Note di Matematica Vol. II, 73-100 (1982)

GRUPPI FINITI A FATTORIALI MODULARI(*)

Patrizia LONGOBARDI(**)

Summary. *A group G is called a modular group if the subgroup lattice $\ell(G)$ of G is modular.*

In this paper, finite supersoluble groups whose proper factors are all modular are determined.

Sia $\mathbb{P}$ una classe di gruppi, i suoi elementi vengono chiamati $\mathbb{P}$-gruppi.

Un gruppo G è detto *minimale non* $\mathbb{P}$*-gruppo* se, e solo se, $G \notin \mathbb{P}$ e $H \in \mathbb{P}$, per ogni $H < G$.

Un gruppo G è detto *a fattoriali* $\mathbb{P}$*-gruppi*, se, e solo se, $G \notin \mathbb{P}$ e, per ogni $H \triangleleft G$, $H \neq 1$, risulta $G/H \in \mathbb{P}$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.)

(**) Istituto di Matematica "R. Caccioppoli" Via Mezzocannone, 8
80134 NAPOLI -

Un gruppo G è detto *modulare* o M-*gruppo*, se, e solo se, il reticolo $\ell(G)$ dei sottogruppi di G è modulare.

Si determineranno tutti i gruppi finiti supersolubili a fattoriali modulari. L'analoga indagine su altre classi di gruppi finiti, quale ad esempio quella dei gruppi risolubili non supersolubili, non ha condotto ad una efficace classificazione, non potendosi controllare l'azione del gruppo sul suo unico sottogruppo normale minimale (cfr. *Curzio* [1] e [2]). E' possibile ottenere, però, caratterizzazioni riguardanti la struttura di *Sylow* dei quozienti non banali di G.

Tra i gruppi ottenuti si ritrovano, naturalmente, i gruppi debolmente modulari, non modulari, già studiati da *Fort* [4].

Si ricorda che i gruppi finiti modulari sono stati caratterizzati da *Iwasawa* [7],[9],[14]:

1. *Un* p-*gruppo finito non dedekindiano* G *è modulare se, e solo se, esiste un sottogruppo normale abeliano* A *di* G *ed un elemento* t *in* G *tale che* $G = \langle A,t\rangle$ *e, per un fissato intero* s, *con* $s \geq 2$ *per* $p=2$, *è* $a^t = a^{1+p^s}$, *per ogni* $a \in A$.

2. *Un gruppo finito* G *è modulare se, e solo se, è prodotto diretto di gruppi a due a due coprimi, ciascuno dei quali è un* P_o^*-*gruppo oppure un* p-*gruppo modulare.*

Si ricorda, inoltre, che:

3. *Un gruppo* G *è detto un* P_o^*-*gruppo se, e solo se, è* $G = |P|\, Q$ *con* P

p-gruppo abeliano elementare, Q *q-gruppo ciclico*, $p \neq q$, $Q = \langle x \rangle$ *e* $a^x = a^r$, *per ogni* $a \in P$, *con* r *indipendente da* a *e tale che* $r \not\equiv 1(p)$ *e* $r^q \equiv 1(p)$.

Si osservi inoltre che dalla 1. segue che:

4. *Un p-gruppo finito metaciclico non dedekindiano* H *è modulare a centro ciclico se, e solo se,* H *è estensione ciclica di un sottogruppo ciclico* $\langle a \rangle$ *con* $|\langle a \rangle| = p^n$ *mediante un elemento* b *che induce su* $\langle a \rangle$ *l'automorfismo* $a \to a^{1+p^s}$, $0 < s < n$, $s \geq 2$ *per* $p = 2$, *tale che* $b^{p^j} = a^{p^{n-s}}$ *con* $j \geq n - s$.

I gruppi finiti minimali non modulari sono stati caratterizzati da *Napolitani* [10].

Nomenclatura e notazioni sono quelle usuali in teoria dei gruppi (cfr. ad es. [5] o [6]). In particolare la scrittura $G = [A] B$ denota che G è un prodotto semidiretto di A e B, con $A \triangleleft G$, e la scrittura $G = A \curlyvee B$ indica che G è un prodotto centrale di A e B (i sottogruppi amalgamati saranno precisati qualora non risultino dal contesto).

Inoltre si denoterà con D_4 il gruppo diedrale d'ordine 8, Q_8 il gruppo dei quaternioni, e si porrà, con p primo, $n \in \mathbb{N}$,

$$M(p) = \langle a,b,v / a^p = b^p = v^p = 1, [a,b] = v, [a,v] = [b,v] = 1 \rangle$$

$$D_{n,1}(p) = \langle a,b / a^{p^n} = b^p = 1,\ b^{-1}ab = a^{1+p^{n-1}} \rangle ,$$

$$N(p^n) = \langle c,d,z / c^p = d^p = z, z^{p^{n-1}} = [c,d],\ [c,d]^p = 1 \rangle .$$

Da notare che è $D_4 \simeq M(2)$, che per $p^n = 2$ è $N(p^n) \simeq Q_8$ e per $p^n \neq 2$ è $N(p^n) \simeq D_{n+1,1}(p)$, e che per $p = 2$, $n = 2$, è $D_{2,1}(2) \simeq D_4$.

1. GRUPPI FINITI NILPOTENTI A FATTORIALI MODULARI.

I p-gruppi finiti a fattoriali abeliani, già studiati da *Rosati* [13], sono stati caratterizzati da *Newman* [11] (cfr. anche *Klein* [8]).

Sussiste pertanto il seguente

TEOREMA 1.1. *Un p-gruppo finito P è a fattoriali abeliani se, e solo se, è di uno dei tipi seguenti:*

(k) $P = A_1 \curlyvee A_2 \curlyvee \ldots \curlyvee A_h \curlyvee B$

con $A_i \simeq M(p)$ $(i = 1,\ldots,h)$, $B = \langle z / z^{p^m} = 1\rangle$, $m \geq 1$

(kk) $P = C_1 \curlyvee C_2 \curlyvee \ldots \curlyvee C_h \curlyvee N(p^n)$ *o* $P = N(p^n)$

con $C_i \simeq M(p)$ $(i = 1,\ldots,h)$, $n \geq 1$.

In particolare, si ha:

1.2. *Un p-gruppo finito G di rango* 2 (1), *con* $p \neq 2$, *è a fattoriali abeliani se, e solo se, è di uno dei tipi seguenti:*

(j) $G \simeq M(p)$, *con* $p \neq 2$

(jj) $G \simeq N(p^n)$, *con* $p \neq 2$ *e* $n \geq 1$.

---

(1) Per *rango* di G, r(G), si intende il minimo numero di elementi capaci di generare G.

1.3. *Un 2-gruppo finito G di rango 2 è a fattoriali abeliani se, e solo se, è di uno dei tipi seguenti:*

(h) $G \simeq M(2)$

(hh) $G \simeq N(2^n)$, *con* $n \geq 1$.

1.4. *Un gruppo finito nilpotente G a fattoriali modulari è un p-gruppo.*

Dim. Ovvia.

