Note di Matematica Vol. V, 1-35(1985)

ALCUNI ASPETTI DELLA TEORIA DEGLI IDEALI DI OPERATORI E APPLICAZIONI

Marilda A.SIMÕES

Abstract. *The present paper gives some basic ideas from the modern theory of operator ideals, with some applications to the theory of (ideals of) locally convex spaces. The problems and results mentioned have been limited to some that are more closely related to the author's own line of research. No completeness is claimed.*

INTRODUZIONE. In questo articolo ci proponiamo di introdurre alcuni dei concetti basici della moderna teoria degli ideali di operatori. In questo senso il presente lavoro è da considerarsi un po' come una continuazione del lavoro di rassegna [23], al quale rinviamo il lettore per le idee e i risultati classici e soprattutto per ciò che riguarda il contributo fondamentale di Grothendieck. Qui ci limitiamo ad introdurre le nozioni basiche sugli ideali di successioni e di operatori negli spazi di Hilbert e di Banach con particolare attenzione agli ideali cosiddetti "propri", concludendo con alcune applicazioni alla teoria degli (ideali di) spazi localmente convessi. Infine, per quanto riguarda problemi e risultati, ci siamo limitati ad accennarne solo alcuni che sono più strettamente legati agli interessi di ricerca dell'autore.

1. IDEALI DI SUCCESSIONI

1.1. Ideali di successioni

Cominciamo col denotare con φ e c_o rispettivamente lo spazio delle successioni scalari (reali o complesse) con un numero finito di elementi non nulli e quello delle successioni tendenti a zero. Un insieme λ di successioni dicesi *ideale di successioni* se esso verifica le seguenti condizioni:

(s1) $\varphi \subset \lambda \subset c_o$.

(s2) λ *è normale.*

(s3) λ *è simmetrico.*

Denotando con $\mathbb{N}$ l'insieme degli interi positivi e con ξ o (ξ_n) la generica successione, ricordiamo che (s2) significa che se $(\xi_n) \in \lambda$ e $|\eta_n| \leq |\xi_n|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora anche $(\eta_n) \in \lambda$, mentre (s3) esprime il fatto che, se π è una qualsiasi permutazione di $\mathbb{N}$, allora $(\xi_{\pi(n)}) \in \lambda$ ogniqualvolta che $(\xi_n) \in \lambda$. Osserviamo che le condizioni (s1)-(s3) sono equivalenti agli assiomi di A.Pietsch (cf. [34],§13.1) e che, evidentemente, ogni ideale di successioni è uno spazio lineare.

Gli ideali di successioni sono stati studiati da molti autori ed appartengono ormai al folklore dell'Analisi Funzionale. Il lettore interessato potrà consultare [9].

1.2. s-numeri di successioni

Denotiamo, come al solito, con ℓ^∞ lo spazio delle successioni scalari ξ limitate e con $\|\xi\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$ la norma standard in ℓ^∞.

Per ogni successione $\xi \in \varphi$, indichiamo con card(ξ) la cardinalità dell'insieme $\{n \in \mathbb{N} : \xi_n \neq 0\}$.

Una applicazione s che assegna ad ogni $\xi \in \ell^\infty$ un'unica successione $(s_n(\xi))$ è detta *s-funzione* se le condizioni seguenti sono soddisfatte:

(f1) $\|\xi\|_{\ell^\infty} = s_1(\xi) \geq s_2(\xi) \geq \dots \geq 0$.

(f2) $s_n(\xi+\eta) \leq s_n(\xi) + \|\eta\|_{\ell^\infty}$ *per* $\xi, \eta \in \ell^\infty$.

(f3) $s_n(\xi\eta) \leq s_n(\xi)\|\eta\|_{\ell^\infty}$ *per* $\xi, \eta \in \ell^\infty$.

(f4) *Se* $\xi \in \varphi$ *e* card(ξ) $< n$, *allora* $s_n(\xi) = 0$.

(f5) *Se* $M \subset \mathbb{N}$ *e* e_M *è la funzione caratteristica di* M, *allora* card(M) $\geq n$ *implica* $s_n(e_M) = 1$.

In tal caso $s_n(\xi)$ prende il nome di *ennesimo s-numero* della successione ξ. In (f3) chiaramente $(\xi\eta)_n = \xi_n \eta_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definiamo ora per ogni successione $\xi \in \ell^\infty$ *l'ennesimo numero d'approssimazione* $a_n(\xi)$ per mezzo della formula

$$a_n(\xi) = \inf\{\|\xi-\eta\| : \eta \in \varphi \text{ e } \mathrm{card}(\eta) < n\}.$$

Sussistono i seguenti risultati, per i quali rimandiamo a [34], §13.7.

1.2.1. TEOREMA. *L'applicazione* $a : \xi \to (a_n(\xi))$ *è una s-funzione.*

1.2.2. TEOREMA. *Su* ℓ^∞ *esiste una sola s-funzione.*

Per ogni $\xi \in c_0$ sia $\bar{\xi}$ il *riordinamento decrescente* di ξ, cioè la successione ottenuta riordinando la successione $(|\xi_n|)$ in ordine non crescente. Allora vale il

1.2.3. TEOREMA. *Per ogni* $\xi \in c_o$ *si ha* $(s_n(\xi)) = \bar{\xi}$.

1.3. Procedure

Una regola

$$n : \lambda \to \lambda^n$$

che definisce un nuovo ideale di successioni λ^n per ogni ideale di successioni λ è chiamata *procedura.* Diamo subito due importanti esempi di procedure.

1.3.1. ESEMPIO. Definiamo il *nucleo minimale* λ^{min} dell'ideale λ di successioni come

$$\lambda^{min} = c_o.\lambda = \{\xi.\eta : \xi \in c_o \text{ e } \eta \in \lambda\}.$$

Vale il seguente

1.3.2. TEOREMA. λ^{min} *è un ideale di successioni e la regola* $min: \lambda \to \lambda^{min}$ *è una procedura.*

E' naturale allora chiamare *minimale* un ideale λ per il quale si abbia $\lambda = \lambda^{min}$.

1.3.3. ESEMPIO. Dato l'ideale di successioni λ , definiamo il suo *inviluppo massimale* λ^{max} al modo seguente. Una successione ξ appartiene a λ^{max} se $\xi \cdot \eta \in \lambda$ per ogni $\eta \in c_o$.

1.3.4. TEOREMA. λ^{max} *è un ideale di successioni e la regola* $max: \lambda \to \lambda^{max}$ *è una procedura.*

Un ideale λ è *massimale* se $\lambda = \lambda^{max}$.

Le nozioni di ideali minimali e massimali sono dovute a B.S.Mitiagin [21].

1.4. Nuclei di ideali di successioni

Nel trattare con ideali (e, più in generale, con spazi) di successioni, è di grande importanza la nozione di nucleo, introdotta da V.B.Moscatelli in [22]. In generale, si definisce *nucleo* di uno spazio μ di successioni lo spazio

$$\bar{\mu} = \{\xi : (\sup_{k \geq n} |\xi_k|)_n \in \mu\}.$$

Per le seguenti proprietà del nucleo di un ideale di successioni rimandiamo a [24].

1.4.1. LEMMA. *Uno spazio λ di successioni è il nucleo di un ideale di successioni se verifica le seguenti condizioni:*

(n1) $\varphi \subset \bar{\lambda} \subset c_o$.

(n2) $\bar{\lambda}$ *è additivo*

(n3) *Se* $\xi \in \bar{\lambda}$ *allora* $(\sup_{k \geq n} |\xi_k|)_n \in \bar{\lambda}$.

Ricordiamo che (n2) significa che, se $\xi, \eta \in \bar{\lambda}$, allora il riordinamento decrescente della successione $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots)$ appartiene anch'esso a $\bar{\lambda}$.

