Note di Matematica Vol.III, 149-157 (1983)

SUI q-ARCHI COMPLETI IN PIANI NON DESARGUESIANI DI ORDINE q DISPARI (*)

Paola BISCARINI (**)

Symmary. *By a well know theorem of Segre* [5] *and G. Tallini* [7], *the q-arcs of the desarguesian plane* PG(2,q) *are not complete. In* [1] , [2] ,[3] *it is shown that this theorem cannot be extended to any non-desarguesian plane. In this paper, the following theorem is proved: Let* Ω *be a complete* q-*arc of a projective plane* π *of order* q . *Denote by* e_j *the number of those points* P *of* π *for which the number of tangents of* Ω *passing through* P *is* j. *Then* (i) $e_{\frac{q+1}{2}} \leq 4$ *when* $q > 15$; (ii) $e_{\frac{q+h}{2}} \leq 3$ *for* $h = 3,5,7\ldots$.

1. Un ben noto teorema di B. Segre [5] e di G. Tallini [7] risalente al 1957 stabilisce che i q-archi dei piani di Galois PG(2,q) non sono completi.

Alcuni anni dopo A. Barlotti [1] ha rilevato che tale teorema non si estende ai piani non desarguesiani in quanto il piano di

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A del C.N.R.

(**) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - PERUGIA

Hughes di ordine 9 ammette q-archi completi. Successivamente [3] sono stati trovati, con l'uso di un calcolatore, q-archi completi anche negli altri due noti piani non desarguesiani di ordine 9. Di recente G.Menichetti ha costruito q-archi completi in ogni piano di Hall di ordine $q=2^k$, $k \geq 4$ [4]. Non si sa invece se esistano o meno q-archi completi in piani non desarguesiani di ordine q dispari.

In questa nota ci proponiamo di indagare sul problema generale dei q-archi completi attraverso uno studio dei loro parametri e_j, dove e_j denota notoriamente il numero dei punti per i quali passano j tangenti ad un dato q-arco. Tale studio consente di ritrovare e generalizzare alcune proprietà applicate in [2], e di provare il seguente

TEOREMA. *Sia* Ω *un q-arco completo di un piano proiettivo di ordine q dispari, allora*

(i) $$e_{\frac{q+1}{2}} \leq 4 \qquad \textit{per} \qquad q > 15$$

(ii) $$e_{\underline{q+h}} \leq 3 \qquad \textit{con} \qquad h = 3,5,7 \ldots\ldots$$

2. Denotiamo con Ω un q-arco completo in un piano proiettivo di ordine q dispari, π. Per ogni punto P di Ω passano q-1 rette secanti Ω e 2 rette tangenti ad Ω ; per ogni punto $P \notin \Omega$ indichiamo con t(P) il numero delle tangenti ad Ω pasanti per P, ovviamente il numero delle secanti Ω per P sarà dato da $(q-t(P))/2$.

Denotiamo inoltre con e_j il numero dei punti per cui passano esattamente j tangenti ad Ω.

Notiamo subito che essendo Ω un q-arco completo, q dispari, per ogni punto del piano passa almeno una secante e almeno una tangente a Ω, cioé $e_j = 0$ se $j=0$, $j>q-2$, $j=2k$; inoltre poiché $t(P) \geq 1$ si ha

$$\frac{q - t(P)}{2} \leq \frac{q - 1}{2} \tag{1}$$

3. Definiamo "punto h-extraesterno" un punto del piano per cui passano esattamente $(q+h)/2$, $1 \leq h < q$, rette tangenti ad Ω e studiamo la configurazione dei punti h-extraesterni.

Indichiamo con $\alpha_{h,r}$ il numero dei punti h-extraesterni appartenenti ad una generica retta r.

LEMMA 1. *Se* r *è una retta secante* Ω *allora* $\alpha_{h,r} \leq 1$.

Dim. Contiamo in due modi diversi le secanti Ω diverse da **r**, si ottiene

$$\frac{(q-2)(q-3)}{2} = \alpha_{h,r}\left(\frac{q-h}{4} - 1\right) + \sum_P \left(\frac{q-t(P)}{2} - 1\right) \tag{2}$$

dove la sommatoria è estesa ai punti $P \in r \cap \Omega$ tali che $t(P) \neq (q+h)/2$, per la (1) si ha

$$\frac{(q-2)(q-3)}{2} \leq \alpha_{h,r}\left(\frac{q-h}{4} - 1\right) + (q - \alpha_{h,r} - 1)\left(\frac{q-1}{2} - 1\right)$$

e quindi

$$\alpha_{h,r} \leq \frac{2(q-3)}{q+h-2} < 2 .$$

LEMMA 2. *Se* r *è una retta esterna ad* Ω *allora* $\alpha_{1,r} \leq 2$ *e* $\alpha_{h,r} < 2$ per $h = 3,5,7$.

