Note di Matematica Vol. II, 101-130 (1982)

TRASFORMAZIONI OLOMORFICAMENTE PROIETTIVE SU UNA VARIETA' MUNITA DI UNA PSEUDOCONNESSIONE LINEARE CHE CONSERVA UNA STRUTTURA QUASI COMPLESSA.

Luigia DI TERLIZZI - Anna Maria PASTORE (*)

Summary. *Given a manifold with an almost complex structure* $\mathcal{T}$, *we study the holomorphically projective trasformations of the pseudo-connections which preserve the structure. Moreover, we caracterize the vector fields which preserve the holomorphically planar curves, with respect to a half-symmetric pseudoconnection, and we prove that they form a Lie algebra.*

§ 1. INTRODUZIONE E PREMESSE.

In questa nota, assegnata una varietà M reale, C^{∞}-differenziabile, di dimensione 2n, munita di una struttura quasi complessa $\mathcal{T}$, si introduce la nozione di curva olomorficamente piana rispetto ad una pseudoconnessione ∇ che conserva la struttura, e si studiano le pseu-

(*) Istituto di Geometria - Università degli Studi - BARI -

doconnessioni half-symmetric, proiettivamente correlate. Infine si caratterizzano i campi vettoriali su M che conservano le curve olomorficamente piane, rispetto ad una pseudoconnessione, e si prova che essi costituiscono un'algebra di Lie.

Nel seguito si indicheranno con $\mathscr{F}$ l'algebra delle funzioni C^∞-differenziabili su M, con $\mathfrak{T}^r_s$, $(r,s) \in (N^2)^*$, l' $\mathscr{F}$-modulo dei campi tensoriali C^∞-differenziabili di specie (r,s), con Λ^r l' $\mathscr{F}$-modulo delle r-forme C^∞-differenziabili su M, con h il campo tensoriale di specie (1,1) canonicamente definito da $\mathscr{T}$ e con K il campo tensoriale di specie (1,1) di Kronecker. Infine si porrà $\mathfrak{T}^0_0 = \mathscr{F}$, $\mathscr{X} = \mathfrak{T}^1_0$, $\mathfrak{T} = \bigoplus_{(r,s)\in N^2} \mathfrak{T}^r_s$, e si ometterà sistematicamente la locuzione C^∞-differenziabile.

Sarà utile considerare, nell' $\mathscr{F}$-modulo $\mathfrak{T}^1_q$, $q \geq 1$, dei campi tensoriali di specie (1,q) identificati con le applicazioni $\mathscr{F}$-q-lineari di $\mathscr{X}^q$ in $\mathscr{X}$, i seguenti operatori:

1) per ogni $k \in \{1,\dots,q\}$, $\mathscr{P}_k$ è l'automorfismo di $\mathfrak{T}^1_q$ definito da:

$$\mathscr{P}_k(\pi)(X_1\dots,X_k,\dots,X_q) = \pi(X_1,\dots,h(X_k),\dots,X_q)$$

per ogni $\pi \in \mathfrak{T}^1_q$ e per ogni $(X_1,\dots,X_q) \in \mathscr{X}^q$.

2) $\mathscr{C}$ è l'automorfismo di $\mathfrak{T}^1_q$ definito da:

$$\mathscr{C}(\pi)(X_1,\dots,X_q) = \pi(h(X_1),\dots,h(X_q))$$

per ogni $\pi \in \mathfrak{T}^1_q$ e per ogni $(X_1,\dots,X_q) \in \mathscr{X}^q$.

Evidentemente gli operatori $\mathcal{M} = \sum_{k=1}^{q} \mathcal{P}_k$ e $\mathcal{C}$ sono estensioni degli operatori $\mathcal{M}$ e $\mathcal{C}$ definiti nel § 1 di [1].

E' immediato, inoltre, verificare le seguenti proprietà, per ogni $k \in \{1,\dots,q\}$:

$$(1.1) \qquad \mathcal{T} \circ \mathcal{P}_k(\pi) = \mathcal{P}_k(\mathcal{T} \circ \pi); \qquad \mathcal{P}_k^2 = -I.$$

Le notazioni $\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, C indicheranno rispettivamente le operazioni di alternazione, simmetrizzazione e contrazione relative agli indici di volta in volta indicati.

Infine si denoterà con T il campo tensoriale di Nijenhuis relativo alla coppia (h,h), cioé la torsione della struttura $\mathcal{T}$, [4], [7].

Si ricorda che una pseudoconnessione lineare su M, indicata con ∇, è un'applicazione $\mathcal{F}$-lineare di $\mathfrak{X}$ nell' $\mathcal{F}$-modulo delle derivazioni di $\mathfrak{T}$. Resta pertanto canonicamente definita un'applicazione, $\mathcal{F}$-lineare, di $\mathfrak{X}$ nell'algebra delle derivazioni di $\mathcal{F}$ e quindi un campo tensoriale A $\in \mathfrak{T}_1^1$, che si dice il campo fondamentale di ∇.

In particolare se $\dot{A} = K$, ∇ è una connessione lineare.

La forma di torsione di ∇ è la 2-forma vettoriale Σ , definita, per ogni $(X,Y) \in \mathfrak{X}^2$, da:

$$\Sigma(X,Y) = \frac{1}{2}\,(\nabla_X Y - \nabla_Y X - L_A(X,Y))$$

ove
$$L_A(X,Y) = [AX,Y] + [X,AY] - A\,[X,Y].$$

Per le proprietà delle pseudoconnessioni si confronti [2], [4].

In particolare, se $\overset{L}{\nabla}$ è una connessione lineare, e se $A \in \mathfrak{T}^1_1$, si dice pseudoconnessione lineare di campo fondamentale A, canonicamente associata a $\overset{L}{\nabla}$, l'applicazione $\overset{\sim}{\nabla} = \overset{L}{\nabla} \circ A$. Denotate con $\overset{\sim}{\Sigma}$ e $\overset{L}{\Sigma}$ le forme di torsione di $\overset{\sim}{\nabla}$ e $\overset{L}{\nabla}$ rispettivamente, risulta:

$$(1.2) \qquad \overset{\sim}{\Sigma} = \mathscr{M}_A \overset{L}{\Sigma} - A \circ \overset{L}{\Sigma} + \mathscr{A}(\overset{L}{\nabla} A)$$

ove $\mathscr{M}_A$ è definito come l'operatore $\mathscr{M}$ con l'uso del campo A in luogo di h. Infine se ∇ e $\bar{\nabla}$ sono due pseudoconnessioni di campo fondamentale $A \in \mathfrak{T}^1_1$, rispetto alle quali la struttura $\mathscr{T}$ è parallela (cioé $\nabla h = \bar{\nabla} h = 0$), posto per ogni $(X,Y) \in \mathscr{X}^2$

$$(1.3) \qquad \pi(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y ,$$

per la prop. 1.2 di [4], esiste una 1-forma di differenziale tensoriale $\bar{\rho}$ di specie (1,1) tale che, in ogni dominio coordinato U, si abbia:

$$\bar{\pi}_U = \frac{1}{2} (\bar{\rho}_U - h_U \bar{\rho}_U h_U)$$

ove con $\bar{\pi}$ si è indicata la 1-forma differenziale tensoriale di specie (1,1) associata al campo tensoriale $\pi \in \mathfrak{T}^1_2$ definito in (1.3).