Si perverrà al seguente:

TEOREMA 1.5. *Sia G un p-gruppo finito.*

G è a fattoriali modulari se, e solo se, è

$$G = A_1 \curlyvee \dots \curlyvee A_h \curlyvee K \quad \textit{con } A_j \simeq M(p) \quad (j = 1,\dots,h)$$

con K di uno dei tipi:

i) *ciclico o* Q_8

ii) *metaciclico modulare non dedekindiano a centro ciclico*

iii) $[H]\langle w\rangle$, $H = \langle a,b\rangle$ *come in* 4., $w^p = 1$, $a^w = a^{1+p^{n-1}}$, $b^w = b$,

oppure $G = K$ *con* K *del tipo* (iii).

Alla dimostrazione del Teorema 1.5 si premettono le seguenti proposizioni:

1.6. *Sia G un p-gruppo finito a fattoriali modulari. Allora G ha un solo sottogruppo normale minimale.*

Dim. Per assurdo, esistano $M, N \triangleleft G$, $|M| = |N| = p$, $M \neq N$. G è non modulare, sicché esistono $A, B \leq G$ con $B \triangleleft A$, $|A/B| = p^3$ e A/B non modulare (cfr. ad es. [14]). Risulta $N, M \leq A$(2) e $N, M \not\leq B$(3) sicché $\frac{NB}{B}$ e $\frac{MB}{B}$, normali minimali in $\frac{A}{B}$, coincidono. Allora è $NB = MB$, ed esiste $b \in B - \{1\}$ tale che $n = mb$, per opportuni $n \in N$ e $m \in M$, da cui $b = m^{-1}n \in Z(G)$ e $\frac{A}{B} \simeq \frac{A/\langle b\rangle}{B/\langle b\rangle}$ quoziente del gruppo modulare $\frac{A}{\langle b\rangle} \leq \frac{G}{\langle b\rangle}$.

1.7. *Un p-gruppo finito G di rango 2, con $p > 2$, a fattoriali abeliani è non modulare se, e solo se, è $G \simeq M(p)$, con $p \neq 2$.*

Dim. E' immediato verificare che un gruppo del tipo (jj) di 1.2 è modulare (cfr. 1) e che un gruppo del tipo (j) di 1.2 è non modulare, a quozienti propri modulari.

1.8. *Un 2-gruppo finito G di rango 2 a fattoriali abeliani è non modulare se, e solo se, è $G \simeq M(2)$.*

Dim. I gruppi del tipo (hh) di 1.3 sono modulari (cfr. 1 per $n \nearrow 1$) mentre $M(2)$ è banalmente a fattoriali modulari.

1.9. *Un p-gruppo finito G a fattoriali abeliani, con $r(G) > 2$, è non modulare.*

---

(2) Da $N \not\leq A$ seguirebbe $A \simeq \frac{AN}{N} \leq \frac{G}{N}$ e A modulare.

(3) Da $N \leq B$ seguirebbe $\frac{A}{B} \simeq \frac{A/N}{B/N}$ quoziente del gruppo modulare $A/N \leq G/N$.

Dim. Per assurdo, sia G modulare.
Da G hamiltoniano a fattoriali abeliani, segue $G \simeq Q_8$ e G di rango 2, contro le ipotesi. Allora (cfr. 1), è $G = A\langle t\rangle$ con $A \triangleleft G$, A abeliano e $a^t = a^{1+p^s}$, per ogni $a \in A$, per un fissato s; ma allora A è ciclico [4] e $r(G) = 2$, contro le ipotesi.

1.10. *Sia* G *un* p-*gruppo finito a fattoriali modulari, non a fattoriali abeliani, e sia* N *il suo unico sottogruppo normale minimale. Allora* G/N *è non dedekindiano.*

Dim. Se G/N fosse hamiltoniano, l'assurdo seguirebbe dell'essere G un p-gruppo a fattoriali T-gruppi [5] (cfr. *Robinson* [12] N.3 pag. 192, o anche *De Vivo* [3]).

1.11. *Sia* G *un* p-*gruppo finito a fattoriali modulari, non a fattoriali abeliani,* N *il suo unico sottogruppo normale minimale e sia*

$\frac{G}{N} = \frac{A}{N}\langle bN\rangle$ *con* $A \triangleleft G$, A *abeliano*, $(aN)^b = a^{1+p^s}N$, *per ogni* $a \in A$, *con* $s > 0$ *indipendente da* a.

Allora è G = K *con* K *del tipo* (iii) *del* Teorema 1.5 *e con* $s < n-1$.

Dim. Sia $A = H_1 \times \ldots \times H_r$, $H_1 \geq N$, una decomposizione di A in sottogruppi ciclici, $H_i = \langle h_i\rangle$ $(i = 1,\ldots,r)$.

---

(4) G a fattoriali abeliani comporta G con un solo sottogruppo normale minimale

(5) Un gruppo G dicesi un T-*gruppo* se, e solo se, ogni sottogruppo subnormale è normale.

Dall'essere N l'unico sottogruppo normale minimale di G, segue che ogni H_i $(i = 2,\dots,r)$ ha ordine p [6]; mentre da G/N non abeliano, segue $|H_1/N| \geq p^2$, $|H_1| = p^n$ con $n \geq 3$ e, con g opportuno generatore di $\langle b\rangle$, $h_1^g = h_1^{1+p^s}$, $0 < s < n-1$.

Si verifica facilmente che è $r \leq 2$ [7], sicché è $G = \langle h_1, h_2, g / h_1^{p^n} = h_2^p = g^{p^\gamma} = 1,\ h_1^{h_2} = h_1,\ h_1^g = h_1^{1+p^s},\ h_2^g = h_2 h_1^{p^{n-1}} \rangle$ con $n \geq 3$, $0 < s < n-1$ $(s \geq 2$ per $p = 2)$, oppure $G = \langle h_1, g / 1 = h_1^{p^n} = g^{p^\gamma},\ h_1^g = h_1^{1+p^s} \rangle$ con $n \geq 3$, $0 < s < n-1$ $(s \geq 2$ per $p = 2)$. Ma in tal caso G è modulare (cfr. 1), contro le ipotesi.

Da Z(G) ciclico segue che $\langle h_1, g\rangle$ è un p-gruppo metaciclico modulare a centro ciclico [8], sicché, per un opportuno t, riesce $\langle h_1, g\rangle = \langle h_1, t\rangle$ con $h_1^t = h_1^{1+p^s}$, con $t^{p^j} = h_1^{p^{n-s}}$, $j \geq n-s$, e anche con $[h_2, g] = [h_2, t]$.

---

(6) Sia $H_i = \langle h_i\rangle$. Da $(h_i N)^b = h_i^{1+p^s} N$ segue $h_i^b = h_i^{1+p^s} m$, con $m \in N$ e $(h_i^p)^b = (h_i^p)^{1+p^s} m^p = (h_i^p)^{1+p^s} \in \langle h_i^p\rangle$.