1.4.2. TEOREMA. *Ogni ideale λ di successioni determina univocamente un nucleo $\bar{\lambda}$ di ideali di successioni, precisamente quello definito da*

$$\bar{\lambda} = \{\xi : (\sup_{k \geq n} |\xi_n|)_n \in \lambda\} .$$

Viceversa, ogni nucleo $\bar{\lambda}$ di ideale di successioni determina *univocamente un ideale* λ *di successioni, cioè l'ideale* λ *definito da*

$$\lambda = \{\xi : \bar{\xi} \in \bar{\lambda}\}.$$

E' chiaro che tale $\bar{\lambda}$ *è il più piccolo ideale contenente* $\bar{\lambda}$ *e può essere anche definito come segue:*

$$\lambda = \{\xi ; (\xi_{\pi(n)}) \in \bar{\lambda} \text{ per qualche permutazione } \pi \text{ di } \mathbb{N} \}.$$

Osserviamo infine che un ideale λ è "sempre" diverso dal suo nucleo $\bar{\lambda}$: gli unici casi in cui $\lambda = \bar{\lambda}$ si hanno per $\lambda = \varphi$ o $\lambda = c_o$.

1.5. ESEMPI

Diamo qui alcuni classici esempi di ideali di successioni, definiti in parte direttamente e in parte per mezzo dei loro nuclei secondo la procedura indicata dal Teorema 1.4.2.

1.5.1. Sono ideali di successioni i *classici spazi* φ , c_o e

$$\ell^p = \{\xi : \sum_{n \in N} |\xi_n|^p < \infty\} \qquad (0 < p < \infty).$$

1.5.2. L'*ideale* ℓ° introdotto da A.Grothendieck [14]:

$$\ell^\circ = \bigcap_{p > o} \ell^p.$$

Si noti che il suo nucleo $\bar{\ell}^\circ$ è lo spazio s delle successioni rapidamente decrescenti:

$$s = \{\xi : \sum_{n \in \mathbb{N}} n^k |\xi_n| < \infty \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}\}.$$

Tale spazio è di importanza fondamentale nella teoria degli spazi nucleari.

1.5.3. Gli *ideali di Orlicz* (cf. [19]):

$$\ell_\varphi = \{\xi : \sum_{n\in N} \varphi\left(\frac{|\xi_n|}{c}\right) \leq 1 \quad \text{per qualche } c > o\},$$

dove $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione continua, convessa, crescente e tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$.

1.5.4. Gli *ideali di Lorentz* (cf. [19] e [46]):

$$\ell^{p,q} = \{\xi : [\sum_{n\in N} (n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \bar{\xi}_n)^q]^{1/q} < \infty\} \quad (0<p,q<\infty),$$

$$\ell^{p,\infty} = \{\xi : \sup_{n\in N} n^{\frac{1}{p}} \bar{\xi}_n < \infty\} \qquad (0 < p < \infty).$$

1.5.5. Gli *ideali di Sargent* (cf. [12]):

$$s_\rho = \{\xi : \sup_{n\in N} \frac{\sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho_k} < \infty\} ,$$

dove $\rho = (\rho_n)$ è una successione tale che

$$1 = \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq 0, \quad \sum_{n\in N} \rho_n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_n \rho_n = 0 .$$

1.5.6. Gli *ideali di serie di potenze*, cioè gli ideali i cui nuclei sono gli spazi di serie di potenze

$$\Lambda_r(\alpha) = \{\xi : \sum_{n\in N} t^{\alpha_n} |\xi_n| < \infty \quad \text{per ogni } t < r\} ,$$

dove $0 < r \leq \infty$, e $\alpha = (\alpha_n)$ è una successione tale che $0 < \alpha_n \nearrow +\infty$.

Tali spazi sono di importanza fondamentale nella teoria della struttura degli spazi di Fréchet e, in particolare, nucleari (cf. [30] e [6]). Per le condizioni sotto le quali gli spazi di cui sopra sono nuclei di ideali di successioni si rinvia il lettore al lavoro [45] dell'autore.

1.5.7. Gli ideali

$$\ell_{\emptyset} = \{\xi : \sum_{n\in N} \emptyset(|\xi_n|) < \infty\} ,$$

dove $\emptyset : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è una funzione continua, subadditiva, crescente e tale che $\emptyset(0) = 0$. Tali ideali sono stati studiati, per esempio, in [38] e [22].

1.5.9. OSSERVAZIONE. Gli ideali in 1.5.1, 1.5.2, 1.5.4 $(0 < p,q < \infty)$, 1.5.6 e 1.5.7 sono minimali e massimali. Gli ideali in 1.5.3 sono massimali (e minimali se φ soddisfa la cosiddetta "condizione Δ_2"). Gli ideali in 1.5.4 $(q=\infty)$ e 1.5.5 sono massimali ma non minimali.

2. IDEALI DI OPERATORI SU SPAZI DI HILBERT

2.1. Ideali di operatori

Con il termine *operatore* intenderemo sempre una applicazione lineare e continua.

Sia $\mathscr{L}_0$ la classe di tutti gli operatori tra spazi di Hilbert arbitrari e sia $\mathscr{F}_0$ la sottoclasse di $\mathscr{L}_0$ costituita dagli operatori di rango finito. Diremo che una sottoclasse $\mathscr{A}_0$ di $\mathscr{L}_0$ è un *ideale di operatori su spazi di Hilbert* se per arbitrari spazi di Hilbert H e K le *componenti* $\mathscr{A}_o(H,K) = \mathscr{A}_o \cap \mathscr{L}_o(H,K)$ soddisfano le seguenti condizioni:

(OH1) $\mathscr{F}_o \subset \mathscr{A}_o$.

(OH2) *Se* $S_1, S_2 \in \mathscr{A}(H,K)$ *allora* $S_1+S_2 \in \mathscr{A}_o(H,K)$.

(OH3) *Se* $T \in \mathscr{L}_o(H_o,H)$, $S \in \mathscr{A}_o(H,K)$ *e* $R \in \mathscr{L}_o(K,K_o)$, *allora* $RST \in \mathscr{A}_o(H_o,K_o)$.

E' chiaro che tutte le componenti $\mathscr{A}_o(H,K)$ di $\mathscr{A}_o$ sono spazi lineari e che $\mathscr{A}_o(H,H)$ è un ideale nell'algebra di operatori $\mathscr{L}_o(H,H)$, per ogni spazio di Hilbert H.

2.2. Numeri caratteristici di operatori compatti.

Ricordiamo il ben noto *Teorema della Rappresentazione Spettrale:*

2.2.1. TEOREMA. *Sia* $S : H \to K$ *un operatore compatto tra spazi di Hilbert. Allora esistono successioni ortonormali* $(f_n) \subset H$ *e* $(g_n) \subset K$ *e una successione* $\xi \in c_o$ *tali che si abbia*

$$Sx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n (x,f_n) g_n \qquad \textit{per ogni} \quad x \in H$$

2.2.2. OSSERVAZIONE. La successione ξ di cui sopra può essere scelta come la successione degli autovalori dell'operatore $(S^*S)^{\frac{1}{2}}$ ordinati in ordine di grandezza decrescente e contando le moltiplicità algebriche che, come è ben noto, sono finite. In tal caso la ξ è una successione decrescente unica e gli autovalori $\xi_n = \lambda_n[(S^*S)^{\frac{1}{2}}]$ prendono il nome di *numeri caratteristici* dell'operatore S, denotati con $s_n(S)$.

2.3. Ideali di operatori su ℓ^2.

Nel 1941 J.W.Calkin [4] riuscì a classificare tutti gli ideali propri (nel senso classico) nell'algebra $\mathscr{L}_0(\ell^2, \ell^2)$ usando il Teorema 2.2.1 e il fatto che ogni ideale proprio su ℓ^2 consiste di operatori compatti. La classificazione consisteva nel mostrare l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra gli ideali nell'algebra $\mathscr{L}_0(\ell^2,\ell^2)$ e certi insiemi di successioni decrescenti di numeri non negativi (*insiemi caratteristici*). Fu poi D.J.H.Garling [10] a mostrare che tali insiemi caratteristici potevano essere sostituiti con ideali di successioni. Riassumiamo questi risultati nei seguenti teoremi, ove per $\xi \in c_0$ D_ξ sta per l'operatore diagonale $\ell^2 \to \ell^2$ definito da $D_\xi \eta = (\xi_n \eta_n)$.

