Note di Matematica Vol. II, 57-71 (1982)

# SUI RETICOLI DI CONGRUENZE DI STRUTTURE ALGEBRICHE MODELLI DI TEORIE UNIVERSALI POSITIVE

Sauro TULIPANI (*)

Summary. *Let* T *be a countable first order theory with positive axioms and the congruence extension property. The main result of this paper is the following. If* T *has a model whose cardinality is greater than the continuum and whose congruence lattice* L *is of finite length, then* T *has in every infinite cardinality a model whose congruence lattice is isomorphic to a filter of* L. *Some other results about subdirectly irreducible models are also given.*

*The results stated above are a generalization for the theories considered of a theorem of McKenzie and Shelah.*

## 1. INTRODUZIONE.

Un teorema di W. TAYLOR [10] mostra che se una varietà $\mathcal{V}$ possiede un'algebra A sottodirettamente irriducibile e di cardinalità mag

(*) Istituto di Matematica - Università degli Studi - CAMERINO -

giore di quella del continuo $\mathbf{c}$ allora $\mathcal{V}$ possiede un'algebra sottodirettamente irriducibile B per ogni cardinalità infinita. Tuttavia, tale teorema non dà alcun legame tra il reticolo Con(B) delle congruenze di B ed il reticolo Con(A).

In seguito R. McKENZIE e S. SHELAH hanno mostrato che, se una teoria universale e positiva ammette un modello A semplice e di cardinalità maggiore di $\mathbf{c}$ allora essa possiede un'algebra semplice B di ogni cardinalità infinita; in tal caso si ha ovviamente Con(B)$\approx$Con(A) Si precisa che i risultati sopra esposti e quelli che seguono si riferiscono a strutture e teorie in linguaggi contabili.

In questa nota noi proveremo, tra i principali risultati, che se una teoria universale e positiva T avente la proprietà di estensione delle congruenze ammette come modello un'algebra A di cardinalità maggiore di $\mathbf{c}$ e con Con(A) contabile e di lunghezza finita allora per ogni cardinale $\lambda$ infinito esiste un modello B di T di cardinalità $\lambda$ e tale che Con(B) è isomorfo ad un filtro di Con(A). Si può inoltre ottenere un B come sopra e con Con(B) $\approx$ Con(A) quando si sostituisce l'ipotesi di "Con(A) contabile e di lunghezza finita" con "A sottodirettamente irriducibile e l'unica congruenza minimale di A ha almeno una classe di cardinalità maggiore del continuo".

Tali risultati vengono poi adoperati per valutare il numero di Hanf (Cfr. [6][9][11]) di una famiglia $\{K_T\}$ di classi di strutture dove $K_T$ è una sottoclasse particolare di modelli della teoria del primo ordine T e dove T varia tra tutte le teorie universali positive in linguaggi contabili.

## 2. NOTAZIONI E PRELIMINARI.

In questa nota si considerano strutture algebriche di tipo conta bile e teorie del primo ordine in un linguaggio contabile e senza simboli relazionali. Una teoria sarà detta universale e positiva se essa ammette come assiomi un insieme di enunciati universali e positivi.

Diremo che un'algebra A ha la proprietà di estensione delle congruenze (abbr. CEP) se per ogni congruenza R su una sottostruttura B di A esiste una congruenza R' su A tale che $R = R' \cap B^2$. Una classe di strutture ha la CEP se ogni struttura della classe ha la CEP; una teoria ha la CEP se la classe dei suoi modelli ha tale proprietà.