(7) Se fosse $r > 2$, H_2 e H_3 si potrebbero ottenere come generati rispettivamente da a e c tali che $a^g = am$, $c^g = cm^{-1}$, con $m \in N$, sicché risulterebbe $\langle ac\rangle \lhd G$.

(8) Ovviamente è $Z(\langle h_1, g\rangle) \leq \langle h_1, g^p\rangle \leq C_G(h_2)$.

Ma allora, posto $w = t^{p^{j-1}}(h_1^{-1})^{p^{n-s-1}} h_2$, si verifica che G è del tipo richiesto.

1.12. *Sia* G *un* p-*gruppo finito a fattoriali modulari, non a fattoriali abeliani,* N *il suo unico sottogruppo normale minimale e* $\frac{G}{N} = \frac{A}{N}\langle bN\rangle$, *con* $A \triangleleft G$, A *a fattoriali abeliani,* $(aN)^b = a^{1+p^s}N$ *per ogni* $a \in A$, *con* $s > 0$ *indipendente da* a.

Allora è $G = A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_h \curlyvee K$ *con* $A_r \simeq M(p)$ $(r = 1,\ldots,h)$, K *del tipo* (ii) *del* Teorema 1.5 *e* $s < n-1$, *oppure del tipo* (iii), *oppure è* $G = K$ *con* K *del tipo* (iii).

Dim. Da 1.1, 1.2, dall'essere G/N non abeliano e dall'essere Z(G) ciclico, con g opportuno generatore di $\langle b\rangle$, segue subito che G è di uno dei tipi:

1) $G = \langle A,g\rangle$ con $A = A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_h \curlyvee \langle z\rangle$ del tipo (k) del Teorema 1.1, $m > 2$, $g^{p^\varepsilon} = 1, [x,g] \in \langle z^{p^{m-1}}\rangle$ per ogni $x \in A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_h$, $[z,g] = z^{p^s}$ con $0 < s < m-1$ $(s \geq 2$ per $p = 2)$, $\langle z,g\rangle$ p-gruppo metaciclico modulare non dedekindiano a centro ciclico.

2) $G = \langle A,g\rangle$ con $A = C_1 \curlyvee \ldots \curlyvee C_h \curlyvee \langle c,d,z\rangle$ oppure $A = \langle c,d,z\rangle$ del tipo (kk) del Teorema 1.1, $Z(A) = \langle z\rangle$, $g^{p^\varepsilon} = 1, [x,g] \in \langle z^{p^{n-1}}\rangle$ per ogni $x \in C_1 \curlyvee \ldots \curlyvee C_h \cup \{c^{-1}d\}$, $[c,g] = c^{p^s}$, $n > 1$, $0 < s < n$ $(s \geq 2$ per $p = 2)$, Z(G) ciclico.

Si supponga G del tipo 1). Ci si può chiaramente ridurre al caso in cui, in $A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_h$, soltanto in un A_i un generatore è non permutabile con g; sia ad esempio $A_1 = \langle a,b\rangle$ con $[a,g]=z^{p^{m-1}}=[a,b]$, $[b,g] = 1$. Allora, posto $t = b^{-1}g$, risulta G del tipo richiesto, con K del tipo (iii).

Si supponga adesso G del tipo 2). Si osservi innanzitutto che si può supporre $[x,t]=1$ per ogni $x \in C_1 \curlyvee \ldots \curlyvee C_h$ e anche $[c^{-1}d,t] = 1$ (9), per un opportuno t tale che $G = \langle A,t\rangle$.

Supposto poi $[c,d] = c^{p^n} = [c,t^{p^{n-s}}]$, risulta $Z(G)\cap\langle c^{-1}d,t\rangle = \langle c^{-1}dt^{p^{n-s}}\rangle$ e $Z(G)\cap\langle c\rangle = \langle c^{p^{n-s+1}}\rangle$ sicché, per $\varepsilon \leq n$ deve essere $c^{-1}dt^{p^{n-s}}$ e $\langle c^{p^{n-s+1}}\rangle \leq \langle c,t\rangle$, $\langle c^{-1}d,c,t\rangle = \langle c,t\rangle = K$ del tipo (ii). Per $\varepsilon > n$, è $\langle c,c^{-1}d,t\rangle = [\langle c,t\rangle] < c^{-1}d\rangle = K$ del tipo (iii).

1.13. *Sia* G *un* p-*gruppo finito a fattoriali modulari, non a fattoriali abeliani,* N *il suo unico sottogruppo normale minimale,* $\frac{G}{N} = \frac{A}{N}\langle bN\rangle$, *con* $A \triangleleft G$, A *non abeliano,* $\frac{A}{N}$ *abeliano,* $(aN)^b = a^{1+p^s}N$, *per ogni* $a \in A$, *con* $s > 0$ *indipendente da* a.

Se esiste $H \triangleleft A$, $|H| = p$, $H \neq N$, *allora è* $A = M \times H$, *con* M *a fattoriali abeliani.*

(9) Se è $[c,d] = c^{p^n}$ e $[c^{-1}d,t] = c^{\alpha p^n}$ con $\alpha \neq 0$, basta sostituire t con $t^{\alpha}c$.

Dim. Risulta $A' = N$, $\Phi(A) = A'A^p \leq Z(A)$ (10) e $(a^p)^b = (a^b)^p =$
$= (a^{1+p^s})^p = (a^p)^{1+p^s}$, per ogni $a \in A$, sicché, da $H \leq \Phi(A)$, seguirebbe $H \triangleleft G$ contro le ipotesi.

Allora è $H \nleq \Phi(A)$ e $A = M \times H$.

Per assurdo, esiste $K \triangleleft M$, $|K| = p$, $K \neq N$. Esisterebbero dunque $k \in K - \{1\}$, $h \in H - \{1\}$ tali che $k^b = kn$ e $h^b = hn^{-1}$ sicché $\langle kh\rangle \triangleleft G$ contro le ipotesi.

Quindi M è a fattoriali abeliani.

1.14. *Sia* G *un gruppo nelle ipotesi di* 1.13. *Allora è* $G = K$ *con* K *del tipo* (iii) *del* Teorema 1.5, *oppure è* $G = A_1 Y \ldots Y A_h Y K$ *con* $A_r \simeq M(p)$ $(r = 1,\ldots,h)$, K *del tipo* (ii) *e* $s < n-1$, *oppure del tipo* (iii).

Dim. Da 1.13, da 1.1, 1.2, dall'essere G/N non abeliano, G con un solo sottogruppo normale minimale e quindi Z(G) ciclico, sempre con t opportuno generatore di $\langle b\rangle$, e f opportuno generatore di H, segue subito che G è di uno dei tipi:

1) $G = \langle A,f,t\rangle$ con $A = \bar{A}_1 Y \ldots Y \bar{A}_h Y \langle z\rangle$ del tipo (k) del Teorema 1.1, $m > 2$, $1 = f^p = t^{p^\varepsilon} = [x,f]$ per ogni $x \in A$, $[f,t] = z^{p^{m-1}}$, $[z,t] = z^{p^s}$, $0 < s < m-1$ $(s \geq 2$ per $p = 2)$, $[x,t] \in \langle z^{p^{m-1}}\rangle$, $\langle t^{p^{m-s}}\rangle$ confrontabile con $Z(G) \cap (A \times \langle f\rangle)$;

(10) Per ogni $a,c \in A$, è $a^c = an$, con $n \in N = A'$, sicché $a^{c^p} = an^p =$ $= a$ e $c^p \in Z(A)$.