2.3.1. TEOREMA. *L'ideale $\mathscr{K}_0(\ell^2,\ell^2)$ degli operatori compatti su ℓ^2 è l'unico ideale proprio chiuso nell'algebra $\mathscr{L}_0(\ell^2,\ell^2)$.*

2.3.2. TEOREMA. (a) *Sia $\mathscr{A}_0$ un ideale proprio di operatori nell'algebra $\mathscr{L}_0(\ell^2,\ell^2)$. Se*

$$\lambda_{\mathscr{A}_0} = \{\xi \in c_0 : D_\xi \in \mathscr{A}_0\},$$

allora $\lambda_{\mathscr{A}_0}$ è un ideale di successioni.

(b) *Sia λ un ideale di successioni. Se*

$$\mathscr{S}_\lambda = \{ S \in \mathscr{L}_0(\ell^2,\ell^2) : (s_n(S)) \in \lambda\},$$

allora $\mathscr{S}_\lambda$ è un ideale proprio di operatori nell'algebra $\mathscr{L}_0(\ell^2,\ell^2)$.

(c) $\lambda_{\mathscr{S}_\lambda} = \lambda$ *e* $\mathscr{S}_{\lambda_{\mathscr{A}_0}} = \mathscr{A}_0$.

(L'uso del simbolo $\mathscr{S}$ in (b) è ormai standard).

Per la teoria degli ideali di operatori su di uno spazio di Hilbert prefissato rimandiamo alle eccellenti monografie [12] e [39] e al trattato [8], pp. 1088-1100.

2.4. Ideali propri.

Allo scopo di estendere i risultati del paragrafo precedente agli ideali di operatori (nel senso del §2.1) nell'"algebra" $\mathscr{L}_0$, abbiamo bisogno di una nozione opportuna di ideale proprio. Precisamente, diremo che un ideale $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{L}_0$ è *proprio* se i soli spazi di Hilbert la cui identità appartiene ad $\mathscr{A}_0$ sono quelli di dimensione finita. Sussiste allora il seguente

2.4.1. TEOREMA. (cf. [34], 15.2.2. p.207). *Ogni ideale proprio di operatori su spazi di Hilbert consiste di operatori compatti.*

E' chiaro che, in virtù del Teorema 2.2.1, il Teorema 2.4.1. riduce lo studio degli ideali propri (nel senso di cui sopra) in $\mathscr{L}_0$ a quello degli ideali propri (nel senso classico), nell'algebra $\mathscr{L}_0(\ell^2, \ell^2)$, il che ci permette di enunciare il

2.4.2. TEOREMA. *Il Teorema 2.3.2 continua a valere con* $\mathscr{L}_0$ *al posto di* $\mathscr{L}_0(\ell^2, \ell^2)$ *e con* $\mathscr{A}_0$ *ideale proprio in* $\mathscr{L}_0$.

2.5. Ideali chiusi.

Se in luogo dell'algebra $\mathscr{L}_0(\ell^2, \ell^2)$ consideriamo la classe $\mathscr{L}_0$, allora il Teorema 2.3.1 non è più valido, come è mostrato dalle considerazioni seguenti.

Per ogni spazio di Hilbert H, definiamo la *dimensione hilbertiana*

$\dim_h(H)$ come la cardinalità di un sistema ortonormale e completo in H. Per ogni numero cardinale infinito χ , denotiamo poi con $\mathscr{L}_0^{\chi}$ la classe di tutti gli operatori $S\in\mathscr{L}_0$ tali che, se $S\in\mathscr{L}_0(H,K)$, allora $\dim_h\overline{[S(H)]} < \chi$. Ovviamente $\mathscr{L}_0^{\chi_0} = \mathscr{F}_0$ e $\bigcup_{\chi}\mathscr{L}_0^{\chi} = \mathscr{L}_0$

Sussiste il seguente

2.5.1. TEOREMA. (a) $\mathscr{L}_0^{\chi}$ *è un ideale di operatori.*

(b) *I soli ideali chiusi su spazi di Hilbert sono* $\overline{\mathscr{L}_0^{\chi}}$ *e* $\mathscr{L}_0$.

(c) $\overline{\mathscr{L}_0^{\chi_0}}$ *è l'unico ideale proprio tra gli* $\overline{\mathscr{L}_0^{\chi}}$.

(Per il significato della chiusura $\overline{\mathscr{L}_0^{\chi}}$, vedi §3.3 più avanti).

Ricordiamo che ideali chiusi di operatori su uno spazio di Hilbert di dimensione arbitraria furono investigati indipendentemente da B.Gramsch [13] e E.Luft [20].

2.6. ESEMPI.

2.6.1. L'ideale $\mathscr{K}_0 = \mathscr{S}_{c_0} = \overline{\mathscr{F}_0}$ degli *operatori compatti.*

2.6.2. L'ideale $\mathscr{S}_2 = \mathscr{S}_{\ell^2}$ degli *operatori di Hilbert-Schimidt* (cf. [40]).

2.6.3. L'ideale $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_{\ell^1}$ degli *operatori a traccia,* introdotto da F.J.Murray e J. von Neumann [25].

2.6.4. Le cosiddette *classi di von Neumann* $\mathscr{S}_p = \mathscr{S}_{\ell^p}$ $(0 < p < \infty)$, studiate in [27].

2.6.5. L'ideale $\mathscr{S}_0 = \mathscr{S}_{\ell^0}$ degli *operatori fortemente nucleari,* introdotto da A.Grothendieck [14].

Ulteriori esempi sono costituiti dagli ideali di operatori formati a partire dagli ideali di successioni descritti in §1.5.

3. IDEALI DI OPERATORI SU SPAZI DI BANACH

3.1. Ideali di operatori.

La definizione di ideale di operatori su spazi di Banach è analoga a quella data nel caso degli spazi di Hilbert nel §2.1 ed è dovuta ad A.Pietsch (attorno al 1969).

Sia $\mathscr{L}$ la classe di tutti gli operatori tra spazi di Banach e sia $\mathscr{F}$ la sottoclasse di $\mathscr{L}$ degli operatori di rango finito. Una sottoclasse $\mathscr{A}$ di $\mathscr{L}$ è un *ideale di operatori su spazi di Banach* (o brevemente, un *ideale di operatori*), se per arbitrari spazi di Banach E e F le *componenti* $\mathscr{A}(E,F) = \mathscr{A} \cap \mathscr{L}(E,F)$ verificano le seguenti condizioni:

(01) $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$.

(02) *Se* $S_1, S_2 \in \mathscr{A}(E,F)$, *allora* $S_1+S_2 \in \mathscr{A}(E,F)$.

(03) *Se* $T \in \mathscr{L}(E_0,E)$, $S \in \mathscr{A}(E,F)$ e $R \in \mathscr{L}(F,F_0)$ *allora* $RST \in \mathscr{A}(E_0,F_0)$.

E' chiaro che le componenti $\mathscr{A}(E,F)$ di $\mathscr{A}$ sono spazi lineari e che $\mathscr{A}(E,F)$ è un ideale nell'algebra di operatori $\mathscr{L}(E,E)$, per ogni spazio di Banach E.

3.2. s-numeri di operatori.

Allo scopo di generalizzare i numeri caratteristici del §2.2 al caso degli spazi di Banach, introduciamo le nozioni di s-funzione e s-numeri per gli operatori, analogamente a quanto fatto per le successioni nel §1.2.

Un'applicazione s che assegna ad ogni operatore $S \in \mathscr{L}$ un'unica successione $(s_n(S))$ è chiamata s-*funzione* se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

(S1) $\|S\| = s_1(S) \geq s_2(S) \geq \dots \geq 0$ *per* $S \in \mathscr{L}(E,F)$.

(S2) $s_n(S+T) \leq s_n(S)+\|T\|$ *per* $S,T \in \mathscr{L}(E,F)$.

(S3) $s_n(RST) \leq \|R\| s_n(S) \|T\|$ *per* $T \in \mathscr{L}(E_o,E)$, $S \in \mathscr{L}(E,F)$ e $R \in \mathscr{L}(F,F_o)$.

(S4) *se* $S \in \mathscr{F}(E,F)$ *e rango* $(S) < n$, *allora* $s_n(S) = 0$.

(S5) $s_n(I_n) = 1$, *ove* I_n *è l'identità dello spazio euclideo* n-*dimensionale* ℓ_n^2.