Una n-formula debole di congruenza in un certo linguaggio è una formula esistenziale positiva $\psi(u_1,\dots u_n;\ v_1,\dots v_n;\ x,y)$ nelle 2n+2 variabili libere $u_1 \dots u_n, v_1, \dots v_n, x, y$ tale che risulti logicamente valido l'enunciato ottenuto dalla seguente formula

$$((u_1 = v_1) \wedge (u_2 = v_2) \wedge \dots \wedge (u_n = v_n) \wedge \psi) \rightarrow (x = y)$$

quantificando universalmente le sue variabili libere. La definizione *di tali formule per n=1 è stata data e usata per la prima volta in* [1] ,[10]. Per ogni n denoteremo l'insieme delle n-formule deboli di congruenza con $\Gamma_n$ (Cfr. [11]). L'importanza delle n-formule deboli di congruenza sta nel seguente fatto (Cfr. [5],[12]) noto nella letteratura come *Lemma di Mal'cev*: - (c,d) appartiene alla minima congruenza di A contenente $(a_1,b_1),\dots (a_n,b_n)$ se e solo se esiste una formula $\psi$ di $\Gamma_n$ tale che $A \models \psi(a_1,\dots a_n;b_1,\dots b_n;\ c,d)$. -

La minima congruenza di A contenente le n coppie $(a_1,b_1),\dots(a_n,b_n)$ verrà denotata con $\theta_A(a_1,\dots a_n;b_1,\dots b_n)$. E' ben noto che le congruenze finitamente generate, di un'algebra A, dette anche compatte, formano un semireticolo rispetto all'unione reticolare di congruenze. Esso verrà denotato con Comp(A); mentre Con(A) denoterà il reticolo delle congruenze di A. Il medesimo simbolo A indicherà una struttura e il suo insieme sostegno $U_A$ e $i_A$ denoteranno rispettivamente la congruenza massima e la minima della struttura A.

Un reticolo sarà detto di lunghezza finita r se in esso esiste almeno una catena di lunghezza r ed ogni catena ha lunghezza minore o uguale ad r.

Nel Lemma 1 verrà adoperato un teorema di partizione di Erdős-Rado (Cfr. [6] [10]). A tal proposito, seguendo la notazione usuale, denoteremo con $[A]^2$ l'insieme dei sottoinsiemi di A formati da due elementi

Infine assumeremo il lettore familiare con la notazione standard e i principali risultati di Algebra Universale e di Teoria dei Modelli; si rimanda pertanto a [2], [4], [5].

## 3. PRINCIPALI RISULTATI.

LEMMA 1. *Sia* T *una teoria universale positiva con* CEP *e sia* A *un modello sottodirettamente irriducibile di* T. *Se l'unica congruenza minimale di* A *possiede almeno una classe di cardinalità più grande del continuo, allora per ogni cardinale* $\lambda$ *infinito* T *possiede un modello* B *di cardinalità maggiore o uguale a* $\lambda$ *e tale che* $\mathrm{Con}(B) \simeq \mathrm{Con}(A)$

*Dim.* Si denoti con D una classe dell'unica congruenza minimale di A tale che card(D) > $\mathbf{c}$. Si fissino due elementi distinti di D e siano $a_0, b_0$. Per ogni $\alpha, \beta \in \Gamma_1$ si consideri l'insieme seguente

$$(3.1) \quad E_{\alpha\beta} = \{(a,b) : (a,b) \in A^2,\ A \models \alpha(a_0,b_0,a_0,a) \wedge \beta(a,b,a_0,b_0)\}$$

Sia $F_{\alpha\beta}$ il sottoinsieme di $[A]^2$ definito da

(3.2) $\{a,b\} \in F_{\alpha\beta}$ se e solo se $(a,b) \in E_{\alpha\beta}$ & $(b,a) \in E_{\alpha\beta}$

Dalla definizione possiamo verificare che

(3.3) $$\bigcup_{\alpha,\beta\in\Gamma_1} F_{\alpha\beta} \supseteq [D]^2 .$$

Infatti se $a,b \in D$, $a \neq b$ allora per il Lemma di Mal'cev esistono $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ di $\Gamma_2$ tali che

$$A \models \alpha_1(a_0,b_0,a_0,a) \wedge \alpha_2(a_0,b_0,a_0,b) \wedge \beta_1(a,b,a_0,b_0) \wedge \beta_2(b,a,a_0,b_0).$$

Da ciò si deduce che $\{a,b\} \in F_{\alpha\beta}$ con $\alpha=\alpha_1 \vee \alpha_2$, $\beta=\beta_1 \vee \beta_2$.

