Note di Matematica Vol.III, 117-129 (1983)

UNO STUDIO DELLE EQUAZIONI DI EVOLUZIONE OTTENUTE DALLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES DISCRETIZZANDO LA PARTE SPAZIALE

Alberto PAGLIARINI(*)

Summary. *Many Authors study the evolution equations discretising either the space or the time coordinates and solving then the ordinary differential equations obtained.*

A review paper where a large bibliography is shown is the one written by Liskovets [1].

In mathematical physics some authors, both for general evolution problems [2] *and for specific problems* [3] *have prefered to discretize the time variable obtaining in this way a system ordinary differential equations with boundary conditions. In this way the difficulties arising when non stationary problems are treated by discretising both the time and space variable, are attenued.*

In this paper we prefer to discretize only the space variable and study a Cauchy problem for Navier-Stokes equations where, by introducing an auxiliary function Ψ, *we avoid to treat separately the Poisson problem for the pressure.*

(*) Dipartimento di Matematica - Università degli Studi - Bari.

1. PRESENTAZIONE DEL PROBLEMA.

Consideriamo le equazioni di Navier-Stokes, scritte in variabili primitive, per un fluido incompressibile di viscosità ν, assumendo la densità ρ costante ed eguale ad uno in tutto il dominio $\mathcal{D}$.

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} = - \dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta_2 u \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} = - \dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta_2 v \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}
$$

ove $\vec{q} = (u(x,y,t),\ v(x,y,t))$ denota il vettore delle velocità e $p(x,y,t)$ il campo di pressione.

Introdotta la matrice Jacobiana di (u,v)

$$
L = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}
$$

le prime due equazioni delle (1.1) si possono sostituire con l'unica equazione

$$
\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\nabla p + \nu \Delta_2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad ;
$$

prendendo la divergenza di ambo i membri la precedente si può scrivere

$$
(1.2) \qquad \mathrm{div}(\mathrm{grad}\ p + L \vec{q}) = 0
$$

da cui l'utilità di introdurre un vettore a divergenza nulla tale che

$$\text{grad } p + L\,\vec{q} = \vec{\Psi}(q). \tag{1.3}$$

Le (1.1) pertanto possono scriversi nella forma compatta

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -\vec{\Psi} + \nu\Delta_2\,\vec{q}. \tag{1.4}$$

Siano $\Psi^1(\vec{q})$, $\Psi^2(\vec{q})$ le componenti del vettore $\vec{\Psi}(\vec{q})$ individuate dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Psi^1}{\partial x} + \dfrac{\partial\Psi^2}{\partial y} = 0 \\[2ex] -\dfrac{\partial\Psi^1}{\partial y} + \dfrac{\partial\Psi^2}{\partial x} = u\Delta_2\,v - v\,\Delta_2\,u\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

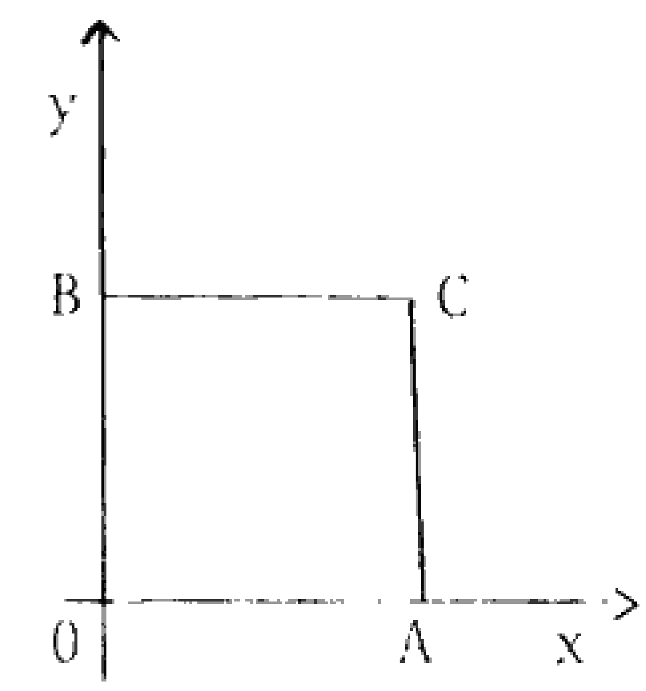
La prima delle (1.5) discende dall'essere $\vec{\Psi}(\vec{q})$ un vettore a divergenza nulla; la seconda si ottiene derivando le componenti della (1.3) rispettivamente rispetto ad y, rispetto ad x e sottraendo dalla seconda la prima.

