Note di Matematica Vol.I , 225-259 (1981)

LIMITAZIONI A PRIORI PER UNA CLASSE DI PROBLEMI ELLITTICI IN DOMINI NON LIMITATI (°)

Luciana SGAMBATI e Mario TROISI (°°)

Summary. *This paper is concerned with linear elliptic boundary value problems in unbounded domains in R^n.*

They have been investigated within suitable Sobolev weight spaces. A priori estimates for the solutions have been proved.

Questo lavoro è dedicato ai problemi al contorno differenziali lineari ellittici:

$$Au = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x)\, D^\mu u = f \qquad \text{in } \Omega ,$$

$$B_j u = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x)\, D^\mu u = g_j \quad \text{su } \partial\Omega, \quad j=1,\dots,m$$

(°) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(°°) Istituto di Matematica dell'Università - SALERNO -

in un dominio non limitato Ω di R^n.

Lo studio è fatto nell'ambito di una classe di spazi di Sobolev con peso, denotati con $W_s^{r,p}$, dove il peso ha il ruolo di prescrivere il comportamento all'infinito delle funzioni che vi appartengono e delle loro derivate.

Un'opportuna caratterizzazione degli spazi $W_s^{r,p}$ consente di ricondurre lo studio del problema a quello dei problemi ellittici dipendenti da un parametro in domini limitati e negli ordinari spazi di Sobolev $W^{r,p}$, per i quali è possibile usufruire di risultati noti quali quelli di A. Alvino - G. Trombetti [2].

Per la possibilità di utilizzare i risultati di [2] si è ristretta la trattazione alla classe dei problemi per i quali sia ellittico (cfr.[2]), in $\bar{\Omega}$ e all'infinito il sistema di operatori con parametro $q \in R_+$:

$$\left(\sum_{|\mu| \leq 2m} q^{2m-|\mu|} a_\mu(x) D^\mu , \left\{ \sum_{|\mu| \leq m_j} q^{m_j - |\mu|} b_{j\mu}(x) \; D^\mu \right\}_{j=1}^{m} \right).$$

La prima parte del lavoro è dedicata ad un preliminare approfondimento di alcuni aspetti degli spazi di Sobolev con peso. Stabiliamo in particolare un teorema di immersione compatta:

$$W_s^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_t^p(\Omega), \qquad r \in N, \; s,t \in R \quad e \quad t < s. \tag{1}$$

Il problema viene trattato al n.6.

Assegnati un intero $\ell \geq \sup\left\{2m, m_j\right\}$, $p \in]1,+\infty[$, $s,t \in \mathbb{R}$ con $t<s$, in opportune ipotesi sui coefficienti di A e B_j proviamo che:

$$u \longrightarrow (Au, B_1 u|_{\partial\Omega}, \dots, B_m u|_{\partial\Omega})$$

definisce un operatore, che indichiamo con $\mathscr{A}$, lineare e continuo da $W_s^{\ell,p}$ in $E_{\ell,p,s}(\Omega) = W_s^{\ell-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} W_s^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)$ e che:

1) esiste una costante c tale che:

$$(2) \quad \|u\|_{W_s^{\ell,p}(\Omega)} \leq c(\|\mathscr{A}u\|_{E_{\ell,p,s}(\Omega)} + \|u\|_{L_s^p(\Omega)}) \qquad \forall u \in W_s^{\ell,p}(\Omega);$$

2) se $u \in W_{loc}^{\ell,p}(\bar{\Omega}) \cap L_t^p(\Omega)$, $Au \in W_s^{\ell-2m,p}(\Omega)$ e $B_j u \in W_s^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)$, allora $u \in W_s^{\ell,p}(\Omega)$.

Osserviamo che quando sussiste la (1), la (2) implica, per noti risultati, che l'operatore $\mathscr{A}$ ha nucleo di dimensione finita ed immagine chiusa.

Nel n.1 sono introdotti gli spazi di Sobolev $W^{r,p}$ con norma dipendente da un parametro $q \in \mathbb{R}_+$.

Nei nn.2 e 3 vengono stabiliti dei teoremi di densità e di immersione compatta per una classe di spazi di Sobolev con peso.

Il n.4 è dedicato alla trattazione degli spazi $W_s^{r,p}(\Omega)$.

Nel n.5 sono introdotti gli spazi $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$.

Il n.6 è dedicato allo studio del problema.

1. GLI SPAZI CON PARAMETRO $W^{r,p}(E,q)$.

Sia $\mathbb{R}^n$ lo spazio reale euclideo ad n dimensioni di punto $x =$

$=(x_1,\dots,x_n)$.

Per ogni multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in N_0^n$ (1) porremo:

$$|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n, \qquad x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n},$$

$$\partial^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}, \qquad D^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\dots D_{x_n}^{\alpha_n},$$

dove:

$$\partial_{x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_{x_k}=-i\,\partial_{x_k} \quad (i=\sqrt{-1}), \quad k=1,\dots,n.$$

Se E è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $p\in[1,+\infty]$ e $r\in N_0$, indicheremo:

con $W^{r,p}(E)$ lo spazio delle distribuzioni u su E tali che $\partial^\alpha u\in L^p(E)$ per $|\alpha|\leq r$, munito della norma:

$$\|u\|_{W^{r,p}(E)}=\sum_{|\alpha|\leq r}\|\partial^\alpha u\|_{L^p(E)};$$

con $W^{r,p}_{loc}(\bar{E})$ l'insieme delle funzioni $u\in W^{r,p}(E')$ per ogni sottoinsieme aperto e limitato E' di E;

(1) Indicheremo con N l'insieme dei numeri interi positivi, con N_0 l'insieme dei numeri interi non negativi, con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, con $\mathbb{R}_+$ l'insieme dei numeri reali positivi, con $\bar{\mathbb{R}}_+$ l'insieme dei numeri reali non negativi, con C l'insieme dei numeri complessi.

con $L^p_{loc}(\bar{E})$ lo spazio $W^{0,p}_{loc}(\bar{E})$.

Useremo le notazioni:

$$|u|_{j,p,E} = |\partial^j u|_{p,E} = \sum_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(E)},$$

$$\|u\|_{j,p,E} = \sum_{k=0}^{j} |u|_{k,p,E} .$$

Per ogni $u \in W^{r,p}(E)$ e per ogni $q \in \mathbb{R}_+$ porremo:

$$\|u\|_{W^{r,p}(E,q)} = \sum_{j=0}^{r} q^{r-j} |\partial^j u|_{p,E}.$$

LEMMA 1.1. *Se l'aperto* E *di* R^n *è limitato e dotato della proprietà di cono, allora, fissato* $q_0 \in R_+$, *per ogni* $u \in W^{r,p}(E)$ *e per ogni* $q \in [q_0, +\infty[$, *si ha*(2):

$$(1.1) \qquad \|u\|_{W^{r,p}(E,q)} \sim |\partial^r u|_{p,E} + q^r |u|_{p,E}$$

$$\sim \|u\|_{r,p,E} + q^r \|u\|_{0,p,E}$$

$$\sim \sum_{j=0}^{r} q^{r-j} \|u\|_{j,p,E} .$$

(2) Se f e g sono due funzioni definite in un insieme X ed a valori in $\bar{\mathbb{R}}_+$, diremo che per ogni $v \in X$ risulta $f(v) \sim g(v)$ se esistono due costanti positive c_1 e c_2 tali che:

$$c_1 g(v) \le f(v) \le c_2 g(v) \qquad \forall v \in X.$$

Infatti da noti risultati (cfr., ad es., il teorema 4.15 di R.A. Adams [1]) si ha che, fissato $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$, esiste una costante c tale che:

$$(1.2) \qquad |\partial^j u|_{p,E} \le c(\varepsilon|\partial^r u|_{p,E} + \varepsilon^{-j/(r-j)}|u|_{p,E})$$

per ogni $u \in W^{r,p}(E)$ e per ogni $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$.