Il numero $s_n(S)$ è una funzione continua di S ed è detto *ennesimo* s-*numero* di S.

Un risultato basico sulle s-funzioni è il seguente

3.2.1. **TEOREMA.** *Sulla classe* $\mathscr{L}_o$ *degli operatori tra spazi di Hilbert esiste una sola* s-*funzione.*

Nel caso degli spazi di Banach, invece, esistono molte s-funzioni distinte, di cui diamo ora alcuni esempi. Il Teorema 3.2.1 mostra però che esse coincidono nel caso degli spazi di Hilbert e che quindi gli s-numeri sono vere generalizzazioni dei numeri caratteristici introdotti nel §2.2. In tutti gli esempi supporremo $S \in \mathscr{L}(E,F)$.

3.2.2. I numeri di approssimazione

$$a_n(S) = \inf \{ \|S-T\| : T \in \mathscr{F}(E,F) \text{ e } \operatorname{rango}(T) < n \} .$$

Essi sono i più grandi s-numeri: $s_n(S) \leq a_n(S)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni s-funzione s.

3.2.3. **I numeri di Hilbert**

$$h_n(S) = \sup\{a_n(RST) : T \in \bar{\mathscr{F}}(H,E), R \in \bar{\mathscr{F}}(F,K) \text{ e } \|R\|, \|T\| \leq 1\},$$

ove H e K variano nella classe degli spazi di Hilbert e $\bar{\mathscr{F}}$ è definito nel paragrafo seguente. Tali numeri sono i più piccoli s-numeri: $h_n(S) \leq s_n(S)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni s-funzione s.

3.2.4 **I numeri di Gelfand**

$$c_n(S) = a_n(J_F S),$$

ove J_F è l'isometria canonica di F in $\ell^\infty(B_{F'})$, $B_{F'}$ essendo la sfera unitaria del duale F'.

3.2.5. **I numeri di Kolmogorov**

$$d_n(S) = a_n(SQ_E),$$

ove Q_E è la surgezione canonica di $\ell^1(B_E)$ su E, B_E essendo la sfera unitaria di E.

I numeri di cui sopra sono *additivi*, cioé soddisfano la seguente condizione:

(S6) $\quad s_{m+n-1}(S+T) \leq s_m(S)+s_n(T)$ *per* $S,T \in \mathscr{L}(E,F)$.

Inoltre i numeri d'approssimazione, di Gelfand e di Kolmogorov (ma non quelli di Hilbert) sono anche moltiplicativi, nel senso che verificano la seguente proprietà:

(S7) $\quad s_{m+n-1}(ST) \leq s_m(S)s_n(T)$ *per* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *e* $S \in \mathscr{L}(F,G)$.

Valgono infine le diseguaglianze seguenti:

$$h_n(S) \leq \left\{ \begin{matrix} c_n(S) \\ \\ d_n(S) \end{matrix} \right\} \leq a_n(S) \leq \left\{ \begin{matrix} 2n^{\frac{1}{2}}c_n(S) \\ \\ 2n^{\frac{1}{2}}d_n(S) \end{matrix} \right\} \leq cn^{5/2}h_n(S),$$

ove l'ultima diseguaglianza è dovuta a W.Bauhardt [3].

La nozione di s-numero apparve per la prima volta in un articolo di E.Schmidt (cf. [40]) nel contesto degli operatori integrali. Nel caso degli spazi di Hilbert, la teoria di tali numeri è trattata in [12]. I numeri di A.N. Kolmogorov furono introdotti dallo stesso in [18] come *diametri* di insiemi limitati, per i quali successivamente I.M.Gelfand [11] suggerì la nozione duale, cioè quelli che oggi sono chiamati numeri di Gelfand. I numeri d'approssimazione furono studiati da A.Pietsch in [28], al quale è pure dovuta la teoria assiomatica degli s-numeri (cf. [31]). Per maggiori informazioni rimandiamo a [34] e alla letteratura ivi citata, e alla monografia [37], di prossima pubblicazione, per ulteriori risultati e miglioramenti. Infine notiamo che il concetto di numeri d'approssimazione è stato esteso da A.Pietsch in [35] per formare, insieme alla nozione di Spazi di Approssimazione, legata agli ideali di successioni di Lorentz, i generali *Schemi di Approssimazione,* applicati poi in [36] a problemi di stabilità per la formazione di prodotti tensoriali.

3.3. Procedure

Analogamente a quanto fatto nel §1.3 per gli ideali di successioni, definiremo adesso delle procedure per ideali di operatori (cf. [34], Ch.4).

Una regola

$$n : \mathscr{A} \to \mathscr{A}^n$$

che definisce un nuovo ideale di operatori $\mathscr{A}^n$ per ogni ideale di operatori $\mathscr{A}$ è detta *procedura*. Diamo subito alcuni esempi, nei quali $\mathscr{A}$ sta per il generico ideale di operatori.

3.3.1. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene alla *chiusura* $\bar{\mathscr{A}}$ se $S \in \bar{\mathscr{A}}(E,F)$ cioe, se esiste una successione $(S_n) \subset \mathscr{A}(E,F)$ tale che $\lim_n \|S-S_n\| = 0$. $\mathscr{A}$ è *chiuso* se $\mathscr{A}=\bar{\mathscr{A}}$.

3.3.2. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all' *ideale duale* $\mathscr{A}^d$ se $S' \in \mathscr{A}(F',E')$. $\mathscr{A}$ è *simmetrico* se $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^d$ e *completamente simmetrico* se $\mathscr{A} = \mathscr{A}^d$.

3.3.3. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo regolare* $\mathscr{A}^r$ se $i_F S \in \mathscr{A}(E,F'')$, i_F essendo l'immersione canonica di F nel suo biduale F''. $\mathscr{A}$ è *regolare* se $\mathscr{A} = \mathscr{A}^r$.

3.3.4. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo iniettivo* $\mathscr{A}^i$ se $J_F S \in \mathscr{A}(E,\ell^\infty(B_{F'}))$. $\mathscr{A}$ è iniettivo se $\mathscr{A}=\mathscr{A}^i$.

3.3.5. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo surgettivo* $\mathscr{A}^s$ se $SQ_E \in \mathscr{A}(\ell^1(B_E),F)$. $\mathscr{A}$ è *surgettivo* se $\mathscr{A} = \mathscr{A}^s$.

3.3.6. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene al *nucleo minimale*

$\mathscr{A}^{min}$ se $S=RS_0T$, dove $T\in\mathscr{F}(E,E_0)$, $S_0\in\mathscr{A}(E_0,F_0)$ e $R\in\bar{\mathscr{F}}(F_0,F)$. $\mathscr{A}$ è *minimale* se $\mathscr{A}=\mathscr{A}^{min}$.

3.3.7. Un operatore $S\in\mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo massimale* $\mathscr{A}^{max}$ se $RST\in\mathscr{A}(E_0,F_0)$ ogniqualvolta $T\in\bar{\mathscr{F}}(E_0,E)$ e $R\in\bar{\mathscr{F}}(F,F_0)$. $\mathscr{A}$ è *massimale* se $\mathscr{A}=\mathscr{A}^{max}$.

Il concetto di ideale chiuso è immediato. Le nozioni di iniettività e surgettività risalgono ad A.Grothendieck [15], mentre le altre sono dovute a A.Pietsch [29] e H.-U.Schwarz [41], [42].

3.4.ESEMPI.

3.4.1. Esempi classici sono gli ideali $\mathscr{F}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{W}$ e $\mathscr{V}$ degli operatori *di rango finito, compatti, debolmente compatti* e *completamente continui.*

Esempi ormai classici sono anche quelli dati nei seguenti numeri 3.4.2-3.4.12.

3.4.2. L'ideale $\mathscr{G}=\bar{\mathscr{F}}$ degli *operatori approssimabili.*

3.4.3. L'ideale $\mathscr{U}$ degli *operatori incondizionatamente sommanti,* cioé degli operatori che trasformano successioni debolmente sommabili in successioni sommabili in norma.

3.4.4. L'ideale χ degli *operatori di rango separabile.*

3.4.5. L'ideale $\mathscr{S}$ degli *operatori strettamente singolari,* cioé degli operatori $S\in\mathscr{L}(E,F)$ la cui restrizione ad ogni sottospazio di E di dimensione infinita non è un isomorfismo.

