o di tipo C), sono due: i) quello descritto in [17] da N.Krier e che è dotato di un numero infinito di punti; ii) quello descritto in [9] dagli Autori e che risulta finito di ordine otto.

Analogamente a quanto si è verificato nel caso dei piani proiettivi e degli ovali proiettivi (cfr., ad es., [7], [8], [10], [11], [13], [18], [19], [24], [26], [27]), oltre alla ricerca di esempi concreti, è di particolare interesse risolvere il problema della determinazione di tutti gli ovali astratti di ordine relativamente piccolo specialmente per quelli di tipo C).

Con calcoli un po' lunghi ma privi di difficoltà si verifica l'unicità degli ovali astratti di ordine $n \leq 5$ e la non esistenza dell'ovale astratto d'ordine 6. D'altronde, un piano proiettivo di Galois d'ordine 8 ammette degli ovali che non sono coniche (cfr. [5]) e di conseguenza (cfr. [16], Teor. 1) esistono ovali astratti proiettivi d'ordine 8 fra loro non isomorfi. Inoltre, come già ricordato, esistono ovali astratti non proiettivi (o di tipo C) finiti di ordine sempre uguale ad otto.

Di recente gli Autori hanno invece dimostrato, con l'impiego di una calcolatrice elettronica, l'unicità dell'ovale astratto di ordine 7 e scopo di questa nota è la descrizione del relativo programma.

Si notino infine i seguenti corollari di quest'ultimo risultato:

1.2. - *Esiste, a meno di isomorfismi, una sola famiglia di permutazioni involutorie quasi due volte strettamente due transitiva su 8 oggetti. Essa si ottiene a partecipare dal gruppo $PGL(2,7)$ procedendo come in A).*

1.3. - *L'ordine minimo possibile per un ovale astratto non proiettivo (o di tipo C) è uguale ad 8.*

2. ALCUNE OSSERVAZIONI PRELIMINARI.

2.1.- Se \mathcal{O} è un ovale astratto finito di ordine n , allora (cfr.[5]):

i) \mathcal{O} possiede n^2 involuzioni;

ii) n è dispari se, e soltanto se, ogni involuzione possiede o zero o due punti fissi.

Siano I e J due permutazioni involutorie di un qualsiasi insieme H . Diremo che I e J sono tra loro *congruenti* se esistono almeno due elementi distinti, $a, b \in H$ tali che: $I(a) = J(a)$, $I(b) = J(b)$, $I(a) \neq b$.

Se H è un insieme finito con $|H| = n+1$ ed a, b due suoi elementi distinti, diremo *secante* (a, b) di H ogni insieme formato da a, b e da $n-1$ permutazioni involutorie, a due a due non congruenti, che permutano a con b ; diremo inoltre *tangente* (a, a) di H ogni insieme formato dal punto a e da n permutazioni involutorie che mutano a in sé, intendendo d'ora in avanti, per permutazioni involutorie solo quelle permutazioni involutorie di H che mutano in sé o zero o due elementi.

2.2.- Si osservi che (cfr.[5]), se \mathcal{O} è un ovale astratto finito di ordine n , l'insieme delle involuzioni che permutano due punti distinti $a, b \in \mathcal{O}$ è costituito esattamente da $n-1$ elementi ed origina quindi una secante di \mathcal{O} ; allo stesso modo, l'insieme delle involuzioni che fissano un punto $a \in \mathcal{O}$ è costituito esattamente da n elementi ed origina quindi una tangente ad \mathcal{O} .

Data una tangente (a, a) , o una secante (b, c) , di un insieme H ed indicato con $(\overline{a, a})$, ovvero con $(\overline{b, c})$, l'insieme delle sole permutazioni che compongono codesti insiemi, si verifica che:

2.3. - Sia \mathcal{F} la famiglia delle involuzioni di un ovale astratto finito $\mathcal{O} = \{0, 1, \dots, n\}$. Allora, fissato un qualsiasi punto di \mathcal{O} , ad esempio

0, risulta

$$\mathcal{F} = (\overline{0,0}) \cup (\overline{0,1}) \cup \dots \cup (\overline{0,n}) .$$

Viceversa, fissato un qualsiasi elemento di un insieme finito $H = \{0,1,\dots,n\}$, ad esempio ancora 0, si dimostra che:

2.4.- Se l'insieme $\mathcal{G} = (\overline{0,0}) \cup (\overline{0,1}) \cup \dots \cup (\overline{0,n})$ è costituito da permutazioni a due a due non congruenti, allora H dotato della famiglia \mathcal{G} è un ovale astratto.

2.5.- Sia $H = \{0,1,\dots,n\}$ un qualsiasi insieme e n dispari. Allora la famiglia \mathcal{F} di tutte le permutazioni involutorie di H aventi o zero o due soli punti fissi è tale che

$$|\mathcal{F}| = n(n-2)(n-4)\dots 3 .$$

Omettiamo le non difficili, anche se laboriose, dimostrazioni dei punti 2.3, 2.4, 2.5 .

