Note di Matematica Vol.III, 141-147 (1983)

STUDIO DI UNA EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE OTTENUTA DALLA DISCRETIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Alberto PAGLIARINI(*)

Summary. *Following the results presented in a previous paper where a system of ordinary differential equations obtained semidiscretizing the Navier-Stokes equations was studied, in this paper we study a system of difference equation.*

The stability conditions obtained are no more restrictive than the ones obtained in the previous case.

The system of difference equations can be easily solved on the computer.

1. INTRODUZIONE. In un recente lavoro [1] si sono studiate le equazioni di evoluzione ottenute dalle equazioni di Navier-Stokes discretizzando le variabili spaziali. Si è trattato il caso di un fluido incompressibile di densità $\rho = 1$, viscosità ν, in un dominio $\mathcal{D}$ che per semplicità si è assunto rettangolare sul piano x,y con definite condizioni al contorno.

(*) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - Bari.

Il sistema di equazioni differenziali ordinarie approssimante le equazioni di Navier-Stokes con le condizioni al contorno assegnate è

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \nu(R-I)\mathscr{M}\vec{W} + \vec{G} \tag{1.1}$$

dove

$\vec{W} \equiv (u,v)^T$, avendo indicato nel discreto con u e v le componenti della velocità cosi definite

$u \equiv (u_{11},u_{12},\dots,u_{1N},\dots,u_{M1},\dots,u_{M2},\dots,u_{MN})$

$v \equiv (v_{11},v_{12},\dots,v_{1N},\dots,v_{M1},v_{M2},\dots,v_{MN})$

$\mathscr{M}$ è una matrice definita negativa [2] che discretizza mediante differenze centrate l'operatore $\begin{pmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}$ essendo Δ_2 l'operatore di Laplace in R_2;

$\vec{G}$ è un vettore che dipende dalle condizioni al contorno assegnate e dalla scelta degli operatori di discretizzazione introdotti;

R è un operatore matriciale che dipende dagli operatori di discretizzazione A_1 ed A_2 e dai vettori u e v.

Occorre ricordare che si è operata una reticolazione del piano x,y ed indicato con (x_i,y_j) il punto di coordinate $(i\Delta x, j\Delta y)$ con $\Delta x, \Delta y$ numeri reali positivi ed i,j interi $i=1,2,\dots N$, $j=1,2,\dots,M$, e si sono introdotti gli operatori di discretizzazione

$$A_1 = \alpha I_M \otimes J_N \quad , \quad A_2 = \beta J_M \otimes I_N$$

avendo posto

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta x} \quad , \quad \beta = \frac{1}{2\Delta y}$$

con I_M ed I_N matrici identità di dimensioni rispettive MxM ed NxN e J_M, J_N matrici di dimensioni MxM, NxN rispettivamente tali che αJ_M e βJ_N rappresentino la discretizzazione centrata dell'operatore derivata prima [3], [4]. Nella notazione introdotta le u_{ij} e v_{ij} rappresentano le approssimazioni delle velocità u e v nei punti x_i, y_j del reticolo.

Nello stesso lavoro [1] si è dimostrato che la soluzione stazionaria del sistema (1.1) è globalmente asintoticamente stabile se risulta soddisfatta la disuguaglianza

$$(1.2) \qquad 1 - \|R\| - \frac{\|G\|}{\nu\lambda_{min}(w,w)^{\frac{1}{2}}} > 0$$

essendo λ_{min} l'autovalore di minimo modulo della matrice $\mathcal{M}$.

Per i fluidi incompressibili per i quali la (1.2) è verificata si può discretizzare ulteriormente la variabile t ottenendo una equazione alle differenze le cui soluzioni sono asintoticamente stabili senza ulteriori restrizioni.

Poiché le equazioni alle differenze possono direttamente essere risolte mediante calcolatori, il risultato cui si perviene può essere di notevole utilità pratica.

2. EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE.

Discretizzando la variabile temporale della (1.1) mediante il metodo di Eulero esplicito si perviene alla

$$W_{n+1} = (I + \Delta t Q\mathcal{M})W_n + \Delta t\ G \tag{2.1}$$

avendo indicato con W_n l'approssimazione di W al tempo $t_n=t_0+n\Delta t$ ed avendo posto $Q = \nu(I+R)$.

TEOREMA. *La soluzione stazionaria della* (2.1) *è asintoticamente stabile se vale la* (1.2).