3.4.6. L'ideale $\mathscr{C}$ degli *operatori strettamente cosingolari*, cioé degli operatori $S\in\mathscr{L}(E,F)$ la cui composizione con ogni applicazione quoziente di F di dimensione infinita non è un isomorfismo.

3.4.7. Gli ideali $\mathscr{F}_p$ degli *operatori discretamente* p-*fattorizzabili*, cioé degli operatori che si fattorizzano attraverso uno spazio $\ell^p(I)$ $(1\leq p\leq\infty)$ per un insieme opportuno I di indici.

3.4.8. L'ideale $\mathscr{H}$ degli *operatori di Hilbert*, cioé che si fattorizzano attraverso uno spazio di Hilbert.

3.4.9. Gli ideali $\mathscr{L}_p$ degli *operatori* p-*fattorizzabili*, cioé degli operatori $S\in\mathscr{L}(E,F)$ tali che $i_F S:E \to F''$ si fattorizza attraverso uno spazio L^p $(1\leq p\leq\infty)$.

3.4.10. Gli ideali $\mathscr{P}_p$ degli *operatori assolutamente* p-*sommanti* $(1\leq p<\infty)$, cioè degli operatori $S\in\mathscr{L}(E,F)$ per i quali esistono una costante $c>0$ e una misura di probabilità μ su $B_{E'}$, tali che

$$\|Sx\|^p \leq c\int_{B_{E'}} |\langle x,x'\rangle|^p d\mu(x') \quad \text{per ogni } x\in E.$$

3.4.11. Gli ideali $\mathscr{N}_p$ degli *operatori* p-*nucleari* $(1\leq p\leq\infty)$, cioè degli operatori $S\in\mathscr{L}(E,F)$ che ammettono una rappresentazione del tipo

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n x'_n \otimes y_n,$$

ove $(\xi_n)\in\ell^p$, (x'_n) è una successione limitata in E' e (y_n) è una successione in F tale che $(\langle y_n,y'\rangle)\in\ell^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$

per ogni $y' \in F'$. Ricordiamo che $\mathcal{N}_1$ è l'ideale degli *operatori nucleari* introdotto da A.Grothendieck in [14].

3.4.12. L'ideale $\mathcal{N}_0$ degli *operatori fortemente nucleari,* anch'esso introdotto in [14], cioé degli operatori S aventi una rappresentazione come in 3.4.11 con $\xi \in s$ e $(x'_n),(y_n)$ successioni limitate in E',F, rispettivamente.

Per una trattazione degli esempi di cui sopra e di altri ancora rimandiamo alla monografia [34].

Infine i seguenti ideali (ove λ è un ideale di successioni) sono stati investigati in [24].

3.4.13. Gli ideali $\mathscr{A}_\lambda$ degli *operatori* λ*-approssimabili,* cioé degli operatori la cui successione di numeri di approssimazione appartiene a λ. Per $\lambda = c_0$ o ℓ^p ritroviamo i ben noti ideali $\mathscr{G}$ o $\mathscr{A}_p$.

3.4.14. Gli ideali $\mathscr{H}_\lambda$ degli operatori la cui successione di numeri di Hilbert appartiene a λ.

3.4.15. Gli ideali $\mathcal{N}_{\lambda,2}$ degli operatori che ammettono una rappresentazione come in 3.4.11 con $\xi \in \lambda$ e $(\langle x,x'_n\rangle) \in \ell^2$, $(\langle y_n,y'\rangle) \in \ell^2$ per ogni $x \in E$.

3.4.16. Gli ideali $\mathcal{N}_\lambda$ degli operatori *pseudo-*λ*-nucleari* (introdotti da E.Dubinsky e M.S.Ramanujan [7]), cioè degli operatori aventi una rappresentazione come in 3.4.11 con $\xi \in \lambda$ e $(x'_n),(y_n)$ successioni limitate in E',F rispettivamente.

Ulteriori esempi di ideali di operatori legati ad un ideale di successioni λ quando λ è un ideale di Lorentz (cf. 1.5.4) si possono trovare in [37].

Infine, l'applicazione delle procedure del §3.3 agli ideali di cui sopra fornisce molto spesso nuovi ideali degni di considerazione.

4. ESTENSIONI DI IDEALI DI OPERATORI

4.1. Estensioni.

Considerando la semplicità della teoria nel caso degli spazi di Hilbert, accennata nel Cap.2, e lo "zoo" degli ideali di operatori su spazi di Banach, del quale solo alcuni esemplari sono stati fugacemente mostrati nel Cap.3, viene naturale chiedersi quale relazioni esistono tra la teoria negli spazi di Hilbert e quella negli spazi di Banach. Questa domanda si riduce, in fin dei conti, a chiedere di quale ideale di operatori su spazi di Hilbert sia estensione un dato ideale di operatori su spazi di Banach (cf. [33]). Ricordiamo che un ideale $\mathscr{A}$ di operatori su spazi di Banach dicesi *estensione* dell'ideale $\mathscr{A}_0$ di operatori su spazi di Hilbert se $\mathscr{A}(H,K) = \mathscr{A}_0(H,K)$ per ogni coppia di spazi di Hilbert H,K. Sorge allora il problema di determinare le estensioni agli spazi di Banach di tutti gli ideali di operatori su spazi di Hilbert. Ora chiaramente questo problema è intrattabile nella sua generalità e quindi vogliamo brevemente considerare qui solo un suo aspetto.

E' ben noto che, in generale, un ideale di operatori su spazi di Hilbert ha una infinità di estensioni agli spazi di Banach. D'altra parte, nel 1976 A. Pietsch [32], nella sua fondazione della teoria assiomatica degli ideali di operatori, ha introdotto sei estensioni astratte che sono abbastanza naturali e di notevole importanza teorica. Sfortunatamente, la precisa natura di queste estensioni astratte è ancora un mistero. Comunque, due di esse sono specialmente degne di nota: l'estensione inferiore, perché è la più piccola, e l'estensione superiore, perché è la più grande. Tali estensioni sono definite come segue.

Sia $\mathscr{A}_0$ un ideale di operatori su spazi di Hilbert. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*estensione inferiore* $\mathscr{A}_0^i$ se esiste uno spazio di Hilbert H e operatori $T \in \mathscr{L}(E,H)$, $S_0 \in \mathscr{A}_0(H,H)$ e $R \in \mathscr{L}(H,F)$ tali da aversi $S=RS_0T$. Un operatore $S \in \mathscr{L}(E,F)$, appartiene invece all'*estensione superiore* $\mathscr{A}_0^s$ se, ogniqualvolta H e K sono spazi di Hilbert e $T \in \mathscr{L}(H,E)$, $R \in \mathscr{L}(F,K)$, risulta $RST \in \mathscr{A}_0(H,K)$. Come già detto, se $\mathscr{A}$ è una qualsiasi estensione di $\mathscr{A}_0$, si ha $\mathscr{A}_0^i \subset \mathscr{A} \subset \mathscr{A}_0^s$.

In generale $\mathscr{A}_0^i \neq \mathscr{A}_0^s$. D'altra parte, l'uguaglianza sussiste per $\mathscr{A}_0 = \mathscr{F}_0$ (facile da vedersi) e per $\mathscr{A}_0 = \mathscr{S}_0$ (mostrato da W.Bauhardt [2] e quindi tali ideali hanno un'unica estensione agli spazi di Banach. Sorge allora il problema:

(P) *Determinare quali ideali di operatori su spazi di Hilbert hanno un'unica estensione agli spazi di Banach.*

Tratteremo tale problema nel prossimo paragrafo.

4.2. Estensione unica e sue proprietà.

Per cominciare, osserviamo che, nel considerare il problema

(P) del paragrafo precedente, dobbiamo restringerci al caso degli operatori propri. Infatti, sia $\mathscr{A}_o$ un ideale non proprio di operatori su spazi di Hilbert. Allora esiste uno spazio di Hilbert H tale che $\dim_h(H) = \infty$ e $I_H \in \mathscr{A}_o$ e quindi $\mathscr{A}_o$ non può avere un'unica estensione. Pertanto $\mathscr{A}_o$ deve essere proprio ed allora, ricordando quanto esposto nel §2.4, $\mathscr{A}_o$ deve essere del tipo $\mathscr{S}_\lambda$ per qualche ideale λ di successioni e il problema (P) si riduce al problema

(P') *Determinare per quali ideali λ di successioni l'ideale $\mathscr{S}_\lambda$ ha un'unica estensione a un ideale di operatori su spazi di Banach.*

La risposta completa a questo problema è data dal seguente teorema per mezzo di un criterio molto semplice sull'ideale λ .