2) $G = \langle A,f,t\rangle$ con $A = C_1 \curlyvee \ldots \curlyvee C_h \curlyvee \langle c,d,z\rangle$ oppure $A = \langle c,d,z\rangle$ del tipo (kk) del Teorema 1.1, $Z(A) = \langle z\rangle, n>1$, $1 = f^p = t^{p^\varepsilon}$, $[x,f]=1$ per ogni $x \in A$, $[f,t] = z^{p^{n-1}}$, $[x,t] \in \langle z^{p^{n-1}}\rangle$ per ogni $x \in C_1 \curlyvee \ldots \curlyvee C_h \cup \{c^{-1}d\}$, $[c,t] = c^{p^s}$, $0 < s < n$ ($s \geq 2$ per $p = 2$), $Z(G) \cap \langle c^{-1}d,t\rangle$ confrontabile con $Z(G) \cap (A \times \langle f\rangle)$.

Si supponga G del tipo 1). Si osservi innanzitutto che si può esprimere $A \times \langle f\rangle$ come $(A_1 \curlyvee \ldots \curlyvee A_h \curlyvee \langle z\rangle) \times \langle f\rangle$ con ogni A_i generato da elementi a_i, b_i permutabili con t [11]. Si noti poi che è $Z(G) \cap (A \times \langle f\rangle) = \langle z^{p^{m-s-1}} f^{-1}\rangle$. Infatti, detto af^α un elemento di $Z(G) \cap (A \times \langle f\rangle)$, deve essere a permutabile con ogni elemento di A, sicché è $a = z^\beta$. Deve poi essere $t^{-1}z^\beta f^\alpha t = z^\beta z^{\beta p^s} f^\alpha z^{\alpha p^{m-1}} = z^\beta f^\alpha$, da cui $\beta p^s + \alpha p^{m-1} \equiv 0(p^m)$, sicché risulta $af^\alpha = (z^{p^{m-s-1}} f^{-1})^\eta$.

Allora, se è $\varepsilon > m$, deve essere $z^{p^{m-s-1}} f^{-1} \in \langle t^{p^{m-s}}\rangle \leq \langle z,t\rangle$ e quindi $f^{-1} \in \langle z,t\rangle = K$ del tipo (ii).

Se invece è $m-s \leq \varepsilon \leq m$, è $K = \langle z,t,f\rangle$ del tipo (iii).

Sia ora G del tipo 2). Si può ancora supporre $[x,t] = 1$, per ogni $x \in C_1 \curlyvee \ldots \curlyvee C_h \cup \{c^{-1}d\}$ e $[c,d] = z^{p^{n-1}} = [c, t^{p^{n-s}}]$, sicché risulta

(11) Ci si può chiaramente limitare a esaminare solo il caso $\bar{A}_i = \langle a_i, b_i\rangle$ con $[a_i, t] = z^{p^{m-1}}$ $[b_i, t] = 1$ e considerare $A_i = \langle a_i f^{-1}, b_i\rangle$.

$Z(G) \cap \langle c^{-1}d,t\rangle = \langle c^{-1}dt^{p^{n-s}}\rangle$ e $Z(G) \cap (A \times \langle f\rangle) = \langle z^{p^{n-s-1}}f^{-1}\rangle$, e $\langle c^{-1}dt^{p^{n-s}}\rangle$ e $\langle z^{p^{n-s-1}}f^{-1}\rangle$ confrontabili.

Se è $\varepsilon > n$, è $z^{p^{n-s-1}}f^{-1} \in \langle c^{-1}dt^{p^{n-s}}\rangle \leq \langle c,d,t\rangle$ e $f \in \langle A,t\rangle$, sicché G è del tipo richiesto con K del tipo (iii).

Se è $\varepsilon \leq n$, è $c^{-1}dt^{p^{n-s}}$ e $\langle z^{p^{n-s-1}}f^{-1}\rangle$ e, per ragioni d'ordine, $c^{-1}dt^{p^{n-s}}$ e $\langle z^{p^{n-s}}\rangle \leq \langle c,t\rangle$, $c^{-1}d \in \langle c,t\rangle$ e G è del tipo richiesto, sempre con K del tipo (iii).

Si è ora in grado di dimostrare il Teorema 1.5.

Dim. del Teorema 1.5. Se G è a fattoriali abeliani, l'asserto segue da 1.6, 1.7 e da 1.8, osservando che, per $r(G) > 2$, è G del tipo richiesto con K del tipo (i) oppure del tipo (ii), con $s = n-1$.

Se G è a fattoriali modulari, ma non a fattoriali abeliani, per 1.6 e per 1.10, è $\frac{G}{N} = \frac{A}{N}\langle bN\rangle$ con $\frac{A}{N} \lhd |\frac{G}{N}|$, $\frac{A}{N}$ abeliano, $|N| = p$, sicché è $A' \leq N$. Allora l'enunciato segue da 1.11, 1.12 e 1.14.

Viceversa, se è $G = A_1 Y \dots Y A_h Y K$, con $A_j \simeq M(p)$ $(j = 1,\dots,h)$, con K del tipo (i), (ii) o (iii), o $G = K$ e K del tipo (iii), G ha un solo sottogruppo normale minimale, ed è banalmente a quozienti modulari.

Se fosse poi modulare, avendo un solo sottogruppo normale minimale, risulterebbe metaciclico (cfr. 1), generabile quindi con due elementi, il che è assurdo.

OSSERVAZIONE. I p-gruppi finiti non modulari debolmente modulari caratterizzati da *Fort* [4] sono contenuti nei casi (i) e (ii) del Teorema 1.5.

2. GRUPPI FINITI SUPERSOLUBILI NON NILPOTENTI A FATTORIALI MODULARI, CON UN SOLO SOTTOGRUPPO NORMALE MINIMALE.

Si perverrà al seguente:

TEOREMA 2.1. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile non nilpotente, con un solo sottogruppo normale minimale.*

G *è a fattoriali modulari se, e solo se, è di uno dei tipi seguenti:*

(i) $$G = \langle y,x / y^{p^2} = x^q = 1, y^x = y^r \rangle$$

con p,q *primi distinti,* $r \not\equiv 1(p)$, $r^q \equiv 1(p)$, $0 < r < p$

(ii) $G = \langle P,x\rangle$ *con* $P = A_1 \curlyvee \dots \curlyvee A_h$ *del tipo* (k) *del* Teorema 1.1 $(m = 1)$, $p \neq 2$, $x^q = 1$, p,q *primi distinti,* $[s,x] \in s^{r-1}Z(P)$ *per ogni* $s \in P$, $r \not\equiv 1(p)$, $r^q \equiv 1(p)$

(iii) $G = [N]K$ con $|N| = p$, K *ciclico non di ordine primo,* $Z(G)=1$.