3. UN METODO PER LA DETERMINAZIONE DI TUTTI I POSSIBILI OVALI ASTRATTI DI ORDINE 7.

Determinata inizialmente la famiglia \mathcal{F} di tutte le permutazioni involutorie, aventi o zero o due soli punti fissi, di un qualsiasi insieme $H = \{0,1,\dots,7\}$ -dalla 2.5 risulta che $|\mathcal{F}| = 525$ - il metodo usato in questa Nota per la determinazione di tutti i possibili ovali astratti di ordine 7 - ovali che, esclusa la conica astratta, saranno ovviamente (se esisteranno) non proiettivi in virtù del famoso risultato riportato in [24]- è il seguente (rimandiamo il lettore ai numeri successivi per maggiori dettagli):

1. Fissato una volta per tutte un elemento di H , ad es. 0, si

costruiscono tutte le possibili tangenti $T_{0,i}$ del tipo $(0,0)$. Si troveranno così 6.240 tangenti di questo tipo.

2. In corrispondenza ad ogni possibile tangente $T_{0,i}$, $i = 1, \dots, 6240$, si considera il sottoinsieme $F_{0,i}$ di \mathcal{F} ottenuto cancellando da \mathcal{F} tutti gli elementi congruenti ad almeno un elemento di $T_{0,i}$. Si ricaverà che $140 \leq |F_{0,i}| \leq 161$, con $1 \leq i \leq 6240$.

3. Per ogni $i = 1, \dots, 6240$, si costruisce l'insieme $S_{0,i}$ di tutte le possibili secanti $(0,a)$, $a = 1, \dots, 7$, usando solo gli elementi di $F_{0,i}$.

4. Detto *sistema di secanti i-compatibili in 0* ogni famiglia del tipo $\{(0,1), \dots, (0,7)\}$, con $(\overline{0,a}) \subset F_{0,i}$, $a = 1, \dots, 7$ e $i = 1, \dots, 6240$, tale che $\bigcup_{a=1}^7 (\overline{0,a})$ è un insieme di permutazioni a due a due non congruenti, si costruiscono quindi tutti i sistemi di secanti i-compatibili, $i=1, \dots, 6240$.

Allora, in virtù della 2.4, in corrispondenza ad ogni sistema di secanti compatibili in 0 si ha un ovale astratto e, viceversa, per la 2.3, ogni ovale astratto di ordine 7 rientra tra gli ovali trovati con il procedimento appena descritto.

In realtà non è necessario, come tra poco dimostreremo, considerare tutte le 6.240 tangenti di cui al punto 1, cosa che renderebbe inutile anche l'uso del più potente calcolatore elettronico, ma è in realtà possibile ridurre a solo 94 il numero della tangenti $(0,0)$ da prendere in esame, evitando così di determinare eventuali ovali astratti isomorfi tra loro.

A tal fine si osservi che, dato un qualsiasi ovale astratto $\mathcal{O} =$

$=\{0,1,\dots,7\}$, comunque si fissino due suoi elementi, esiste una, ed una sola, involuzione I che li fissa e che permuta quindi a due a due i rimanenti punti. Indichiamo con 0 ed 1 i due punti fissi di I e con 2 e 3, 4 e 5, 6 e 7 gli elementi delle coppie di punti che I permuta tra di loro. Segue che l'involuzione I può essere, senza perdere nulla in generalità, scritta nel seguente modo:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} .$$

E' altresì evidente che tra le involuzioni di \mathcal{O} che fissano 0 ce n'è una, ed una sola, che permuta 1 con 2 e che, quindi, o fissa il 3 o lo trasforma in uno degli elementi indicati con 4,5,6,7.

Nel primo caso, in virtù della 1.1, e senza perdere di generalità, risulta, scegliendo opportunamente i simboli che rappresentano gli elementi di \mathcal{O} , che l'involuzione in questione può essere rappresentata nel seguente modo:

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

Nel secondo caso, ancora per 1.1, scelto, come è possibile, il simbolo 4 come immagine di 3, si ha che

$$J'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Perciò, per qualsiasi ovale \mathcal{O} di ordine 7 non è restrittivo supporre che ogni tangente $(0,0)$ contenga simultaneamente o I e J' oppure I e J'' .

Come tra poco vedremo, le possibili tangenti $(0,0)$ che contengono I e J'

saranno solo 56 e quelle che contengono I e J" 38, per un totale di 94 tangenti da prendere in esame complessivamente.

4. DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA NEL LINGUAGGIO "APL".

I programmi che hanno permesso di verificare l'unicità dell'ovale astratto d'ordine 7 sono stati scritti in "APL" (cfr., ad es., [20], [21], [22]) per la versatilità di tale linguaggio nel trattamento dei vettori e delle matrici. Essi sono catalogati al CNUCE di Pisa e per realizzarli è stato utilizzato l'elaboratore IBM 370/168 sotto il sistema operativo VM/CMS; il tempo di calcolo totale per compiere l'intera verifica è risultato di 5 minuti e 47 secondi.