Ne segue che, indicato con ρ il campo tensoriale di specie (1,2) associato alla 1-forma $\bar{\rho}$, risulta:

$$(1.4) \qquad \pi = \frac{1}{2} (\rho - \mathscr{T} \circ \mathscr{P}_2(\rho)).$$

§2. PSEUDOCONNESSIONI HALF-SYMMETRIC E SEMISIMMETRICHE SU UNA VARIETA' QUASI COMPLESSA.

Def. 2.1. Una pseudoconnessione ∇, di campo fondamentale A, si dice *half-symmetric* se $\nabla h = 0$ e la sua forma di torsione Σ verifica l'uguaglianza:

$$\Sigma - \mathscr{C}\Sigma - \mathscr{T} \circ \mathscr{M}\Sigma = 0. \tag{2.1}$$

Oss. 2.1. La (2.1) equivale, per la prop. 2.3 di [4], alla:

$$\mathscr{T} \circ \mathscr{M}\Sigma = 2(A \circ T + \bar{S}$$

con $\bar{S} = \frac{1}{8}\mathscr{M}S$, ed S campo tensoriale di Nijenhuis relativo alla coppia (A,h).

PROP. 2.1. *Siano* $\bar{\nabla}$ *una pseudoconnessione di campo fondamentale* A , *tale che* $\bar{\nabla}h = 0$ *e* $\bar{\Sigma}$ *la forma di torsione di* $\bar{\nabla}$. *La pseudoconnessione* ∇, *di campo fondamentale* A , *definita ponendo, per ogni* $(X,Y) \in \mathscr{X}^2$:

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \frac{1}{4}(\bar{\Sigma} - \mathscr{C}\bar{\Sigma} - \mathscr{T} \circ \mathscr{M}\bar{\Sigma})(X,Y)$$

è half-symmetric.

L'asserto si stabilisce con una verifica diretta. Si ricorda, infine, prop. 2.1 di [4], che per ogni $A \in \mathfrak{T}^1_1$, esistono sempre, su una varietà quasi complessa, pseudoconnessioni di campo fondamentale A, tali che $\bar{\nabla}h = 0$.

PROP. 2.2. *Siano* $\overset{L}{\nabla}$ *una connessione lineare, half-symmetric, ed*

$A \in \mathfrak{T}_1^1$ *tale che* $h \circ A = A \circ h$. *La pseudoconnessione* $\overset{\sim}{\nabla}$, *di campo fondamentale* A, *canonicamente associata a* $\overset{L}{\nabla}$ *è half-symmetric se e solo se risulta:*

$$\mathscr{A}(\overset{L}{\nabla}A) - \mathscr{C}(\mathscr{A}(\overset{L}{\nabla}A)) - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}(\mathscr{A}(\overset{L}{\nabla}A)) = 0.$$

Si noti che $\overset{L}{\nabla}h = 0$ implica $\overset{\sim}{\nabla}h = 0$ e che nell'ipotesi $h \circ A = A \circ h$ sussistono per ogni 2-forma Ω a valori vettoriali, le seguenti proprietà:

$$(\mathscr{M}_A \circ \mathscr{C})(\Omega) = (\mathscr{C} \circ \mathscr{M}_A)(\Omega)$$

$$(\mathscr{M} \circ \mathscr{M}_A)(\Omega) = (\mathscr{M}_A \circ \mathscr{M})(\Omega)$$

Risulta, allora, con ovvio significato dei simboli:

$$\overset{\sim}{\Sigma} - \mathscr{C}\overset{\sim}{\Sigma} - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\overset{\sim}{\Sigma} = \mathscr{M}_A(\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{C}\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\overset{L}{\Sigma}) - A \circ (\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{C}\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\overset{L}{\Sigma}) +$$

$$+ \mathscr{A}(\overset{L}{\nabla}A) - \mathscr{C}(\mathscr{A}(\overset{L}{\nabla}A)) - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}(\mathscr{A}(\overset{L}{\nabla}A)).$$

da cui segue l'asserto.

PROP. 2.3. *Siano* $\overset{L}{\nabla}$ *una connessione lineare e* $\overset{\sim}{\nabla}^h$ *la pseudoconnessione di campo fondamentale* h *canonicamente associata a* $\overset{L}{\nabla}$. $\overset{L}{\nabla}$ *è half-symmetric se e soltanto se lo è* $\overset{\sim}{\nabla}^h$.

Si osservi che:

$$\overset{\sim}{\nabla}^h h = 0 \iff \overset{L}{\nabla}h = 0$$

ed inoltre risulta:

$$\mathscr{T}\circ(\overset{\sim}{\Sigma}^h - \mathscr{C}\overset{\sim}{\Sigma}^h - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}(\overset{\sim}{\Sigma}^h)) = -(\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{C}\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\overset{L}{\Sigma}).$$

Essendo $\mathcal{T}$ di rango massimo, segue l'asserto.

Def. 2.2. Sia ∇ una pseudoconnessione di campo fondamentale A. Si dice *1-forma di Einstein* relativa a ∇, la 1-forma $\Phi = C_2^1(\Sigma)$, ove Σ è la forma di torsione di ∇ .

PROP. 2.4. *Siano* $\overset{L}{\nabla}$ *una connessione lineare e* $\overset{\sim}{\nabla}^A$ *la pseudoconnessione di campo fondamentale* $A \in \mathfrak{T}_1^1$ *canonicamente associata a* $\overset{L}{\nabla}$ *. Risulta allora:*

$$\overset{\sim}{\Phi}^A = A(\Phi) + C_2^1(\mathscr{A}(\overset{L}{\nabla}A)), \tag{2.2}$$

ove Φ *e* $\overset{\sim}{\Phi}^A$ *sono le forme di Einstein relative a* $\overset{L}{\nabla}$ *e* $\overset{\sim}{\nabla}^A$.

L'asserto segue dalla (1.2).

Def. 2.3. Una pseudoconnessione ∇ di campo fondamentale $A \in \mathfrak{T}_1^1$, si dice *semisimmetrica* se $\nabla h = 0$ e la sua forma di torsione Σ verifica la condizione:

$$\Sigma = \frac{1}{n}\mathscr{A}(\Phi \otimes K + h(\Phi) \otimes h) \tag{2.3}$$

ove Φ è la forma di Einstein relativa a ∇.

Oss. 2.2. Si verifica facilmente che la forma di torsione Σ di una pseudoconnessione di campo fondamentale A, semisimmetrica, verifica le relazioni:

$$\Sigma - \mathscr{C}\,\Sigma = 0; \qquad \mathscr{M}\,\Sigma = 0. \tag{2.4}$$

PROP. 2.5. *Ogni pseudoconnessione semisimmetrica è half-symmetric.*

L'asserto segue dalle (2.1) e (2.4).

PROP. 2.6. *Se* ∇ *è una pseudoconnessione di campo fondamentale* $A \in \mathfrak{T}_1^1$, *semisimmetrica, risulta:* $A \circ T + \bar{S} = 0$.

E' noto che, [4], poiché $\nabla h = 0$, la forma di torsione Σ di ∇ verifica la relazione:

$$(2.5) \qquad \Sigma - \mathscr{C}\Sigma + \mathscr{T} \circ \mathscr{M}\Sigma = 4(A \circ T + \bar{S}).$$

Dalla semisimmetria di ∇ , per la (2.4), segue l'asserto.