Dalla (1.2) si deduce che esiste una costante c_0 tale che:

$$(1.3) \qquad q^{r-j}|\partial^j u|_{p,E} \le c_0(|\partial^r u|_{p,E} + q^r|u|_{p,E})$$

per ogni $u \in W^{r,p}(E)$ e per ogni $q \in [q_0,+\infty[$.

D'altra parte si ha:

$$(1.4) \qquad \sum_{j=0}^{r} q^{r-j}\|u\|_{j,p,E} = \sum_{j=0}^{r} q^{r-j} \sum_{k=0}^{j} |u|_{k,p,E}$$

$$\le \sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{j} q_0^{k-j}\, q^{r-k}\, |u|_{k,p,E} \le c_1\|u\|_{W^{r,p}(E,q)} ,$$

dove c_1 è una costante indipendente da u e da q.

Dalle (1.3) e (1.4) si deduce in modo ovvio la tesi.

LEMMA 1.2. *Se sono verificate le ipotesi del lemma* 1.1, *assegnati* $k \in N_0$ *e un multi-indice* $\alpha \in N_0^n$ *tali che* $k+|\alpha| \le r$, *per ogni* $u \in W^{r,p}(E)$ *e per ogni* $q \in [q_0,+\infty[$ *si ha:*

$$(1.5) \qquad \|\partial^\alpha u\|_{W^{k,p}(E,q)} \leq c\, q^{k+|\alpha|-r} \|u\|_{W^{r,p}(E,q)},$$

dove c *è una costante indipendente da* u *e da* q.

Infatti, in conseguenza del lemma 1.1 si ha:

$$\|\partial^\alpha u\|_{W^{k,p}(E,q)} \leq c_1(|\partial^k(\partial^\alpha u)|_{p,E} + q^k|\partial^\alpha u|_{p,E})$$

$$\leq c_1 q^{k+|\alpha|-r}(q^{r-(k+|\alpha|)}|\partial^{k+|\alpha|} u|_{p,E} + q^{r-|\alpha|}|\partial^{|\alpha|}u|_{p,E}),$$

dove c_1 è una costante indipendente da u e da q; da tale relazione e dalla (1.3) si deduce la (1.5).

LEMMA 1.3. *Se sono verificate le ipotesi del lemma 1.1, assegnati* k, r$\in$N, *con* k<r, *esiste una costante* c *tale che:*

$$(1.6) \qquad \|u\|_{W^{k,p}(E,q)} \leq c\, \|u\|^{k/r}_{W^{r,p}(E,q)} \|u\|^{1-k/r}_{L^p(E)}$$

$$\forall u \in W^{r,p}(E) \quad e \quad \forall q \in [q_0, +\infty[.$$

Infatti, dalla (1.2) si deduce che, fissato un $\lambda_o \in \mathbb{R}_+$, esiste una costante c_1 tale che qualunque siano $\lambda \in]0, \lambda_o]$, $q \in [q_0, +\infty[$, $u \in W^{r,p}(E)$ e $j \leq k$ si ha:

$$q^{r-j}|\partial^j u|_{p,E} \leq c_1(\lambda|\partial^r u|_{p,E} + \lambda^{-j/(r-j)} q^r|u|_{p,E})$$

$$\leq c_1(\lambda\, |\partial^r u|_{p,E} + \lambda_o^{\,k/(r-k)-j/(r-j)}\, \lambda^{-k/(r-k)}\, q^r |u|_{p,E}),$$

e quindi:

$$(1.7) \qquad \|u\|_{W^{k,p}(E,q)} \leq c_2 q^{k-r}(\lambda\, |\partial^r u|_{p,E} + \lambda^{-k/(r-k)} q^r |u|_{p,E}),$$

dove c_2 è una costante indipendente da u, q e λ.

Ponendo nella (1.7):

$$\lambda = (q^r\, \|u\|_{L^p(E)}\, \|u\|^{-1}_{W^{r,p}(E,q)})^{1-k/r}$$

si ottiene la (1.6).

Osserviamo che dalla (1.6) e dal lemma 1.1 si deduce evidentemente che per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste una costante $c(\varepsilon)$ tale che:

$$(1.8) \qquad \|u\|_{W^{k,p}(E,q)} \leq \varepsilon\, q^{k-r} |\partial^r u|_{p,E}$$

$$+ c(\varepsilon)\, q^k |u|_{p,E} \qquad \forall u \in W^{r,p}(E) \quad e \quad \forall q \in]q_0,+\infty[.$$

2. GLI SPAZI CON PESO $H^{r,p}(E,m)$ e $W^{r,p}(E,m)$.

Assegnati una funzione misurabile $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ e un aperto E di R^n, qualunque siano $r \in N_0$ e $p \in [1,+\infty[$ indicheremo:

con $W^{r,p}(E,m)$ lo spazio delle distribuzioni u su E tali che $m^{1/p} \partial^\alpha u \in L^p(E)$

per $|\alpha| \leq r$, munito della norma:

$$\|u\|_{W^{r,p}(E,m)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq r} \int_E |\partial^\alpha u(x)|^p \, m(x)dx\Big)^{1/p};$$

con $H^{r,p}(E,m)$ lo spazio delle funzioni u che sono restrizioni ad E di elementi di $W^{r,p}(R^n,m)$ munito della norma:

$$\|u\|_{H^{r,p}(E,m)} = \inf \| v \|_{W^{r,p}(\mathbb{R}^n,m)},$$

dove l'estremo inferiore è riferito alle $v \in W^{r,p}(R^n,m)$ tali che $v|_E = u$.