Da (3.3) e dal fatto che $\Gamma_1$ è numerabile, usando un teorema di partizione di Erdös-Rado [6], si ha che esiste un sottoinsieme infinito G di D ed un $F_{\alpha\beta}$ tale che

(3.4) $$F_{\alpha\beta} \supseteq [G]^2 .$$

Si consideri ora un insieme di costanti $C = \{c_\gamma : \gamma < \lambda\}$ di cardinalità $\lambda$ e si formi il linguaggio L' ottenuto dal linguaggio L della teoria T aggiungendo le costanti di C ed una costante per ciascun elemento di A. Per non appesantire troppo la notazione si denoteranno con lo stesso simbolo le costanti e le loro interpretazioni.

Sia T' la teoria in L' così definita

(3.5) $$T'=Th(A,a)_{a\in A} \cup \{\alpha(a_0,b_0,a_0,c_\gamma),\beta(c_\gamma,c_\delta,a_0,b_0),\neg(c_\gamma = c_\delta):\gamma<\delta<\lambda\}$$

Sia S un sottoinsieme finito di T'. Con l'uso di (3.4) si può ricavare da A un modello di S interpretando le costanti di C, che vi compaiono, in elementi di G.

Per il teorema di compattezza T' ha allora un modello che denoteremo con M'. Si noti che A è sottostruttura elementare del modelmo M' ridotto al linguaggio L. Sia M la sottostruttura di M' generata dagli elementi di A e dalla interpretazione in M' delle costanti di C. Poiché costanti distinte di C hanno interpretazione distinta, esiste una congruenza R di M massimale rispetto alla condizione

(3.6) $(c_\gamma, c_\delta) \notin R$ per ogni $\gamma < \delta < \lambda$

Sia B = M/R. Abbiamo allora i seguenti fatti

(3.7) - M è un modello di T -

Infatti T è una teoria universale e $T \subset T'$.

(3.8) - $R \cap A^2 = i_A$ -

Se fosse $R \cap A^2 \neq i_A$ allora $(a_0, b_0) \in R \cap A^2$. Poiché $M' \models \alpha(a_0, b_0, a_0, c_\gamma)$ per ogni $\gamma < \lambda$, per la CEP di T risulterebbe che $(a_0, c_\gamma) \in R$ per ogni $\gamma < \lambda$, contro la (3.6).

(3.9) - A è isomorfa ad una sottostruttura di B -

Ciò è immediato dalla (3.8).

(3.10) - La cardinalità di B è maggiore a $\lambda$. -

Discende da (3.6).

(3.11) - $B$ è modello di $T$ -

Ciò discende da (3.7) e dal fatto che $T$ è positiva.

(3.12) - $\theta_B(a_0,b_0)$ è l'unica congruenza minimale di $B$ -

Sia $\rho \in \mathrm{Con}(B)$, $\rho \neq i_B$, allora per (3.6) esistono $c_\gamma, c_\delta$ tale che $(c_\gamma,c_\delta) \in \rho$. Poiché per (3.5) $M' \models \beta(c_\gamma,c_\delta,a_0,b_0)$ si ha che $(a_0,b_0) \in \theta_{M'}(c_\gamma,c_\delta)$. Allora per la CEP $(a_0,b_0) \in \theta_M(c_\gamma,c_\delta)$. Quindi $(a_0,b_0) \in \theta_B(c_\gamma,c_\delta)$ da cui $(a_0,b_0) \in \rho$.

