Si può celebrare oggi il π-day?*

Dio disse a Mosè "Io sono colui che sono!"

Esodo 3.14

Giuseppe De Cecco *già affiliato al Dipartimento di Matematica & Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento*

M. Letizia Rosato *IISS don Tonino Bello, Tricase (Lecce)*

Da alcuni anni, anche in Italia [1], per avvicinare la matematica al grande pubblico, è stata istituito il "π-day" il 14 marzo, poiché nella scrittura anglosassone delle date, esso si scrive 3-14, il valore approssimato (largamente usato) di π il rapporto costante tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.

Naturalmente possiamo celebrare il "π-day" anche con altri criteri. Per esempio il 22 luglio, che nella ordinaria convenzione (utilizzata in Italia) delle date si scrive 22/7, che rappresenta il valore di π indicato da Archimede; altri propongono il 10 novembre, che è il 314° giorno del calendario gregoriano, o anche (negli anni non bisestili) il 21 dicembre, ore 1:13, quando il rapporto 355/113 dà un numero approssimato di π (= 3.1415929) con il maggior numero di cifre decimali).

Ma lo scopo della conferenza è un altro.

*Quest'articolo è la rielaborazione di una conferenza tenuta da G. De Cecco il 12 marzo 2024 presso il Dipartimento di Matematica e Fisica "E. De Giorgi" dell'Università del Salento con l'aggiunta di un'Appendice di M. L. Rosato.

[1] Ufficialmente dal 2017 (in Italia), ma la prima celebrazione si tenne nel 1988 all' Exploratorium di San Francisco per iniziativa del fisico e artista statunitense Larry Shaw (1939-2017).

Il valore approssimato 3.14 di π è chiaramente riferito alle figure del piano con l'usuale metrica euclidea: ebbene si farà vedere come considerando alcuni particolari spazi, detti ℓ_p, nei quali è possibile definire analogamente π_p, questo numero può assumere tutti i valori maggiori di $\pi_2 = \pi$ l'usuale costante negli spazi euclidei.

Dunque, con la convenzione scelta, ogni giorno dell'anno, successivo al 14 marzo, potrebbe essere scelto come un π-day, fissando opportunamente l'indice p, che caratterizza la distanza (o quasi-distanza) $\sigma_p(x, y)$ tra due punti $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ del piano così definita:

$$\sigma_p(x, y) = [|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p]^{1/p}$$

che per $p = 2$ dà la distanza euclidea e per $p = 1$ la distanza del tassista (come vedremo più avanti).

1. π presso gli Egizi.

Quasi sempre π è definito come il rapporto costante tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro, raramente come area del disco unitario. Eppure storicamente sembra che la questione delle aree sia stata preminente.

Secondo il matematico e storico della matematica Abraham Seidenberg (1916-1988) tutta la matematica (e non solo questa disciplina) ha un'origine rituale [2]. In particolare la geometria sarebbe nata dalle questioni riguardanti la costruzione di altari: ingrandimento conservando la forma e equivalenza di forme.

Ricordiamo che uno dei problemi classici dell'antichità era quello della duplicazione del cubo, il cosiddetto problema di Delo [3] (isola dell'Egeo famosa per i suoi santuari).

Figura 1: Frammento del papiro di Rhind.

Il primo caso documentato di un tentativo di quadrare il cerchio si trova nel Papiro Rhind [4], la più importante fonte di informazioni matematiche dell'antico Egitto (costituito da 87 problemi risolti, scritti in ieratico) per la"conoscenza di tutte le cose esistenti e tutti gli oscuri segreti".

Lo scriba Ahmes (vissuto intorno al 1650 a.C.) così scrive:

Figura 2: Statua di uno scriba.

"Togli 1/9 a un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio".

$$l = d - 1/9\, d = 8/9\, d \ \ ,$$

quindi, l'area del cerchio è data dal quadrato di l

$$l^2 = (8/9\, d)^2 \ \ .$$

La filosofa Simone Weil (1909-1943), in una lettera al fratello André (1906-1998), uno dei componenti di spicco del gruppo Bourbaki, così immagina siano arrivati gli agrimensori a trovare quel valore [7]:

"Se si divide il quadrato circoscritto in ottantuno quadratini, si può osservare che, per avere l'area del cerchio, bisogna sottrarre tre di questi quadratini più il valore pressappoco di 3 mezzi quadratini per ogni angolo."