Porremo:

$$L^p(E,m) = W^{0,p}(E,m) , \qquad B(x) = \{y \in \mathbb{R}^n / |y - x| < 1\}$$

Sussiste il seguente noto teorema di compattezza (cfr.,ad es., il lemma 1.7 di S.Matarasso-M.Troisi [5]):

LEMMA 2.1. *Se risulta:*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \operatorname{mis}(E \cap B(x)) = 0$$

e se esiste un $d \in \mathbb{R}_+$ *tale che:*

$$\sup_{\substack{x,y \in E \\ |x-y|<d}} \frac{m(x)}{m(y)} < +\infty,$$

allora per ogni $p \in]1,+\infty[$ *si ha* (3):

(3) Se X e Y sono due spazi normati, scriveremo: $X \hookrightarrow Y$ per indicare che X è un sottospazio di Y e che l'immersione di X in Y è continua; $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ per indicare $X \hookrightarrow Y$ e che l'immersione di X in Y è compatta.

$$H^{1,p}(E,m) \hookrightarrow \hookrightarrow L^p(E,m).$$

Poniamo ora per ogni $a \in R_+$:

$$E(a) = \{x\in E \mid |x| < a\}$$

e consideriamo la seguente ipotesi:

1) per ogni fissato $a \in R_+$ si ha che $E(a)$ è contenuto in un sottoinsieme aperto e limitato di E dotato della *proprietà di segmento* (cfr.pag. 54 di [1]).

LEMMA 2.2. *Se* $m,m^{-1} \in L^\infty_{loc}(\bar{E})$ *e se è verificata l'ipotesi* 1), *allora*, *per ogni* $r\in N_0$ *e per ogni* $p \in [1,+\infty[$ $\mathscr{D}(\bar{E})$ *è denso in* $W^{r,p}(\Omega,m)$.

Infatti, assegniamo una funzione $\psi \in \mathscr{D}(\bar{R}_+)$ tale che:

$$\psi(t) = 1 \qquad \text{per} \quad t < \frac{1}{2}, \qquad\qquad \operatorname{supp}\psi \subset [0,2[$$

e poniamo per ogni $k\in N$:

$$\delta_k : x \to \psi(\frac{|x|}{k})$$

Assegniamo inoltre una $u\in W^{r,p}(E,m)$.

Si verifica facilmente che:

$$\lim_k \| \delta_k u - u\|_{W^{r,p}(E,m)} = 0 \cdot$$

D'altra parte per ogni $k\in N$ risulta:

$$\delta_k u \in W^{r,p}(E), \qquad \operatorname{supp} \delta_k u \subset E(2k).$$

Da noti risultati (cfr., ad es., il teorema 3.18 di [1]) si deduce, tenendo presente l'ipotesi $m^{-1} \in L^{\infty}_{loc}(\bar{E})$, che esiste una successione $(u_n^{(k)})_{n\in N} \subset \mathcal{D}(\bar{E})$ tale che:

$$\operatorname{supp} u_n^{(k)} \subset E(2k) \qquad \forall n\in N,$$

$$\lim_n \| u_n^{(k)} - \delta_k u\|_{W^{r,p}(E)} = 0.$$

D'altra parte dall'ipotesi $m\in L^{\infty}_{loc}(\bar{E})$ segue che esiste una costante c_k tale che:

$$\|u_n^{(k)} - \|u\|_{W^{r,p}(E,m)} \le c_k \|u_n^k - \delta_k u\|_{W^{r,p}(E)}$$

$$+ \|\delta_k u - u\|_{W^{r,p}(E,m)} \qquad \forall n\in N.$$

Dalle precedenti relazioni con ovvie considerazioni si ottiene la tesi.

3. UN TEOREMA DI COMPATTEZZA NEGLI SPAZI $W^{r,p}(\Omega,m)$.

Assegniamo un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ e due funzioni misurabili e positive m,σ definite in Ω .

Porremo per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$:

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega \mid \frac{\sigma(x)}{m(x)} > \varepsilon \right\}$$

e supporremo che siano verificate le seguenti ipotesi:

a_1) $\frac{\sigma}{m} \in L^{\infty}(\Omega)$;

a_2) fissato $\varepsilon \in]0,1[$, esistono un $d \in R_+$ e un ricoprimento di A_ε mediante due sottoinsiemi aperti Ω' e Ω'' di Ω, di cui uno eventualmente vuoto, tali che:

(3.1) Ω' è limitato e dotato della proprietà di cono,

(3.2) $\sigma|_{\Omega'} \in L^{\infty}(\Omega')$, $(m|_{\Omega'})^{-1} \in L^{\infty}(\Omega')$,

(3.3) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \text{mis}(\Omega'' \cap B(x)) = 0$,

(3.4) $$\text{dist}(\Omega'', \partial\Omega) > 0,$$

(3.5) $$\sup_{\substack{x,y \in \Omega'' \\ |x-y| < d}} \frac{m(x)}{m(y)} < +\infty.$$

TEOREMA 3.1. *Se sono verificate le precedenti ipotesi, allora per ogni* $p \in]1,+\infty[$ *si ha:*

(3.6) $$W^{1,p}(\Omega,m) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega,\sigma).$$

Dal teorema 2.1 di [5] applicato con:

$$\alpha = m, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \frac{\sigma}{m}, \qquad \theta = 1$$

segue che è sufficiente provare che per ogni successione $(u_k)_{k \in N} \subset W^{1,p}(\Omega,m)$ debolmente convergente a zero in $W^{1,p}(\Omega, m)$ si ha:

(3.7) $$\lim_k \int_{A_\varepsilon} |u_k(x)|^p \,\sigma(x)\, dx = 0 \qquad \forall \varepsilon \in]0,1[\ .$$

Fissato $\varepsilon \in]0,1[$, consideriamo il ricoprimento di A_ε mediante gli aperti Ω' e Ω'' definito dall'ipotesi $a_2)$.

In conseguenza della seconda delle (3.2) si ha che:

$$u \to u_{|\Omega'}$$

definisce un'applicazione lineare e continua di $W^{1,p}(\Omega,m)$ in $W^{1,p}(\Omega')$.

Per la (3.1) e per un noto teorema di compattezza si ha:

$$W^{1,p}(\Omega') \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega').$$

Consegue che, assegnata una successione $(u_k)_{k\in N} \subset W^{1,p}(\Omega,m)$ debolmente convergente a zero in $W^{1,p}(\Omega,m)$, si ha:

(3.8) $$\lim_k \int_{\Omega'} |u_k(x)|^p \, dx = 0 \ .$$

D'altra parte, con considerazioni analoghe a quelle tenute per dimostrare il teorema 1.3 di [5] , si deduce dalla (3.4) che

$$u \to u_{|\Omega''}$$

definisce un'applicazione lineare e continua di $W^{1,p}(\Omega,m)$ in $H^{1,p}(\Omega'',m)$, mentre per le (3.3) e (3.5) e per il lemma 2.1 si ha:

$$H^{1,p}(\Omega'',m) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega'',m).$$

Ne segue che:

$$\lim_{k} \int_{\Omega''} |u_k(x)|^p\, m(x)\, dx = 0. \tag{3.9}$$

Dalle (3.8) e (3.9), dalla prima delle (3.2), dall'ipotesi a_2) e dalla relazione:

$$\int_{A_\varepsilon} |u_k|^p \sigma(x) dx \le \int_{\Omega'} |u_k(x)|^p \sigma(x) dx + \int_{\Omega''} |u_k(x)|^p\ \sigma(x) dx$$

$$\le \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega')} \int_{\Omega'} |u_k(x)|^p\ dx + \left\| \frac{\sigma}{m} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega''} |u_k(x)|^p\ m(x) dx$$

si deduce la (3.7), e quindi si ha la tesi.