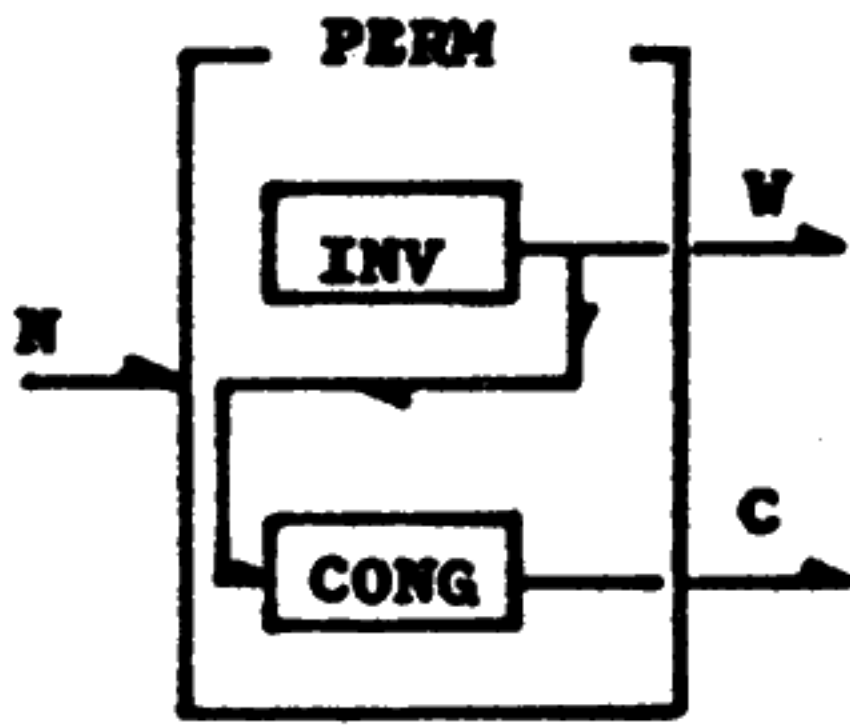
Il risultato è stato raggiunto in tre passi successivi, mediante la creazione di tre WORK-SPACES, come di seguito descritto.

-LA WORK-SPACE "PERMUTATION". La prima WORK-SPACE, chiamata "Permutation" ha lo scopo di generare tutte le 525 permutazioni involutorie con zero o due punti fissi, degli elementi dell'insieme $H = \{0, 1, \dots, 7\}$. La funzione principale è PERM ed ha come input n (ordine dell'ovale) e come output rispettivamente:

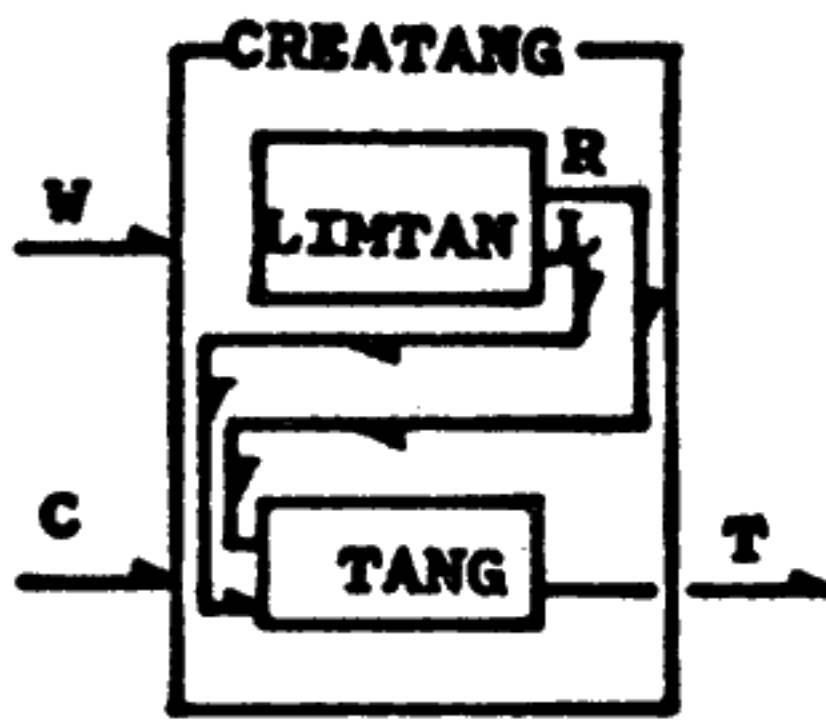
a) La matrice $W = \{w_{I,J}\}$ di ordine 525×8 ogni riga della quale rappresenta una permutazione involutoria (con zero o due punti fissi) di H e che, d'ora in avanti chiameremo *involuzione* di H .

b) La matrice $C = \{c_{I,J}\}$ di ordine 525×525 definita da:

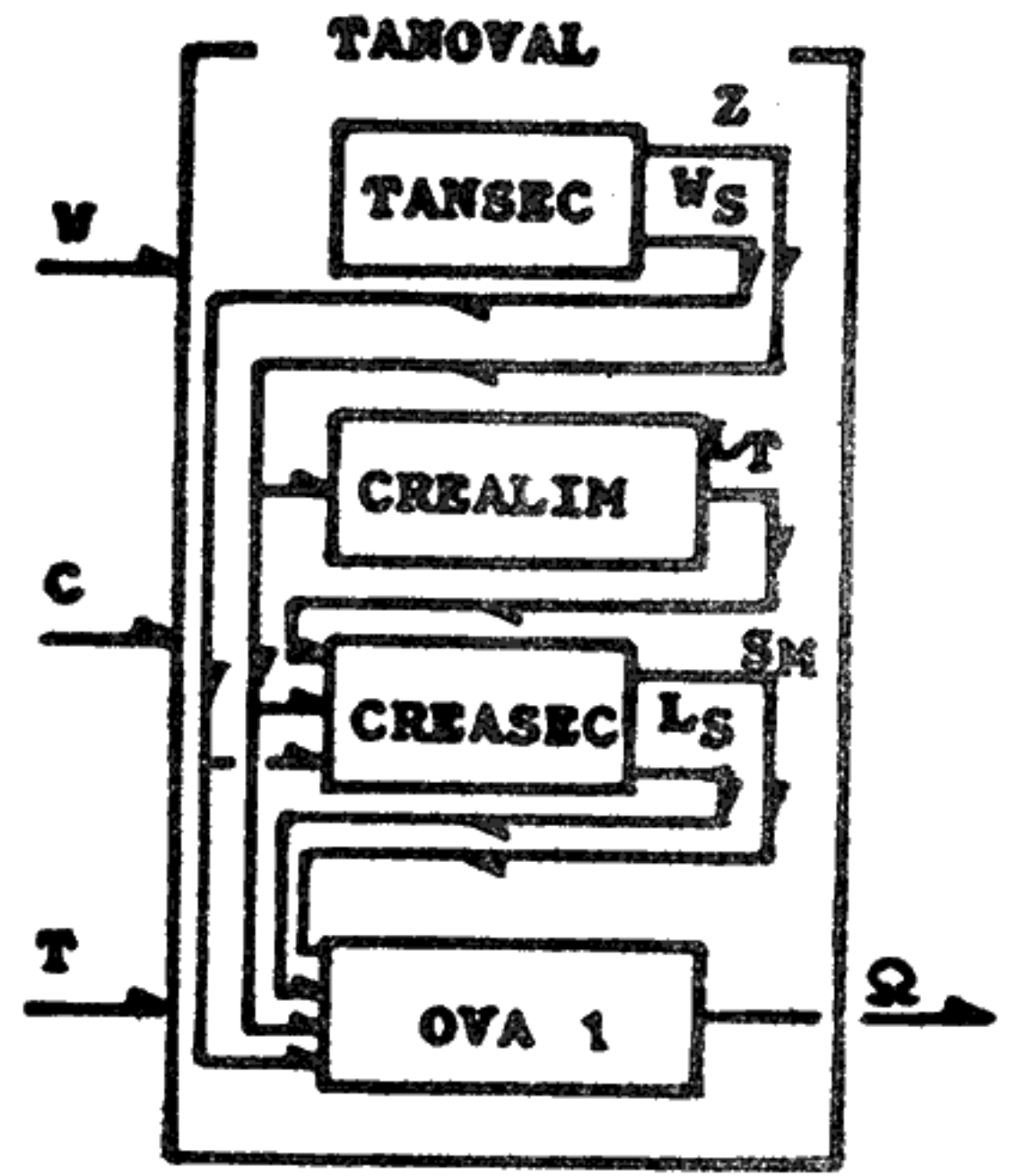
$$c_{I,J} = \begin{cases} 1 & \text{se la } I\text{-ma involuzione in } W \text{ è congruente con la } J\text{-ma} \\ 0 & \text{se la } I\text{-ma involuzione in } W \text{ è non congruente con la } J\text{-ma.} \end{cases}$$



a)



b)



c)