COROLLARIO 2.1. *Se esiste una pseudoconnessione di campo fondamentale* h, *semisimmetrica, risulta* $T = 0$

In effetti, per $A = h$, si ha:

$$(2.6) \qquad A \circ T + \bar{S} = \mathscr{T} \circ T + \frac{1}{8} \mathscr{M} T$$

e poiché $\mathscr{M} T = -2\mathscr{T} \circ T$, dalla proposizione 2.6 segue l'asserto.

PROP. 2.7. *Siano* $\overset{L}{\nabla}$ *una connessione lineare e* $\overset{\sim h}{\nabla}$ *la pseudoconnessione di campo fondamentale* h *canonicamente associata a* $\overset{L}{\nabla}$. *Si ha:*

1) *se* $\overset{L}{\nabla}$ *è semisimmetrica, allora* $\overset{\sim h}{\nabla}$ *è semisimmetrica;*

2) *se* $\overset{\sim h}{\nabla}$ *è semisimmetrica e* $T = 0$, *allora* $\overset{L}{\nabla}$ *è semisimmetrica.*

Per provare la 1), si osservi che, poiché $\overset{L}{\nabla} h = 0$, risulta $\overset{\sim h}{\nabla} h=0$; pertanto dalla (2.2) segue, per le rispettive forme di Einstein:

$$\overset{\sim h}{\Phi} = h(\Phi)$$

e dalla (1.2),

$$\overset{\sim h}{\Sigma} = \mathscr{M}\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{T}\circ\overset{L}{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathscr{A}(h(\Phi)\boxtimes K - \Phi\boxtimes h) = \frac{1}{n}\mathscr{A}\,\overset{\sim h}{\Phi}\boxtimes K + h(\overset{\sim h}{\Phi})\boxtimes h).$$

Per la 2), si noti che da $\overset{\sim h}{\nabla}h = 0$ segue $\overset{L}{\nabla}h = 0$ e dalla $\overset{\sim h}{\Sigma} = \mathscr{M}\Sigma - \mathscr{T}\circ\overset{L}{\Sigma}$ si ottiene:

$$\mathscr{T}\circ\overset{\sim h}{\Sigma} = \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\overset{L}{\Sigma} + \overset{L}{\Sigma} \tag{2.7}$$

Dalla ipotesi $T = 0$ e da $\overset{L}{\nabla}h = 0$, per le (2.5),(2.6), risulta:

$$\overset{L}{\Sigma} - \mathscr{C}\overset{L}{\Sigma} + \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\overset{L}{\Sigma} = 0 \tag{2.8}$$

e quindi, dalle (2.7),(2.8)

$$\mathscr{C}\overset{L}{\Sigma} = \mathscr{T}\circ\overset{\sim h}{\Sigma} \quad \text{ovvero} \quad \overset{L}{\Sigma} = \mathscr{T}\circ\mathscr{C}\overset{\sim h}{\Sigma}.$$

Poiché $\overset{\sim h}{\nabla}$ è semisimmetrica, dalla precedente relazione si ottiene:

$$\overset{L}{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathscr{A}(\Phi\boxtimes K + h(\Phi)\boxtimes h).$$

Oss. 2.3. E' noto, [10], che affinché una varietà quasi complessa ammetta una connessione lineare $\overset{L}{\nabla}$ semisimmetrica occorre e basta che risulti $T = 0$. Dai risultati precedenti consegue che $T = 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinché esista una pseudoconnessione semisimmetrica di campo fondamentale h.

§ 3. CURVE OLOMORFICAMENTE PIANE RISPETTO AD UNA PSEUDOCONNESSIONE.

In quanto segue ogni curva γ su M sarà supposta di classe C^∞ e, per semplicità, con immagine contenuta in un dominio coordinato. Si ricorda la seguente definizione, [2],[3].

Def. 3.1. Siano $\gamma : J \to M$, J intervallo di $\mathbb{R}$, una curva su M, e ∇ una pseudoconnessione di campo fondamentale $A \in \mathcal{I}^1_1$. Si dice che γ è *ammissibile* per il parallelismo rispetto a ∇, se esiste un campo vettoriale $X(t) = X_{\gamma(t)}$, lungo γ, tale che:

$$(3.1) \qquad \forall t \in J \qquad A_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t).$$

Fissato un tale campo X(t), si dice anche che γ è X-*ammissibile* per il parallelismo.

Def. 3.2. Una curva $\gamma : J \to M$, X-ammissibile per il parallelismo rispetto ad una pseudoconnessione ∇, di campo fondamentale A, e tale che $\nabla h = 0$, si dice (h,X)-*olomorficamente piana*, rispetto a ∇, se esistono due funzioni f,g differenziabili lungo γ tali che risulti:

$$(3.2) \qquad \forall t \in J \qquad (\nabla_X X)_{\gamma(t)} = f(t)X(t) + g(t)(hX)(t).$$

ove X è un campo vettoriale su M che estende $(X(t))_{t\in J}$, ed inoltre $X(t) = X_{\gamma(t)}$, $f(t) = f(\gamma(t))$, $g(t) = g(\gamma(t))$.

Si dice che γ è *olomorficamente piana* rispetto a ∇ se esiste un campo di vettori X(t) lungo γ tale che γ sia X-ammissibile per il parallelismo ed (h,X)-olomorficamente piana.

Oss. 3.1. Se f e g sono nulle, la curva γ è una X-geodetica per ∇ e viceversa. Dalla proposizione 5, § 2 di [3], segue che per ogni $p \in M$, per ogni $X_p \in T_p(M)$, esiste almeno una curva $\gamma : J=[-\varepsilon,\varepsilon]\to M$, $\varepsilon > 0$, (h,X)-olomorficamente piana rispetto a ∇ e tale che $\gamma(0)=p$, $X(0) = X_p$.

Oss. 3.2. Se U è un dominio coordinato di M, tale che $\gamma(J)\subset U$, la (3.2) si scrive:

$$\frac{dX^i(t)}{dt} + \Gamma^i_{rj}(t)X^r(t)X^j(t)=f(t)X^i(t) + g(t)h^i_r(t)X^r(t). \tag{3.3}$$

Infatti, denotato con $(e_i)_{1\leq i\leq 2n}$ il riferimento naturale associato ad U, posto

$$X_{|U} = X^i e_i \ , \quad A_{|U} = A^i_j e_i \otimes e^j, \ \nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k, \text{ risulta, per la (3.1):}$$

$$(\nabla_X X)_{|U} = X^i X^j \ \Gamma^k_{ij} e_k + X^i A^r_i (\partial_r X^k) e_k = X^i X^j \Gamma^k_{ij} e_k + \frac{dx^r(\gamma(t))}{dt} \ \frac{\partial X^k}{\partial x^r} e_k =$$

$$= (X^i X^j \ \Gamma^k_{ij}) + \frac{dX^k}{dt} e_k.$$

Def. 3.3. Sia $\gamma : J \to M$ una curva X-ammissibile per il parallelismo rispetto ad una pseudoconnessione ∇ di campo fondamentale A. Per ogni $t \in J$, si dice *sezione X-olomorfa* in $\gamma(t)$ e si indica con $(HS)^X_{\gamma(t)}$, il sottospazio 2-dimensionale di $T_{\gamma(t)}(M)$ generato da

$\{X(t), h_{\gamma(t)}X(t)\}$.

E' evidente che $(HS)^X_\gamma = ((HS)^X_{\gamma(t)})_{t\in J}$ costituisce una distribuzione differenziale di dimensione 2, lungo γ.

