Note di Matematica Vol.III, 281-296 (1983)

LE COSTANTI FORTI NEGLI INSIEMI GRAFICI PARZIALMENTE ORDINATI (GPO-SETS)

Luigi BORZACCHINI - Margherita LEUCI (*)

Summary. *Let* V *be a set of "vertices". Let's define an edge as follows:* i) *any vertex is an edge* ii) *any set of edges is an edge. Let's define a set of edges as a "g-graph". By this definition we can generalize many graph-theoretic concepts. In this paper we study the properties of the "strong constants"* [G,H], *where such constants can be seen as the generalization to g-graphs of the graph-theoretic concept "number of graphs isomorphic with* G *that are induced subgraphs of* H".

1. PRIME DEFINIZIONI E PROPRIETA'.

Dato un insieme V di oggetti chiamati "vertici" si definiscono le "linee" come segue

1) ogni vertice è una linea

2) ogni insieme di vertici è una linea.

Siano E un insieme finito di linee e $\mathscr{P}(E)$ l'insieme potenza di E. Gli elementi di $\mathscr{P}(E)$ si chiameranno "g-grafi definiti".

Definizione 1.1. Fissato un sottogruppo G del gruppo degli automorfismi di E, si dice che due *g-grafi definiti* A e B sono *G-isomorfi*, e si scrive $A \underset{G}{=} B$, se esiste $\pi \in G$ tale che $\pi(A) = B$ dove

(*) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - BARI

l'azione di π sui g-grafi definiti è definita ricorsivamente come segue: $a = \{a_1,\ldots,a_s\}$ è una linea e a_i, per ogni i, è una linea allora $\pi(a)=\{\pi(a_1),\ldots\pi(a_s)\}$.

La relazione di G-isomorfismo è una relazione di equivalenza. L'insieme delle classi di equivalenza, dette *g-grafi*, sarà denotato S(E) e la classe ridotta al solo elemento E e quella ridotta all'insieme vuoto si indicheranno rispettivamente E e Φ .

Sono di semplice dimostrazione le seguenti proprietà:

1) Se A e B sono g-grafi definiti G-isomorfi allora il numero delle linee di A è uguale al numero delle linee di B.

2) Se A e B sono g-grafi definiti, denotati con $\bar{A}$ e $\bar{B}$ rispettivamente il complementare di A e di B relativi ad E si ha

$$A \underset{G}{=} B \iff \bar{A} \underset{G}{=} \bar{B}$$

Dalla proprietà 1) segue la

Definizione 2.1. Si chiama *rango* di un g-grafo $\mathcal{A}$ l'intero m_a che esprime il numero delle linee di un qualsiasi g-grafo definito di $\mathcal{A}$.

Dalla proprietà 2) segue invece la

Definizione 3.1. Si chiama *g-grafo complementare* di $\mathcal{A}$ il g-grafo $\hat{\mathcal{A}}$ (o E $-\mathcal{A}$) i cui elementi sono tutti e soli i complementari, relativi ad E, dei g-grafi definiti di $\mathcal{A}$. Se gli elementi di $\mathcal{A}$ sono autocomplementari allora $\mathcal{A} = \hat{\mathcal{A}}$ ed $\mathcal{A}$ è detto g-grafo autocomplementare.

Si consideri la seguente relazione su S(E): se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono g-grafi è $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ se esistono $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ tali che $A \subseteq B$. "<" è una relazione di ordine parziale e, per questo, S(E) sarà un insieme parzialmente ordinato (PO SET).

Definizione 4.1. La terna (V,E,G) si chiama *insieme grafico parzialmente ordinato* o, più brevemente, GPO SET. Spesso, nel seguito, un GPO SET sarà indicato semplicemente con il PO SET $S(E)$.

Si consideri ora la funzione di Riemann, ξ, su $\mathscr{P}(E)$; essa è così definita per ogni A e B elementi di $\mathscr{P}(E)$:

$$\xi(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad A \subseteq B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

E' facile dimostrare (cfr. [1]) che se B e C sono g-grafi definiti G-isomorfi e $\mathscr{A}$ è un g-grafo allora

$$\sum_{A\in\mathscr{A}} \xi(A,B) = \sum_{A\in\mathscr{A}} \xi(A,C)$$

e quindi si può definire una funzione di incidenza su $S(E)$ ponendo per ogni $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$

$$(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \sum_{A\in\mathscr{A}} \xi(A,B)$$

dove B è un qualsiasi elemento di $\mathscr{B}$.