4.2.1. **TEOREMA** (cf. [24]). *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) $\mathscr{S}_\lambda$ *ha un'unica estensione.*

(ii) $\mathscr{N}_\lambda = \mathscr{A}_\lambda$.

(iii) $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{S}_\lambda^i$.

(iv) $\bar{\lambda} = (n)\cdot\bar{\lambda}$.

(v) $\lambda = \ell^1\cdot\lambda$

4.2.2. **OSSERVAZIONE.** (a) Gli ideali $\mathscr{A}_\lambda$ e $\mathscr{N}_\lambda$ sono quelli introdotti in 3.4.13 e 3.4.16.

(b) $\mathscr{S}_\lambda^i = \mathscr{N}_{\lambda,2}$ (cf. 3.4.15) sempre.

(c) $\bar{\lambda}$ è il nucleo introdotto nel §1.3.

(d) Valgono le seguenti inclusioni:

$$\mathscr{S}^{i}_{\lambda} = \mathscr{N}_{\lambda,2} \subset \mathscr{A}_{\lambda} \subset \mathscr{H}_{\lambda} \subset \mathscr{S}^{s}_{\lambda} .$$

(e) Si noti che $\mathscr{N}_{\lambda}$ non è sempre una estensione di $\mathscr{S}_{\lambda}$, ma lo è se $\lambda = \ell^{1}.\mu$, con μ ideale di successioni. In questo caso si ha anche

$$\mathscr{A}_{\lambda} \subset \mathscr{N}_{\lambda} \subset \mathscr{S}^{s}_{\lambda}.$$

Poiché $\lambda = \ell^{1}.\lambda$ implica $\lambda \subset \ell^{\circ}$, dal Teorema 4.2.1 discende il seguente

4.2.3. COROLLARIO. $\mathscr{F}_{0}$ *e* $\mathscr{S}_{0}$ *sono rispettivamente il più piccolo e il più grande tra gli ideali di operatori su spazi di Hilbert aventi un'unica estensione agli spazi di Banach.*

Vale infine il

4.2.4. TEOREMA. *Supponiamo* $\lambda = \ell^{1}\cdot\lambda$ *e sia* $\mathscr{S}^{e}_{\lambda}$ *l'unica estensione di* $\mathscr{S}_{\lambda}$ *alla classe degli spazi di Banach. Allora* $\mathscr{S}^{e}_{\lambda}$ *è completamente simmetrico, regolare, iniettivo, surgettivo, minimale e massimale.*

4.3. ESEMPI

Richiamiamo innanzitutto le nozioni di insieme di Köthe e di spazio di Köthe nel nostro contesto. Sia P un insieme di successioni aventi le seguenti proprietà (valide per ogni $n\in\mathbb{N}$):

(K1) *Ogni* $a \in P$ *è tale che* $1 \leq a_n \leq a_{n+1}$.

(K2) *Se* $a,b\in P$, *allora esistono* $c \in P$ *e* $M_1 > 0$ *tali che*

$$a_n \leq M_1 c_n \quad e \quad b_n \leq M_1 c_n.$$

(K3) *Per ogni* $a \in P$ *esistono* $b \in P$ *e* $M_2 > 0$ *tali che* $a_{2n} \le M_2 b_n$.

Un tale insieme P dicesi *insieme di Köthe* ed in corrispondenza ad esso resta associato lo *spazio di Köthe* $\lambda(P)$ definito come

$$\lambda(P) = \{\xi : p_a(\xi) = \sum_{n \in N} a_n |\xi_n| < \infty \quad \text{per ogni } a \in P\} .$$

Munito della topologia naturale generata dalle seminorme p_a (che sono in realtà delle norme), lo spazio $\lambda(P)$ è uno spazio localmente convesso immerso continuamente in ℓ^1.

Si noti che le condizioni (K1) e (K2) sono standard, mentre la (K3) è imposta per assicurare almeno l'additività di $\lambda(P)$ (condizione (n2) del Lemma 1.4.1).

Il seguente lemma ci dice che $\lambda(P)$ non è "quasi mai" un ideale di successioni.

4.3.1. LEMMA. $\lambda(P)$ *è un ideale di successioni se e solo se* $\lambda(P) = \varphi$ *o* $\lambda(P) = \ell^1$.

D'altra parte, $\lambda(P)$ è spesso un nucleo, nel qual caso soddisfa automaticamente la condizione (iv) del Teorema 4.2.1:

4.3.2. LEMMA. *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) $\lambda(P)$ *è un nucleo* (*cioè*, $\lambda(P) = \bar{\lambda}(P)$).

(ii) *Per ogni* $a \in P$ *esistono* $b \in P$ *e* $M > 0$ *tali che* $n a_n \le M b_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\lambda(P) = (n).\lambda(P)$.

(iv) $\lambda(P)$ *è uno spazio nucleare per la topologia generata dalle norme* p_a.

Ne segue il

4.3.3. TEOREMA. (a) *Sia* $\lambda(P)$ *uno spazio di Köthe e sia* λ *l'ideale di successioni avente* $\lambda(P)$ *come nucleo. Allora l'ideale* $\mathcal{S}_\lambda$ *ha una unica estensione se e solo se* $\lambda(P)$ *è nucleare.*

(b) *Per ideali di successioni* λ *tali che* $\bar{\lambda}$ *è perfetto, esiste una corrispondenza biunivoca tra la famiglia degli ideali di operatori* $\mathcal{S}_\lambda$ *aventi una unica estensione e la famiglia degli spazi di Köthe nucleari.*

Per i risultati di cui sopra e maggiori chiarimenti rimandiamo all'articolo [24]. Particolarmente importanti sono i casi in cui $\lambda(P)$ è uno spazio $\Lambda_r(\alpha)$ di serie di potenze di tipo finito o infinito (cf. 1.5.6), che sono trattati in [45].

5. IDEALI DI SPAZI LOCALMENTE CONVESSI

5.1. Ideali di spazi

Per le nozioni basiche di teoria degli spazi localmente convessi che verranno citate o utilizzate in quest'ultimo capitolo, rinviamo il lettore al testo [16].

Cominciamo col definire, la nozione di ideale di spazi localmente convessi seguendo [34]. Sia $\mathbb{L}$ la classe degli spazi localmente convessi e sia $\mathbb{F}$ la sottoclasse di $\mathbb{L}$ degli spazi di dimensione finita. Una sottoclasse $\mathbb{A}$ di $\mathbb{L}$ dicesi *ideale di spazi* se essa soddisfa le condizioni seguenti:

(SP1) $\mathbb{F} \subset \mathbb{A}$.

(SP2) *Se* $E, F \in \mathbb{A}$, *allora* $E \times F \in \mathbb{A}$.

(SP3) *Se* $E \in \mathbb{A}$ *e* F *è isomorfo a un sottospazio complementato di* E *, allora* $F \in \mathbb{A}$.

E' ovvio che $\mathbb{F}$ è il più piccolo ideale di spazi. Esempi classici di ideali di spazi sono le classi degli spazi: 1) di Banach, 2) di Fréchet, 3) bornologici, 4) tonnelati, 5) di Montel, 6) di Schwartz, 7) nucleari, 8) fortemente nucleari, 9) deboli (cioè muniti della loro topologia debole).

Chiaramente le condizioni (SP1)-(SP3) sono estremamente generali. Per ottenere ideali interessanti di spazi, ulteriori restrizioni devono essere imposte, ciò che sarà fatto nei paragrafi seguenti.