Def. 3.4. Sia $\gamma : J \to M$ una curva X-ammissibile per il parallelismo rispetto ad una pseudoconnessione ∇, di campo fondamentale A, tale che $\nabla h=0$. Si dice che la distribuzione $(HS)^X_\gamma$ è X-*parallela* lungo γ rispetto a ∇, se per ogni $(Y(t))_{t\in J} \in \prod_{t\in J}(HS)^X_{\gamma(t)}$ risulta, per ogni $t\in J$, $(\nabla_X Y)_{\gamma(t)} \in (HS)^X_{\gamma(t)}$, ove $Y \in \mathcal{X}$ estende $(Y(t))_{t\in J}$.

PROP. 3.1. *Siano* ∇ *una pseudoconnessione di campo fondamentale* A, *tale che* $\nabla h = 0$ *e* γ *una curva su* M, X-*ammissibile per il parallelismo.* γ *è* (h,X)-*olomorficamente piana rispetto a* ∇, *se e soltanto se la distribuzione delle sezioni* X-*olomorfe lungo* γ *è* X-*parallela lungo* γ, *rispetto a* ∇.

§ 4. PSEUDOCONNESSIONI h-PROIETTIVAMENTE CORRELATE.

Def. 4.1. Due pseudoconnessioni ∇ e $\bar{\nabla}$ che conservano la struttura $\mathcal{T}$ si dicono h-*proiettivamente correlate* se, rispetto ad esse, sono olomorficamente piane le medesime curve.

Oss. 4.1. Se ∇ e $\bar{\nabla}$ sono due pseudoconnessioni di campi fondamentali A e B rispettivamente, h-proiettivamente correlate, esse devono avere le stesse curve X-ammissibili per il parallelismo, e quindi deve risultare A = B, [5].

PROP. 4.1. *Siano* ∇ *e* $\bar{\nabla}$ *due pseudoconnessioni di campi fondamentali* A *e* B *rispettivamente, half-symmetric.* ∇ *e* $\bar{\nabla}$ *sono* h-*proiettivamente correlate se e solo se risulta:*

1) $A = B$,

2) *posto, per ogni* $(X,Y) \in \mathscr{X}^2$, $\pi(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, *esistono due,* 1-*forme* ω *ed* $\bar{\omega}$ *tali che:*

$$\pi = \mathscr{S}(\omega \otimes K) - \mathscr{S}(h(\omega) \otimes h) + \bar{\omega} \otimes K + h(\bar{\omega}) \otimes h. \tag{4.1}$$

Se ∇ e $\bar{\nabla}$ sono h-proiettivamente correlate, si ha, per l'osservazione 4.1, $A = B$. Inoltre, per ogni $p \in M$, per ogni $X_p \in T_p(M)$, esiste una curva $\gamma : [-\varepsilon,\varepsilon] \to M$, (h,X)-olomorficamente piana rispetto a ∇ e, quindi, rispetto a $\bar{\nabla}$, tale che $\gamma(0) = p$ ed $X(0) = X_p$. Risulta, allora, per ogni $t \in [-\varepsilon,\varepsilon]$:

$$(\pi(X,X))_{\gamma(t)} = a(\gamma(t),X_p)X(t) + b(\gamma(t),X_p)(hX)(t).$$

In particolare per $t = 0$, si ha:

$$\pi_p(X_p,X_p) = a(p,X_p)X_p + b(p,X_p)h_p(X_p).$$

Tenendo presente che per ogni $X_p \in T_p(M)$, $h_p(X_p)$ ed X_p sono linearmente indipendenti, si verifica che le due applicazioni

$$\phi_p : T_p(M) \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \psi_p : T_p(M) \to \mathbb{R}$$

definite rispettivamente da:

$$\forall X_p \in T_p(M) \qquad \phi_p(X_p) = a(p,X_p) \qquad \psi_p(X_p) = b(p,X_p),$$

sono lineari. Inoltre, $\phi = (\phi_p)_{p\in M}$ e $\psi = (\psi_p)_{p\in M}$ sono due 1-forme differenziabili su M.

Risulta, quindi, per ogni $X \in \mathscr{X}$:

$$\pi(X,X) = (\phi \boxtimes K+\psi\boxtimes h)(X,X)$$

Segue che:

$$(4.2) \qquad \mathscr{S}(\pi) = \mathscr{S}(\phi \boxtimes K) + \mathscr{S}(\psi \boxtimes h)$$

Poiché $\bar{\nabla}$ e ∇ sono half-symmetric, e $\mathscr{A}(\pi)=\bar{\Sigma}-\Sigma$ ove $\bar{\Sigma}$ e Σ sono le rispettive forme di torsione di $\bar{\nabla}$ e ∇, si ha, dalla (2.1):

$$(4.3) \qquad \mathscr{A}(\pi) - \mathscr{C}(\mathscr{A}(\pi)) - \mathscr{T}\circ\mathscr{M}(\mathscr{A}(\pi)) = 0.$$

Inoltre si ha, per la (2.5)

$$\bar{\Sigma} - \mathscr{C}\bar{\Sigma} + \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\,\bar{\Sigma} = 4(A \circ T + \bar{S}) = \Sigma - \mathscr{C}\Sigma + \mathscr{T}\circ\mathscr{M}\Sigma$$

da cui:

$$(4.4) \qquad \mathscr{A}(\pi) - \mathscr{C}(\mathscr{A}(\pi) + \mathscr{T}\circ\mathscr{M}(\mathscr{A}(\pi)) = 0.$$

Dalle (4.3) e (4.4) seguono le:

$$\mathscr{T}\circ\mathscr{M}(\mathscr{A}(\pi)) = 0 \ , \quad \mathscr{A}(\pi) = \mathscr{C}(\mathscr{A}(\pi)).$$

Inoltre dalla (1.4) si ha: $\pi + \mathscr{T} \circ \mathscr{P}_2(\pi) = 0$,

da cui, decomponendo π in parte simmetrica e parte alternante:

$$(4.5) \qquad \mathscr{A}(\pi) + \mathscr{T} \circ \mathscr{P}_2(\mathscr{A}(\pi)) = - \mathscr{S}(\pi) - \mathscr{T} \circ \mathscr{P}_2(\mathscr{S}(\pi)).$$

Poiché si verifica direttamente che:

$$\mathscr{A}(\mathscr{T} \circ \mathscr{P}_2(\mathscr{A}(\pi))) = \frac{1}{2} \mathscr{T} \circ \mathscr{M}(\mathscr{A}(\pi)) = 0$$

dalle (4.5) e (4.2) si ottiene:

$$\mathscr{A}(\pi) = - \mathscr{A}(\mathscr{T} \circ \mathscr{P}_2(\mathscr{S}(\pi))) = - \frac{1}{2} \mathscr{A}(K \boxtimes (\phi - h(\psi)) + h \boxtimes (\psi + h(\phi))),$$

e quindi la (4.1) ponendo:

$$\omega = \frac{1}{2} (\phi - h(\psi)) \qquad \text{ed} \qquad \bar{\omega} = \frac{1}{2} (\phi + h(\psi)).$$

La condizione sufficiente è di facile verifica.