Fig. 1

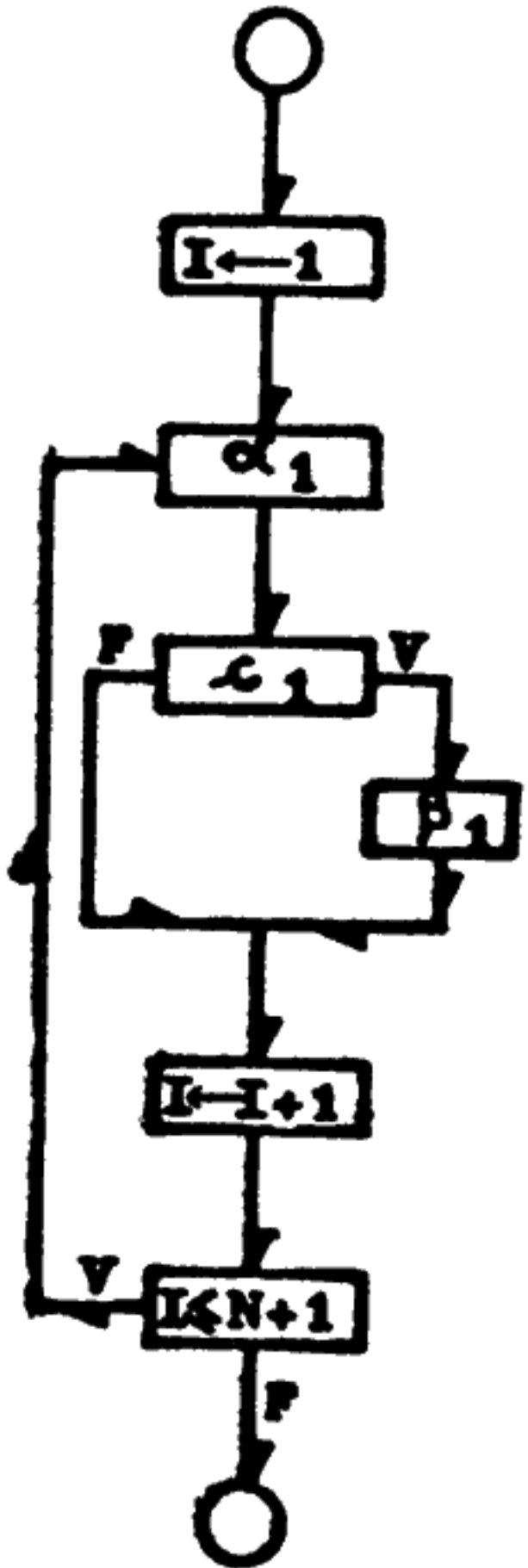


Fig. 2

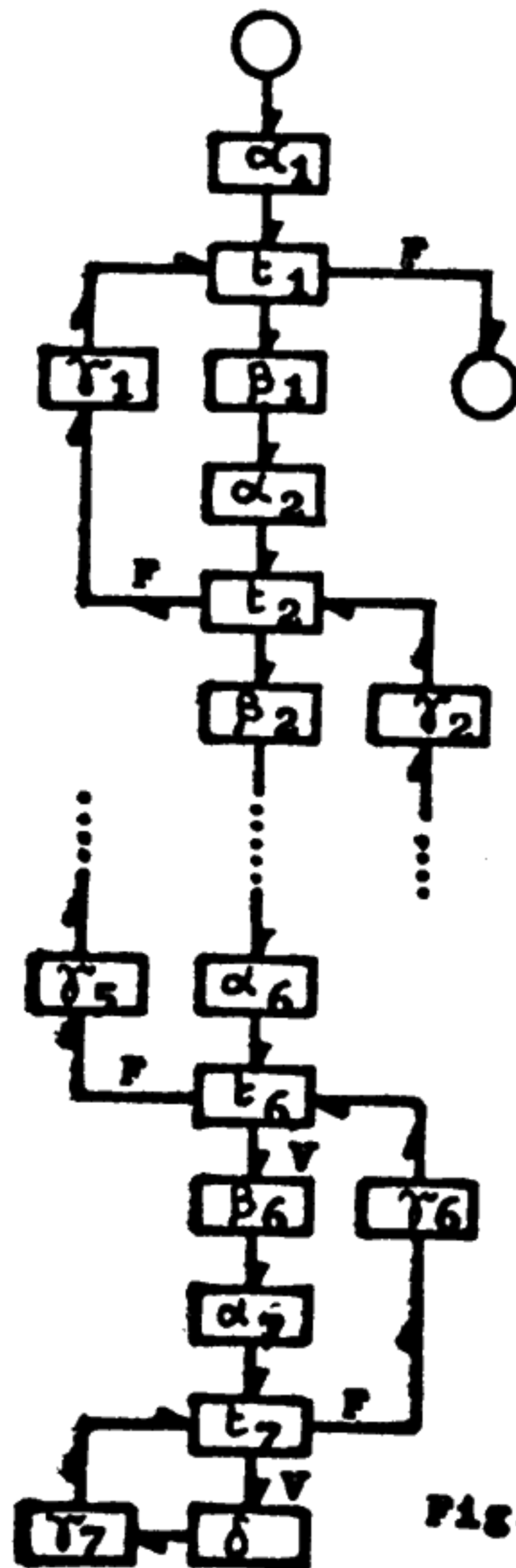


Fig. 3

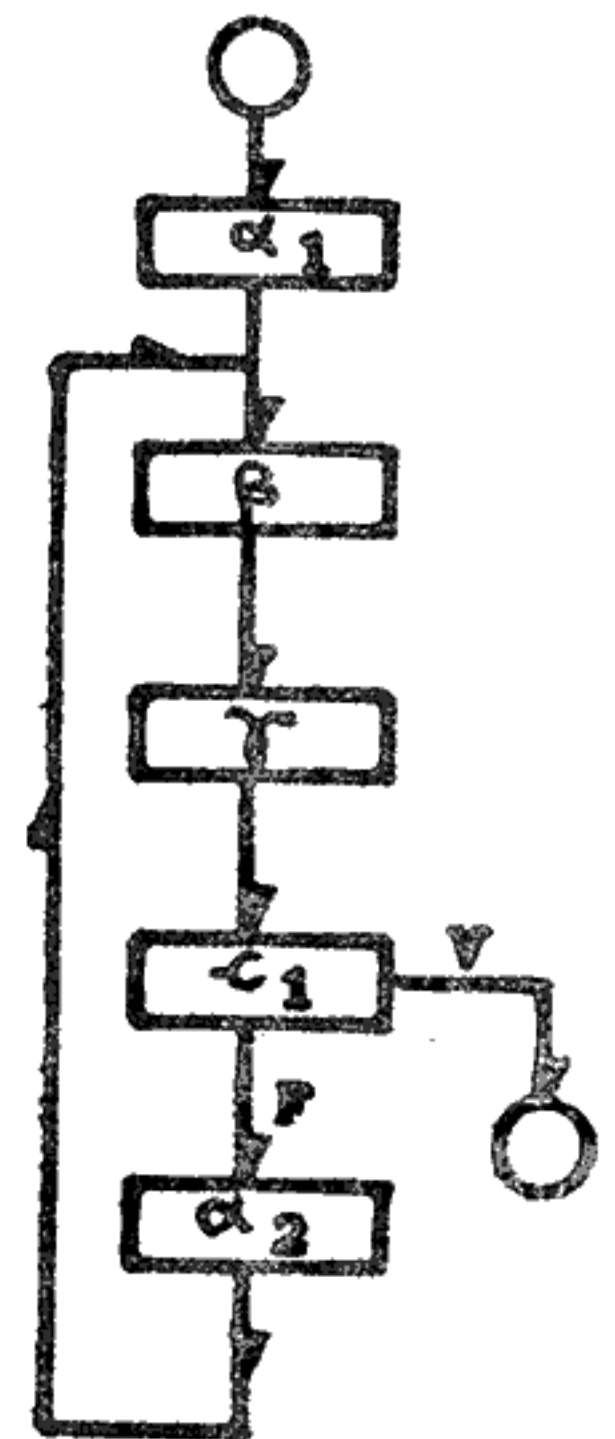


Fig. 4

Queste due matrici sono generate dalle funzioni INV e CONG rispettivamente secondo la struttura tracciata in Fig. 1.a.