$(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ si chiama *costante debole* relativa ad $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$.

2. LE COSTANTI FORTI.

Definizione 1.2. Dato un GPO SET $S(E)$, si chiama sub-GPO SET ogni sottoinsieme $\mathscr{T}$ di $S(E)$ che verifica le seguenti proprietà

1) $\phi \in \mathscr{T}$

2) Se $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{B} \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{C} \in S(E)$ con $\mathcal{A} < \mathcal{B} < \mathcal{C}$ allora $\mathcal{C} \in \mathcal{T}$

3) Esiste un unico g-grafo $\mathcal{M} \in \mathcal{T}$ tale che per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$ risulti $\mathcal{A} < \mathcal{M}$.

Inoltre comunque si consideri $M \in \mathcal{M}$ esiste un sottogruppo G_M del gruppo degli automorfismi di M tale che $A \subseteq M$, $B \subseteq M$

$$A \underset{G}{=} B \iff A \underset{G_M}{=} B$$

Definizione 2.2. Si chiama famiglia gerarchica di GPO SET una famiglia $((V_n, E_n, G_n))_{n\in N}$ dove

a) $|V_n| = n$

b) Comunque si considerino gli interi n e m, con $m \leq n$ (V_m, E_m, G_m) è un sub-GPO SET di (V_n, E_n, G_n).

Tale famiglia si potrà indicare anche $(S(E_n))_{n\in N}$.

Se $\mathcal{A}$ è un g-grafo di (V_n, E_n, G_n), $A \in \mathcal{A}$ e W è un sottoinsieme di V_n con A_W si indica la restrizione di A a W cioè l'insieme delle linee di A che hanno tutti i vertici in W.

Data una famiglia gerarchica $((V_n, E_n, G_n))_{n\in N}$ se $\mathcal{B}$ è un g-grafo di $S(E_n)$ ed $\mathcal{A}$ è un g-grafo di $S(E_m)$ con $m \leq n$, considerato $B \in \mathcal{B}$ si pone

$$[\mathcal{A}, B] = |\{ W \subseteq V_n, |W| = m \mid B_W \in \mathcal{A} \}|$$

TEOREMA 1.2. *Per ogni* $\mathcal{A}$, *per ogni* $\mathcal{B}$ *e per ogni* B *e* C *di* $\mathcal{B}$

$$[\mathcal{A}, B] = [\mathcal{A}, C]$$

Dim. Siano $\mathscr{A} \in S(E_m)$, $\mathscr{B} \in S(E_n)$ e $\pi \in G_n$ tale che $C = \pi(B)$. Risulta:

$$[\mathscr{A}, C] = |\{W \subseteq V_n \ \ |W| = m | C_W \in \mathscr{A}\}| = |\{W \subseteq V_n \ |W| = m | B_{\pi(W)} \in \mathscr{A}\}|$$

$$= |\{\bar{W} \subseteq V_n \ |\bar{W}| = m | B_{\bar{W}} \in \mathscr{A}\}| = [\mathscr{A}, B].$$

E' allora possibile dare la seguente

Definizione 3.2. Per ogni $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ si chiama *costante forte* relativa ad $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ l'intero

$$[\mathscr{A}, \mathscr{B}] = [\mathscr{A}, B]$$

dove B è un qualsiasi g-grafo definito di $\mathscr{B}$.

Dalle definizioni segue che fissato $B \in \mathscr{B}$ si può anche scrivere

$$[\mathscr{A}, B] = \sum_{\substack{W \subseteq V_n \\ |W| = m}} \sum_{A \in \mathscr{A}} \delta(A, B_W)$$

dove

$$\delta(A, B_W) = \begin{cases} 1 & \text{se } A = B_W \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema 2.2. Per ogni $\mathscr{A} \in S(E_m)$, per ogni $\mathscr{B} \in S(E_m)$ con $m \leq n$;

$$[\mathscr{A}, \mathscr{B}] = [E_m - \mathscr{A}, \ E_n - \mathscr{B}]$$

Dim. Considerato un qualsiasi B di $\mathcal{B}$ è

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}] = |\{W \subseteq V_n, |W| = m / B_W \in \mathcal{A}\}| = |\{W \subseteq V_n, |W| = m / \exists A \in \mathcal{A} \ni' B_W = A\}| = |\{W \subseteq V_n, |W| = m / \exists A \in \mathcal{A} \ni' E_m - B_W = E_m - A\}|$$

$$= |\{W' \subseteq V_n, |W'| = n-m / \exists A \in \mathcal{A} - (E_n - B)_{W'} = E_m - A\}|$$