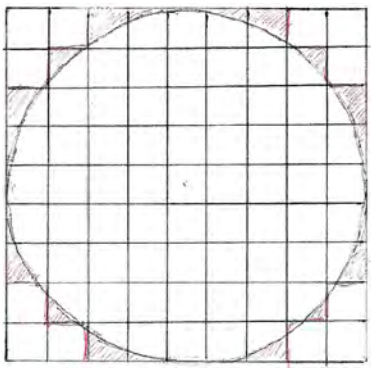

Figura 3: Ipotesi di S. Weil.

[2] Vedi [1, 2]. Questa tesi è condivisa anche dal matematico B.L. Van der Waerden [3]. I suoi studi sono anche un contributo alla teoria generale di Lord Raglan, che sostiene che la civilizzazione ha un'origine rituale [4, 5]. Cfr. anche [6].

[3] Di questo problema parla Teone di Smirne (filosofo, teologo e dignitario bizantino del XII secolo); questi, citando Eratostene, riporta che gli abitanti di Delo, avendo interrogato l'oracolo di Apollo sul modo di liberarsi dalla peste, avevano avuto l'ordine di costruire un altare di forma cubica, di volume doppio di quello esistente. Rimane senza risposta però la domanda: perché la duplicazione del volume dell'altare poteva allontanare la peste?

[4] Papiro lungo 5.46 metri, alto 33 cm, che si trova al British Museum a Londra. Esso è chiamato Rhind dal nome dell'antiquario A. H. Rhind, che nel 1858 lo acquistò, oppure "Papiro di Ahmes" dal nome dello scriba.

Quindi in ogni angolo ci sono 4.5 quadratini da togliere, cioè $4 \times 4.5 = 18$ quadratini; ora $81 - 18 = 63$, che approssimiamo a $64 = 8 \times 8$, quindi l'area approssimata del cerchio vale

$$64(1/9\, d)^2 = (8/9\, d)^2.$$

Con il linguaggio attuale, ove $d = 2r$,

$$(8/9\, d)^2 = \pi r^2$$

quindi per Ahmes $\pi_A = 3.16049\ldots$ che è una precisione notevole per quel tempo.

Questo risultato non ebbe però alcuna diffusione. Mille anni dopo i Babilonesi e gli antichi Ebrei continuavano infatti a usare il valore 3, che era molto meno esatto; ma Seidenberg osserva che il confronto non è corretto poiché gli Egizi e gli Ebrei si occupavano di aspetti differenti del cerchio. Gli Egizi erano interessati a trovare il rapporto fra il cerchio e il quadrato, probabilmente solo allo scopo di misurare con precisione terreni ed edifici: non sembra abbiano considerato π un numero costante, e tanto meno che abbiano tentato di calcolarlo.

2. π presso gli antichi Indiani.

Lo studioso della cultura indiana George Thibaut (1848-1914) informa che ci furono contrasti su quale forma fosse più adatta ad un certo sacrificio. Infatti la forma degli altari variava con lo scopo del sacrificio: alcuni erano quadrati, altri circolari o di altre forme (semicerchio, ruota di carro, mangiatoia). È sorprendente poi il fatto che l'architettura vedica usasse le stesse intuizioni dell'aritmetica pitagorica. Si nota così una possibile origine comune tra la matematica greca e quella indiana.

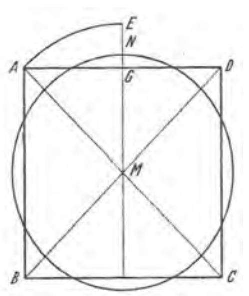

Figura 4: Come cerchiare il quadrato.

Nelle *Sulvasutras* (regole delle corde), scritti indiani di epoche diverse (800-200 a.C.) concernenti la costruzione di altari, ci si occupa per esempio di quadrare il cerchio e cerchiare il quadrato proprio per rendere equivalenti gli altari. Ecco come viene descritta la trasformazione di un quadrato in un cerchio:

> "Tendi una corda tra il centro del quadrato e uno dei suoi vertici, ruotala fino a renderla perpendicolare a uno dei lati, quindi disegna un cerchio con il raggio del semilato del quadrato più un terzo della differenza tra la semidiagonale e il semilato."