Premettiamo i seguenti risultati:

2.2. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile non nilpotente, con* N *unico sottogruppo normale minimale. Se* G *è a fattoriali modulari e* $\Phi(G) \neq 1$, *allora è* $|\pi(G)| = 2$ *e* $G/\Phi(G)$ P_o^**-gruppo.*

Dim. G ha un solo sottogruppo normale minimale, sicché $\Phi(G)$ è un p-gruppo, con p massimo divisore primo di $|G|$; inoltre $G/\Phi(G)$ è $\mathscr{L}$-indecomponibile come G, per cui è $\frac{G}{\Phi(G)} = \left[\frac{P}{\Phi(G)}\right]\frac{K\Phi(G)}{\Phi(G)}$ P_o^*-gruppo, con P p-sottogruppo di *Sylow* di G e $|\pi(G)| = |\pi(\frac{G}{\Phi(G)})| = 2$.

2.3. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile non nilpotente a fattoriali modulari,* $G = [P]\,Q$ *con* $|P| = p^\alpha, |Q| = q^\beta$, $p > q$, p q *primi,* $\Phi(G) \neq 1$ *e* N *unico sottogruppo normale minimale di* G.

Allora è $\Phi(P) = N$, $\exp P \leq p^2$ *e* $\beta = 1$.

Dim. E' G/N non decomponibile, sicché G/N è un P_o^*-gruppo e P/N è abeliano elementare; allora da [12] $\Phi(P) \neq 1$ segue $\Phi(P) = N$ e $\exp P \leq p^2$.

E' poi Q ciclico, $Q = \langle x\rangle$ e $(yN)^x = y^r N$, per ogni $y \in P$, con $r \not\equiv 1(p)$ e $r^q \equiv 1(p)$, sicché x^q induce l'identità su $\frac{P}{N} = \frac{P}{\Phi(P)}$ e quindi su P; pertanto è $x^q = 1$.

2.4. *Sia* $G = [P]\,Q$ *supersolubile non nilpotente,* $|P| = p^\alpha, |Q| = q$,

(12) $\Phi(P) = 1$ comporta P abeliano elementare d'ordine p^α con $\alpha \geq 2$ sicché, per il teorema di *Maschke*, esisterebbe un sottogruppo normale minimale di G distinto da N.

P *abeliano*, $N = \Phi(P)$ *unico sottogruppo normale minimale di* G.

Allora, se G *è a fattoriali modulari,* G *è del tipo* (i) *del* Teorema 2.1.

Dim. $\frac{G}{N} = \left[\frac{P}{N}\right]\frac{QN}{N}$ è un P_0^*-gruppo, e quindi ogni sottogruppo di $\frac{P}{N}$ è normalizzato da Q; pertanto P ha un solo sottogruppo d'ordine p [13], è ciclico, di ordine p^2 (cfr. 2.3).

Detto $P = \langle y \rangle$, si ha poi $y^x = y^r$, con $0 < r < p$ e $r \not\equiv 1(p)$, sicché $(y^p)^x = (y^p)^r \neq y^p$ e $Z(G) = 1$.

2.5. *Sia* $G = [P]\,Q$ *supersolubile non nilpotente,* $|P| = p^\alpha, |Q|=q$, P *non abeliano,* $N = \Phi(P)$ *unico sottogruppo normale minimale di* G, $Q = \langle x \rangle$.

Allora, se G *è a fattoriali modulari,* P *è un* p-*gruppo extraspeciale* [14] *e* G *è del tipo* (ii) *del* Teorema 2.1.

Dim. **E' banalmente** $P' = N = \Phi(P)$**; inoltre il centro di** P **è ciclico** [15], sicché (cfr. 2.3) è $|Z(P)| \leq p^2$. Ma allora P è un p-gruppo à fattoriali abeliani, x induce in P un automorfismo d'ordine primo con p che lascia invariato ogni sottogruppo normale in P, per cui (cfr. ad es. [3]) P è di esponente p, e quindi $Z(P) = P'$.

---

(13) Se esistesse $K \leq P$, $|K| = p$, $K \neq N$, si potrebbe considerare il gruppo $[K \times N]Q$; allora, per il teorema di *Maschke*, esisterebbe $\bar{K} \leq K \times N$, $\bar{K} \neq N, |\bar{K}| = p$, $\bar{K}$ normalizzato da Q e G avrebbe un sottogruppo normale d'ordine p, distinto da N.

(14) Si ricorda che un p-gruppo P è detto *extraspeciale* se è $P' = \Phi(P) = Z(P)$ d'ordine p.

(15) Basta ragionare come nella nota (13).

Segue quindi subito che G è del tipo richiesto.

2.6. *Sia G un gruppo finito supersolubile non nilpotente, con N unico sottogruppo normale minimale e* $\Phi(G) = 1$.

Allora, se G è a fattoriali modulari, G è del tipo (iii) *del* Teorema 2.1.

Dim. Detto p il massimo primo divisore di $|G|$, è $G = [P]\,K$, con P p-sottogruppo di *Sylow* di G. Allora è $\Phi(P) = 1$ sicché, per il teorema di *Maschke* e per le ipotesi su G, è $|P| = p$, $P = N$.

Da G' nilpotente e K sottogruppo di *Hall* di G, segue poi $K' \triangleleft G$ (cfr. [6], VI, 9.10) e quindi $K' = 1$, K abeliano. Pertanto $C_G(N) = N$ e $K \simeq \frac{G}{N} = \frac{N_G(N)}{C_G(N)}$ isomorfo ad un sottogruppo di Aut(N), e quindi ciclico.

E' poi banalmente K d'ordine non primo, essendo G non modulare.

Dim. del Teorema 2.1. La condizione necessaria segue da 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6.

Viceversa, se G è del tipo (i) o (ii), banalmente G è a fattoriali modulari, con un solo sottogruppo normale minimale.

Si supponga ora G del tipo (iii); N è l'unico sottogruppo normale minimale e quindi i quozienti di G distinti da G/{1} sono modulari. Se G fosse modulare, per $Z(G) = 1$ e K ciclico, si avrebbe G P_0^*-gruppo, $G = [P]K$ con $|K| = q^\beta$, $\beta > 1$ contro l'ipotesi $Z(G) = 1$.

3. GRUPPI FINITI SUPERSOLUBILI NON NILPOTENTI A FATTORIALI MODULARI, CON PIU' DI UN SOTTOGRUPPO NORMALE MINIMALE.

Si perverrà ai seguenti:

TEOREMA 3.1. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile non nilpotente con più di un sottogruppo normale minimale, sia* p *il massimo primo che divide* $|G|$ *e non esistano sottogruppi normali minimali di ordine distinto da* p.