TEOREMA 3.2. *Comunque si considerino due* g-*grafi* $\mathcal{A} \in S(E_{n_a})$ *e* $\mathcal{B} \in S(E_{n_b})$, *per ogni intero* t *tale che* $n_a \leq t \leq n_b$ *risulta*

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}] = \frac{1}{\binom{n_b - n_a}{t - n_a}} \sum_{\mathcal{C} \in S(E_t)} [\mathcal{A},\mathcal{C}][\mathcal{C},\mathcal{B}] .$$

Dim. Fissato, per ogni $\mathcal{C}$, un g-grafo definito $C \in \mathcal{C}$ e fissato $B \in \mathcal{B}$ si ottiene

$$\sum_{\mathcal{C} \in S(E_t)} [\mathcal{A},\mathcal{C}][\mathcal{C},\mathcal{B}] = \sum_{\mathcal{C} \in S(E_t)} \sum_{\substack{W \\ |W| = n_a}} \sum_{A \in \mathcal{A}} \delta(C_W, A) \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{\substack{\bar{W} \\ |\bar{W}| = t}} \delta(B_{\bar{W}}, C) =$$

$$= \sum_{C \in \mathcal{P}(E_t)} \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{W \\ |W| = n_a}} \sum_{\substack{\bar{W} \\ |\bar{W}| = t}} \delta(C_W, A)\, \delta(B_{\bar{W}}, C) =$$

$$= \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{W \\ |W| = n_a}} \delta(B_W\, A)\; |\{C \in \mathcal{P}(E_t) | \exists \bar{W} \subseteq V_{n_b} \ni' W \subset \bar{W}\ |\bar{W}| = t \wedge$$

$$B_{\bar{W}} = C\}| = [\mathcal{A},\mathcal{B}] \binom{n_b - n_a}{t - n_a}$$

Si generalizza il teorema precedente ottenendo

TEOREMA 4.2. *Per ogni* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{D}$ *g-grafi è*

$$\sum_{\mathscr{B}} \sum_{\mathscr{C}} [\mathscr{A},\mathscr{B}]\ [\mathscr{B},\mathscr{C}]\ [\mathscr{C},\mathscr{D}](-1)^{n_c} = [\mathscr{A},\mathscr{D}]\ (-1)^{n_d}$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i g-grafi, con qualunque numero di vertici.

Si considerino i g-grafi definiti A,B ed R e si ponga

$$N(A,B,R) = \sum_{\substack{W,W' \\ W \cup W' = V_R}} \delta(A,R_W)\ \delta(B,R_{W'})$$

ove V_R è l'insieme dei vertici che appartengono ad almeno una linea di R, e

$$N(\mathscr{A},\mathscr{B},R) = \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{B\in\mathscr{B}} N(A,B,R)$$

Se S è un g-grafo G_n-isomorfo a R risulta

$$N(\mathscr{A},\mathscr{B},R) = N(\mathscr{A},\mathscr{B},S)\ .$$

Infatti se $S = \pi(R)$ allora $\pi(V_R) = V_S$ e

$$N(\mathscr{A},\mathscr{B},S) = \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{B\in\mathscr{B}} N(A,B,S) = \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{B\in\mathscr{B}} \sum_{\substack{W,W' \\ W\cup W'=V_S}} \delta(A,S_W)\ \cdot$$

$$\cdot\ \delta(B,S_{W'}) = \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{B\in\mathscr{B}} \sum_{\substack{W,W' \\ W\cup W'=V_S}} \delta(A,\pi(R)_W)\ \delta(B,\ \pi(R)_{W'}) =$$

$$= \sum_{\pi^{-1}(A)\in\mathscr{A}} \sum_{\pi^{-1}(B)\in\mathscr{B}} \sum_{\substack{\bar{W},\ \bar{W}' \\ W\cup W'=R}} \delta(\pi^{-1}(A), R_{\bar{W}})\ \delta(\mu^{-1}(B), R_{\bar{W}'}) =$$

$$= N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, R).$$

Allora con $N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R})$ si indicherà l'intero $N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, R)$ ove R è un qualsiasi g-grafo definito di $\mathscr{R}$.