(3.13) - Per ogni $x \in B$ esiste $x' \in A$ tale che per ogni $\rho\in\mathrm{Con}(B)$, $\rho \neq i_B$ risulta $(x,x') \in \rho$

Se $x\in B$ allora $x=p/R$ dove $p$ è il valore che assume in $M$ un termine sui generatori di $M$. Sia $p=t(a_1,\dots a_m, c_{\delta_1},\dots c_{\delta_s})$ e sia $p' = t(a_1,\dots a_m,a_0,\dots a_0)$ e $x' = p'/R$. Poiché $M' \models \alpha(a_0,b_0,a_0,c_\delta)$ per ogni $\delta<\lambda$, si ha che $(a_0,c_\delta) \in \theta_M(a_0,b_0)$, da cui $(a_0,c_\delta) \in \theta_B(a_0,b_0)$. Essendo $\rho \neq i_B$, per (3.12) $\rho$ è maggiore o uguale a $\theta_B(a_0,b_0)$. Allora $(a_0,c_\delta) \in \rho$ per ogni $\delta<\lambda$; ne segue $(x,x') \in \rho$.

(3.14) - L'applicazione da $\mathrm{Con}(B)$ a $\mathrm{Con}(A)$ definita da: $\rho \to \rho^* = \rho \cap A^2$ è un isomorfismo reticolare. -

Tale applicazione è surgettiva per la CEP, preserva l'ordine perché chiaramente vale $(\rho_1 \cap \rho_2)^* = \rho_1^* \cap \rho_2^*$. Essa è inoltre iniettiva per il fatto (3.15) che segue

(3.15) - $\rho_1^* \leq \rho_2^*$ implica $\rho_1 \leq \rho_2$ -

Assumiamo $\rho_1^* \leq \rho_2^*$. Per dimostrare $\rho_1 \leq \rho_2$ possiamo supporre $\rho_1 \neq i_B$. Allora necessariamente $(a_0,b_0) \in \rho_1$ e quindi $(a_0,b_0) \in \rho_2$. Possiamo allora usare la (3.13) e affermare che $(x,y) \in \rho_1$ implica $(x',y') \in \rho_1^*$ implica $(x',y') \in \rho_2^*$ implica $(x,y) \in \rho_2$.

I fatti (3.10), (3.11), (3.14) sono la tesi del lemma.

LEMMA 2. *Sia* B *un'algebra infinita di cardinalità* $\beta$ *in un linguaggio contabile e con il semireticolo delle congruenze compatte di cardinalità* $\alpha$ $(\alpha \leq \beta)$. *Allora per ogni cardinale infinito* $\lambda$ *con* $\alpha \leq \lambda \leq \beta$ *esiste una sottostruttura elementare* A *di* B *di cardinalità* $\lambda$ *e tale che* $\mathrm{Con}(A) \simeq \mathrm{Con}(B$. -

*Dim.* E' ben noto [5] che il reticolo delle congruenze di un'algebra è isomorfo al reticolo degli ideali del semireticolo delle sue congruenze compatte. Allora, per dimostrare il lemma, basterà determinare una sottostruttura elementare A di B tale che Comp(A)=Comp(B). Per ogni $R \in \mathrm{Comp}(B)$ si fissi un insieme di generatori finito. Sia A una sottostruttura elementare di B di cardinalità $\lambda$ che contiene tutti gli elementi che compaiono nelle coppie di generatori per qualche $R \in \mathrm{Comp}(B)$. Ciò è possibile perché $\alpha \leq \lambda \leq \beta$. Per ogni $R \in \mathrm{Comp}(B)$ sia $R' = R \cap A^2$. Se $a_1,\dots a_n,b_1,\dots b_n \in A$ allora

$$\theta_B(a_1, .. a_n; b_1, .. b_n) \cap A^2 = \theta_A(a_1, .. a_n; b_1, .. b_n)$$

perché A risulta sottostruttura elementare di B. Quindi resta definita una funzione surgettiva f da Comp(B) a Comp(A) che manda R in R'. Inoltre, sempre per il fatto che A è sottostruttura elementare di B, per ogni $R,S \in$ Comp(B) si ha che: $R \subseteq S$ se e solo se $R' \subseteq S'$. Ne segue che f è biettiva e preserva l'ordine; dunque essa deve essere un isomorfismo tra il semireticolo Comp(B) ed il semireticolo Comp(A).