Se poniamo MG=1, cioè AB=2, allora MN=MG+GN dove

$$\mathrm{GN} = \mathrm{EN}/3 = (\sqrt{2} - 1)/3 \quad ,$$

quindi

$$\pi_S[1 + (\sqrt{2} - 1)/3^2 = 4 \quad ,$$

$$\pi_S = [6/(2 + \sqrt{2})]^2 \simeq 3.24 \quad .$$

Per l'inverso, cioè la quadratura del cerchio, si ha la seguente regola (certamente più complicata di quella di Ahmes):

> "Dividi il diametro in 8 parti e ancora una di queste parti in 29 parti: da queste 29 parti togline 28 e inoltre la sesta parte (dalla stessa parte) meno l'ottava parte (della stessa sesta parte).

Usando questa costruzione π_S risulta poco più di 3: infatti il lato del quadrato richiesto è uguale a [1]

$$7/8 + 1/(8 \times 29) - 1/(8 \times 29 \times 6) + 1/(8 \times 29 \times 6 \times 8)$$

del diametro del dato cerchio.

3. π presso gli antichi Ebrei.

Gli antichi Ebrei invece si sono occupati della lunghezza della circonferenza, come è detto nella Bibbia (I Re 7,23), a proposito della costruzione dell'altare nel tempio di Salomone:

> " Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua ampiezza era di cinque cubiti e

una corda di trenta cubiti lo circondava all'intorno. "

Questo passo (che è quasi identico a II Cronache 4,2) indica che il rapporto della circonferenza al diametro è $3 = \pi_B$; esso fu scritto probabilmente intorno al VI secolo a.C. (anche se descrive il tempio costruito nel X secolo a.C.).

Figura 5: Tempio di Salomone.

Gli storici non sono d'accordo, ma sembra non fosse noto che $\pi_A = \pi_B$. D'altra parte non è per nulla intuitivo che il fattore di proporzionalità tra il diametro e la lunghezza della circonferenza debba essere uguale a quello tra il quadrato del raggio e l'area del cerchio.

4. π presso i Babilonesi.

I Babilonesi usavano le formule

$$A = C^2/12 \quad , \quad C = 3\,d \quad ,$$

(dove A è l'area del cerchio e C la lunghezza della circonferenza) da cui seguirebbe che sapessero che $\pi_A = \pi_B$, ma è difficile da provare. Si sono trovate stime migliori di π .

Infatti nel 1936 negli scavi della città di Susa è stata trovata una tavoletta babilonese nella quale si vede un esagono inscritto in una circonferenza. Lo scriba dice che il rapporto tra il perimetro dell'esagono ($3\,d$) e quello della circonferenza è

$$57/60 + 36/(60)^2 \quad ,$$

con la scrittura sessagesimale usata dai Babilonesi.

Nella nostra notazione si ha

$$\pi = 3 + 1/8 = 3.125 \quad .$$

Figura 6: Tavoletta di Susa.

5. π presso i Greci: Archimede.

Il primo pensatore greco che tentò di trovare un rapporto costante fra un cerchio e un quadrato fu Anassagora di Clazomene (500 - 428 a.C.), mentre Ippocrate di Chio (470 circa - 410 a. C. circa) enunciò che

> "I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri".

Come è noto, il problema di calcolare il valore di π è stato risolto dal siracusano Archimede (287-212 a.C.) che usò nei suoi calcoli i metodi di esaustione che Antifonte (sofista ateniese della metà del V sec. a. C.) e Brisone (matematico di Eraclea Pontico, 450 a. C. - 350 a. C. circa) avevano usato nell'intento di calcolare l'area del cerchio.

DIMENSIO CIRCULI.

α'.

Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.

ἐχέτω ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τριγώνῳ τῷ Ε, ὡς ὑπόκειται. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστίν.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ ΑΓ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα, καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς

ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ Ν, καὶ κάθετος ἡ ΝΞ. ἐλάσσων ἄρα ἡ

1. α'] om. F. 4. βάσει] λοιπῇ Wallis. 5. τριγώνῳ τῷ Ε post ἴσος ἐστὶν lin. 6 ponit ed. Basil.; σὺν τρ. τῷ Ε Nizze. 9. ἔστω] per comp. F.

Figura 7: Una pagina da "*Opera omnia*" di Archimede a cura di J. L. Heiberg.