TEOREMA 5.2. *Se* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ *e* $\mathscr{C}$ *sono tre g-grafi risulta,*

$$[\mathscr{A}, \mathscr{C}]\ [\mathscr{B}, \mathscr{C}] \quad \sum_{\mathscr{R}} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R})\, [\mathscr{R}, \mathscr{C}]$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i g-grafi con qualsiasi numero di vertici.

Dim. Fissato $C \in \mathscr{C}$

$$[\mathscr{A}, \mathscr{C}]\ [\mathscr{B}, \mathscr{C}] = \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{\substack{W' \\ |W'|=n_a}} \delta(C_{W'}, A) \sum_{B\in\mathscr{B}} \sum_{\substack{\bar{W} \\ |\bar{W}|=n_b}} \delta(C_{\bar{W}}, B) =$$

$$= \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{B\in\mathscr{B}} \sum_{\substack{W' \\ |W'|=n_a}} \sum_{\substack{\bar{W} \\ |\bar{W}|=n_b}} \delta(C_{W'}, A)\ \delta(C_{\bar{W}}, B) =$$

$$= \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{B\in\mathscr{B}} \sum_{W^*} \sum_{\substack{W',\ \bar{W} \\ W'\cup\bar{W}=W^*}} \delta(C_{W'}, A)\ \delta(C_{\bar{W}}, B) =$$

$$= \sum_{A\in\mathscr{A}} \sum_{B\in\mathscr{B}} \sum_{W^*} N(A, B, C_{W^*}) = \sum_{W^*} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, C_{W^*}) =$$

$$= \sum_{W^*} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, C_{W^*}) \sum_{R} \delta(\ , C_{W^*})$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i g-grafi definiti.

L'ultimo membro dell'uguaglianza si può quindi scrivere

$$\sum_{\mathscr{R}} \sum_{W^*} \sum_{R\in\mathscr{R}} \delta(R, C_{W^*}) N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, R) =$$

$$= \sum_{\mathscr{R}} [\mathscr{R}, C] \quad N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R}).$$

TEOREMA 6.2. *Comunque si considerino i g-grafi* $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *non entrambi di rango 0 e comunque si fissi l'intero* n *si ha:*

$$\sum_{\mathscr{C}\in \bar{S}(E_n)} [\mathscr{A}, \mathscr{C}] \cdot [\mathscr{B}, \mathscr{C}] \; (\mathscr{C}, E_n)(-1)^{m_c} = 0$$

dove m_c *è il rango di* $\mathscr{C}$.

Dim. $$\sum_{\mathscr{C}\in S(E_n)} [\mathscr{A}, \mathscr{C}] \; [\mathscr{B}, \mathscr{C}] \; (\mathscr{C}, E_n)(-1)^{m_c} =$$

$$= \sum_{\mathscr{C}\in \bar{S}(E_n)} (\mathscr{C}, E_n)(-1)^{m_c} \sum_{\mathscr{R}} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R}) [\mathscr{R}, \mathscr{C}] =$$

$$= \sum_{\mathscr{R}} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R}) \sum_{\mathscr{C}\in \bar{S}(E_n)} [\mathscr{R}, \mathscr{C}] \; (\mathscr{C}, E_n)(-1)^{m_c} =$$

$$= \sum_{\mathscr{R}} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R}) \sum_r (-1)^r \sum_{\mathscr{C}\in S(E_n)_r} [\mathscr{R}, \mathscr{C}] (\mathscr{C}, E_n) =$$

$$= \sum_{\mathscr{R}} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R}) \sum_r (-1)^r \sum_{C\in \mathscr{P}(E_n)_r} [\mathscr{R}, C] =$$

$$= \sum_{\mathscr{R}} N(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{R}) \sum_r (-1)^r \sum_{R\in\mathscr{R}} \begin{pmatrix} r(E_n) - r(E_{n,v(R)}) \\ r - r(R) \end{pmatrix}$$

dove $v(R)$ è l'insieme dei vertici di R e $E_{n;v(R)}$ è la restrizione di E_n a $v(R)$.