Osserviamo che nel caso in cui A_ε è limitato, il teorema ridà un risultato di V.Benci - D.Fortunato [3].

Il seguente esempio riguarda un semplice caso in cui A_ε è non limitato e sono verificate le condizioni a_1) e a_2).

Esempio 3.1. *Se* $\Omega = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ *e*:

$$\sigma(x) = |x|^a\ (1+|x|)^b\ x_1^{c+1} (1+x_1) c\ ,$$

$$m(x) = |x|^a\ (1+|x|)^b\ x_1^c (1+x_1)^{c+1}\ (1+(1+x_1)|x_1 - x_2|),$$

dove $a,b,c \in \mathbf{R}$, *allora sono verificate le condizioni* a_1) *e* a_2).

Infatti, la a_1) è di ovvia verifica.

D'altra parte fissato $\varepsilon \in]0,1[$ e posto:

$$\varphi(t) = \frac{t - \varepsilon(1+t)}{\varepsilon(1+t)^2}\ ,$$

si ha evidentemente:

$$A_\varepsilon = \left\{(x_1,x_2)\in R_+ x R_+ \mid x_1 > \varepsilon_0 \ , \ x_1 - \varphi(x_1) < x_2 < x_1 + \phi(x_1)\right\},$$

dove $\varepsilon_0 = \varepsilon/(1-\varepsilon)$.

Assegnati allora $\alpha \in \left]\varepsilon_0, +\infty\right[$ e $\beta \in \mathbb{R}_+$ tali che:

$$\inf_{t\in]\alpha,+\infty[} (t-\varphi(t)) > 0 \ , \qquad \sup_{t\in]\varepsilon,\alpha+1[} (t + \varphi(t)) < \beta \quad ,$$

con semplici considerazioni si verifica che i sottoinsiemi aperti di $R_+ \times R_+$:

$$\Omega' = \left]\varepsilon_0, \alpha+1\right[\times \left]0, \beta\right[,$$

$$\Omega'' = \left\{(x_1,x_2) \mid x_1 > \alpha \ , x_1 - \varphi(x_1) < x_2 < x_1 + \phi(x_1)\right\}$$

soddisfano le condizioni dell'ipotesi a_2); la (3.5) si ottiene osservando che per $x,y \in \Omega''$ si ha:

$$\frac{m(x)}{m(y)} < \varepsilon^{-1} \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^a \left(\frac{1+|x|}{1+|y|}\right)^b \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^c \left(\frac{1+x_1}{1+y_1}\right)^{c+1}$$

$$\leq c_0 \ (1+|x-y|)^{|a|+|b|} (1+|x_1-y_1|)^{|c|+|c+1|} \quad ,$$

dove c_0 è una costante indipendente da x e da y.

4. GLI SPAZI $W^{r,p}_s(\Omega)$.

Assegniamo un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ e una funzione $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, soddisfacenti le seguenti ipotesi:

i_1) $\rho \in L^{\infty}_{loc}(\bar{\Omega})$ e $\rho^{-1} \in L^{\infty}(\Omega)$;

i_2) esistono γ_1, $\gamma_2 \in R_+$ tali che:

$$\gamma_1 \rho(x) \leq \rho(y) \leq \gamma_2 \rho(x) \qquad \forall x \in \Omega \qquad \text{e} \ \forall y \in I(x),$$

dove:

$$I(x) = \{y \in \Omega \mid |y-x| < \rho(x)\}$$

i_3) per ogni $x \in \Omega$, $I(x)$ è un insieme dotato della proprietà di cono, inoltre l'apertura e il rapporto tra $\rho(x)$ e l'altezza del cono caratteristico di $I(x)$ sono indipendenti da x.

Osserviamo che le precedenti ipotesi implicano che Ω è un insieme dotato della proprietà di cono.

Fissati $x \in \Omega$, $A \subset \bar{\Omega}$ e $u : A \rightarrow C$, porremo:

$$\Phi_x : z \in \bar{\Omega} \rightarrow \frac{z-x}{\rho(x)} + x \quad , \ A^*_x = \Phi_x(A) \ ,$$

$$u^*_x : y \in A^*_x \rightarrow u(x+\rho(x)\ (y-x)) \ ;$$

quando non vi sia possibilità di equivoci, scriveremo A^* e u^* in luogo di A^*_x e u^*_x rispettivamente.

In particolare porremo:

$$I^*(x) = (I(x))^* = (I(x))^*_x .$$

Assegnati $r \in N_0$, $p \in [1,+\infty[$ e $s \in R$, indicheremo con $W^{r,p}_s(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni u su Ω tali che $\rho^s \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ per $|\alpha| \leq r$, munito della norma:

$$\| u \|_{W^{r,p}_s(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq r} \int_\Omega \rho^{sp} |\partial^\alpha u(x)|^p \, dx\Big)^{1/p} .$$

Porremo:

$$L^p_s(\Omega) = W^{0,p}_s(\Omega).$$

Osserviamo che risulta:

$$(4.1) \qquad W^{r,p}_s(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}_t(\Omega) \quad \text{per} \quad k \leq r \quad e \quad t \leq s.$$

Useremo le notazioni:

$$|u|_{p,s} = \| u \|_{L^p_s(\Omega)} , \; |\partial^j u|_{p,s} = \sum_{|\alpha|=j} |\partial^\alpha u|_{p,s}.$$

Sussistono i seguenti lemmi:

LEMMA 4.1. $u \in L^p_s(\Omega)$ *se e solo se* $(x \in \Omega \to |u^*|_{p,I^*(x)}) \in L^p_s(\Omega)$; *inoltre:*

$$(4.2) \qquad \|u\|_{L^p_s(\Omega)} \sim \Big(\int_\Omega \rho^{sp}(x) \; |u^*|^p_{p,I^*(x)} dx\Big)^{1/p}.$$

Infatti, procedendo come per le dimostrazioni dei lemmi 1.1 e 1.2 di M. Troisi [9] si prova che:

$$\|u\|_{L^p_s(\Omega)} \sim \left(\int_\Omega \rho^{sp-n}(x)\ |u|^p_{p,I(x)} dx\right)^{1/p},$$

da cui ovviamente si deduce la tesi.