COROLLARIO 4.1. *Siano* ∇ *e* $\bar{\nabla}$ *due pseudoconnessioni di campo fondamentale* A , *half-symmetric, ed* h-*proiettivamente correlate. Le* 1-*forme* ω *ed* $\bar{\omega}$ *della* (4.1) *sono definite da:*

$$(4.6) \qquad \omega = \frac{1}{n+1} C_1^1(\pi)$$

ovvero per ogni $Y \in \mathscr{X}$, $\omega(Y) = \dfrac{1}{n+1}$ traccia $(\bar{\nabla}Y - \nabla Y)$;

$$(4.7) \qquad \bar{\omega} = \frac{1}{n} (\bar{\phi} - \phi)$$

ove $\bar{\phi}$ *e* ϕ *sono le* 1-*forme di Einstein di* $\bar{\nabla}$ *e* ∇, *rispettivamente.*

L'asserto segue dalla proposizione 4.1 applicando gli operatori di contrazione C_1^1 e C_2^1 alla (4.1) e tenendo presente che traccia(h) = 0.

COROLLARIO 4.2. *Due pseudoconnessioni simmetriche* ∇ *e* $\bar{\nabla}$ *di campi fondamentali* A *e* B *rispettivamente, tali che* $\nabla h = \bar{\nabla} h = 0$, *sono* h-*proiettivamente correlate se e solo se:*

1) $A = B$;

2) *esiste una* 1-*forma* ω *tale che, detto* π *il campo tensoriale di specie* (1,2) *definito da* $\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, *per ogni* $(X,Y) \in \mathscr{X}^2$, *si ha*

$$\pi = \mathscr{S}(\omega \otimes K) - \mathscr{S}(h(\omega) \otimes h). \tag{4.8}$$

L'asserto segue dalla proposizione 4.1 e dal corollario 4.1.

PROP. 4.2. *Siano* ∇ *e* ∇' *due connessioni lineari, half-symmetric. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1) ∇ *e* ∇' *sono* h-*proiettivamente correlate,*

2) *le pseudoconnessioni di campo fondamentale* h, $\tilde{\nabla}^h$ *e* $\tilde{\nabla}'^h$, *canonicamente associate a* ∇ *e* ∇' *sono* h-*proiettivamente correlate.*

L'asserto segue dalla proposizione 2.3 e dalla osservazione seguente.

Se si pone:

$$\pi(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}(X,Y) = \tilde{\nabla}'^h_X Y - \tilde{\nabla}^h_X Y,$$

si ottiene $\tilde{\pi} = \mathscr{P}_1(\pi)$ e quindi, se ∇ e ∇' sono h-proiettivamente correlate, con:

$$\pi = \mathcal{S}(\omega \boxtimes K) - \mathcal{S}(h(\omega) \boxtimes h) + \bar{\omega} \boxtimes K + h(\bar{\omega}) \boxtimes h,$$

risulta:

$$\tilde{\pi} = \mathcal{S}(\sigma \boxtimes K) - \mathcal{S}(h(\sigma) \boxtimes h) + \tau \boxtimes K + h(\tau) \boxtimes h \tag{4.9}$$

con $\sigma = h(\omega)$ e $\tau = h(\bar{\omega})$.

Viceversa, se $\tilde{\nabla}'^h$ e $\tilde{\nabla}^h$ sono h-proiettivamente correlate, con $\tilde{\pi}$ come nella (4.9), si ha:

$$\pi = -\mathcal{P}_1(\tilde{\pi}) = \mathcal{S}(\omega \boxtimes K) - \mathcal{S}(h(\omega) \boxtimes h) + \bar{\omega} \boxtimes K + h(\bar{\omega}) \boxtimes h,$$

con $\omega = -h(\sigma)$ ed $\bar{\omega} = -h(\tau)$.

Def. 4.2. Sia $\mathcal{L}^*$ il sottoinsieme dell'$\mathcal{F}$-modulo $\mathcal{L}$ delle pseudoconnessioni su M, costituito dalle pseudoconnessioni half-symmetric. Per ogni $(\omega,\bar{\omega}) \in \Lambda^1 \times \Lambda^1$, si dice *trasformazione olomorfica mente proiettiva*, o h-*proiettiva*, l'applicazione $T_{(\omega,\bar{\omega})}: \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}^*$ che ad ogni $\nabla \in \mathcal{L}^*$ associa la pseudoconnessione $\bar{\nabla} \in \mathcal{L}^*$ definita ponendo, per ogni $(X,Y) \in \mathcal{X}^2$:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\mathcal{S}(\omega \boxtimes K) - \mathcal{S}(h(\omega) \boxtimes h) + \bar{\omega} \boxtimes K + h(\bar{\omega}) \boxtimes h)(X,Y).$$

Evidentemente, se $\mathcal{L}^*_A \subset \mathcal{L}^*$ denota l'insieme delle pseudoconnessioni di campo fondamentale $A \in \mathcal{T}^1_1$, risulta: $T_{(\omega,\bar{\omega})}(\mathcal{L}^*_A) \subset \mathcal{L}^*_A$.

PROP. 4.3. *Sia* ∇ *una pseudoconnessione di campo fondamentale* A, *half-symmetric. Il campo tensoriale di specie (1,2)*

$$L_\nabla = \Sigma - \frac{1}{n}\mathscr{A}(\Phi \otimes K + h(\Phi) \otimes h)$$

è invariante per trasformazioni h-proiettive di ∇.

Infatti, se $(\omega,\bar{\omega}) \in \Lambda^1 \times \Lambda^1$ e $\bar{\nabla} = T_{(\omega,\bar{\omega})}(\nabla)$, risulta:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{n}(\bar{\Phi} - \Phi) \qquad \text{e} \qquad \bar{\Sigma} = \Sigma + \mathscr{A}(\bar{\omega} \otimes K + h(\bar{\omega}) \otimes h)$$

da cui segue $L_\nabla = L_{\bar{\nabla}}$.

PROP. 4.4. *Sia* ∇ *una pseudoconnessione di campo fondamentale A, half-symmetric.*

∇ *è semisimmetrica se e solo se è h-proiettivamente correlata ad una pseudoconnessione* $\bar{\nabla}$ *di campo fondamentale A, simmetrica e tale che* $\bar{\nabla}h = 0$.

Si supponga ∇ semisimmetrica e sia Φ la 1-forma di Einstein ad essa relativa. La pseudoconnessione $\bar{\nabla}$ definita, ponendo, per ogni $(X,Y) \in \mathscr{X}^2$:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{n}(\Phi \otimes k + h(\Phi) \otimes h) \tag{4.10}$$

verifica la condizione $\bar{\nabla}h = 0$ ed è h-proiettivamente correlata a ∇. Inoltre, risulta:

$$\bar{\Sigma} = \Sigma - \frac{1}{n}\mathscr{A}(\Phi \otimes K + h(\Phi) \otimes h)$$

e quindi, dalla semisimmetria di ∇, segue $\bar{\Sigma} = 0$.

Viceversa, se ∇ è h-proiettivamente correlata ad una pseudoconnessione $\bar{\nabla}$ simmetrica e tale che $\bar{\nabla}h = 0$, dalla proposizione 4.3, segue $L_{\bar{\nabla}} = L_{\nabla}$ e, poiché $\bar{\nabla}$ è simmetrica, si ha $L_{\bar{\nabla}} = 0$.

Si conclude che $L_{\nabla} = 0$ e quindi ∇ è semisimmetrica.

§ 5. TRASFORMAZIONI CHE CONSERVANO LE CURVE OLOMORFICAMENTE PIANE E CAMPI VETTORIALI h-PROIETTIVI.