Allora G *è a fattoriali modulari se, e solo se, è di uno dei tipi seguenti:*

(i) $G = [\langle n\rangle \times \langle \ell\rangle]\langle x\rangle$, *con* $n^p = \ell^p = x^q = 1$,
p,q *primi distinti*, $n^x = n^r$, $r^q \equiv 1(p)$,
$\ell^x = \ell^s$, $s \not\equiv 1(p)$, $s^q \equiv 1(p)$, $r \not\equiv s(p)$

(ii) $G = [\langle n\rangle \times \langle \ell\rangle](\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$, *con* $n^p = \ell^p = a^{q_1} = b^{q_2} = 1$,
p,q_1,q_2 *primi distinti*, $\ell^a = 1$, $n^b = n$,
$\ell^b = \ell^r$, $r \not\equiv 1(p)$, $r^q \equiv 1(p)$, $n^a = n^s$, $s \not\equiv 1(p)$, $s^q \equiv 1(p)$.

TEOREMA 3.2. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile non nilpotente, avente due sottogruppi normali minimali di ordini coprimi.*

Allora G *è a fattoriali modulari se, e solo se, è di uno dei tipi seguenti:*

(j) $G = \langle \ell\rangle \times [\langle n\rangle]\langle x\rangle$, *con* $n^p = \ell^q = x^q = 1$, $p \neq q$ *primi*,
$n^x = n^r$, $r \not\equiv 1(p)$, $r^q \equiv 1(p)$

(jj) $G = [\langle f\rangle]\langle z\rangle$, *con* $f^{pr} = z^q = 1, p, q, r$ *primi distinti*

$f^z = f^s$, $s \not\equiv 1(p)$, $s \not\equiv 1(r)$, $s^q \equiv 1(pr)$.

Per pervenire alla dimostrazione dei teoremi, si premettono le seguenti proposizioni:

3.3. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile non nilpotente,* $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ ($p_i > p_{i+1}$, *per ogni* $i \in \{1,\dots,t-1\}$), G *con più sottogruppi normali minimali, tutti dello stesso ordine.*

Allora, se G *è a fattoriali modulari, è* $t \leq 3$ *e* $\alpha_i = 1$, *per ogni* $i \in \{2,\dots,t\}$.

Dim. Sia $H_1,\dots,H_t$ un sistema di *Sylow* di G, $|H_i| = p_i^{\alpha_i}$ per ogni $i \in \{1,\dots,t\}$ e $N \neq L$, $N \triangleleft G$, $L \triangleleft G$, $|N| = |L| = p_1$.
$K = H_2 \dots H_t$ è un sottogruppo di *Hall* di G, G' è nilpotente sicché (cfr. [6]) è $K' \triangleleft G$; pertanto, per le ipotesi fatte sui sottogruppi normali minimali di G, è $K = H_2 \dots H_t$ abeliano.

Se per assurdo fosse $t \geq 4$, esisterebbe $\bar{i} \in \{2,\dots,t\}$ tale che $\frac{H_{\bar{i}}H}{N}$ e $\frac{H_{\bar{i}}L}{H}$ siano fattori diretti rispettivamente di $\frac{G}{N}$ e $\frac{G}{L}$ [16], sicché $H_{\bar{i}}N \triangleleft G$, $H_{\bar{i}}L \triangleleft G$ e $H_{\bar{i}} = H_{\bar{i}} \cap \mathbf{N}_{\bar{i}}L \triangleleft G$, contro le ipotesi. Quindi è $t \leq 3$.

---

(16) Ricordiamo che G/N e G/L sono modulari e quindi prodotti diretti di fattori che sono p-gruppi modulari o P_0^*-gruppi.

Inoltre ogni H_i, $i > 1$, è ciclico [17] e $\mho_1(H_i) \triangleleft G$, sicché $\mho_1(H_i) = 1$ e $|H_i| = p_i$, per ogni $i > 1$.

3.4. *Sia* $G = [H_1]H_2$ *con* $|H_1| = p^\alpha$, $|H_2| = q$, *supersolubile, tale che esistano* $N, L \triangleleft G$, $|N| = |L| = p$, $N \neq L$.

Se G/N *e* G/L *sono* P_o^**-gruppi, allora* G *è del tipo* (i) *del* Teorema 3.1, *con* $r \not\equiv 1(p)$.

Dim. I gruppi $\frac{G}{N} = \left[\frac{H_1}{N}\right]\frac{H_2N}{N}$ e $\frac{G}{L} = \left[\frac{H_1}{L}\right]\frac{H_2L}{L}$ sono P_o^*-gruppi, sicché H_1/N e H_1/L sono abeliani elementari, e tale è quindi anche H_1; inoltre, detto $H_2 = \langle x \rangle$, si ha:

$(h_1N)^x = h_1^rN$ con $r \not\equiv 1(p)$ e $r^q \equiv 1(p)$ e

$(h_1L)^x = h_1^rL$ con $s \not\equiv 1(p)$ e $s^q \equiv 1(p)$, per ogni $h_1 \in H_1$.

Se fosse $\alpha > 2$, si avrebbe [18] $r \equiv s(p)$ e G P_o^*-gruppo, contro le ipotesi. Quindi G è del tipo (i) del Teorema 3.1, con $r \not\equiv 1(p)$.

---

(17) Considerati $\frac{H_iN}{N}$ e $\frac{H_iL}{L}$, almeno uno dei due è il fattore non normale di un P_o^*-gruppo, sicché è H_i ciclico. E' poi $\mho_1(H_i)N \triangleleft G$, $\mho_1(H_i)L \triangleleft G$ e quindi $\mho_1(H_i) \triangleleft G$.

(18) Infatti, per il Teorema di *Maschke*, si avrebbe $G = [N \times L \times A_1 \times \ldots \times A_u]H_2$, con $A_i \triangleleft G$, $|A_i| = p$, per ogni $i \in \{1,\ldots,u\}$ e $a_1^x = a_1^r = a_1^s$, per ogni $a_1 \in A_1$

3.5. *Sia* $G = [H_1]H_2$ *con* $|H_1| = p^{\alpha}, |H_2| = q$, *supersolubile, e* N *e* L *sottogruppi normali minimali distinti di* G.

Se i quozienti G/L *e* G/N *sono l'uno nilpotente e l'altro* P_o^**-gruppo, allora* G *è del tipo* (i) *del* Teorema 3.1, *con* $r \equiv 1(p)$.

Dim. Siano G/N P_o^*-gruppo e G/L nilpotente sicché, detto $H_2 = \langle x \rangle$, si ha: $h_1^x = h_1^s m$, con $m \in N$, $s \not\equiv 1(p)$ e $h_1^x = h_1 f$, con $f \in L$, per ogni $h_1 \in H_1$.

Se $h \in H_1 - (N \cup L)$, è $h^{s-1} = fm^{-1} \in L \times N$[19] e $H_1 = N \times L$, da cui G del tipo (i) del Teorema 3.1, con $r \equiv 1(p)$.