LEMMA 4.2. $u \in W^{r,p}_s(\Omega)$ *se e solo se* $(x\in\Omega \to \|u^*\|_{W^{r,p}(I^*(x),\rho(x))}) \in L^p_{s-r}(\Omega)$; *inoltre*:

$$(4.3)\qquad \|u\|_{W^{r,p}_s(\Omega)} \sim \left(\int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x)\ \|u^*\|^p_{W^{r,p}(I^*(x),\rho(x))} dx\right)^{1/p}.$$

Infatti, dal lemma 4.1 segue:

$$|\partial^j u|_{p,s} \sim \left(\int_\Omega \rho^{sp}(x)\ |(\partial^j u^*)|^p_{p,I^*(x)} dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_\Omega \rho^{(s-j)p}(x)\ |\partial^j u^*|^p_{p,I^*(x)} dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x)\ \rho^{(r-j)p}(x)\ |\partial^j u^*|^p_{p,I^*(x)} dx\right)^{1/p},$$

da cui ovviamente si deduce la tesi.

LEMMA 4.3. *Se* $k,r\in N$ *e* $k< r$, *per ogni* $\varepsilon\in R_+$ *esiste una costante* $c(\varepsilon)$ *tale che:*

$$(4.4)\qquad \|u\|_{W^{k,p}_s(\Omega)} \le \varepsilon|\partial^r u|_{p,s} + c(\varepsilon)\,|u|_{p,s} \qquad \forall u\in W^{r,p}_s(\Omega).$$

Infatti, dalla (1.8) applicata con $E = I^*(x)$ e $q = \rho(x)$ si deduce che per ogni $\lambda \in R_+$ esiste una costante $c_1(\lambda)$ tale che si ha qualunque siano $x \in \Omega$ e $u \in W_s^{r,p}(\Omega)$:

$$\|u^*\|^p_{W^{k,p}(I^*(x),\rho(x))} \leq \lambda\, \rho^{(k-r)p}(x)\,|\partial^r u^*|^p_{p,I^*(x)} +$$

$$+\, c_1(\lambda)\, \rho^{kp}(x)\, |u^*|^p_{p,I^*(x)} .$$

Se ne deduce che:

$$\int_\Omega \rho^{(s-k)p}\, \|u^*\|^p_{W^{k,p}(I^*(x),\rho(x))}\, dx \leq \lambda \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x)\,|\partial^r u^*|^p_{p,I^*(x)} dx$$

$$+\, c_1(\lambda) \int_\Omega \rho^{sp}(x)\, |u^*|^p_{p,I^*(x)} dx$$

$$= \lambda \int_\Omega \rho^{sp}(x)\,|(\partial^r u)^*|^p_{p,I^*(x)} dx + c_1(\lambda) \int_\Omega \rho^{sp}(x)\,|u^*|^p_{p,I^*(x)} dx;$$

da quest'ultima relazione e dai lemmi 4.1 e 4.2 si deduce in modo ovvio la tesi.

Porremo per ogni $a, \delta \in R_+$:

$$\Omega_a = \Big\{ x \in \Omega \ \ |\rho(x) < a \Big\} ,$$

$$B_\delta = \{x \in R^n |\ \ |x| < \delta\} \quad , \ \Omega_a(\delta) = \Omega_a \setminus B_\delta .$$

LEMMA 4.4. *Se risulta*:

$$(4.5) \qquad \lim_{|x|\to+\infty} \operatorname{mis}(\Omega_a \cap B(x)) = 0 \qquad \forall a \in R_+$$

e se esiste $\delta \in R_+$ *tale che:*

$$(4.6) \qquad \operatorname{dist}(\Omega_a(\delta), \partial\Omega) > 0 \qquad \forall a \in R_+ ,$$

allora, assegnati $p \in]1,+\infty[$, $k,r \in N_0$, $s,t \in R$ *tali che* $k<r$ *e* $t<s$, *si ha:*

$$(4.7) \qquad W_s^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow W_t^{k,p}(\Omega).$$

Cominciamo col provare che:

$$(4.8) \qquad W_s^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_t^p(\Omega).$$

Poniamo:

$$m(x) = \rho^{sp}(x) \quad , \quad \sigma(x) = \rho^{tp}(x).$$

Siccome Ω è dotato della proprietà di cono, esiste un sottoinsieme aperto e limitato Ω' di Ω dotatc della proprietà di cono tale che $\Omega \cap B_\delta \subset \Omega'$; inoltre in conseguenza dell'ipotesi i_1) si ha:

$$\sigma|_{\Omega'} \in L^\infty(\Omega') \quad , \quad (m_{|\Omega'})^{-1} \in L^\infty(\Omega').$$

D'altra parte dalle (4.5) e (4.6) si deduce (cfr. il lemma 1.6 di [5]) che esiste un sottoinsieme aperto Ω'' di Ω tale che $\Omega_a(\delta) \subset \Omega''$ e:

$$\lim_{|x|\to+\infty} \operatorname{mis}(\Omega'' \cap B(x)) = 0,$$

$$\operatorname{dist}(\Omega'', \partial\Omega) > 0.$$

Posto:

$$d = (2 \| \rho^{-1} \|_{L^\infty(\Omega)})^{-1},$$

dall'ipotesi i_2) si deduce facilmente che esiste una costante c tale che:

$$\frac{m(x)}{m(y)} = \left(\frac{\rho(x)}{\rho(y)}\right)^{sp} \leq c \quad \forall x,y \in \Omega \quad \text{tali che} \quad |x-y| < d\ .$$

Sono pertanto verificate le condizioni a_1) e a_2) del teorema 3.1, e quindi si ha:

$$W_s^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega, \rho^{sp}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega, \rho^{tp}) = L_t^p(\Omega),$$

cioé la (4.8).

Dalla (4.8) e dal lemma 4.3 con note considerazioni si deduce la (4.7), e quindi si ha la tesi.

5. GLI SPAZI $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$.

In questo numero e nel successivo supporremo che siano verificate le ipotesi i_1), i_2), i_3) e la seguente ipotesi, dove ℓ denota un fissato intero positivo:

i_4) esistono un ricoprimento di $\partial\Omega$ mediante una famiglia finita $(U_i)_{i\in\mathscr{I}}$ di aperti U_i e, per ogni $i \in \mathscr{I}$, un omeomorfismo $x \to \Phi_i(x)$ di classe C^ℓ di $\bar{U}_i$ sulla chiusura di un aperto convesso B_i di R^n tali che:

1) $$\Phi_i(U_i \cap \Omega) = B_i \cap \left\{ y \in R^n \mid y_n > 0 \right\}$$

e

$$\Phi_i(U_i \cap \partial\Omega) = B_i \cap \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y_n = 0 \right\} \quad ;$$

2) le componenti di Φ_i e Φ_i^{-1} sono funzioni uniformemente continue e limitate insieme con le loro derivate di ordine $\leq \ell$;

3) esiste un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che:

$$\bigcup_{i \in \mathscr{I}} U_i \supset \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta \right\} ;$$

4) se $i \neq j$, $U_i \cap U_j$ è limitato.

Per ogni $x \in \Omega$ porremo:

$$\Gamma(x) = \partial\Omega \cap \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \rho(x) \right\} ,$$

$$\Gamma^*(x) = (\Gamma(x))^* .$$

Se $\Gamma^*(x) \neq \emptyset$, per ogni intero $r \leq \ell$, per ogni $p \in \left]1, +\infty\right[$ e per ogni $q \in \mathbb{R}_+$ indicheremo con $W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x), q)$ lo spazio $W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x))$ munito della norma dipendente da q analoga alla norma dipendente da q introdotta e denotata con $|||\cdot|||_{r-1/p,p}$ al n.1 di [2], a cui rinviamo.