Lo schema a blocchi della funzione INV è in Fig. 2. Nei diagrammi contenuti nelle varie Figure che compaiono in questo lavoro, si indicherà con una lettera greca, eventualmente seguita da una cifra, l'azione intrapresa dal diagramma; si indicherà con una lettera romana, eventualmente seguita da una cifra, una condizione logica che può assumere i valori *VERO* o *FALSO*.

Descriviamo ora le azioni e le condizioni della funzione INV (Cfr. Fig. 2):

α_1 : viene generata una permutazione P distinta da quelle generate in precedenza; la prima permutazione generata è l'identità $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
 l'ultima $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

E' utilizzata la funzione PERM O, basata su un algoritmo molto veloce (cfr. [20], nn. 4 e 5).

c_1 : si verifica che P sia involuzione di H.

β_1 : la permutazione P viene inserita nell'1-ma riga della matrice W.

La INV, dunque, estrae dal gruppo totale di permutazioni su otto elementi il sottoinsieme \mathcal{T} costituito dalle involuzioni di H.

La funzione CONG verifica invece, per ogni coppia ordinata di indici $(1, J)$, $1=1, \dots, 525$ e $J=1, \dots, 1$, la congruenza tra le involuzioni estratte dalle righe 1-ma e J-ma di W e definisce quindi la matrice C in modo che risulti:

$$c_{I,J} = \begin{cases} 0 & \text{se le due involuzioni estratte sono congruenti} \\ 1 & \text{se le involuzioni estratte non sono congruenti.} \end{cases}$$

- La *WORK-SPACE* "ZEROTANG". La *WORK-SPACE* chiamata "Zerotang" contiene la funzione *CREATANG* che genera le tangenti in 0 ad H, o come spesso diremo le 0-tangenti ad H.

L'input per *CREATANG* è costituito dalle matrici W e C l'output dalla matrice T di ordine 6240x7; le settuple di numeri interi rappresentate da ogni riga sono insiemi di indici, indici che si riferiscono ordinatamente alle righe di W e che individuano le sette involuzioni che definiscono una 0-tangente.

Per la struttura di *CREATANG* si veda la Fig. 1.b.

La funzione *LIMTANG* genera la matrice R (di ordine 105x105) delle congruenze relative alle involuzioni che fissano lo 0 e la matrice L (di ordine 7x2) che permette di ripartire l'insieme delle 105 involuzioni che fissano lo 0 in sette sottoinsiemi ognuno dei quali contiene involuzioni che trasformano l'elemento 1 in t, t=1,...,7, rispettivamente. Per rendere più agevole la descrizione dei relativi programmi, indichiamo con C_t tali sottoinsiemi. Per essi risulta $|C_t| = 15$ (t=1,...,7). Poiché una descrizione completa della *LIMTANG* è piuttosto laboriosa e strettamente legata al tipo di linguaggio usato, riteniamo opportuno non aggiungere altro per non esulare da quello che è lo scopo di questa Nota.

Per quanto concerne invece la funzione *TANG*, il cui schema a blocchi è in Fig. 3, facciamo notare che essa genera in output la matrice T avendo come input L ed R. Ogni 0-tangente viene determinata estraendo una involuzione da C_t (t=1,...,7) e controllando a priori che tale scelta non venga effettuata utilizzando involuzioni che siano tra loro congruenti a

due a due. Descriviamo infine le condizioni e le azioni di TANG, sempre in riferimento alla Fig. 3:

α_k : viene fissata una prima involuzione dell'insieme C_k ($k=1, \dots, 7$);

γ_k : viene fissata una nuova involuzione di C_k ($k=1, \dots, 7$);

t_k : si verifica che l'involuzione k -ma fissata appartenga effettivamente a C_k e che non sia stata scartata (per $k>1$) dalle prime $k-1$ involuzioni già fissate in quanto congruente a qualcuna di queste ($k=1, \dots, 7$);

β_k : per l'involuzione fissata all'interno di C_k vengono scartate dagli insiemi C_h ($h=k+1, \dots, 7$) tutte le involuzioni congruenti a questa ($k=1, \dots, 6$); questa operazione viene realizzata applicando l'operatore logico OR a due vettori logici.

δ : si memorizza in una riga della matrice T il vettore (o settupla) di indici (riferiti a W) che individuano una 0-tangente.

Sarebbe stato possibile realizzare un algoritmo equivalente a quello di Fig. 3 applicando criteri di ricorsività, certo più eleganti ma in questo caso molto meno efficienti sia per il tempo di calcolo che per l'occupazione della memoria che avrebbero richiesto.

In virtù delle considerazioni fatte nel paragrafo precedente si è constatato che solo le prime 94 righe della matrice T sono utili al fine di generare l'ovale; tale matrice è stata a questo punto opportunamente ridefinita con le dimensioni 94×7 e a questa ultima ci si riferirà nel seguito.