3.6. *Sia* $G = [H_1]H_2H_3$, $|H_1| = p^{\alpha}$, $|H_2| = q_1, |H_3| = q_2, p, q_1, q_2$ *primi distinti,* H_2 *e* H_3 *non normali in* G,N *e* L *due sottogruppi normali minimali distinti di* G.

Allora, se G *è a fattoriali modulari,* G *è del tipo* (ii) *del* Teorema 3.1.

Dim. Per le ipotesi fatte su H_2, H_3 e G, è necessariamente

$$\frac{G}{L} = \left[\frac{H_1}{L}\right]\frac{H_2L}{L} \times \frac{H_3L}{L} \quad e \quad \frac{G}{N} = \left[\frac{H_1}{N}\right]\frac{H_3N}{N} \times \frac{H_2N}{N} \quad \text{con} \left[\frac{H_1}{L}\right]\frac{H_2L}{L} \quad e \left[\frac{H_1}{N}\right]\frac{H_3N}{N}$$

P_o^*-gruppi, da cui [20] è $H_1 = L \times N$.

---

(19) E' $h^x = hf = h^s m$ per opportuni $f \in L$ e $m \in N$, da cui $h^{s-1} = fm^{-1}$. E' poi h di periodo p per le ipotesi fatte su r.

(20) E' $\Phi(H_1) \leq N \cap L = 1$ e quindi è H_1 abeliano elementare. Detto poi $H_2 = \langle a \rangle$ e $H_3 = \langle b \rangle$, si ha: $h_1^b = h_1 f = h_1 m$, per ogni $h_1 \in H_1$, con $f \in L$, $m \in N$ e $r \not\equiv 1(p)$, sicché $h_1^{r-1} = fm^{-1} \in L \times N$, e $H_1 = L \times N$.

E' poi $H_2H_3 = H_2 \times H_3$ e G è del tipo (ii) del Teorema 3.1.

Dim. del Teorema 3.1. La condizione necessaria segue subito da 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, osservando che almeno un quoziente non banale di G è un P_o^*-gruppo, per le ipotesi fatte sui sottogruppi normali di G.

I gruppi di tipo (i) e (ii) sono poi banalmente a fattoriali modulari.

3.7. *Sia* $G = [H_1] H_2$, $|H_1| = p^\alpha$, $|H_2| = q^\beta$, *supersolubile, con* N *e* L *sottogruppi normali minimali di* G, $|N| = p$, $|L| = q$.

Se G *è a fattoriali modulari,* G *è del tipo* (j) *del* Teorema 3.2.

Dim. E' $H_2 \ntriangleleft G$, sicché è $\beta > 1$, $\frac{G}{L} = \left[\frac{H_1L}{L}\right] \frac{H_2}{L}$ P_o^*-gruppo e H_1 abeliano elementare.

Da G non modulare, segue H_2 non abeliano e $H_1 = N$[21]. H_2 non ciclico comporta anche $L \cap \Phi(H_2) = 1$ e $H_2 = [L]A$ con A ciclico. Ma allora è H_2 abeliano [22], $H_2 = L \times A$ e $\mho_1(A)$ normale in H_2 e in H_1A, poiché G/L è un P_o^*-gruppo. Quindi è $\mho_1(A) \triangleleft G$, e $\mho_1(A) = 1$,

---

(21) Se fosse $H_1 > N$, allora $\frac{G}{N} = \left[\frac{H_1}{N}\right] \frac{H_2N}{N}$ sarebbe un P_o^*-gruppo e quindi H_2 sarebbe ciclico.

(22) H_2 è un q-gruppo modulare con un sottogruppo massimale ciclico, sicché è $H_2 = [B]C$ con $|B| = q^{\beta-1}$, $|C| = q$, $\beta \geq 2$ per H_2 non abeliano, contro l'essere $H_2 = [L]A$, con A ciclico.

essendo $\frac{G}{\mho_1(A)} = \left[\frac{N\mho_1(A)}{\mho_1(A)}\right]\left(\left[\frac{\mho_1(A)}{\mho_1(A)}\right]\frac{A}{\mho_1(A)}\right)$ non modulare.

Pertanto G è del tipo richiesto.

3.8. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile non nilpotente, con* $|\pi(G)| \geq 3$, *ed esistano due sottogruppi* N, L *normali in* G, $|N| = p$, $|L| = r$, *con* p *massimo primo che divide l'ordine di* G.

Allora, se G *è a fattoriali modulari, il* p-*sottogruppo di Sylow* P *di* G *ha ordine* p.

Dim. $\ell(G)$ è $\mathscr{L}$-indecomponibile, e così $\ell(G/\Phi(G))$; pertanto, se fosse $\Phi(G) \neq 1$, si avrebbe $G/\Phi(G)$ modulare, con $|\pi(\frac{G}{\Phi(G)})| \geq 3$. Allora è $\Phi(G) = 1$, P abeliano elementare e, per il teorema di *Maschke*, $P = N_1 \times \ldots \times N_t$, con $N_i \lhd G$, per ogni $i \in \{1,\ldots,t\}$.

Per assurdo, sia $t > 1$.

Detto Q un q-sottogruppo di *Sylow* di G, $Q \not\leq C_G(P)$, e considerati i tre gruppi modulari $\frac{G}{N_1}$, $\frac{G}{N_2}$, $\frac{G}{L}$, in almeno due di essi la copia omomorfa di Q non centralizza P. Ciò succeda, per esempio, in $\frac{G}{N_1}$ e $\frac{G}{N_2}$. Allora è $\frac{G}{N_1} = \frac{A}{N_1} \times \frac{B}{N_1}$, con $\left|\frac{A}{N_1}\right| = p^\alpha q^\beta$, $\left(\left|\frac{A}{N_1}\right|, \left|\frac{B}{N_1}\right|\right) = 1$,

$$\frac{G}{N_2} = \frac{C}{N_2} \times \frac{D}{N_2}, \text{ con } \left|\frac{C}{N_2}\right| = p^\alpha q^\beta, \ \left(\left|\frac{C}{N_2}\right|, \left|\frac{D}{N_2}\right|\right) = 1.$$

Ovviamente è $B = [N_1]K$ e, detto S un qualunque sottogruppo di *Sylow* di K, si ha $\frac{SN_2}{N_2} \leq \frac{D}{N_2}$; pertanto è $K \leq D$.

Ma allora $K \leq B \cap D = N_1 K \cap D = K(N_1 \cap D) = K$ e quindi è $K = B \cap D \triangleleft G$ e $G = A \times K$ [23], contro le ipotesi.