Per ogni $\varphi \in W^{r-1/p,p}_{loc}(\partial\Omega)$ indicheremo con:

$$x \longrightarrow \| \varphi^* \|_{W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x), \rho(x))}$$

la funzione che ad $x \in \Omega$ associa: zero se $\Gamma^*(x) = \emptyset$, la norma in $W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x), \rho(x))$ della restrizione di $\phi^* = \phi^*_x$ a $\Gamma^*(x)$ se $\Gamma^*(x) \neq \emptyset$.

Assegnato inoltre $s \in \mathbb{R}$, indicheremo con $W^{r-1/p,p}_s(\partial\Omega)$ lo spazio delle funzioni $\varphi \in W^{r-1/p,p}_{loc}(\partial\Omega)$ tali che:

$$\left(x \in \Omega \to \rho^{s-r}(x)\ \|\varphi^*\|_{W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))}\right) \in L^p(\Omega) \ ,$$

munito della norma:

$$\|\varphi\|_{W^{r-1/p,p}_s(\partial\Omega)} = \left(\int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x)\ \|\varphi^*\|^p_{W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x),\ \rho(x))} dx\right)^{1/p} .$$

Sussiste il seguente teorema di tracce:

LEMMA 5.1. *Se sono verificate le ipotesi* $i_1) - i_4)$, *allora qualunque siano* $r \in N$, $p \in]1, +\infty[$ *e* $s \in R$ *l'applicazione:*

$$u \to u|_{\partial\Omega} \quad ,$$

definita in $\mathscr{D}(\bar\Omega)$, *si prolunga per continuità in un'applicazione, che indicheremo con* $u \to \gamma_0 u$, *lineare e continua di* $W^{r,p}_s(\Omega)$ *in* $W^{r-1/p,p}_s(\Omega)$.

Infatti, nelle ipotesi poste, in conseguenza del lemma 2.2 si ha che $\mathscr{D}(\bar\Omega)$ è denso in $W^{r,p}_s(\Omega)$. E' perciò sufficiente provare che esiste una costante c tale che

$$\text{(5.1)} \qquad \|u|\partial\Omega\|_{W^{r-1/p,p}_s(\partial\Omega)} \le c\ \|u\|_{W^{r,p}_s(\Omega)} \qquad \forall u \in \mathscr{D}(\bar\Omega) \ .$$

Assegniamo $u \in \mathscr{D}(\bar\Omega)$. Da noti risultati (cfr. il n.1 di [2]) si deduce che per ogni fissato $x \in \Omega$ sussiste la limitazione:

$$\text{(5.2)} \qquad \|(u_{|\partial\Omega})^*\|_{W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x),\ \rho(x))} \le c_0\ \|u^*\|_{W^{r,p}(\Gamma^*(x),\ \rho(x))} \ ,$$

dove c_0 è una costante indipendente da u e da x.

Dalla (5.2) segue:

$$\int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x)\, \|(u/\partial\Omega)^*\|^p_{W^{r-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))} dx \leq c_0^p \int_\Omega \rho^{(s-r)p}(x)\, \|u^*\|^p_{W^{r,p}(I^*(x),\rho(x))} dx,$$

da cui per la definizione degli spazi $W^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$ e per il lemma 4.2 si deduce la (5.1), e quindi si ha la tesi.

6. LIMITAZIONI A PRIORI PER UNA CLASSE DI PROBLEMI ELLITTICI.

Assegniamo: in Ω un operatore differenziale lineare di ordine 2m:

$$A = \sum_{|\mu|\leq 2m} a_\mu(x) D^\mu \ ;$$

su $\partial\Omega$ un sistema $\{B_1,\dots,B_m\}$ di m operatori differenziali lineari, con B_j di ordine $m_j \in N_0$:

$$B_j = \sum_{|\mu|\leq m_j} b_{j\mu}(x)\, D^\mu \quad , \qquad j = 1,\dots,m \ ,$$

supponendo che siano verificate le seguenti ipotesi, dove ℓ denota un fissato intero $\geq \sup\{2m, m_j\}$:

i_5) i coefficienti $a_\mu(x)$, per $|\mu|\leq 2m$, e i coefficienti $b_{j\mu}(x)$, per $|\mu| \leq m_j$, sono continui rispettivamente in $\bar\Omega$ e su $\partial\Omega$ e convergono all'infinito.

i_6) per ogni $x\in\Omega$, le derivate (nel senso delle distribuzioni):

$$\partial^\alpha a^*_\mu \in L^\infty(I^*(x)) \quad \text{per} \quad |\alpha|\leq \ell-2m \quad \text{e} \quad |\mu|\leq 2m,$$

$$\partial^{\alpha} b^{*}_{j\mu} \in L^{\infty}(\Gamma^{*}(x)) \quad \text{per} \quad |\alpha| \leq \ell-m_j, \quad j \subset \{1,\dots m\} \quad \text{e} \quad |\mu| \leq m_j$$

ed hanno norme in detti spazi limitate da costanti indipendenti da x;

i_7) gli operatori:

$$A(x,D,q) = \sum_{|\mu|\leq 2m} q^{2m-|\mu|} \quad a_{\mu}(x) \; D^{\mu} \quad ,$$

$$B_j(x,D,q) = \sum_{|\mu|\leq m_j} q^{m_j-|\mu|} \quad b_{j\mu}(x) D^{\mu} \quad , \; j=1,\dots,m,$$

soddisfano le condizioni di ellitticità espressa al n. 4 di [2] rispetto a $q \in \mathbb{R}_+$ in $\bar{\Omega}$ e all'infinito.

Osserviamo che nelle ipotesi poste si ha per ogni $u \in W_s^{\ell,p}(\Omega)$:

$$\|Au\|_{W_s^{\ell-2m,p}(\Omega)} \leq c_1 \sum_{|\mu|\leq 2m} \|D^{\mu}u\|_{W_s^{\ell-2m,p}(\Omega)}$$

$$\leq c_2 \|u\|_{W_s^{\ell,p}(\Omega)} \quad ,$$

$$\|\gamma_0 B_j u\|^{p}_{W_s^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)}$$

$$\leq c_3 \sum_{|\mu|\leq m_j} \int_{\Omega} \rho^{(s-\ell+m_j)p}(x) \; \|(\gamma_0 D^{\mu}u)^{*}\|^{p}_{W^{\ell-m_j-1/p}(\Gamma^{*}(x),\rho(x))}$$

$$= c_3 \sum_{|\mu|\leq m_j} \|\gamma_0 \; D^{\mu}u\|^{p}_{W_s^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)}$$

$$\leq c_4 \sum_{|\mu|\leq m_j} \|D^{\mu}u\|^{p}_{W_s^{\ell-m_j,p}(\Omega)} \leq c_5 \|u\|^{p}_{W_s^{\ell,p}(\Omega)} \; .$$

Se ne deduce che comunque si assegnino un intero $\ell \geq \sup\{2m, m_j\}$, $p \in]1,+\infty[$ e $s \in \mathbb{R}$:

(6.1) $$u \longrightarrow (Au, \gamma_0 B_1 u, \ldots, \gamma_0 B_m u)$$

definisce un operatore lineare e continuo da $W_s^{\ell,p}(\Omega)$ in $W_s^{\ell-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} W_s^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)$ che indicheremo con $\mathscr{A}_{\ell,p,s}$.