Archimede rese rigoroso il metodo di esaustione e lo applicò alla ricerca della lunghezza della circonferenza; rese pubbliche le sue scoperte nel libro “Misura del cerchio”:

> “La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro, più una parte minore di un settimo del diametro e maggiore di dieci settantunesimi” (prop.3).

$$(3 + 10/71)\, d < C < (3 + 10/70)\, d$$

Archimede sapeva di poter descrivere solo gli estremi superiore e inferiore del rapporto, ma se si fa una media dei due valori si ottiene 3.1419, con un errore di meno di tre decimillesimi del valore reale.

Abbandoniamo questa parte storica [5] citando una curiosità.

Nel 1887 nello Stato dell’Indiana (USA) fu presentato un progetto di legge (n. 246) da un matematico dilettante, che intendeva brevettare un suo metodo di quadratura del cerchio! In questo progetto indirettamente veniva fissato il valore di π uguale a 4, poiché si affermava che l’area del cerchio è uguale a quella di un quadrato di lato un quarto della circonferenza. Il progetto, già approvato in una prima seduta, non passò al Senato per l’impegno di un altro matematico, che convinse i senatori della insensatezza della legge!

6. Metrica del tassista.

Per chiarezza premettiamo la cosiddetta “metrica del tassista”, una metrica non euclidea [6] facilmente accessibile, anzi divertente, che può catturare l’interesse anche di studenti di scuola secondaria.

In un piano coordinato la distanza tra due punti $P_1 = (x_1, x_2)$ e $P_2 = (y_1, y_2)$ è definita da:

$$d_T(P_1, P_2) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| \quad .$$

[5] Per altre notizie storiche si consiglia di consultare l’interessante articolo di Renzo Baldoni, *Il pi greco; storia e curiosità di un numero affascinante* (`www.mateureka.it`, sito dedicato al “Museo del Calcolo” a Pennabilli (Rimini), del quale Baldoni è direttore).

[6] Sono soddisfatte tutte le proprietà che definiscono una geometria euclidea tranne l’assioma “lato-angolo-lato”, che recita “Data una biiezione tra gli insiemi dei vertici di due triangoli, se due lati e l’angolo incluso del primo triangolo sono congruenti ai corrispondenti elementi del secondo triangolo, allora la corrispondenza è una congruenza”. Cfr. [8].

Il termine “metrica del tassista” (o “metrica *taxicab*”) deriva dal fatto che questa distanza è proporzionale alla tariffa da pagare ad un tassista per coprire il percorso tra due punti con il minimo chilometraggio, in una città in cui le strade sono tutte tra loro perpendicolari.

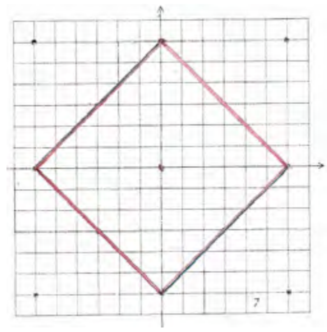

Figura 8: Il cerchio nella metrica del tassista.

Il primo a proporre in modo serio la geometria *taxicab* fu Hermann Minkowski (1866-1909), un matematico che fu insegnante a Zurigo, del giovane Albert Einstein.

Nel piano, con questa metrica, consideriamo per semplicità la circonferenza di centro l’origine O e raggio r, che chiamiamo anche T-circonferenza. Posto $P(x, y)$ si ha $d_T(O, P) = r$, cioè

$$|x| + |y| = r \quad .$$

Il segno rosso della figura 8 descrive la circonferenza nel caso continuo; un tassista dovrà seguire il reticolato.

Il lato del quadrato (nella metrica considerata) ha lunghezza $8r$, quindi la lunghezza di C_r è $8r$.

Ora se c è un numero reale qualsiasi vale

$$|cx| + |cy| = |c|r$$

quindi una T-circonferenza di raggio c_r $(v > 0)$ avrà lunghezza $8cr$ e diametro $2\ c\ r$.