Alle (1.5) si associano le condizioni al contorno

$$\vec{\Psi}\cdot\vec{n} = \left(\nu\Delta_2\,\vec{q} - \frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n} \tag{1.6}$$

dove $\vec{n} = (n_x, x_y)$ è il versore della normale esterna alla frontiera di $\mathcal{D}$.

Anche se il metodo è applicabile a problemi con dominio $\mathcal{D}$ più generale, per semplicità ci riferiremo al caso del dominio rettangolare



$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le y \le 1,$$

nell'ipotesi che il campo delle velocità sul contorno sia stazionario.

In tal caso le condizioni (1.6) associate al sistema (1.5) diventano

(1.7) $\Psi^1, \dfrac{\partial\Psi^2}{\partial x}$ assegnate su OB ed AC

(1.8) $\Psi^2, \dfrac{\partial\Psi^1}{\partial y}$ assegnate su OA e BC.

Queste condizioni assicurano l'unicità della soluzione del problema (1.5) ed (1.6), in quanto il sistema (1.5) equivale ad un problema misto per l'equazione di Poisson in ciascuna delle due funzioni Ψ^1, Ψ^2 [4], [5]; nel caso che prenderemo in esame l'esistenza e l'unicità discende direttamente dalla invertibilità della matrice che rappresenta l'operatore discretizzato, come verrà dimostrato nel paragrafo seguente.

2. DISCRETIZZAZIONE DELL'OPERATORE CONTENENTE LE DERIVATE SPAZIALI.

Consideriamo per il momento il problema di Cauchy individuato dalle (1.4) ed (1.5) con le condizioni (1.7) ed (1.8), oltreché le con dizioni iniziali da assegnare.

Supponiamo che la soluzione del problema sia sufficientemente regolare.

Eseguiamo una reticolazione del piano x,y, $(i\,\Delta x,\ j\,\Delta y)$ con Δx, Δy numeri reali positivi ed i,j interi, $i = 1,\dots, N$, $j = 1,\dots, M$; indichiamo per il seguito con (x_i, y_j) il punto di coordinate $(i\Delta x,\ j\Delta y)$.

Introduciamo i seguenti operatori di discretizzazione

$$A_1 = \alpha I_M \otimes J_N, \qquad A_2 = \beta J_M \otimes I_N \tag{2.1}$$

avendo posto

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta x}, \qquad \beta = \frac{1}{2\Delta y}$$

con I_M ed I_N matrici identità di dimensioni rispettive MxM ed NxN e J_M, J_N matrici di dimensioni MxM, NxN rispettivamente tali che αJ_M e βJ_N rappresentino la discretizzazione centrata dell'operatore derivata prima. Si è indicato con il simbolo $\otimes$ il prodotto tensoriale tra matrici, così definito: siano A e B matrici quadrate rispettivamente di dimensione MxM ed NxN, per prodotto tensoriale $A \otimes B$ si intende la matrice di ordine MNxMN così ottenuta

$$A \otimes B \qquad \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots\cdots & a_{1N}B \\ a_{21}B & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{M1}B & \cdots & \cdots & a_{MN}B \end{pmatrix}$$

[6] . [7].

Il problema (1.4) risulta esprimibile nella sola incognita $\vec{q}$ una volta che sia nota per ogni tempo la soluzione $\vec{\Psi}$ del sistema (1.5). Pertanto interessiamoci dapprima alla soluzione del sistema (1.5).

Formalmente tale sistema può scriversi nel seguente modo

$$
(2.2) \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -v & +u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .
$$

Introduciamo nel discreto i seguenti vettori:

$\vec{\Psi} \equiv (\Psi^1, \Psi^2)^T$, $w \equiv (u,v)^T$

così definiti

$$\vec{\Psi} \equiv (\Psi^1_{11}, \Psi^1_{12}, \ldots\ldots \Psi^1_{1N}, \Psi^1_{21}, \ldots, \Psi^1_{2N}, \ldots, \Psi^1_{M1}, \ldots, \Psi^1_{MN})^T$$

$$\Psi^2 \equiv (\Psi^2_{11}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \Psi^2_{1N}, \Psi^2_{21}, \ldots, \Psi^2_{2N}, \ldots, \Psi^2_{M1}, \ldots, \Psi^2_{MN})^T$$

$$u \equiv (u_{11}, u_{12}, \ldots\ldots, u_{1N}, \ldots\ldots\ldots, u_{M1}, \ldots, u_{MN})^T$$

$$v \equiv (v_{11}, v_{12}, \ldots\ldots, v_{1N}, \ldots\ldots\ldots, v_{M1}, \ldots, v_{MN})^T$$

e le matrici $\mathscr{A}, M, \tilde{\Lambda}, \Lambda_v$ definite rispettivamente come segue:

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_1 & A_2 \end{pmatrix}$$ che discretizza mediante

differenze centrate l'operatore

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad ; \qquad M = \begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix}$$

che discretizza mediante differenze centrate l'operatore

$$\begin{pmatrix} \Delta_2 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}$$, avendo opportunamente adottato per $\tilde{M}$,

come è noto, la seguente scelta

$$\tilde{M} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \ \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \quad 0 \ \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Lambda_v & \Lambda_u \end{pmatrix}$$ che discretizza l'operatore

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -v & \cdot \ u \end{pmatrix}$$

essendo Λ_u, Λ_v matrici diagonali aventi rispettivamente sulla diagonale i vettori u, v.

La (2.2) pertanto può essere approssimata dal seguente sistema di equazioni lineari.

$$\mathcal{A}\vec{\Psi} = \tilde{\Lambda}M\vec{W} + \vec{F} \tag{2.3}$$

dove $\vec{F}$ rimane univocamente definita dalla scelta di A_1 ed A_2.

Data la simmetrica spaziale del problema la scelta ottimale di A_1 ed A_2 a cui ci atterremo risulta essere quella indotta dal metodo di discretizzazione spaziale mid-point.

3. PROPRIETA' DELLE MATRICI $\mathcal{A}$ ED M.

Alcune proprietà si possono facilmente ottenere dalle proprietà del prodotto tensoriale che qui riportiamo per comodità

1) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$,

2) $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$,

3) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$,

altre invece sono di semplice verifica.

Proposizione 1: le matrici A_1 ed A_2 commutano;

Proposizione 2: $A_1^T = -A_1, A_2^T = -A_2$;

Proposizione 3: la matrice M è definita negativa [7];

Proposizione 4: l'inverso della matrice

$$\mathscr{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 \mathscr{L}^{-1} & A_2 \mathscr{L}^{-1} \\ A_2 \mathscr{L}^{-1} & A_1 \mathscr{L}^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} L^{-1}$$

con

$$\mathscr{L} = (A_1^2 + A_2^2),\; L = \begin{pmatrix} \mathscr{L} & 0 \\ 0 & \mathscr{L} \end{pmatrix} ;$$

Proposizione 5: $\mathscr{L}$ commuta con A_1 ed A_2 e con $\mathscr{A}$;

Proposizione 6: gli autovalori di A_1 ed A_2 sono dati da

$$\lambda_{ik} = -\frac{2i}{\Delta x} \cos \frac{k\pi}{N+1} , \quad k = 1,2,\ldots,N$$

$$\lambda_{2k} = -\frac{2i}{\Delta y} \cos \frac{k\pi}{M+1} , \quad k = 1,2,\ldots,M$$

pertanto se N ed M sono dispari allora esiste un valore di K per cui si ottengono due autovalori uguali a zero. Ciò non avviene se N ed M sono pari [7].

TEOREMA. *La matrice* $\mathscr{A}$ *è invertibile se* M *ed* N *sono pari.*

Dim. Dalla *Proposizione* 4 segue che $\mathscr{A}$ è invertibile quando $\mathscr{L}$ è invertibile; dalla *Proposizione* 6 discende che $\mathscr{L}$ è inverti bile per M ed N pari.

Nelle ipotesi in cui vale il teorema precedente dalle (2.3) segue

$$\vec{\Psi} = \mathcal{A}^{-1}\tilde{\Lambda} M \vec{W} + \mathcal{A}^{-1} \vec{F}.$$

Notiamo che $\mathcal{A}^{-1}\tilde{\Lambda} M = L^{-1} A \Lambda M$

ove

$$A = \begin{pmatrix} -A_2 & A_2 \\ A_1 & -A_1 \end{pmatrix},$$

e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A_v & 0 \\ 0 & A_u \end{pmatrix}.$$

Pertanto possiamo scrivere la (2.3) nella forma

$$\vec{\Psi} = L^{-1} A \Lambda M \vec{W} + \mathcal{A}^{-1} \vec{F}. \tag{2.5}$$

Si ha quindi che il sistema (1.4) è approssimabile da

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = (L^{-1} A \Lambda + \nu I) M \vec{W} + \vec{G} \tag{2.5}$$

con

$$\vec{G} = \mathcal{A}^{-1} \vec{F}.$$

Per semplicità di notazione porremo

$$R = \frac{1}{\nu} L^{-1} A \Lambda$$

e quindi la (2.5) diventa

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \nu(R+I)M\vec{W} + \vec{G} \; . \tag{2.6}$$

La (2.6) rappresenta un sistema di equazioni differenziali ordinarie approssimante le equazioni (1.4) ed (1.5).