TEOREMA 6.1. *Assegniamo un intero* $\ell \geq \sup\{2m, m_j\}$, $p \in]1,+\infty[$ *e supponiamo che siano verificate le ipotesi* $i_1) - i_7)$.

Qualunque siano $s,t \in R$, *se:*

(6.2) $$u \in W_{loc}^{\ell,p}(\bar{\Omega}) \cap L_t^p(\Omega) ,$$

(6.3) $$Au \in W_s^{\ell-2m,p}(\Omega) ,$$

(6.4) $$\gamma_0 B_j u \in W_s^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega) , \qquad j=1,\ldots,m,$$

allora si ha $u \in W_s^{\ell,p}(\Omega)$ *e:*

(6.5) $$\| u \|_{W_s^{\ell,p}(\Omega)} \leq c \, (\| Au \|_{W_s^{\ell-2m,p}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \| \gamma_0 B_j u \|_{W_s^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)} + \| u \|_{L_t^p(\Omega)}) ,$$

dove c *è una costante indipendente da* u.

Infatti, assegnato $x \in \Omega$

$$\hat{A} = \sum_{|\mu| \leq 2m} \rho^{2m-|\mu|}(x)\, a^*_\mu(y)\, D^\mu ,$$

$$\hat{B}_{j\mu} = \sum_{|\mu| \leq m_j} \rho^{2m-|\mu|}(x)\, b^*_{j\mu}(y)\, D^\mu , \qquad j = 1,\dots,m.$$

Poniamo inoltre per ogni $r \in \,]0,1[$:

$$I^*_r(x) = \left\{ y \in I^*(x) \,/\, |y - x| < r \right\} ,$$

$$\Gamma^*_r(x) = \left\{ y \in \Gamma^*(x) \,|\, |y - x| < r \right\}$$

ed assegniamo una funzione $u \in W^{\ell,p}_{loc}(\bar{\Omega})$.

Cominciamo col dimostrare che sussiste la limitazione:

$$(6.6) \quad \|u^*\|_{W^{\ell,p}(I^*_{1/2}(x),\rho(x))} \leq c_0(\rho^{2m}(x) \quad \|(Au)^*\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*(x),\rho(x))}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \rho^{m_j}(x) \,\|(\gamma_0\, B_j u)^*\|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))} + \|u^*\|_{L^p(I^*(x))} ,$$

dove c_0 è una costante indipendente da u e da x.

Assegniamo $r,r' \in]0,1[$, con $r < r'$, e una funzione $\psi \in \mathscr{D}(R^n)$ tale che:

$$\psi(y) = 1 \quad \text{per} \quad |y| \leq r, \quad \text{supp}\,\psi \subset \left\{ y \in R^n \middle| \ |y| \leq r' \right\},$$

$$\sup |\partial^\alpha \psi| \leq c_\alpha \ (r'-r)^{-|\alpha|},$$

dove c_α è una costante indipendente da r e da r', e indichiamo con $\zeta = \zeta_x$ la funzione $y \to \psi(y-x)$.

Nel seguito di questa dimostrazione indicheremo con $c_1,\dots,c_8$ delle costanti positive indipendenti da u,x,r ed r'.

Le stesse indicazioni date in [2] per ottenere la dimostrazione del teorema 4.1 di tale lavoro, ci consentono evidentemente di dedurre dai risultati dei nn. 2 e 3 di [2] applicati con $q = \rho(x)$ la limitazione:

$$(6.7) \qquad \|\zeta u^*\|_{W^{\ell,p}(I^*(x),\rho(x))} \leq c_1 (\| \hat{A}(\zeta u^*)\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*(x),\rho(x))}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \| \hat{B}_j(\zeta u^*)|_{\Gamma^*(x)} \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))}$$

$$+ \|\zeta u^*\|_{W^{\ell-1,p}(I^*(x),\rho(x))}) .$$

Osserviamo che:

$$\hat{A}(\varsigma u^*) = \varsigma \hat{A}u^* + \sum_{0<|\mu|\leq 2m} \sum_{\alpha<\mu} \binom{\mu}{\alpha} \rho^{2m-|\mu|}(x)\, a^*_\mu(y)\, D^{\mu-\alpha}\varsigma D^\alpha u^*$$

e che:

$$\hat{A}\ u^* = \rho^{2m}(x)(A\ u)^* \quad .$$

Ne segue:

$$\|\hat{A}(\varsigma u^*)\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*(x),\rho(x))} \leq c_2(r'-r)^{-\ell}(\rho^{2m}(x)\,\|(Au)^*\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))}$$

$$+ \sum_{0<|\mu|\leq 2m} \sum_{\alpha<\mu} \rho^{2m-|\mu|}(x)\,\|D^\alpha u^*\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))}) ,$$

e quindi per il lemma 1.2 si ha:

$$\|\hat{A}(\varsigma u^*)\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*(x),\rho(x))} \leq c_2(r'-r)^{-\ell}(\rho^{2m}(x)\ \|(Au)^*\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))} \tag{6.8}$$

$$+ \sum_{0<|\mu|\leq 2m} \sum_{\alpha<\mu} \rho^{-(|\mu|-|\alpha|-1)}(x)\ \|u^*\|_{W^{\ell-1,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))}).$$

Analogamente si ha:

$$\| \hat{B}_j(\zeta u^*)|_{\Gamma^*(x)} \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))}$$

$$\le c_4(\| (\zeta\hat{B}_j u^*)|_{\Gamma^*(x)} \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))}$$

$$+ \sum_{0<|\mu|\le m_j} \sum_{\alpha<\mu} \rho^{m_j-|\mu|}(x) \| (D^{\mu-\alpha}\zeta D^\alpha u^*)|_{\Gamma^*(x)} \|_{W^{\ell-m_j/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))}$$

$$\le c_5(r'-r)^{-1/p}(\rho^{m_j}(x)\|(\gamma_0 B_j u)^* \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*_{r'}(x),\rho(x))}$$

$$+ \sum_{0<|\mu|\le m_j} \sum_{\alpha<\mu} \rho^{m_j-|\mu|}(x) \| D^\alpha u^* \|_{W^{\ell-m_j,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))}) ,$$

da cui per il lemma 1.2 segue:

$$\| \hat{B}_j(\zeta u)^*|_{\Gamma^*(x)} \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))} \tag{6.9}$$

$$\le c_6(r'-r)^{-\ell}(\rho^{m_j}(x) \| (\gamma_0 B_j u)^* \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*_{r'}(x),\rho(x))}$$

$$+ \sum_{0<|\mu|\le m_j} \sum_{\alpha<\mu} \rho^{-(|\mu|-|\alpha|-1)} \| u^* \|_{W^{\ell-1,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))}).$$