Segue che è costante il loro rapporto che possiamo considerare come π nella metrica del tassista, cioè

$$\pi_T = 8\, cr \;/\; 2\, c\, r = 4.$$

Si vede facilmente che non si può definire come area di un quadrato il quadrato della lunghezza del lato. Si perverrebbe a risultati inaccettabili per la teoria della misura. Nella Figura 9 l’area del quadrato rosso (uguale a 4) avrebbe

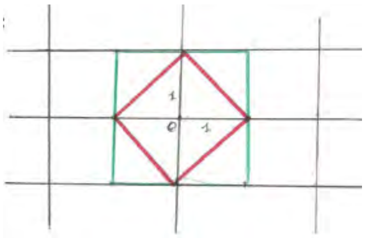

Figura 9: In rosso T-circonferenza di diametro 2. In verde quadrato di lato 2.

la stessa area del quadrato verde, che contiene propriamente quello rosso.

Usando l'usuale metodo per calcolare le aree con l'integrale, ponendo uguale a 2 l'area del quadrato unitario, allora l'area della T-circonferenza di raggio 1 è uguale a 4, mentre il quadrato verde (che ha il lato uguale a 2, come quello rosso) ha area 8, come è intuitivo.

In generale, se C_r indica la T-circonferenza di raggio r, posto $\mathcal{L}(C_r)$ la lunghezza di C_r e $\mathcal{A}(C_r)$ la sua area, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(C_r) = 8\,r \quad &; \quad \mathcal{A}(C_r) = 4\,r^2, \\ \mathcal{L}(C_r) = 2\pi_T\,r \quad &; \quad \mathcal{A}(C_r) = \pi_T\,r^2 \quad . \end{aligned}$$

7. Spazi ℓ_p

L'esempio prima considerato fa vedere che π ha un differente valore da quello usuale poiché abbiamo scelto una metrica diversa da quella euclidea [9]. Ebbene, procedendo nella generalizzazione, perveniamo agli spazi ℓ_p, dove la distanza tra due punti $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ del piano è definita da:

$$\sigma_p(x, y) = [|y_1 - x_1|^p + |y_2 - x_2|^p]^{1/p} \quad . \qquad (1)$$

Le considerazioni che faremo si basano su una generalizzazione del concetto di distanza in matematica, concetto più vicino a quello di distanza del linguaggio comune, dove esso rappresenta essenzialmente una valutazione di una differenza, il cosiddetto"scarto", come sarà precisato in seguito.

Alcune considerazioni non sono elementari e non mi soffermerò sui dettagli procedurali, ritenendo che l'eliminazione dei dettagli in questo caso giovi alla comprensione. Come afferma il matematico H. Freudenthal [10], noto anche per la sua indiscussa capacità divulgativa:

"Il turista matematico può essere guidato alle vette e agli abissi senza che ciò debba trasformarlo in un rocciatore o speleologo."

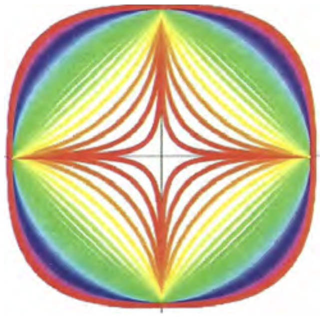

Figura 10: T-ciconferenze al variare di p.

Si prova facilmente che la definizione di Eq. (1) è una distanza (secondo Frechet [7]) per $1 \leq p < +\infty$ e una quasi-distanza (la diseguaglianza triangolare è modificata [8]) per $0 < p < 1$.

Si tratta ora di trovare la lunghezza di queste circonferenze.

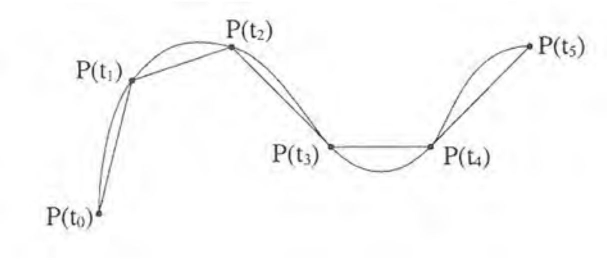

Figura 11: Poligonale iscritta in una curva.

Ricordiamo come si trova la lunghezza di una curva (in spazi metrici generalizzati) [11]. Sia C la curva parametrizzata da $P(t)$ con $a \leq t \leq b$. Per individuare una "poligonale" (detta anche "spezzata") si fissa un numero finito di valori crescenti del parametro t:

$$a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b \quad ,$$

cioè si sceglie una decomposizione dell'intervallo $[a, b]$. I corrispondenti punti $P_i = P(t_i)$ della curva saranno i vertici della poligonale inscritta nella curva, formata dai tratti rettilinei $P_i\,P_{i+1}$ (si veda la Figura 11).