5.2. Ideali iniettivi, surgettivi e Cartesiani

Un ideale $\mathbb{A}$ di spazi è detto *iniettivo* (rispettivamente, *surgettivo*) se ogni sottospazio (rispettivamente, quoziente separato) di uno spazio localmente convesso $E \in \mathbb{A}$ ancora appartiene ad $\mathbb{A}$. Per esempio, con riferimento agli ideali 1)-9) del paragrafo precedente, gli ideali 1),2),7),8) e 9) sono iniettivi e gli ideali 1),2),3),4),7),8) e 9) sono surgettivi.

Osserviamo che per ogni ideale $\mathbb{A}$ di spazi si può costruire *l'inviluppo iniettivo* $\mathbb{A}^i$ di $\mathbb{A}$ come il più piccolo ideale iniettivo contenente $\mathbb{A}$. E' chiaro che $\mathbb{A}^i$ è la classe degli spazi localmente convessi F per ciascuno dei quali esiste $E \in \mathbb{A}$ contenente F come sottospazio. Analogamente, possiamo costruire *l'inviluppo surgettivo* $\mathbb{A}^s$ di $\mathbb{A}$ come il più piccolo ideale surgettivo contenente $\mathbb{A}$, cioè come la classe degli spazi localmente convessi F che sono quozienti di qualche E $\in \mathbb{A}$.

Diciamo ora che un ideale di spazi $\mathbb{A}$ è *Cartesiano* se, ogniqual volta $\{E_i : i\in I\}$ è una famiglia di elementi di $\mathbb{A}$, allora $\prod_{i\in I} E_i \in \mathbb{A}$. Per esempio, gli ideali 3)-9) del paragrafo precedente sono Cartesiani. Se $\mathbb{A}$ non è Cartesiano, si può costruire *l'inviluppo Cartesiano* $\mathbb{A}^c$ di $\mathbb{A}$ aggiungendo ad $\mathbb{A}$ i prodotti cartesiani arbitrari di elmenti di $\mathbb{A}$.

Per ulteriori esempi di ideali iniettivi, surgettivi, Cartesiani (e non) e delle loro relazioni, rinviamo il lettore al lavoro [44] dell'autore.

Infine, notiamo che, in analogia con l'invarianza Cartesiana, si possono anche considerare ideali che sono chiusi per la formazione di somme dirette localmente convesse.

5.3. Varietà

Un ideale di spazi $\mathbb{A}$ che sia iniettivo, surgettivo e Cartesiano è anche chiamato una *varietà*, nel linguaggio del classico articolo [5]. Ad un tale ideale si applicano dunque, per esempio, tutti i risultati esposti in [5] ed in particolare le nozioni di ideale singolarmente generato e di generatore universale. Queste nozioni si possono naturalmente definire anche nel caso generale di ideali di spazi (che non siano necessariamente varietà), come è fatto in [44]. Precisamente, un ideale $\mathbb{A}$ dicesi *singolarmente generato* se esiste uno spazio localmente convesso E tale che $\mathbb{A}$ sia il più piccolo ideale contenente E; in tal caso $\mathbb{A}$ è denotato con $\mathbb{A}(E)$. Dicesi poi che uno spazio localmente convesso F è un *generatore universale* dell'ideale $\mathbb{A}$ se ogni membro di $\mathbb{A}$ è isomorfo a un sottospazio di una potenza opportuna di F. I risultati che si ottengono in tal caso sono però sostanzialmente diversi dal caso delle varietà. Come esempio diamo il seguente teorema (cf. [44]) che può essere utilmente confrontato con i risultati di [5].

5.3.1. TEOREMA. (a) *Se* $\mathbb{A} = \mathbb{A}(E)$, *allora* E *è un generatore universale di* $\mathbb{A}$. *In tal caso ogni membro di* $\mathbb{A}$ *è isomorfo a un sottospazio complementato di una potenza finita di* E.

(b) *Se* $\mathbb{A} = \mathbb{A}(E)$ *e* E *è uno spazio localmente convesso primo e tale che* E *è isomorfo a* $E \times E$, *allora ogni membro di* $\mathbb{A}$ *è di dimensione finita o isomorfo a* E, *cioè* $\mathbb{A} \simeq \{E \cup \mathbb{F}\}$.

(c) $\mathbb{F}$ *è il più piccolo ideale di spazi, ma non esiste un secondo ideale più piccolo.*

(Ricordiamo che uno spazio E è primo se ogni suo sottospazio complementato di dimensione infinita è isomorfo a E. Esempi sono forniti dagli spazi ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$, c_o, φ e ω).

5.4. Ideali di Grothendieck

Veniamo adesso ad una classe di ideali di spazi di particolare importanza per le applicazioni. Tale classe mostra chiaramente lo stretto legame esistente tra la teoria degli ideali di operatori tra spazi di Banach e la teoria degli spazi localmente convessi. L'idea originale è dovuta a Grothendieck, che la impiegò sistematicamente nello studio di molte classi di spazi localmente convessi già esistenti e nellla costruzione di svariate altre. Il metodo di Grothendieck ebbe una tale potenza e portata che fu ripreso e adoperato con grandissimo successo da moltissimi autori, tanto da divenire oggi il metodo standard e più efficace nello studio degli spazi localmente convessi. Un campione di referenze bibliografiche è dato dai lavori [1],[26],[17] oltre che, naturalmente dai trattati [34] e [16] e referenze ivi citate. In particolare, seguendo [34] diremo che un ideale di spazi $\mathbb{A}$ è un *ideale di Grothendieck* se esiste un ideale $\mathscr{A}$ di operatori su spazi di Banach tale che uno spazio E appartiene ad $\mathbb{A}$ se e solo se esso verifica la seguente condizione: *per ogni seminorma continua* p *su* E *ne esiste un'altra* q *tale che l'applicazione canonica* $E_q \to E_p$ *appartiene ad* $\mathscr{A}$. (Ricordiamo che E_p denota lo spazio di Banach ottenuto completando lo spazio quoziente $E/p^{-1}(0)$ normato dalla norma su di esso indotta da p). Si dice allora che $\mathscr{A}$ *genera* $\mathbb{A}$ e si denota con Groth($\mathscr{A}$) l'ideale $\mathbb{A}$.

Osserviamo subito che $\mathbb{F}$ non è un ideale di Grothendieck e che il più piccolo tra tali ideali è ovviamente $\mathbb{W}$ = Groth($\mathscr{F}$), cioè l'ideale degli spazi dotati di topologia debole. Classici esempi di ideali di Grothendieck sono forniti dagli spazi di Schwartz (= Groth($\mathscr{K}$)), dagli spazi nucleari (=Groth($\mathscr{N}$)) e dagli spazi fortemente nucleari (= Groth($\mathscr{N}_0$)).

Notiamo poi che ogni ideale di Grothendieck è Cartesiano e che le proprietà dell'ideale di operatori $\mathscr{A}$ si trasmettono in genere all'ideale di spazi Groth($\mathscr{A}$), in quanto quest'ultimo è iniettivo o surgettivo se tale è $\mathscr{A}$. Rimane però un problema aperto quello della costruzione di (almeno) un ideale di operatori $\mathscr{A}$, generante $\mathbb{A}$, a partire dalla ipotesi che $\mathbb{A}$ sia un ideale di Grothendieck. In altre parole, si sa che l'equazione

$$(*) \qquad \mathbb{A} = \mathrm{Groth}(\mathscr{A}),$$

nell'incognita $\mathscr{A}$, è sempre risolubile per un ideale $\mathbb{A}$ di Grothendieck, ma non se ne conosce la soluzione che in casi particolari. Manca ancora un metodo generale di risoluzione, cioè della costruzione di $\mathscr{A}$ a partire da certe proprietà interne di $\mathbb{A}$.