E' noto che, se μ è una trasformazione differenziabile di M, si può definire un automorfismo $\tilde{\mu}$ dell'algebra $\mathfrak{T}$, ponendo, per ogni $H \in \mathfrak{T}^r_s$, per ogni $p \in M$,

$$(\tilde{\mu}H)_{\mu(p)} = \tilde{\mu}_p(H_p)$$

ove $\tilde{\mu}_p$ indica l'isomorfismo, dell'algebra tensoriale relativa a $T_p(M)$ sull'algebra tensoriale relativa a $T_{\mu(p)}(M)$, determinato dal differenziale $(\mu_*)_p$ di μ in p.

Def. 5.1. Siano μ una trasformazione di M e ∇ una pseudoconnessione di campo fondamentale A. Si dice *pseudoconnessione trasformata* di ∇ mediante μ, la pseudoconnessione $\bar{\nabla}$ di campo fondamentale $\bar{A} = \tilde{\mu}^{-1}(A) = \mu_*^{-1} \circ A \circ \mu_*$, definita ponendo:

$$\forall (X,Y) \in \mathfrak{X}^2 \qquad \bar{\nabla}_X Y = \mu_*^{-1}(\nabla_{\mu_* X}\mu_* Y).$$

Si verifica facilmente che:

a) Il campo tensoriale $\tilde{\mu}^{-1}(h) = \bar{h} = \mu_*^{-1} \circ h \circ \mu_*$ definisce su M una struttura quasi complessa $\bar{\mathcal{T}}$.

b) $\bar{\nabla}\bar{h} = 0 \Longleftrightarrow \nabla h = 0$.

c) ∇ è half-symmetric rispetto alla struttura $\mathcal{T}$ se e solo se $\bar{\nabla}$ è half-symmetric rispetto alla struttura $\bar{\mathcal{T}}$.

Le a),b) sono immediate; per la c) si osservi che, indicata con $\bar{\Sigma}$ la forma di torsione di $\bar{\nabla}$ e con Σ quella di ∇, risulta:

$$\forall (X,Y) \in \mathfrak{X}^2 \qquad \bar{\Sigma}(X,Y) = \mu_*^{-1}(\Sigma(\mu_*X,\mu_*Y))$$

e quindi

$$(\bar{\Sigma} - \bar{\mathcal{C}}\,\bar{\Sigma} - \bar{\mathcal{T}} \circ \bar{\mathcal{M}}\,\bar{\Sigma})(X,Y) = \mu_*^{-1}((\Sigma - \mathcal{C}\Sigma - \mathcal{T}\circ\mathcal{M}\Sigma)(\mu_*X,\mu_*Y))$$

ove $\bar{\mathcal{C}}$ e $\bar{\mathcal{M}}$ sono gli operatori analoghi a $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{M}$, relativi alla struttura $\bar{\mathcal{T}}$. Poiché μ_* è un isomorfismo, segue la c).

PROP. 5.1. *Siano* μ *una trasformazione di* M *e* ∇ *una pseudoconnessione, di campo fondamentale* A , *tale che* $\nabla h = 0$. *Siano, inoltre,* $\bar{\nabla}$ *la trasformata di* ∇ *mediante* μ *ed* $\bar{h} = \mu\tilde{\mu}^{-1}(h)$.

1) μ *trasforma le curve* $(\bar{h},X)$*-olomorficamente piane rispetto a* $\bar{\nabla}$ *in curve* (h,μ_*X)*-olomorficamente piane rispetto a* ∇.

2) μ^{-1} *trasforma le curve* (h,X)*-olomorficamente piane rispetto a* ∇ *in curve* $(\bar{h},\mu_*^{-1}X)$*-olomorficamente piane rispetto a* $\bar{\nabla}$.

Se $\gamma : J \to M$ è $(\bar{h},X)$-olomorficamente piana rispetto a $\bar{\nabla}$, risulta:

$$\forall t \in J \quad \bar{A}_{\gamma(t)}(X(t)) = \dot{\gamma}(t), \; (\bar{\nabla}_X X)_{\gamma(t)} = \bar{f}(t)X(t)+\bar{g}(t)(\bar{h}X)(t).$$

Sia $\gamma' = \mu \circ \gamma$ la curva trasformata di γ mediante μ. Si ha:

$$\forall t \in J \quad \dot{\gamma}'(t) = (\mu_*)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = A_{\gamma'(t)}(\mu_* X)_{\gamma'(t)} ,$$

e quindi γ' è $\mu_* X$-ammissibile per il parallelismo rispetto a ∇.

Inoltre

$$(\nabla_{\mu_* X}\mu_* X)_{\gamma'(t)} = (\mu_*(\bar{\nabla}_X X))_{\gamma'(t)} = (f\mu_* X + gh(\mu_* X))_{\gamma'(t)}$$

ove si è posto $f = \bar{f} \circ \mu^{-1}$ e $g = \bar{g} \circ \mu^{-1}$.

Per la 2) si procede in modo analogo, tenendo conto della relazione:

$$\nabla_X Y = \mu_*(\bar{\nabla}_{\mu_*^{-1} X} \mu_*^{-1} Y) .$$

Def. 5.2. Una trasformazione μ di M *conserva le curve olomorficamente piane* rispetto a ∇ se trasforma curve (h,X)-olomorficamente piane in curve $(h,\mu_* X)$-olomorficamente piane rispetto a ∇.

Con le notazioni sopra usate si ha:

COROLLARIO 5.1. *Sia* $\bar{h} = h$. *Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1) u e μ^{-1} *conservano le curve olomorficamente piane rispetto a* ∇

2) *le pseudoconnessioni* ∇ *e* $\bar{\nabla}$ *sono* h-*proiettivamente correlate.*

Def. 5.3. Un campo vettoriale $V \in \mathscr{X}$ si dice *quasi analitico* se risulta $\mathcal{L}_V h = 0$, ove $\mathcal{L}_V$ denota la differenziazione di Lie nella direzione di V.

Def. 5.4. Un campo vettoriale $V \in \mathcal{X}$ *conserva le curve olomorfi camente piane* rispetto ad una pseudoconnessione ∇ di campo fondamentale A, se ogni trasformazione locale ϕ_s dei gruppi ad un parametro generati localmente da V, conserva le curve olomorficamente piane rispetto a ∇.

Si può facilmente provare, [8], che se ∇ è una pseudoconnessione di campo fondamentale A, e $V \in \mathcal{X}$, la derivata di Lie di ∇ nella direzione di V, caratterizzata da:

$$\forall (Y,Z) \in \mathcal{X}^2 \qquad (\mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z) = \mathcal{L}_V(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\mathcal{L}_V Z) - \nabla_{\mathcal{L}_V Y} Z,$$

è una pseudoconnessione di campo fondamentale $\mathcal{L}_V A$ e, quindi,

$$\mathcal{L}_V \nabla \in \mathfrak{T}_2^1 \iff \mathcal{L}_V A = 0$$

Def. 5.5. Sia ∇ una pseudoconnessione, di campo fondamentale A, half-symmetric. Un campo di vettori $V \in \mathcal{X}$ si dice h-*proiettivo* rispetto a ∇ se $\mathcal{L}_V A = 0$, ed esistono due 1-forme ρ, σ tali che:

$$\mathcal{L}_V \nabla = \mathcal{S}(\rho \otimes K) - \mathcal{S}(h(\rho) \otimes h) + \sigma \otimes K + h(\sigma) \otimes h.$$

Oss. 5.1. Se V è h-proiettivo rispetto a ∇ si ha:

$$\rho = \frac{1}{n+1} C_1^1(\mathcal{L}_V \nabla) \; ; \; \sigma = \frac{1}{n} C_2^1(\mathcal{A}(\mathcal{L}_V \nabla)) = \frac{1}{n} C_2^1(\mathcal{L}_V \Sigma) = \frac{1}{n} \mathcal{L}_V(\Phi).$$

PROP. 5.2. *Siano* ∇ *una pseudoconnessione di campo fondamentale* A , *tale che* $\nabla h = 0$, *e* $V \in \mathfrak{X}$. *Se* V *conserva le curve olomorficamente piane rispetto a* ∇, *risulta:*

$$\mathscr{L}_V A = 0 \quad , \quad \mathscr{L}_V h = 0.$$

Senza perdere in generalità, si può supporre che il campo V sia completo, e sia ϕ_s il gruppo di trasformazioni generato da V. Poiché ogni ϕ_s conserva le curve olomorficamente piane, dalla condizione di ammissibilità per il parallelismo, dalla osservazione 3.1 e dalla proposizione 5.1, segue, per ogni s:

$$(\phi_s)_* \circ A = A \circ (\phi_s)_*$$

e, quindi $\mathscr{L}_V A = 0$.