D'altra parte in conseguenza del lemma 1.3 si ha la limitazione:

$$(6.10) \qquad \|u^*\|_{W^{\ell-1,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))} \le$$

$$\le c_7 \|u^*\|^{1-1/\ell}_{W^{\ell,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))} \cdot \|u^*\|^{1/\ell}_{L^p(I^*_{r'}(x))} .$$

Dalle (6.7), (6.8),(6.9) e (6.10) si deduce la limitazione:

$$(6.11) \qquad (r'-r)^{\ell} \|u^*\|_{W^{\ell,p}(I^*_r(x),\rho(x))} \le c_8 (\rho^{2m}(x) \|(Au)^*\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))}$$

$$+ \rho^{m_j}(x) \|(\gamma_0 B_j u)^*\|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*_{r'}(x),\rho(x))}$$
$$+ \|u^*\|^{1-1/\ell}_{W^{\ell,p}(I^*_{r'}(x),\rho(x))} \|u^*\|^{1/\ell}_{L^p(I^*_{r'}(x))}).$$

Dalla (6.11), per un noto lemma di crescenza di C. Miranda (cfr. il lemma 3.1 di [6]), si deduce la (6.6).

Dalla (6.6) segue che si ha per ogni $a \in \mathbb{R}$:

$$\rho^{a-\ell}(x) \|u^*\|_{W^{\ell,p}(I^*_{1/2}(x),\rho(x))} \le c_0 (\rho^{a-\ell+2m}(x) \|(Au)^*\|_{W^{\ell-2m,p}(I^*(x),\rho(x))}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \rho^{\alpha-\ell+m_j}(x) \, \| (B_j u)^* |_{\Gamma^*(x)} \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\Gamma^*(x),\rho(x))}$$

$$+ \rho^{\alpha-\ell}(x) \, \| u^* \|_{L^p(I^*(x))}) .$$

Da quest'ultima relazione, dai lemmi 4.1, 4.2 e dalla definizione degli spazi $W_s^{r-1/p,p}(\partial\Omega)$ si deduce che per ogni funzione u tale che:

$$u \in W_{loc}^{\ell,p}(\bar{\Omega}) \cap L^p_{\alpha-\ell}(\Omega) \ ,$$

$$A \ u \in W_\alpha^{\ell-2m,p}(\Omega) \ ,$$

$$\gamma_0 \ B_j u \in W_\alpha^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega) \quad , \quad j = 1,\dots,m,$$

si ha che $u \in W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)$ e:

$$\text{(6.12)} \qquad \| u \|_{W_\alpha^{\ell,p}(\Omega)} \leq c \, (\| Au \|_{W_\alpha^{\ell-2m,p}(\Omega)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \| \gamma_0 \ B_j u \|_{W^{\ell-m_j-1/p,p}(\partial\Omega)} + \| u \|_{L^p_{\alpha-\ell}(\Omega)}),$$

dove c è una costante indipendente da u.

Consideriamo ora una funzione u soddisfacente le (6.2), (6.3) e (6.4) .

Se $t \geq s - \ell$, risulta:

$$L^p_t(\Omega) \hookrightarrow L^p_{s-\ell}(\Omega)$$

e quindi, applicando quanto sopra stabilito con $\alpha = s$, si deduce la tesi.

Se $t < s - \ell$, denotato con k l'intero positivo tale che:

$$\frac{s-t}{\ell} - 1 \leq k < \frac{s-t}{\ell} ,$$

risulta per $i = 1,\dots,k$:

$$W^{\ell-2m,p}_s(\Omega) \hookrightarrow W^{\ell-2m,p}_{t+i}(\Omega), \quad W^{\ell-m_j-1/p,p}_s(\partial\Omega) \hookrightarrow W^{\ell-m_j-1/p,p}_{t+i\ell}(\partial\Omega)$$

e quindi si ha successivamente che $u \in W^{\ell,p}_{t+\ell}(\Omega),\dots,u \in W^{\ell,p}_{t+k\ell}(\Omega)$ e che sussiste la (6.12) per $\alpha = t+i\ell$ $(i = 1,\dots,k)$.

Siccome inoltre:

$$W^{\ell,p}_{t+k\ell}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{s-\ell}(\Omega) ,$$

si ha che $u \in W^{\ell,p}_s(\Omega)$ e che sussiste la (6.12) per $\alpha = s$.

Dalle precedenti considerazioni si deduce in modo ovvio la tesi.

COROLLARIO 6.1. *Assegniamo un intero* $\ell \geq \sup\{2m, m_j\}$, $p \in]1, +\infty[$, $s \in R$ *e supponiamo verificate le* (4.5),(4.6) *e le ipotesi* $i_1) - i_7)$.

Allora l'operatore $\mathcal{A}_{\ell,p,s}$, definito in $W^{\ell,p}_s(\Omega)$ *dalla* (6.1), *ha nucleo di dimensione finita ed immagine chiusa.*

La tesi consegue da un ben noto risultato osservando che, fissato un numero reale $t<s$, in conseguenza del teorema 6.1 esiste una costante c tale che sussiste la (6.5) per ogni $u\in W_s^{\ell,p}(\Omega)$ e che, in conseguenza del lemma 4.4, risulta:

$$W_s^{\ell,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_t^p(\Omega) \ .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R.A.ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.

[2] A.ALVINO - G.TROMBETTI, *Problemi ellittici dipendenti da un parametro in* L^p, Ric. di Mat., 26 (1977), 335-348.

[3] V.BENCI - D.FORTUNATO, *Some compact embedding theorems for weighted Sobolev spaces*, Boll. U.M.I., (5) 13-B (1976), 832-843.

[4] D.FORTUNATO, *Una limitazione a priori in spazi di Sobolev con peso per i problemi ellittici nel semispazio*, Ric. di Mat., 25 (1976), 137-161.

[5] S.MATARASSO - M.TROISI, *Teoremi di compattezza in domini non limitati*, Boll. U.M.I., (5) 18-B(1981), 517-537.

[6] C.MIRANDA, *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, Ann. di Mat., 59 (1962), 189-212.

[7] R.SCHIANCHI, *Spazi di Sobolev dissimmetrici e con peso*, Rend. Acc. Sc.Fis.Mat. di Napoli, (4), 42 (1975).

[8] R.SCHIANCHI, *Problemi quasi ellittici nel semispazio*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, II, 29 (1980), 103-138.

[9] M.TROISI, *Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso*, Ric. di Mat., 18 (1969), 49-74.

Lavoro pervenuto alla redazione il 9 Marzo 1981
ed accettato per la pubblicazione il 22 Luglio 1981
su parere favorevole di A.Avantaggiati e S.Campanato