5.5. Ideali di Grothendieck unicamente generati

Un altro problema connesso con l'equazione (*) del paragrafo precedente è, naturalmente, quello della "unicità" della soluzione. E' ben noto che la soluzione in generale non è unica, cioè che ci sono in genere molti ideali differenti $\mathscr{A}$ generanti lo stesso ideale di Grothendieck, per esempio le potenze $\mathscr{A}^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Un classico esempio è dato dall'ideale degli spazi nucleari, che è generato non solo dalle potenze di $\mathscr{N}$ ma anche da molti altri ideali (cf. [34], §29.7). E' naturale allora chiedersi se esistono casi in cui l'equazione (*) abbia una unica soluzione, cioè in cui l'ideale di Grothendieck $\mathbb{A}$ sia *unicamente generato.* La risposta è positiva nel caso in cui $\mathbb{A}$ sia l'ideale degli spazi deboli (verifica diretta) o degli spazi fortemente nucleari ([34], Theorema 29.8.2). Non solo, ma nel caso in cui $\mathbb{A}$ sia un ideale di Grothendieck contenuto nell'ideale degli spazi nucleari, è addirittura possibile dare condizioni necessarie e sufficienti affinché $\mathbb{A}$ sia unicamente generato. Tale risultato, mostrato dall'autore in [43], riposa in parte sul Teorema 4.2.1 e può essere formulato alla maniera seguente:

5.5.1. TEOREMA. *Sia $\mathbb{A}$ un ideale di Grothendieck contenuto nell'ideale degli spazi nucleari e supponiamo che* $\mathbb{A} = \mathrm{Groth}(\mathscr{A})$, *con $\mathscr{A}$ ideale di operatori tra spazi di Banach. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\mathbb{A}$ *è unicamente generato (e contenuto nell'ideale* $\mathbb{N}_0$ *degli spazi fortemente nucleari).*

(ii) $\mathscr{A}$ *è idempotente è contenuto in* $\mathscr{N}_0$.

(iii) $\mathscr{A}(\ell^2,\ell^2)$ *è idempotente e contenuto in* $\mathscr{S}_0$.

(iv) $\lambda_{\mathscr{A}}$ *è idempotente e contenuto in* ℓ° .

(Per (iv) ricordiamo che $\lambda_{\mathscr{A}}$ è l'ideale di successioni associato ad $\mathscr{A}(\ell^2,\ell^2)$, come nel Teorema 2.3.2.(a).)

Ne segue che, nelle ipotesi del teorema precedente, l'ideale $\mathbb{W}$ degli spazi deboli e quello $\mathbb{N}_0$ degli spazi fortemente nucleari sono rispettivamente il più piccolo ed il più grande tra gli ideali di Grothendieck nucleari che sono unicamente generati. Questo mostra che la situazione per la generazione unica di ideali di spazi è analoga a quella per la estensione unica di ideali di operatori.

Concludiamo con l'osservazione che l'ipotesi di nuclearità nel Teorema 5.5.1 è in qualche modo necessaria per ragioni tecniche e che, in sua assenza, ci sono poche speranze di ottenere l'unicità, come mostrato dalla grande massa degli esempi che si incontrano sia nella teoria che nelle applicazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.APIOLA, Some permanence properties of locally convex spaces defined by norm space ideals of operators, *Studia Math.* 55 (1976) 265-278.

[2] W.BAUHARDT, *Streng nukleare Operatoren, Dissertation,* Jena 1976.

[3] W.BAUHARDT, Hilbert-Zahlen von Operatoren in Banachräumen, *Math.Nachr.* 79 (1977) 181-187.

[4] J.W.CALKIN, Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* 42 (1941) 839-873.

[5] J.DIESTEL, S.A.MORRIS e S.A.SAXON, Varieties of linear topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 172 (1972) 207-230.

[6] E.DUBINSKY, *The structure of nuclear Fréchet spaces,* LNM 720, Springer, 1979.

[7] E.DUBINSKY e M.S.RAMANUJAN, On λ-nuclearity, *Mem.Amer.Math.Soc.* 128 (1972).

[8] N.DUNFORD e J.T.SCHWARTZ, *Linear Operators,* Interscience, Part. I, 1958 e Part. II, 1963.

[9] D.J.H.GARLING, On symmetric sequence spaces, *Proc. London Math. Soc.* 16 (1966) 85-106.

[10] D.J.H.GARLING, On ideals of operators in Hilbert space, *Proc.London Math.Soc.* 17 (1967) 115-138.

[11] I.M.GELFAND, Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, *Mat. Sb.* 4 (1938) 235-286.

[12] I.C.GOHBERG e M.G.KREJN, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert Space,* Providence, 1969.

[13] B.GRAMSCH, Eine Idealstruktur Banachscher Operatoralgebren, *J.reine angew Math.* 225 (1967) 97-115.

[14] A.GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer.Math.Soc.* 16 (1955)

[15] A.GROTHENDIECK, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol.Soc.Mat.* São Paulo **8** (1956) 1-79.

[16] H.JARCHOW, *Locally convex spaces*, Teubner, 1981.

[17] H.JUNEK, *Locally convex spaces and operator ideals*, Teubner - Texte Math. 56, Leipzig 1983.

[18] A.N.KOLMOGOROV, Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse, *Ann. of Math.* **37** (1936) 107-110.

[19] J.LINDENSTRAUSS e L.TZAFRIRI,*Classical Banach Spaces*, Vol. I, Springer, 1977.

[20] E.LUFT, The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space,*Czch.Math.J.* **18** (1968) 595-605.

[21] B.S.MITIAGIN, Normed ideals of intermediate type, *Izv. Akad Nauk SSSR, Ser. Mat.* **28** (1964) 819-832 (russo).

[22] V.B.MOSCATELLI, On the existence of universal λ-nuclear Fréchet spaces, *J.reine angew Math.* **301** (1978)1-26.

[23] V.B.MOSCATELLI e MARILDA A.SIMÕES, *Introduzione alla Teoria Moderna degli Operatori*, Dipartimento di Matematica, Q.8, Lecce (1982).

[24] V.B.MOSCATELLI e MARILDA A.SIMÕES, Operator ideals on Hilbert space having a unique extension to Banach spaces, *Math.Nachr.* **118** (1984) 69-87.

[25] F.J.MURRAY e J.von NEUMANN, On rings of operators, *Ann. of Math.* **37** (1936) 116-229.

[26] E.NELIMARKKA, On operator ideals and l.c. $\mathscr{A}$-spaces with applications to λ-nuclearity, (Thesis), *Ann.Acad.Sci.Fenn., Series A, Math. Diss.* **13** (1977).

[27] J.von NEUMANN e R.SCHATTEN, The cross-space of linear transformations, *Ann. of Math.* **47** (1946) 608-630.

[28] A.PIETSCH, Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen, *Revue de Math. pures et appl.* (Bukarest) **8** (1963) 427-447.

[29] A.PIETSCH, Adjungierte normierte Operatorenideale, *Math. Nachr.* **48** (1971) 189-211.

[30] A.PIETSCH,*Nuclear Lccally Convex Spaces*, Springer, 1972.

ottenere l'unicità, come mostrato dalla grande massa degli esempi che si incontrano sia nella teoria che nelle applicazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.APIOLA, Some permanence properties of locally convex spaces defined by norm space ideals of operators, *Studia Math.* 55 (1976) 265-278.

[2] W.BAUHARDT, *Streng nukleare Operatoren, Dissertation*, Jena 1976.

[3] W.BAUHARDT, Hilbert-Zahlen von Operatoren in Banach-räumen, *Math.Nachr.* 79 (1977) 181-187.

[4] J.W.CALKIN, Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* 42 (1941) 839-873.

[5] J.DIESTEL, S.A.MORRIS e S.A.SAXON, Varieties of linear topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 172 (1972) 207-230.

[6] E.DUBINSKY, *The structure of nuclear Fréchet spaces*, LNM 720, Springer, 1979.

[7] E.DUBINSKY e M.S.RAMANUJAN, On λ-nuclearity, *Mem.Amer.Math.Soc.* 128 (1972).

[8] N.DUNFORD e J.T.SCHWARTZ, *Linear Operators*, Interscience, Part. I, 1958 e Part. II, 1963.

[9] D.J.H.GARLING, On symmetric sequence spaces, *Proc. London Math. Soc.* 16 (1966) 85-106.

[10] D.J.H.GARLING, On ideals of operators in Hilbert space, *Proc.London Math.Soc.* 17 (1967) 115-138.

[11] I.M.GELFAND, Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, *Mat. Sb.* 4 (1938) 235-286.

[12] I.C.GOHBERG e M.G.KREJN, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert Space*, Providence, 1969.

[13] B.GRAMSCH, Eine Idealstruktur Banachscher Operatoral-gebren, *J.reine angew Math.* 225 (1967) 97-115.

[14] A.GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer.Math.Soc.* 16 (1955)