TEOREMA 1. *Sia* T *una teoria universale positiva con* CEP. *Supponiamo esista un modello* A *di* T *che sia sottodirettamente irriducibile, con semireticolo delle congruenze compatte di cardinalità* $\alpha$ *e tale che l'unica congruenza minimale abbia almeno una classe di cardinalità maggiore del continuo. Allora per ogni cardinale* $\lambda \geq \max\{\alpha, \aleph_0\}$ *esiste un modello* B *di* T *di cardinalità* $\lambda$ *e con* Con(B) $\cong$ Con(A).

*Dim.* - Discende dal Lemma 1 e dal Lemma 2.

TEOREMA 2. *Sia* T *una teoria universale positiva e con* CEP. *Supponiamo esista un modello* A *di* T *di cardinalità maggiore del continuo e con reticolo delle congruenze* Con(A) *di lunghezza finita e di cardinalità* $\alpha$. *Allora, per ogni cardinale* $\lambda$ *con* $\lambda \geq \max\{\alpha, \aleph_0\}$ *esiste un modello* B *di* T *di cardinalità* $\lambda$ *e tale che* Con(B) *è isomorfo ad un filtro di* Con(A).

*Dim.* Distinguiamo tre casi.

1° *Caso*: - A è sottodirettamente irriducibile e l'unica congruen za minimale ha una classe di cardinalità maggiore del continuo.

Si usi in tal caso il Teorema 1 osservando che ogni congruenza di A risulta compatta.

Nei casi che seguono procediamo per induzione sulla lunghezza di Con(A), osservando che, se non siamo nel primo caso, allora A possiede più di due congruenze.

2° *Caso.* A è sottodirettamente irriducibile, ma non si trova nel Caso 1°.

Se R è l'unica congruenza minimale di A, allora la cardinalità di A/R è maggiore del continuo. Ma Con(A/R) ha lunghezza minore di Con(A) ed A/R è modello di T. Così dall'ipotesi dei induzione segue che per ogni $\lambda \geq \max\{|Con(A/R)|, \aleph_0\} = \max\{|Con(A)|, \aleph_0\}$ esiste un modello B di T di cardinalità $\lambda$ e tale che Con(B) è isomorfo ad un filtro di Con(A/R). Quindi Con(B) è isomorfo ad un filtro di Con(A).

3° *Caso:* - A non è sottodirettamente irriducibile.

In tal caso esistono almeno due congruenze minimali R,S, per cui A risulta prodotto sottodiretto di A/R e di A/S. Allora A/R oppure A/S deve essere di cardinalità maggiore del continuo. Ora, applicando l'ipotesi di induzione come nel Caso 2°, per ogni $\lambda \geq \max\{|Con(A)|, \aleph_0\}$ si ha un B di cardinalità $\lambda$ e tale che Con(B) è isomorfo ad un filtro di Con(A).

COROLLARIO 1. *Sia* T *una teoria universale positiva e con* CEP. *Supponiamo esista un cardinale* $\delta$ *maggiore del continuo ed un modello* A *di* T *di cardinalità* $\delta$ *con* Con(A) *di lunghezza finita* r.

*Allora esiste un reticolo* L *di lunghezza minore o uguale ad* r *tale che per ogni cardinale* $\lambda \geq \delta$ *esiste un modello* B *di* T *di cardinalità* $\lambda$ *e con* Con(B) $\cong$ L.

*Dim.* Sia L un reticolo di lunghezza minima per cui esiste un modello M di T di cardinalità $\delta$ e tale che L $\cong$ Con(M). La dimostrazione segue ora dal Teorema 2 e dal Lemma 2 osservando che L ha necessariamente cardinalità minore o uguale a $\delta$.

## 4. ALTRI RISULTATI.

*Definizione* 1. Sia R una classe non vuota di reticoli con zero ed uno, di lunghezza finita maggiore o uguale ad uno. Inoltre R sia tale che L $\in$ R e F è un filtro di L allora F $\in$ R . Per ogni teoria T denotiamo con K(R,T) la classe dei modelli A di T tali che Con(A) è isomorfo ad un reticolo di R .