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la sommatoria $\sum_{C\in\mathscr{P}(E_n)_r}[\mathscr{R},C]$ conta, per ogni $R\in\mathscr{R}$, quante sono le coppie $C_{v(R)}$ - R, ove C ha n vertici e r archi e $C_{v(R)}$ è la restrizione di C all'insieme dei vertici di R, tali che $C_{v(R)} = R$. Inoltre, essendo la somma estesa a tutti i C, elementi di $\mathscr{P}(E_n)_r$, il numero cercato coincide col numero degli insiemi di archi di cardinalità $r - r(R)$ che possono essere presi tra gli archi di E_n che non contengono vertici di R, il cui numero è ovviamente $r(E_n) - r(E_{n;v(R)})$.

Né $r(R)$, né $r(E_{n,v(R)})$ dipendono dal particolare $R\in\mathscr{R}$, quindi l'ultimo membro delle uguaglianze scritte è uguale a

$$\sum_{\mathscr{R}} N(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{R}) \sum_{R\in\mathscr{R}} \sum_r (-1)^r \binom{r(E_n) - r(E_{n,v(R)})}{r - r(R)}$$

La sommatoria più interna è sempre nulla eccetto nel caso in cui $\mathscr{R}$ sia il g-grafo di rango 0. Ma se $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ non sono entrambi di rango 0 e $\mathscr{R}$ è di rango 0 è $N(\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{R}) = 0$.

3. MATRICI DI CONVENZIONE.

Si definisce una relazione d'ordine totale nell'insieme delle classi della famiglia gerarchica $(S(E_n))_{n\in N}$ indicizzando tutti i g-grafi in maniera tale che, se $\mathscr{A}_i \in S(E_m)$ e $\mathscr{A}_j \in S(E_n)$ risulti

$m < n \Longrightarrow i < j$

$m = n \Longrightarrow$ 1) $\mathscr{A}_i < \mathscr{A}_j \Longrightarrow i \leq j$

2) Se $\mathscr{A}_i$ non è autocomplementare e $\mathscr{A}_j = \hat{\mathscr{A}}_i$ allora

$$j = N_n + 2i_n - i + 1$$

dove N_n è il numero totale dei g-grafi di $S(E_n)$ e i_n è il numero di tutti i g-grafi di $S(E_t)_{t<n}$.
I g-grafi autocomplementari sono posti in posizione centrale (tra $\mathscr{A}_{i_n+1}$ e $\mathscr{A}_{N_n+i_n}$) in qualsiasi ordine.

Si può allora considerare una matrice H ponendo

$$H_{ij} = [\mathscr{A}_i \;,\; \mathscr{A}_j]$$

Essa è ovviamente una matrice triangolare superiore.

Per il Teorema 2.2 se $\mathscr{A}_i \in S(E_m)$ e $\mathscr{A}_J \in S(E_n)$ è

$$H_{ij} = [\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j] = [\hat{\mathscr{A}}_i, \hat{\mathscr{A}}_j] = [\mathscr{A}_{i'}, \mathscr{A}_{j'}] = H_{i'j'}$$

con

$$i' = N_m + 2i_m + 1 - i, \qquad j' = N_n + 2i_n - j + 1$$

quando $\mathscr{A}_i$ e $\mathscr{A}_j$ non sono autocomplementari e con

$i' = i$ se $\hat{\mathscr{A}_i} = \mathscr{A}_i$

$j' = j$ se $\hat{\mathscr{A}_j} = \mathscr{A}_j$

Sia $\Delta = (\Delta_{ij})$ la matrice così definita

$\Delta_{ij} = 1$ se $\mathscr{A}_i$ e $\mathscr{A}_j$ sono elementi non autocomplementari di $S(E_n)$ e $j = N_n + 2i_n - i + 1$

$\Delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\mathscr{A}_i = \hat{\mathscr{A}_i}$

$\Delta_{ij} = 0$ in ogni altro caso.

TEOREMA 1.3. $\Delta\, H\, \Delta = H$

Dim. $(\Delta\, H\, \Delta)_{ij} = \sum_{h\,k} \Delta_{ih} H_{hk} \Delta_{kj} = \sum_k \Delta_{ii'} H_{i'k} \Delta_{kj} =$

$$= \Delta_{ii'} H_{i'j'} \Delta_{j'j} = H_{i'j'} = H_{ij}$$

con le notazioni su indicate.

Con n_i si indicherà, da ora in poi, il numero dei vertici di $\mathscr{A}_i$.