3.9. *Non esiste un gruppo* G *finito supersolubile a fattoriali modulari, con* $|\pi(G)| \geq 4$ *e* G *dotato di due sottogruppi normali minimali* N *e* L *di ordini coprimi.*

Dim. Sia p il massimo primo che divide $|G|$.
Detto P un p-sottogruppo di *Sylow* di G, per 3.8 risulta $|P| = p$ e $P = N$. Sia Q un q-sottogruppo di *Sylow* di G che non centralizza P; allora è $\frac{G}{L} = \left[\frac{PL}{L}\right] \frac{QL}{L} \times \frac{T}{L}$ con$\left(\left|\frac{T}{L}\right|, p\right) = \left(\left|\frac{T}{L}\right|, q\right) = 1$ e $\frac{G}{P} = \frac{A}{P} \times \frac{B}{P}$, con $\frac{A}{P} \geq \frac{QP}{P}$, $\frac{B}{P} \neq 1$ e $\left(\left|\frac{A}{P}\right|, \left|\frac{B}{P}\right|\right) = 1$.

Allora è $B = [P]K$ per un opportuno $K \leq B$ e [24] $K \leq T$, sicché è $G = A \times K$, con $A \neq 1$, $K \neq 1$, contro le ipotesi.

3.10. *Sia* G *un gruppo finito supersolubile con* $|\pi(G)| = 3$ *e con sottogruppi normali minimali coprimi.*

Allora, se G *è a fattoriali modulari,* G *è del tipo* (jj) *del Teorema 3.2.*

Dim. Sia $G = [P]QR$ con $|P| = p$, p massimo divisore primo di $|G|$ (cfr. 3.8), $|Q| = q^{\beta}$, $|R| = r^{\gamma}$ e $Q \not\leq C_G(P)$.

---

(23) E' $A \cap K \leq A \cap K = N_1 \cap K = 1$ e $G = AB = AN_1K = AK$.

(24) Comunque preso un sottogruppo di *Sylow* S di K, è $\left(\left|\frac{SL}{L}\right|, p\right) = \left(\left|\frac{SL}{L}\right|, q\right) = 1$, sicché $\frac{SL}{L} \leq \frac{T}{L}$ e $K \leq T$.

E' poi $B \cap T = PK \cap T = K(P \cap T) = K \triangleleft G$, $G = AB = APK = AK$ e $A \cap K \leq A \cap B \cap K = 1$.

Per ipotesi, esiste un sottogruppo L normale minimale di ordine primo con p.

Si supponga sia $|L| = r$.

Allora è $\frac{G}{L} = \left[\frac{PL}{L}\right]\frac{QL}{L} \times \frac{R}{L}$, $R \triangleleft G$ e quindi $PQ \ntriangleleft G$, sicché è $\frac{G}{P} =$

$= \left[\frac{RP}{P}\right] \frac{QP}{P}$, Q ciclico e R abeliano elementare.

Ma allora è $|R| = r$ (25)

Inoltre è $|Q| = q$ (26), $r > q$ e G è del tipo (jj) del Teorema 3.2, con $\langle f\rangle = P \times L$ e con s opportunamente determinato.

Si supponga ora, per assurdo, che non esista un sottogruppo normale minimale d'ordine r.

Allora è $|L| = q$, $L < Q$, $\frac{G}{L} = \left[\frac{PL}{L}\right]\frac{Q}{L} \times \frac{RL}{L}$, da cui $PQ \triangleleft G$ e $RL \triangleleft G$.

E' poi $\frac{G}{P} = \frac{QP}{P}\,\frac{RP}{P} = \left[\frac{QP}{P}\right]\frac{RP}{P}$, non potendo essere $RP \triangleleft G$.

E' $R = \langle a\rangle$, Q abeliano elementare, $Q = L \times B$, con $B \neq 1$, sicché per ogni $b \in T$ è $b^a = b\ell = b^u n$, con $\ell \in L$, $n \in P$ e $u \not\equiv 1(q)$, da cui $b^{u-1} \in P \times L$, il che è assurdo.

---

(25) Sia $Q = \langle z\rangle$ e, per assurdo $|R| > r$, $R = L \times S$ con $S \neq 1$. Allora, per ogni $s \in S$, si ha $s^b L = sL$, $s^b = s\ell$, con $\ell \in L$ e $s^b P = s^t P$, $t \not\equiv 1(r)$ e $s^b = s^t n$, con $n \in P$, sicché $s^{t-1} = \ell n^{-1} \in L \times P$, contro l'ipotesi.

(26) Se fosse $\mho_1(Q) = D \neq 1$, allora $\frac{G}{D} = \left[\frac{PD}{D}\right]\frac{Q}{D} \times \frac{RD}{D}$ e Q centralizzerebbe R contro le ipotesi.

Dim. del Teorema 3.2. La condizione necessaria discende da 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10.

E' poi immediato verificare che i gruppi di tipo (j) e (jj) sono a fattoriali modulari.

OSSERVAZIONE. I gruppi finiti supersolubili, non nilpotenti, non modulari, debolmente modulari, caratterizzati da *Fort* [4], sono contenuti nei casi (iii) del Teorema 2.1, (jj) del Teorema 3.2 e (ii) del Teorema 3.1.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CURZIO: *Sui gruppi risolubili a fattoriali supersolubili*, Ric. di Matem., 9 (1960), pp. 82-90.

[2] M. CURZIO: *Una osservazione sui gruppi finiti a fattoriali supersolubili*, Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, (4) 27 (1960), pp. 1-4.

[3] C. DE VIVO: *Gruppi finiti risolubili a fattoriali T-gruppi*, Le Matem., 27 (1972), pp. 1-11.

[4] A. FORT: *Gruppi finiti debolmente modulari*, Rend. Sem. Mat.Univ. Padova, 53 (1975), pp. 269-290.

[5] D.GORENSTEIN: *Finite groups*, Harper & Row, New York, 1968.

[6] B. HUPPERT: *Endliche Gruppen* I, Springer, Berlin-Heidelberg, 1967.

[7] K. IWASAWA: *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen*, J. Univ., Tokyo, 4 (1941), pp. 171-199.

[8] T. KLEIN: *Groups whose proper factors are all abelian*, Israel J. Math., 9 (1971), pp. 362-366.

[9] F. NAPOLITANI: *Sui p-gruppi modulari finiti*,Rend. Sem.Mat.Univ. Padova, 39 (1967), pp. 296-303.

[10] F. NAPOLITANI: *Gruppi finiti minimali non modulari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 45 (1971), pp. 229-247.

[11] M. F. NEWMAN: *On a class of nilpotent groups*, Proc. London Math Soc., (3) 10 (1960), pp. 365-375.

[12] D. J. S. ROBINSON: *Groups whose homomorphic images have a transitive normality relation*, Trans. Amer. Math. Soc., 176 (1973), pp. 181-213.

[13] L. A. ROSATI: *Sui gruppi a fattoriali abeliani*, Le Matem., 13 (1958), pp. 303-324.

[14] M. SUZUKI: *Structure of a group and the structure of its lat-*

tice of subgroups, Erg. Math., 10, Springer, Berlin-Heidelberg,1956.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 22 Giugno 1981
ed accettato per la pubblicazione il 18 Settembre 1981
su parere favorevole di M. Curzio e F. Napolitani