*Osservazione* . Ad ogni classe R definita come sopra appartiene sempre il reticolo con due soli elementi. Da ciò si può dedurre che se T è una teoria universale positiva allora K(R,T) non è mai vuota. Infatti essa possiede sempre algebre semplici di cardinalità maggiore di uno.

La dimostrazione che ogni teoria equazionale possiede almeno un modello semplice non banale, cioé di cardinalità maggiore di uno, è stata data in [7]. Una siffatta dimostrazione si può generalizzare per ogni teoria universale positiva. Diamo ora una linea di dimostrazione che si basa sui seguenti punti

(4.1) Essendo T una teoria universale positiva basta dimostrare che esiste un modello di T con una congruenza massimale.

(4.2) Si fissi un A che sia modello di T e non possegga congruenze massimali. Allora la massima congruenza $U_A$ non è finitamente generata.

(4.3) Sia allora c un elemento fissato in A. Siccome $U_A$ non è finitamente generata allora per ogni n ed ogni $\psi \in \Gamma_n$ ed ogni $a,b \in A^n$ l'insieme

$$H(\psi,a,b) = \{d : A \models \neg\psi(a,b,c,d)\}$$

non è finito.

(4.4) La famiglia $\mathscr{F} = \{H(\psi,a,b) :$ esiste $n, \psi \in \Gamma_n$ , $a,b \in A^n\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita.

(4.5) Sia D un ultrafiltro su A contenente $\mathscr{F}$ . D è non-principale per (4.2).

(4.6) Sia M la sottostruttura di $A^A/D$ generata dalle costanti di A e dall'elemento j=id/D con id funzione identica da A ad A. Allora M è un modello di T perché T è una teoria universale.

(4.7) La minima congruenza R di M in cui tutti gli elementi di A stanno in una medesima classe non è totale. In caso contrario $(c,j) \in$ Quindi esiste un n ed esistono $a,b \in A^n$ ed un $\psi \in \Gamma_n$ tale che $A^A/D \models \psi(a,b,c,j)$ da cui $\{d : A \models \psi(a,b,c,d) \in D\}$. Ciò è assurdo perché $H(\psi,a,b) \in D$.

(4.8) Sia allora R' una congruenza di M contenente R e massimale rispetto alla condizione $(c,j) \notin R'$. Risulta che $R'$ è una congruenza massimale in $Con(M)$. Se infatti esistesse una congruenza $S$ contenente propriamente $R'$ allora $(c,j) \in S$. Siccome $M$ è generato da $A \cup \{j\}$, per ogni $x \in M$ esisterebbe $y \in A$ tale che $(x,y) \in S$. Ma $S \cap A^2 = A^2$ perché $S \supset R' \supseteq R$. Ne segue che $S = U_M$.

*Esempio* 1. - Esiste una teoria $T$ equazionale e con CEP tale che, per ogni classe di reticoli **R** descritta nella Definizione 1, $K(\mathbf{R},T)$ possiede membri di ogni cardinalità infinita minore o uguale al continuo, ma non di cardinalità superiore.

Sia infatti, $T$ l'insieme delle equazioni valide nella struttura $S = ([0,1], \oplus, ', 0, 1)$, dove $[0,1]$ è l'intervallo chiuso reale di estremi 0 ed 1 e le operazioni $\oplus, '$ sono definite da

$$x \oplus y = \text{minimo}\{1, x+y\} \quad , \quad x' = 1-x$$

E' noto che $T$ ha la CEP e che i modelli semplici di $T$ sono tutte e sole le sottostrutture di $S$ (Cfr. [8]). Allora $K(\mathbf{R},T)$ possiede membri di ogni cardinalità infinita minore e uguale al continuo perché il reticolo con due soli elementi appartiene ad **R**. Sia ora $A$ un modello di $T$ sottodirettamente irriducibile. Si dimostra (Cfr. [3] p. 75) che $A$ è una $\mathcal{L}$-catena. Ora si può notare facilmente che se $A$ è di cardinalità maggiore del continuo, il suo reticolo di congruenze non può essere di lunghezza finita e quindi non può appartenere ad **R**.