Risulta, allora:

$$\mathscr{L}_V \nabla \in \mathfrak{T}_2^1 .$$

Siano $p \in M$, $X_p \in T_p(M)$ e $\gamma : J \to M$ una curva (h,X)-olomorficamente piana rispetto a ∇, tale che $\gamma(0) = p$ e $X(0) = X_p$. Si ha:

$$(5.1) \qquad \forall t \in J \quad (\nabla_X X)_{\gamma(t)} = \alpha(t)X(t) + \beta(t)(hX)(t).$$

Poiché, per ogni s, $\gamma_s = \phi_s \circ \gamma$ è $(h,(\phi_s)_* X)$-olomorficamente piana rispetto a ∇, risulta:

$$(5.2) \quad \forall t \in J \quad (\nabla_{(\phi_s)_* X}(\phi_s)_* X)_{\gamma_s(t)} = \bar{\alpha}_s(t)(\phi_s)_* X(t) + \bar{\beta}_s(t)(h(\phi_s)_* X))(t).$$

Dalle (5.1) e (5.2) segue, per ogni $t \in J$:

$$((\mathcal{L}_V\nabla)(X,Y)_{\gamma(t)} = \tilde{\alpha}(t)X(t) + \tilde{\beta}(t)(hX)(t) + \beta(t)(\mathcal{L}_V h)(X)(t)$$

ove β è la stessa funzione che figura nella (5.1).

In particolare, per $t = 0$ si ha:

$$(5.3)\qquad (\mathcal{L}_V\nabla)_p(X_p,X_p) = \tilde{\alpha}(p)X_p + \tilde{\beta}(p)h_p(X_p) + \beta(p)(\mathcal{L}_V h)_p(X_p),$$

ove si noti che $(\mathcal{L}_V\nabla)_p(X_p,X_p)$ dipende soltanto dal punto p e dal vettore X_p e non dalla particolare curva γ considerata, né dal particolare campo X considerato, tale xhe $X(0) = X_p$.

D'altra parte, per la Y-geodetica $c : J' \to M$ con condizioni iniziali (p,X_p), rispetto a ∇, risulta:

$$\forall t \in J' \qquad (\nabla_Y Y)_{c(t)} = 0$$

e quindi:

$$\forall t \in J' \qquad ((\mathcal{L}_V\nabla)(Y,Y))_{c(t)} = \alpha'(t)Y(t) + \beta'(t)(h(Y)(t),$$

da cui, pet $t = 0$, poiché $Y_p = X_p$, si ha:

$$(5.4)\qquad (\mathcal{L}_V\nabla)_p(X_p,X_p) = \alpha'(p)X_p + \beta'(p)h_p(X_p)$$

cioé $(\mathcal{L}_V\nabla)_p(X_p,X_p)$ appartiene al sottospazio di $T_p(M)$ generato da $\{X_p,h_p(X_p)\}$.

Dalla (5.3) segue, allora, che per il fissato punto p, risulta:

$$(\mathcal{L}_V h)_p(X_p) = a(X_p)X_p + b(X_p)h_p(X_p).$$

Dalla arbitrarietà di X_p e dalla $\mathbb{R}$-linearità di $(\mathcal{L}_V h)_p$ si deduce che a e b sono costanti, e quindi:

(5.5) $\quad \forall X_p \in T_p(M) \quad (\mathcal{L}_V h)_p(X_p) = aX_p + bh_p(X_p)$.

Applicando la (5.5) al vettore $h_p(X_p)$ e ricordando che $h \circ \mathcal{L}_V h = - (\mathcal{L}_V h) \circ h$, si deduce $a = b = 0$, da cui $(\mathcal{L}_V h)_p = 0$.

Dalla arbitrarietà di p in M, si ottiene $\mathcal{L}_V h = 0$.

PROP. 5.3.. *Siano* $V \in \mathfrak{A}$ *e* ∇ *una pseudoconnessione di campo fondamentale* A, *half-symmetric. Affinché* V *conservi le curve olomorficamente piane rispetto a* ∇, *occorre e basta che* V *sia quasi analitico ed* h-*proiettivo*.

Si supponga che V conservi le curve olomorficamente piane e sia (ϕ_s) il gruppo ad un parametro generato da V, supposto per semplicità completo.

Sia ∇^s la pseudoconnessione di campo fondamentale A^s, trasformata di ∇ mediante ϕ_s.

Dalla proposizione 5.2 segue che $\mathcal{L}_V A = 0$, $\mathcal{L}_V h = 0$ e quindi poiché $h = h^s$, per ogni s, ogni ∇^s conserva la struttura h, è half-symmetric e, per il corollario 5.1, è h-proiettivamente correlata con ∇.

Dalla proposizione 4.1 e dal corollario 4.1, segue che posto per ogni s,

$$\forall (X,Y) \in \mathscr{X}^2 \qquad \pi^s(X,Y) = \nabla^s_X Y - \nabla_X Y$$

risulta:

$$\pi^s = \mathscr{S}(\omega^s \otimes K) - \mathscr{S}(h(\omega^s) \otimes h) + \bar{\omega}^s \otimes K + h(\bar{\omega}^s) \otimes h$$

con $\omega^s(Y) = \frac{1}{n+1}$ traccia $(\nabla^s Y - \nabla Y)$ e $\bar{\omega}^s = \frac{1}{n}(\Phi^s - \Phi)$.