Il sistema (2.6) può essere integrato con un qualunque metodo per equazioni differenziali ordinarie.

4. STABILITA' PER IL SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

La stabilità asintotica del sistema (2.6) può essere studiata mediante una opportuna funzione di Liapunov.

Vale infatti il seguente teorema

TEOREMA: *Se per ogni* W *la seguente disuguaglianza*

$$1 - \|R\|_2 - \frac{\|G\|_2}{\nu\lambda_{min}(W,W)^{\frac{1}{2}}} > 0 \tag{3.1}$$

è verificata, essendo λ_{min} *l'autovalore di minimo modulo della matrice* M, *la soluzione stazionaria del sistema* (2.6) *è globalmente asintoticamente stabile.*

Dim. Introdotta la funzione di Liapunov

$$V = -(W, MW)$$

si ha

$$\dot{V} = -\{(\nu(R+I)MW + G, M\,W) + (W, \nu M(R+I)MW + MG)\}$$

da cui si ottiene

$$V = -2\{(MW,\nu(R+I)MW) + (G,MW)\};$$

posto $MW = y$ possiamo scrivere

$$V = -2\{\nu(y,y) + \nu(y,Ry) + (G,y)\}$$

da cui segue

$$\dot{V} < 2\{-\nu\|y\|^2 + |\nu(y,Ry)| + |(G,y)|\} . \tag{3.2}$$

Nella (3.2) possiamo maggiorare i due termini $|\nu(y,Ry)|$ e $|(G,y)|$ nel modo seguente

$$|\nu(y,Ry)| \leq \nu(y+y)^{\frac{1}{2}} (Ry,Ry)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \nu(y,y) \frac{(Ry,Ry)^{\frac{1}{2}}}{(y,y)^{\frac{1}{2}}} \leq \nu(y,y) \|R\|_2 ,$$

$$|(G,y)| \leq (y,y)^{\frac{1}{2}}(G,G)^{\frac{1}{2}} = (y,y) \frac{(G,G)^{\frac{1}{2}}}{(y,y)^{\frac{1}{2}}}$$

pertanto

$$\dot{V} \leq 2\{-\nu \|y\|^2 + \nu \|y\|^2 \|R\|_2 + \|y\|^2 \frac{\|G\|_2}{(y,y)^{\frac{1}{2}}})$$

$$V \leq 2 \|y\|^2 \nu\{-1 + \|R\|_2 + \frac{\|G\|_2}{(y,y)^{\frac{1}{2}}} \leq$$

$$\leq 2 \quad \|y\|^2 \nu\{-1 + \|R\|_2 + \frac{\|G\|_2}{\nu\lambda_{min}(W,W)^{\frac{1}{2}}}\}.$$

da cui

$$\dot{V} < 0 \qquad \text{se vale la (3.1)}$$

e per il teorema di Liapunov si ha la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] D.A.LISKOVETS: "*The method of Lines*(Review) *differential equations*"(1965).

[2] A.BELLENI-MORANTE and C.VITOCOLONNA: "*Discretization of the time variable in Evolution Equations*". J.Inst.Maths Applies (1974) 14.

[3] A.BELLENI MORANTE: "*Discretizzazione della variabile temporale nella equazione del trasporto*". Istituto di Meccanica razionale, Facoltà di Scienze Università di Bari, pubblicazione n°1, (1972).

[4] C.PUCCI: "*Equazioni ellittiche*", lezioni svolte nell'anno accademico 1968-69, Genova (1969).

[5] F.G.TRICOMI: "*Equazioni a derivate parziali*". Cremonese (1957).

[6] P.LANCASTER: "*Theory of matrices*". Academic Press, New York,(1969).

[7] R.BELLMAN:"*Introduction to matrix analysis*".Mc Graw Hill,New York, (1960).

[8] R.von MISES and K.O.FRIEDRICHS: "*Fluid Dinamics*".Springer Verlag, (1964).

Lavoro pervenuto alla Redazione il 22 Luglio 1983
ed accettato per la pubblicazione il 20 Settembre 1983
su parere favorevole di A. Belleni Morante ed A. Fasano