TEOREMA 2.3. *Gli elementi della matrice inversa di* H *sono*

$$H^{-1}_{ij} = H_{ij}\ (-1)^{n_j - n_i}$$

Dim. Sia k un intero maggiore o uguale a 1 e si ponga

$$C_{ij}(k) = H_{ij} \qquad \text{se} \quad n_j = n_i + k$$

$$C_{ij}(k) = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

e si indichi con $C(k)$ la matrice $(C_{ij}(k))$.

Per il Teorema 3.2 è, posto $k = n_j - n_i$,

$$[\mathscr{A}_i , \mathscr{A}_j] = \sum_{\mathscr{A}_h \in S(E_{n_i+k-1})} [\mathscr{A}_i , \mathscr{A}_h] [\mathscr{A}_h , \mathscr{A}_j] \frac{1}{\binom{n_j - n_i}{n_i + k - 1 - n_i}} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{\mathscr{A}_h \in S(E_{n_i+k-1})} [\mathscr{A}_i , \mathscr{A}_h] [\mathscr{A}_h , \mathscr{A}_j]$$

Pertanto da

$$C_{ij}(k) = \frac{1}{k} C_{ih}(k-1) C_{hj}(1)$$

si ottiene

$$C(k) = \frac{1}{k} C(k-1)\ C(1)$$

e quindi

$$C(k) = \frac{1}{k!} C(1)^k .$$

Con facili calcoli si vede che

$$H = I + \sum_{k=1}^{\infty} C(k) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(1)^k}{k!} = \exp\ (C(1))$$

e quindi

$$H^{-1} = \exp\left(-C(1)\right) = I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k C(k)$$

ed essendo $k = n_j - n_i$ si ottiene l'asserto.

Siano A la matrice (A_{ij}), dove

$$A_{ij} = (-1)^{n_i} \delta_{ij} \quad e \quad Z = AH$$

TEOREMA 3.3. $Z^2 = I$

Dim. 1) Si osservi innanzi tutto che gli elementi di HZ sono

$$(HZ)_{ij} = \sum_{\ell,t} H_{i\ell} A_{\ell t} H_{tj} = \sum_{\ell,t} H_{i\ell} (-1)^{n_\ell} \delta_{\ell t} H_{tj} =$$

$$= \sum_t H_{it}(-1)^{n_t} H_{tj} = (-1)^{n_i} \sum_t H_{it}(-1)^{n_t - n_i} H_{tj} =$$

$$= (-1)^{n_i} \sum_t H^{-1}_{it} H_{tj} = (-1)^{n_i} \delta_{ij} = A_{ij}$$

Si ottiene, quindi, $HZ = A = HAH$ da cui $Z^2 = I$.

Fissati gli interi r ed s si può considerare la sottomatrice o blocco di H, k_{rs}, i cui elementi sono

$$k_{ij} = H_{ij} = [\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_j]$$

con $\mathcal{A}_i \in S(E_r)$, $\mathcal{A}_j \in S(E_s)$

Ovviamente si ha

$k_{s,s} = I_{N_s}$ dove I_{N_s} è la matrice identica di ordine

$$N_s = |S(E_s)|$$

$k_{r,s} = 0$ $\qquad r > s$.

Dal Teorema 3.2 si ottiene

$$k_{r,s} = \frac{1}{s-r} \; k_{r,r+1} \; k_{r+1,s}$$

e quindi, scrivendo successivamente tale uguaglianza per $s=r+1$, $r+2,\ldots, r+t$ si ottiene

$$k_{r,r+t} = \frac{1}{t!} \, k_{r,r+1} \; k_{r+1,r+2} \; k_{r+2,r+3},\ldots,k_{r+t-1,r+t}$$

che indica un metodo per la costruzione della matrice H.

BIBLIOGRAFIA

[1] L.BORZACCHINI: "*Graphical Partially Ordered Sets*" di prossima pubblicazione.

[2] M.F.SYKES, I.W.ESSAM, B.R. HEAP and B.J.HILLEY: "*Lattice Constant Sistems and Graph theory*" Journal of Mathematical Physics, vol. 7, Num. 9 (1966), 1557-1563.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 7 Ottobre 1983
ed accettato per la pubblicazione il 30 Maggio 1984
su parere favorevole di A. Barlotti e M. Gianfriddo