Risulta allora, per ogni $(Y,Z) \in \mathscr{X}^2$:

$$\mathscr{L}_V(\nabla_Y Z) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\nabla_Y Z - (\phi_s)_*(\nabla_Y Z)) = \nabla_{\mathscr{L}_V Y} Z + \nabla_Y(\mathscr{L}_V Z) + \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\phi_s)_*(\pi^s(Y,Z)),$$

da cui

$$(5.6) \qquad (\mathscr{L}_V \nabla)(Y,Z) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\phi_s)_*(\pi^s(Y,Z)).$$

D'altra parte, risulta:

$$(5.7) \quad \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\phi_s)_*(\omega^s(Y)Z) = \frac{1}{n+1}(\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}((\phi_s)_*(C^1_1(\nabla^s Y - Y)))Z =$$

$$= \frac{1}{n+1}(\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}((\phi_s)_*(C^1_1(\tilde{\phi}_s^{-1}(\nabla(\phi_s)_*Y) - \nabla(\phi_s)_*Y + \nabla(\phi_s)_*Y - \nabla Y))))Z =$$

$$= \frac{1}{n+1}(C^1_1(\mathscr{L}_V(\nabla Y)) - C^1_1(\nabla(\mathscr{L}_V Y)))Z = \frac{1}{n+1} C^1_1(\mathscr{L}_V \nabla)(Y)Z.$$

Analogamente, poiché $(h(\omega^s) \otimes h)(Y,Z) = (\omega^s \otimes K)(hY,hZ)$, si ha:

$$(5.8) \quad \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\phi_s)_*((h(\omega^s))(Y)h(Z)) = \frac{1}{n+1}\,(C_1^1(\mathscr{L}_V\nabla)(hY))h(Z).$$

Infine, risulta:

$$(5.9) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(\phi_s)_*(\bar\omega^s(Y)Z) = \frac{1}{n}(\mathscr{L}_V\Phi)(Y)Z.$$

Sostituendo le (5.7), (5.8) e (5.9) nella (5.6), si ha:

$$(5.10) \qquad (\mathscr{L}_V\nabla) = \mathscr{S}(\rho \otimes K) - \mathscr{S}(h(\rho) \otimes h) + \sigma \otimes K + h(\sigma) \otimes h$$

ove si è posto $\rho = \frac{1}{n+1}\, C_1^1(\mathscr{L}_V\nabla)$ e $\sigma = \frac{1}{n}\mathscr{L}_V\Phi$;

il che prova che V è h-proiettivo, poiché si è già provato che $\mathscr{L}_V A = 0$.

Viceversa, si supponga $\mathscr{L}_V A = 0$, $\mathscr{L}_V h = 0$ e $\mathscr{L}_V\nabla$ della forma (5.10), con i valori su indicati per ρ e σ, in virtù della osservazione 5.1.

Per provare che V conserva le curve olomorficamente piane, basta provare, per il corollario 5.1, che ogni ∇^s è h-proiettivamente correlata con ∇.

Per ogni s, si ponga:

$$\pi^s = \mathscr{S}(\omega^s \otimes K) - \mathscr{S}(h(\omega^s) \otimes h) + \bar\omega^s \otimes K + h(\bar\omega^s) \otimes h,$$

con ω^s ed $\bar\omega^s$ 1-forme definite da:

$\forall Y \in \mathscr{X} \qquad \omega^s(Y) = \frac{1}{n+1}$ traccia $(\nabla^s Y - Y)$; $\quad \bar{\omega}^s = \frac{1}{n}(\Phi^s - \Phi)$.

Inoltre, per ogni s, per ogni $p \in M$, per ogni $(Y,Z) \in \mathscr{X}^2$, sia:

$$W(s) = ((\phi_s)_*(\nabla_Y Z))_p - (\nabla_{(\phi_s)_* Y}(\phi_s)_* Z)_p - ((\phi_s)_*(\pi^s(Y,Z)))_p \in T_p(M),$$

e si osservi che, per provare l'asserto, basta provare che $W(s)=0$, per ogni s. Infatti, risulta evidentemente $W(0) = 0$, e con calcoli analoghi ai precedenti:

$$\frac{d\,W(s)}{ds} = (\phi_s)_*(((\mathscr{L}_V\nabla)(Y,Z) - (\mathscr{S}(\rho \otimes K) - \mathscr{S}(h(\rho) \otimes h) + \sigma \otimes K +$$

$$+ h(\sigma) \otimes h)(Y,Z))_{\phi_s^{-1}(p)});$$

e quindi $\frac{d\,W(s)}{ds} = 0$.

Oss. 5.2. Se la pseudoconnessione ∇ è simmetrica, $\nabla h = 0$ e V è h-proiettivo rispetto a ∇, allora si ha:

$$\mathscr{L}_V \nabla = \mathscr{S}(\rho \otimes K) - \mathscr{S}(h(\rho) \otimes h)$$

poiché risulta ovviamente $\Phi = 0$, e quindi $\sigma = 0$.

PROP. 5.4. *L'insieme dei campi vettoriali quasi analitici ed h-proiettivi rispetto ad una pseudoconnessione* ∇, *di campo fondamentale* A, *half-symmetric, è una sottoalgebra di Lie dell'algebra* $\mathscr{X}$.

Risulta ovviamente, per ogni $(V,W) \in \mathscr{X}^2$, quasi analitici ed h-proiettivi,

$$\mathcal{L}_V A = 0, \qquad \mathcal{L}_W A = 0 \implies \mathcal{L}_{[V,W]} A = 0,$$

$$\mathcal{L}_V h = 0, \qquad \mathcal{L}_W h = 0 \implies \mathcal{L}_{[V,W]} h = 0.$$

Inoltre, si verifica facilmente che, da

$$\mathcal{L}_V \nabla = \mathcal{S}(\rho \otimes K) - \mathcal{S}(h(\rho) \otimes h) + \bar{\rho} \otimes K + h(\bar{\rho}) \otimes h$$

e

$$\mathcal{L}_W \nabla = \mathcal{S}(\omega \otimes K) - \mathcal{S}(h(\omega) \otimes h) + \bar{\omega} \otimes k + h(\bar{\omega}) \otimes h$$

segue:

$$\mathcal{L}_{[V,W]} \nabla = \mathcal{S}(\sigma \otimes K) - \mathcal{S}(h(\sigma) \otimes h) + \bar{\sigma} \otimes K + h(\bar{\sigma}) \otimes h,$$

ove si è posto $\sigma = \mathcal{L}_V \omega - \mathcal{L}_W \rho$, $\bar{\sigma} = \mathcal{L}_V \bar{\omega} - \mathcal{L}_W \bar{\rho}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] COSSU A. : *Connessioni che conservano una struttura quasi complessa*. Rend. Acc. Naz. Lincei, Serie VIII, Vol. XXX, Fasc. VI, 1961.

[2] DI COMITE C.: *Pseudoconnessioni lineari su una varietà differenziale di classe* C^∞. Ann. Mat. Pura e Applicata, Serie IV Tomo LXXXIII, 1969.

[3] DI COMITE C.: *Geodetiche rispetto ad una pseudoconnessione lineare su una varietà differenziabile*. Le Matematiche, Sem. Mat. Univ. Catania, Vol. XXX, Fasc. 2, 1975.

[4] FALCITELLI M. - PASTORE A.M.: *Sulle pseudoconnessioni che conservano una struttura quasi complessa*. Rend. Mat. (2), Vol. 12, Serie VI, 1979.

[5] FALCITELLI M. - PASTORE A.M.: *Sulle pseudoconnessioni proiettivamente equivalenti*. Rend. Mat. (1), Vol. 13, Serie VI, 1980.

[6] HELGASON S.: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press 1978.

[7] KOBAYASHI-NOMIZU: *Foundations of differential geometry*. Vol. I, II, Interscience Publishers 1963-69.

[8] SANINI A.: *Trasformazioni pseudoaffini di una varietà differenziabile*. Rend. Acc. Lincei, Vol. LVI, 1974.

[9] SCHOUTEN J.: *Ricci calculus*, Springer 1954.

[10] YANO K.: *Differential geometry on complex and almost complex spaces*. Pergamon Press, 1965.

[11] YANO K.: *The theory of Lie derivatives and its applications*. North-Holland Publ. 1955.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 15 Luglio 1981
ed accettato per la pubblicazione il 8 Luglio 1982
su parere favorevole di A. Cossu e I. Cattaneo Gasparini