-La *WORK-SPACE* "OVALS". La *WORK-SPACE* chiamata "Ovals" contiene la funzione TANOVAL che ha permesso di generare l'ovale. L'input per tale

funzione è dato dalle matrici: W, C, T ; l'output è costituito da una matrice Ω contenente gli indici di riferimento che individuano l'ovale.

La struttura di TANOVAL è in Fig. 1.c.

In generale si può dire che TANOVAL è una funzione che verifica la possibilità di costruire un ovale da ogni 0-tangente (partendo cioè da una riga di T).

La funzione TANSEC estrae da W la sottomatrice W_S e contiene le involuzioni non congruenti a nessuna di quelle che compongono una data 0-tangente; ha inoltre lo scopo di creare la matrice quadrata Z (estratta da C) che rappresenta la matrice delle congruenze relative alle involuzioni di W_S .

La funzione CREALIM permette di ripartire le involuzioni di W_S in sette sottoinsiemi S_a ($a=1,2,\dots,7$) ognuno dei quali contiene involuzioni che trasformano 0 in a . In altre parole si individuano, mediante *puntatori*, gli insiemi delle involuzioni candidate a generare una secante $(0,a)$. Inoltre viene fatta, per ogni S_a , una nuova ripartizione negli insiemi S_a^h ($h=1,\dots,7$; $h \neq a$) ognuno dei quali individua le involuzioni di W_S che trasformano l'elemento 1 in h (se $a \neq 1$) o che trasformano 2 in h (se $a=1$). Si ricava che:

$$20 \leq |S_a| \leq 23 ; 3 \leq |S_a^h| \leq 5 ; 20 \leq \left| \bigcup_{a=1}^7 S_a \right| \leq 23.$$

Tali ripartizioni vengono effettuate mediante l'utilizzo di una matrice L_T (di ordine $6 \times 7 \times 2$) contenente indici riferiti a righe di W_S .

La funzione CREASEC origina, partendo dagli S_a^h , le $(0,a)$ -secanti. In particolare è utilizzata la funzione SEC 1 che ha in input un ben preciso

insieme S_a^h e che determina tutte le $(0,a)$ -secanti con un procedimento analogo a quello visto per la funzione TANG; sono individuate sestuple di indici (riferiti a W_S) che individuano una $(0,a)$ -secante. Tali sestuple sono memorizzate in una matrice S_M di ordine $6 \times f$ (con f che dipende dalla 0 -tangente che viene di volta in volta fissata). La matrice L_S (di ordine 7×2) è pure d'output ed individua i limiti di S_M per ogni valore di a , come precisato meglio in seguito. Lo schema a blocchi della funzione CREASEC è in Fig. 4. Descriviamo ora le azioni e le condizioni di questa funzione:

α_1 : si fissa l'insieme S_a ($a=1$);

c_1 : si verifica che risulti $S_a \neq S_7$;

β : si generano le $(0,a)$ -secanti relative alle involuzioni di S_a . Ogni $(0,a)$ -secante è una sestupla di indici riferiti alle righe di W_S ; ognuno di questi indici fa riferimento alla involuzione di S_a^h che non è congruente alle altre involuzioni già fissate in S_a^k ($k \neq h$). E' utilizzata la funzione SEC 1 e la funzione INDEX 1 che ottimizza la ricerca, all'interno di S_a^h , delle involuzioni non scartate.

γ : si memorizzano le sestuple trovate (ovvero le posizioni delle $(0,a)$ -secanti) nelle righe di S_M ed in L_S gli indici riferentisi a tali righe.

α_2 : si fissa S_{a+1} ($a < 7$).

Si fa notare in definitiva come gli S_a^h ($h=1, \dots, 7$) siano analoghi, come funzionalità, agli insiemi C_t visti in proposito della funzione TANG. Alla

fine del procedimento descritto (cioé dopo il richiamo, per ogni 0-tangente, delle funzioni TANSEC,CREALIM,CREASEC) l'insieme delle involuzioni rappresentate tramite S_M è stato ripartito, mediante gli indici della matrice L_S , nei sottoinsiemi G_a ($a=1,\dots,7$) ognuno dei quali individua tutte le (0,a)-secanti possibili non in contraddizione con la 0-tangente fissata. Per i sottoinsiemi che hanno generato l'(unico) ovale è risultato:

$$|G_a| = 4 \quad (a=1,\dots,7).$$

La determinazione degli insiemi G_a è l'informazione che ha permesso la ricerca di tutti i possibili ovali per l'ordine 7. Infatti, prendendo da ogni G_a un elemento (cioé una sestupla di indici), al variare di $a = 1,\dots,7$, restano individuati sette insiemi di sei involuzioni ciascuno che possono, unitamente alla tangente fissata ed in virtù della 2.4, determinare eventuali ovali astratti. Anche in questo caso, una volta che si sia fissata una sestupla s di involuzioni in G_a , vengono eliminate tutte quelle sestuple di G_r ($r \neq a$) che contengono involuzioni congruenti a qualche involuzione di s . Un ovale risulta determinato non appena si riesca a trovare un insieme di sette settuple *compatibili* tra loro. Questo procedimento è stato sviluppato mediante l'utilizzazione della funzione OVA 1, funzione che ha in input (cfr. Fig. 1.c) anche la matrice L_S ed in output può avere o l'insieme vuoto oppure un vettore V a sette componenti (con indici riferiti a S_M) che corrispondono alle secanti dell'ovale. Essendo necessario ridurre al minimo i tempi di calcolo, anche in questo caso si sono utilizzate tecniche di programmazione molto raffinate che riteniamo in questa sede inopportuno riportare. Accenneremo soltanto al fatto che il diagramma di flusso di OVA 1 è strutturalmente identico a quello di Fig. 3.