[7] Cioè la funzione $\sigma_p : R^2 \times R^2 \to R$ verifica le seguenti condizioni 1) $\sigma_p(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$; 2) $\sigma_p(x, y) = \sigma_p(y, x)$; 3) $\sigma_p(x, z) \leq \sigma_p(x, y) + \sigma_p(y, z)$.

[8] La condizione 3) è così modificata 3′) $\sigma_p(x, z) \leq c(\sigma_p(x, y) + \sigma_p(y, z))$ con $c \geq 1$.

La lunghezza del segmento $P_i P_{i+1}$ sarà $\sigma_p(P_i, P_{i+1})$ e quindi la lunghezza della poligonale sarà:

$$\sigma_p(P_0, P_1) + \sigma_p(P_1, P_2) + \ldots + \sigma_p(P_{n-1}, P_n) \quad .$$

Per definizione, la lunghezza della curva C, $\mathcal{L}(C)$, sarà l'estremo superiore di tutte le poligonali che si ottengono al variare di tutte le possibili decomposizioni dell'intervallo $[a, b]$.

Poiché per $1 \leq p < \infty$, σ_p è una metrica si procede nel modo usuale, a parte la difficoltà del calcolo. Invece per $0 < p < 1$, σ_p non è una metrica, ma una quasi-metrica, per cui bisogna fare delle modifiche e delle precisazioni, come indicato in [11].

Si osservi che la definizione di lunghezza di una poligoniale, e quindi di una curva, ha senso anche se σ_p verifica solo la proprietà di non degenerazione, cioè $\sigma_p(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$. Questa funzione è chiamata “scarto”. Sebbene essa esprima solo una differenza, non necessariamente simmetrica, come per esempio è una valutazione soggettiva, permette di fare interessanti considerazioni. È possibile infatti dare una nozione di convergenza e definire diverse topologie [12].

Posto $C_r = r\, C_1$, si vede che $\mathcal{L}(C_r) = r\, \mathcal{L}(C_1)$, quindi è costante

$$\mathcal{L}(C_r)/2r = \mathcal{L}(C_1)/2 = \pi_p \quad .$$

Nel 2000, C. Adler e J. Taton hanno provato che per $1 \leq p < +\infty$, la funzione π_p (al variare di p) ha il minimo per $p = 2$, cioè nel caso euclideo [13]. Inoltre, $\pi \leq \pi_p \leq 4$ per $1 \leq p < +\infty$.

In un lavoro del 2002, G. De Cecco e G. Palmieri mostrano che anche per $0 < p < 1$ il minimo di π_p è dato da $\pi = \pi_2$ (si veda [11]). Il grafico della funzione π_p per ogni $p > 0$ è presentato in Fig 12. Come si vede, nella fascia $\pi \leq \pi_p \leq 4$ una retta parallela all'asse x incontra il grafico in due punti. Ebbene, nel 2009 J. Keller e R. Vakil [14] hanno provato che $\pi_p = \pi_q$ se, e solo se, $1/p + 1/q = 1$, cioè quando gli indici p e q sono coniugati .

8. Circonferenze sulla sfera.

Finora abbiamo considerato come sostegno il piano con metriche diverse; ora considereremo come sostegno una sfera con la metrica standard

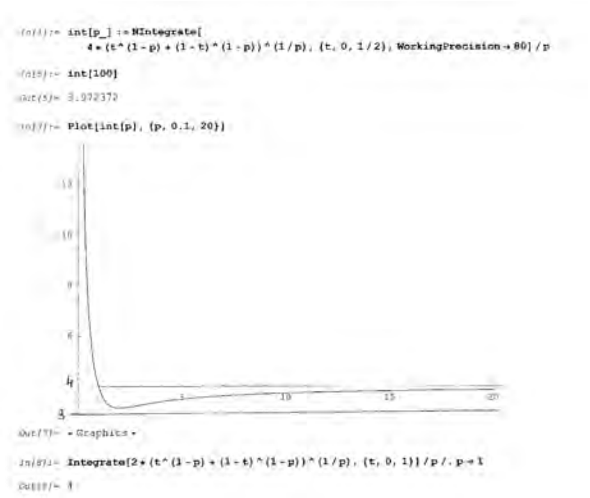

Figura 12: π_p per $p > 0$.

euclidea. Allora sulla sfera un segmento di lunghezza r sarà un arco sotteso da un angolo al centro α, la circonferenza di raggio r, C_r , sarà un parallelo e il disco una calotta.