Sia ora $A$ tale che $Con(A)$ abbia lunghezza finita, vediamo che $A$ ha cardinalità minore o uguale al continuo. Procediamo per induzione sulla lunghezza $r$ di $Con(A)$. Se $A$ è sottodirettamente irriducibile l'asserto è vero per quanto osservato sopra. Altrimenti $r>1$ ed esistono almeno due congruenze minimali $R_1$ ed $R_2$. Allora A è prodotto sottodiretto di $A/R_1$ e $A/R_2$. Poiché $A/R_1$ e $A/R_2$ hanno reticoli di congruenza di lunghezza r-1 e sono modelli di T nel caso che A lo sia, ne segue che essi hanno entrambi cardinalità non superiore al continuo. Quindi a fortiori anche A ha cardinalità non superiore al continuo.

Ricordiamo che il *numero di Hanf* di una famiglia di classi di strutture $\{K_i : i \in I\}$ indiciate da un insieme I è il minimo cardinale $\alpha$ tale che per ogni i se $K_i$ possiede una struttura di cardinalità maggiore o uguale ad $\alpha$ allora essa ne possiede di cardinalità grande quanto si vuole (Cfr. [6]). Si può allora formulare un corollario dei risultati precedenti.

COROLLARIO 1. *Per ogni classe di reticoli* R , *come nella definizione* 1, *il numero di Hanf della famiglia* {K(R,T) : T *varia tra le teorie universali positive con* CEP *in linguaggi contabili*} *risulta essere il cardinale* $c^+$ *successore del continuo.*

*Dim.* Il Teorema 2 mostra che tale numero è minore o uguale a $c^+$, mentre l'esempio 1 mostra che esso è maggiore o uguale.

## BIBLIOGRAFIA

[1] J.T. BALDWIN and J. BERMAN, *The number of subdirectly irreducibile algebras in a variety*, Algebra Universale 5 (1975), 379-389.

[2] J. BARWISE, *Handbook of Mathematical Logic*, Studies in Logic Vol. 90, North-Holland (1977).

[3] C.C. CHANG, *A new proof of the completeness of the Łukasiewcz axioms*, Trans. AMS 93 (1959), 74-80.

[4] C.C. CHANG and H.J. KEISLER, *Model Theory*, Studies in Logic,(2nd. edition 1977).

[5] G.GRÄTZER, *Universal Algebra*, Springer Verlag, (2nd. edition 1979).

[6] H.J. KEISLER, *Model Theory for infinitary Logic*, North-Holland (Amsterdam 1971).

[7] R. MAGARI, *Una dimostrazione del fatto che ogni varietà ammette algebre semplici*, Ann. Un. Ferrara Sez. VII 14 (1969), 1-4.

[8] P. MANGANI, *Su certe algebre connesse con logiche a più valori*, Boll. UMI (4), 8 (1973), 68-78.

[9] R. McKENZIE and S. SHELAH, *The cardinals of simple models for universal theories*, Proc. of the Tarski Symposium,Symposia and Pure Math. AMS Vol. XXV, Providence (1974), 53-74.

[10] W. TAYLOR, *Residually small varieties*, Algebra Universale 2 (1972), 33-51.

[11] S. TULIPANI, *The Hanf number for classes of algebras whose largest congruence is always finitely generated*, Algebra Universalis 9 (1979), 221-228.

[12] S. TULIPANI, *On classes of algebras with the definability of congruences*, Algebra Universalis, 14 (1982), 269-279.

*Lavoro pervenuto alla Redazione il 29 Novembre 1981*
*ed accettato per la pubblicazione il 6 Novembre 1982*
*su parere favorevole di M. Curzio e R. Magari*