Dim. Procediamo come per il Lemma 1, contando in due modi diversi le secanti Ω si ottiene

$$(3) \qquad \frac{q(q-1)}{2} = \alpha_{h,r} \frac{q-h}{4} + \sum_{P} \frac{q-t(P)}{2}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i punti P di r tali che $t(P) \neq \frac{q+h}{2}$. Dalla (3) per la (1) discende

$$\frac{q(q-1)}{2} \leq \alpha_{h,r} \left(\frac{q-h}{4} \right) + (q+1-\alpha_{h,r}) \frac{q-1}{2}$$

e quindi

$$\alpha_{h,r} \leq \frac{2(q-1)}{q+h-2} .$$

Ne segue $\alpha_{1,r} \leq 2$ e, per $h \geq 3$, $\alpha_{h,r} < 2$.

LEMMA 3. *Sia* r *una retta tangente ad* Ω .

(a) *Se* $e_{\frac{q+1}{2}} \geq 5$ *e* $q \geq 15$ *allora* $\alpha_{1,r} \leq 2$

(b) *Se* $e_{\frac{q+h}{2}} \geq 4$, $h \geq 3$ *allora* $\alpha_{h,r} \leq 2$.

Dim. Se $\{P\} = r \cap \Omega$, le tangenti ad Ω, diverse da r, e passanti per i punti h-extraesterni di r sono al più tutte le 2q-2 rette tangenti ad Ω in punti diversi da P, si ha quindi

$$\alpha_{h,r} \left(\frac{q+h}{2} - 1 \right) \leq 2q-2$$

e da questa

$$\alpha_{h,r} \leq \frac{4(q-1)}{q+h-2}$$

Ne segue $\alpha_{1,r} \leq 4$, e per $h \geq 3$ $\alpha_{h,r} < 4$.

Proviamo ora la (a). Se $\alpha_{1,r} = 4$ per un punto 1-extraesterno non appartenente ad r, esistente per l'ipotesi $e_{\frac{q+1}{2}} \geq 5$, non possono passare più di cinque tangenti.

Ne segue $(q+1)/2 \leq 5$ contro l'ipotesi $q \geq 15$. Supponiamo allora $\alpha_{1,r} = 3$. Le rette tangenti a Ω in punti diversi da P e non passanti per alcuno dei tre punti 1-extraesterni di r sono $(q-1)/2$ e a coppie devono intersecare r in uno stesso punto, ne segue che per un quarto punto 1-extraesterno passano al più $(q-1)/4 + 4$ rette tangenti e quindi

$$\frac{q+1}{2} \leq \frac{q-1}{4} + 4$$

da cui $q \leq 13$ contro l'ipotesi $q \geq 15$. Ne segue necessariamente $\alpha_{1,r} \leq 2$.

(b) Abbiamo già visto che $\alpha_{h,r} < 4$, supponiamo allora $\alpha_{h,r} = 3$. Anche in questo caso le rette tangenti ad Ω, in punti diversi da P, e non passanti per alcuno dei tre punti h-exraesterni di r sono $(q-3h+2)/2$ e a coppie devono incidere r in uno stesso punto. Ne segue che per un quarto punto h-extraesterno, esistente per l'ipotesi $e_{\frac{q+h}{2}} \geq 4$, passano al più $(q-3h+2)/4 + 4$ rette tangenti e quindi

$$\frac{q+h}{2} \leq \frac{q-3h+2}{4} + 4 \quad .$$

Ma questo è assurdo essendo $3 \leq h < q$.

Dai lemmi 1 - 2 - 3 segue subito

TEOREMA 1. *Sia* Γ *l'insieme dei punti* h-*extraesterni ad* Ω .

(α) *Se* $h=1$, $e_{\frac{q+1}{2}} \geq 5$ *e* $q \geq 15$, *l'insieme* Γ *è un* $e_{\frac{q+1}{2}}$ *- arco le cui secanti sono rette esterne o tangenti ad* Ω.

(β) *Se* $h \geq 3$ *ed* $e_{\frac{q+h}{2}} \geq 4$, *l'insieme* Γ *è un* $e_{\frac{q+h}{2}}$ *- arco le cui secanti sono tutte tangenti ad* Ω .

4. TEOREMA 2. *Sia* Ω *un* q-*arco completo di un piano proiettivo di ordine* q , *dispari, allora*

(i) $\quad e_{\frac{q+1}{2}} \leq 4 \quad$ *se* $\quad q > 15$

(ii) $\quad e_{\frac{q+h}{2}} \leq 3 \quad$ *con* $\quad h = 3,5,7...$

Proviamo prima la (i). Indichiamo con Γ l'insieme dei punti 1-extraesterni ad Ω, per il Teorema 1 se $q \geq 15$ e $|\Gamma| = e_{\frac{q+1}{2}} \geq 5$ allora Γ è un $e_{\frac{q+1}{2}}$ -arco le cui secanti sono tangenti o esterne ad Ω.