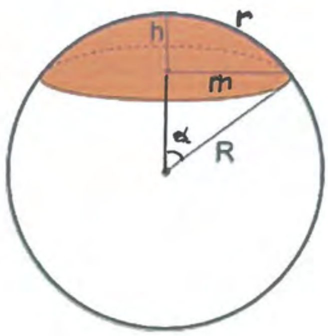

Figura 13: Il cerchio sulla sfera.

R = raggio della sfera
r = raggio di $C_r = R\alpha$
m = raggio in R^3 di $C_r = R \sin\alpha$
$\mathcal{L}(C_r) = 2\pi m = 2\pi R \sin\alpha$.

Quindi sulla sfera per $\alpha \neq 0$

$$\pi_S = (2\pi R \sin\alpha)/(2\, R\, \alpha) = \pi(\sin\alpha)/\alpha \quad ,$$

non è costante, ma varia con α. Se α è piccolo, $(\sin\alpha)/\alpha \simeq 1$ e $\pi_S = \pi$. Se consideriamo un cerchio massimo , quindi $\alpha = \pi/2$, si ha $\pi_S = 2$, che è il valore minimo per le circonferenze sulla sfera. Si conclude che $\mathcal{L}(C_r) = 2\pi_S\, r$.

Il disco sulla sfera è una calotta; quindi, se

$\alpha \neq 0$, l'area della calotta è

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(C_r) &= 2\pi\, R\, h = 2\pi\, R^2(1-\cos\alpha) \\ &= 2\pi(1-\cos\alpha)r^2/\alpha^2 \quad , \end{aligned}$$

e ponendo

$$\pi'_S = 2\pi(1-\cos\alpha)/\alpha^2$$

si conclude

$$\mathcal{A}(C_r) = \pi'_S r^2 \;;\; \pi'_S \neq \pi_S \quad .$$

Se $\alpha = \pi/2$, allora $\pi'_S = 8/\pi$ e $\mathcal{A}(C_r) = 2\pi R^2$, infatti si tratta di una semisfera!

Se consideriamo la latitudine di Lecce, che è $40.349°$, allora $\sin\alpha = 0.762$, quindi $(\sin\alpha)/\alpha = 0.879$ e il pi corrispondente è $\pi_L = 2.76$.

Alcuni autori hanno osservato che per noi umani è intuitiva la geometria euclidea, poiché con i nostri occhi e con semplici strumenti possiamo osservare solo una piccola porzione della Terra, che risulta sostanzialmente piatta. Se fossimo come uccelli, potendo osservare la Terra globalmente, probabilmente sarebbe intuitiva la geometria ellittica (quella della sfera) . Quindi anche l'ambiente influisce su ciò che va considerato intuitivo.

Ringraziamo Stefano Marchiafava per i suoi suggerimenti e Rocco Chirivì per la significativa locandina, nella quale è messa in evidenza che tra le infinite cifre di π si trova la data della conferenza. Questa proprietà rientra nella congettura (non dimostrata) che π sia un numero "normale", concetto introdotto da É. Borel nel 1909.

APPENDICE
La costruzione degli altari all'origine della geometria

Principale obiettivo di questo breve scritto è quello di condividere motivazioni e spunti sulle origini della matematica, nella consapevolezza che andare alle radici consente agli studenti di cogliere tratti di un lungo percorso, inserito nell'evolversi storico dell'umanità, favorisce l'emergere di riflessioni e approfondimenti sulle motivazioni che hanno orientato ricerca, scoperte, metodi,