Dimostrazione. Introducendo la funzione di Liapunov discreta

$$V_{n+1} = -(W_{n+1}, \mathcal{M}W_{n+1})$$

si ha che la sua variazione è data da

$$\Delta V_{n+1} = -(W_{n+1}, \mathcal{M}W_{n+1}) + (W_n, \mathcal{M}W_n)$$

e quindi facendo uso della (2.1) si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta V_{n+1} = -\{&\Delta t(W_N, \mathcal{M}Q\mathcal{M}W_n) + \Delta t(W_n, \mathcal{M}G) + \Delta t(Q\mathcal{M}W_n, \mathcal{M}W_n) + \\ &+ \Delta t^2(Q\mathcal{M}W_n, \mathcal{M}Q\mathcal{M}W_n) + \Delta t^2(Q\mathcal{M}W_n, \mathcal{M}G) + \Delta t(G, \mathcal{M}W_n) + \\ &+ \Delta t^2(G, \mathcal{M}Q\mathcal{M}W_n) + \Delta t^2(G, \mathcal{M}G)\}.\end{aligned}$$

Essendo $\mathcal{M}$ simmetrico, posto $\mathcal{M}W_n = y$ la precedente relazione si può scrivere nella forma più compatta

$$\begin{aligned}\Delta V_{n+1} = &- 2\Delta t(y,Qy) - 2\Delta t(G,y) + \\ &- 2\Delta t^2(Qy, \mathcal{M}G) + \Delta t^2(Qy, -\mathcal{M}Qy) + \\ &- \Delta t^2(G, \mathcal{M}G):\end{aligned}$$

Valendo la relazione

$$\lambda_{min}\,(Qy,Qy) \leq (Qy,\,-\mathcal{M}Qy) \leq \lambda_{max}(Qy,Qy)$$

con λ_{min}, λ_{max} autovalori di minimo e di massimo modulo di $-\mathcal{M}$, si ottiene

$$\Delta V_{n+1} \leq \Delta t\ \{-2(y,Qy)-2(G,y)-2\Delta t(Qy,\mathcal{M}G) +$$

$$+\ \Delta t\ \lambda_{max}\ (Qy,Qy) + \lambda_{max}\ \Delta t(G,G)\}\ .$$

Utilizzando la norma e la disuguaglianza di Cauchy-Buniakowsky ed osservando che vale la disuguaglianza $-(y,Qy) \leq -\nu(1-\|R\|)\|y\|^2$ si ottiene

$$\Delta V_{n+1} \leq \Delta t\ \{-2\nu(1-\|R'\|)\ \|y\|^2 + 2\,\|y\|\ \ \|G\| \ +$$

$$+\ 2\lambda_{max}\ \Delta t\,\|Q\|\ \ \|y\|\ \ \|G\| + \Delta t\lambda_{max}\|Q\|^2\ \ \|y\|^2\ +$$

$$+\ \Delta t\lambda_{max}\ \ \|G\|^2\}\ .$$

Ne consegue che $\Delta V_{n+1} < 0$ se l'espressione in parentesi è < 0, il che è certamente verificato se si sceglie Δt tale che

$$\Delta t < \frac{2\ [\nu(1-\|R\|)\ \|y\| - \|G\|]\ \ \|y\|}{\lambda_{max}(\|Q'\|\ \ \|y\| + \|G\|)^2} <$$

$$< \frac{2\,[\nu(1-\|R\|)\,\|y\| - \|G\|\,]\,\|y\|}{\lambda_{max}\,(\|Q\|\,\|y\| - \|G\|)^2}$$

ed essendo $\|Q\| > \nu(1-\|R\|)$ si ottiene facilmente la diseguaglianza

$$\Delta t < \frac{2}{\nu\lambda_{max}\,\left(1 - \|R\| - \dfrac{\|G\|}{\nu\lambda_{max}\,\|y\|}\right)}$$

certamente possibile nell'ipotesi di validità della (1.2).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. PAGLIARINI: "*Uno studio delle equazioni di evoluzione ottenute dalle equazioni di Navier-Stokes discretizzando la parte spaziale*". Note Mat. 3, 113-125 (1982).

[2] R. BELMANN: "*Introduction to matrix analysis*", McGraw Hill, New York, (1980).

[3] P. LANCASTER: "*Theory of matrices*", Academic Press, New York, (1969).

[4] R. von MISES and K.O. FRIEDRICHS: "*Fluid Dinamics*", Fluid Dinamics, Springer Verlag, (1964).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 24 Settembre 1983
ed accettato per la pubblicazione il 6 Ottobre 1983
su parere favorevole di A. Fasano e A.Belleni-Morante