Posto $N = |\Gamma|$, preso comunque un punto P_i di Γ ed indicato con λ_i il numero delle rette per P_i secanti Γ e tangenti a Ω si ha che il numero delle rette tangenti ad Ω e contenenti almeno un punto di Γ è dato da $N(\frac{q+1}{2}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i$ e si ha:

$$N(\frac{q+1}{2}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i \leq 2q \ . \tag{4}$$

Indicato con Δ il numero delle rette secanti Γ ed esterne a Ω si ha $\Delta \geq 0$ e

$$\Delta = \frac{N(N-1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i \ . \tag{5}$$

Dalla (4), per la (5), si ha allora

$$N^2 - N(q+2) - 2\Delta + 4q \geq 0$$

e questa è verificata per

$$N \leq \frac{q+2-\sqrt{q^2-12q+4+8\Delta}}{2} \leq \frac{q+2-\sqrt{q^2-12q+4}}{2} \tag{6}$$

oppure

$$N \geq \frac{q+2+\sqrt{q^2-12q+4+8\Delta}}{2} \geq \frac{q+2+\sqrt{q^2-12q+4}}{2} \ . \tag{6'}$$

Notiamo ora che se $q > 15$ si ha $(q^2-12q+4) > (q-8)^2$ e quindi $N \leq 4$ oppure $N > q-3$.

Ma se $N > q-3$, indicato con μ_i il numero delle rette per un punto P_i di Γ, secanti Γ ed esterne ad Ω, si ha:

$$\mu_i = N - 1 - \lambda_i \geq N - 1 - \frac{q+1}{2} > \frac{q-9}{2}$$

e da questa

$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \mu_i > \frac{(q-3)(q-9)}{4} \tag{7}$$

allora nella (6') tenendo conto della (7), si ha

$$N \geq \frac{q+2 + \sqrt{q^2-12q+4+8\Delta}}{2} > \frac{q+2 + \sqrt{q^2+(2q^2-36q+58)}}{2}$$

e quindi, essendo $q > 15$, $N > q+1$ e questo è assurdo.

E' così provato che se $q > 15$ necessariamente $e_{\frac{q+1}{2}} \leq 4$.

Dimostriamo ora la (ii). Il Teorema 1 prova che se $e_{\frac{q+1}{2}} \geq 4$ i punti h-extraesterni, $h \geq 3$, formano un arco Γ le cui secanti sono tutte tangenti ad Ω.

Posto $M = |\Gamma|$, il numero delle rette tangenti contemporaneamente ad Ω e a Γ risulta minore del numero di tutte le tangenti a Ω, si ha quindi

$$M\left(\frac{q+h}{2}\right) - \frac{1}{2} M(M-1) < 2q$$

e questa è verificata per

$$M < \frac{q+k-1 - \sqrt{q^2+h^2+2hq+2h-14q+1}}{2}$$

oppure per

$$M > \frac{q+h-1 + \sqrt{q^2+h^2+2hq+2h-14q+1}}{2}$$

poiché $h \geq 3$ si ha $(q^2+h^2+2hq+2h-14q+1) \geq (q+h-7)^2$ e quindi $M < 4$ oppure $M > q+h-3 \geq q$, ma questo è assurdo. Si ha quindi necessariamente $e_{\frac{q+h}{2}} \leq 3$ per $h = 3,5,\dots$. Il teorema 2 è così dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BARLOTTI: "*Un'osservazione intorno a un teorema di B. Segre sui q-archi*", Matematiche, 21 (1966) 23-29.

[2] P. BISCARINI - F. CONTI: "*On (q+2)-sets in a non-desarguesian pláne of order* q", 14 (1982) 159-168 Annals of Discrete Math.

[3] R.H.F. DENNISTON: "*On arcs in projective plane of order* 9", Manuscripta Math., 4 (1971) 61-89.

[4] G. MENICHETTI: "q-*archi completi nei piani di Hall di ordine* 2^k", Rend. Acc. Naz. Lincei, 56(1974) 518-525.

[5] B. SEGRE: "*Curve razionali normali e* k-*archi negli spazi finiti*", Ann. Math. pura e appl., 39 (1955) 357-379.

[6] B. SEGRE: "*Lectures on modern geometry*", Cremonese, Roma (1961).

[7] G. TALLINI: "*Sui* q-*archi di un piano lineare finito di caratteristica* p=2", Rend. Acc. Naz. Lincei, 23 (1957) 242-245.

Lavoro pervenuto alla Redazione il 24 Febbraio 1983
ed accettato per la pubblicazione il 9 Novembre 1983
su parere favorevole di G. Korchmaros e M. Biliotti