5. CONCLUSIONE

L'output della funzione OVA 1 è risultato per 93 volte l'insieme vuoto

mentre per una sola volta è risultato costituito da una 7-pla di indici (riferiti a S_M) da cui si è facilmente risaliti alle involuzioni che individuano le secanti di un ovale, il quale naturalmente coincide con la conica astratta di ordine 7.



BIBLIOGRAFIA

- [1] R.P.ANSTEE-M.HALL,Jr.-J.G.THOMPSON (1980): *Planes of order 10 do not have a collineation of order 5*, J. Combinatorial Theory, Series A 29,39-58.
- [2] A.BARLOTTI (1965): *Some topics in finite geometrical structures*, Institute of Statistics mimeo series no.439, Univ. of North Carolina.
- [3] U.BARTOCCI (1967): *Una nuova classe di ovali proiettive finite*, - Rend. Accad. Naz. Lincei, (8) 43, 312-316.
- [4] F.BUEKENHOUT (1966): *Planes projectifs a ovoides pascaliens*, Arch. Math.(Basel), 17, 89-93.
- [5] F.BUEKENHOUT (1966): *Etude intrinsèque des ovaes*, Rend. Mat., (5) 25, 333-393.
- [6] P.DEMBOWSKI (1968): *Finite Geometries*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York.
- [7] R.H.F.DENNISTON (1971): *On arcs in projective planes of order 9*, Manuscripta math., 4, 61-89.
- [8] R.H.F.DENNISTON (1973): *Uniqueness of the inversive plane of order 7*, Manuscripta math., 8, 21-26.
- [9] G.FAINA-G.CECCONI (1980) : *A finite Buekenhout oval which is not projective*, Simon Stevin in corso di stampa.
- [10] M.HALL (1953): *Uniqueness of the projective plane with 57 points*, Proc. Amer.Math. Soc., 4, 912-916.
- [11] M.HALL-J.D.SWIFT-R.J.WALKER (1956): *Uniqueness of the projective plane of order eight*, Math. Tables Aids Comput., 10,186-194.
- [12] M.HALL (1966): *Numerical analysis of finite geometries*, Proc. IBM Sci. Comput. Sympos. Combinatorial Problems, White Plains, N.Y.
- [13] M.HALL (1975): *Ovals in the desarguesian plane of order 16*, Ann.Mat.Pura Appl., 102,159-176.
- [14] D.R.HUGHES (1957): *A class of non-Desarguesian projective planes*, Canadian J.Math., 9, 378-388.

- [15] G.KORCHMAROS (1979): *Questioni relative ad ovali astratte*, Conferenze Seminario Mat. Univ. Bari, 171.
- [16] G.KORCHMAROS (1979): *Una generalizzazione del teorema di F.Buekenhout sulle ovali pascaliane*, in corso di stampa.
- [17] N.KRIER (1977): *A Buekenhout oval which is not projective*, Arch. Math. (Basel), 28, 323-324.
- [18] L.LUNELLI-M.SCE (1958) : *Sulla ricerca dei k-archi completi mediante una calcolatrice elettronica*. Convegno Internazionale Reticoli e Geometrie Proiettive, Cremonese, Roma, 81-86.
- [19] L.LUNELLI-M.SCE (1958): *k-archi completi nei piani proiettivi desarguesiani di rango 8 e 16*, Centro di Calcoli Numerici, Politecnico di Milano.
- [20] E.S.PAGE-L.B.WILSON (1979): *An introduction to Computational Combinatorics*, Cambridge Computer Science, London.
- [21] R.PINZANI-G.SODA-R.SPRUGNOLI (1976): *APL: linguaggio e applicazioni*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa.
- [22] R.P.POLIVKA-S.PAKIN (1975) : *APL: the language and its usage*, Prentice Hall, Neew Jersey.
- [23] G.RODRIGUEZ (1959): *Un esempio di ovale che non è una quasiconica*, Boll. Un.Mat.Ital., 14, 500-503.
- [24] B.SEGRE (1955): *Ovals in a finite projective planes*, Canad. J.Math. 7, 414-416.
- [25] B.SEGRE (1961): *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma.
- [26] M.TALLINI SCAFATI (1958): *Sui 6-archi completi di un piano lineare $S_{2,8}$* , Convegno Internazionale: Reticoli e Geometrie Proiettive (Palermo-Messina 1957), Cremonese Roma, 128-132.
- [27] G.TALLINI (1957): *Sui q-archi di un piano lineare finito di caratteristica $p=2$* , Atti Accad. Naz. Lincei Rend., 23, 242-245.
- [28] A.WAGNER (1959): *On perspectivities of finite projective planes*, Math Z., 71, 113-123.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 29 Gennaio 1981
 ed accettato per la pubblicazione il 17 Marzo 1981
 su parere favorevole di U. Bartocci e A. Cossu