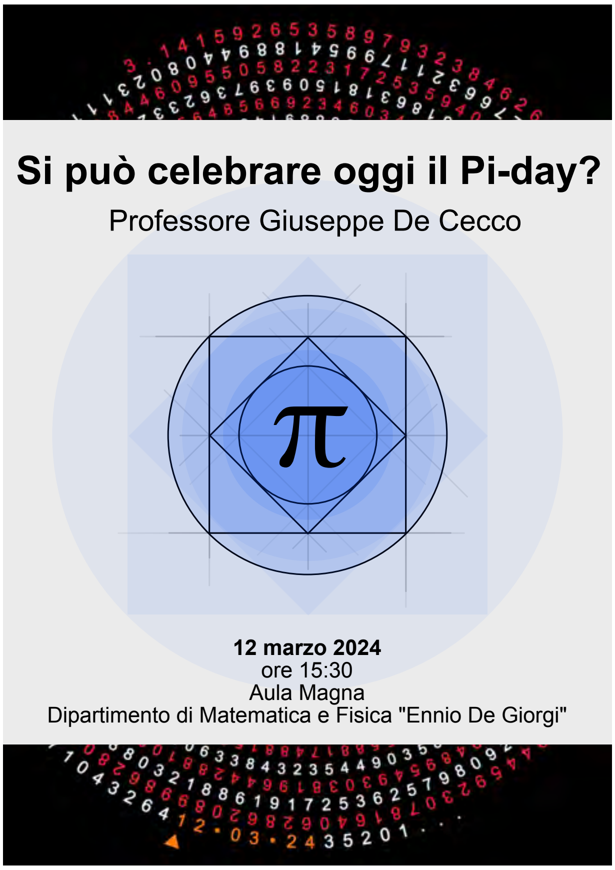

Figura 14: Locandina del seminario. La freccia mostra la data del seminario.

permette di cogliere quanto si è impastati di risultati matematici. Mettendo in luce inaspettate connessioni, si suscitano nuove, inedite aperture e curiosità, si alimenta la creatività per nuovi campi di interesse e di applicazione.

Sull'origine della geometria

Erodoto (484-408 a. C.) sosteneva che la geometria avesse avuto origine in Egitto, per rispondere alla necessità di misurare le terre dopo le periodiche inondazioni del Nilo.

Aristotele (384-322 a. C.) era dell'opinione che fosse stata l'esistenza in Egitto di una classe agiata di sacerdoti a stimolare lo studio della geometria.

Quindi, la geometria nasce da un bisogno pratico di costruire edifici e di misurare terre, oppure da un senso estetico per il disegno e l'ordine? [15]

La matematica, ci ricorda il matematico Mariano Giaquinta [16], come disciplina organizzata, indipendente e razionale, cioè come scienza, si sviluppò nel mondo ellenico: i due aspetti, matematica empirica e razionale, sono stati presenti per tutto il periodo dello sviluppo della matematica greca e spesso sono le giuste domande a promuovere lo sviluppo più che i metodi. Sicuramente uno dei problemi fondamentali fin dall'inizio della matematica greca fu quello di misurare le figure geometriche.

Lo storico e matematico Abramo Seidenberg (Washington 1916 - Milano1988) sostiene che la geometria, come il contare, abbia avuto origine in pratiche rituali primitive e tanto la geometria indiana quanto quella egiziana possano aver avuto un'unica origine: una protogeometria collegata con riti primitivi [1]. Come argomento a sostegno della sua tesi utilizza i contenuti degli *Śulvasūtras*, o"regole della corda", opera indiana di cui esistono diverse versioni, di epoca incerta, (VIII - II sec. a.C) contenente regole e risultati geometrici per costruire gli altari per i sacrifici alle divinità. *Sulva* (o *sulba*) si riferisce alla corda usata come principale strumento di misura degli spazi interessati alla costruzione, e *sūtra* indica una regola per l'esecuzione esatta e rigorosa di un rito.

L'uso di corde tese ricorda in modo singolare le origini della geometria egiziana, e la connessione di tali pratiche con funzioni religiose fa pensare a una possibile origine rituale della matematica [15].

Le ricerche più recenti sugli *Śulvasūtra* e il confronto con la matematica di altre culture hanno, secondo il matematico Paolo Zellini, rimesso in discussione il problema delle origini del pensiero matematico [6].

Nel libro *Mathematics and Divine: a Historical Study* [17], gli autori, Theun Koetsier e Luc Bergmans, sostengono che la storia dell'umanità è una storia di lotta permanente per la sopravvivenza. Gli esseri umani sopravvivono attraverso sistemi cognitivi, che differiscono da quelli animali in quanto gli esseri umani hanno la capacità di pensiero simbolico e linguaggio simbolico. Il pensiero simbolico rende possibile l'astrazione: con grande precisione gli esseri umani possono descrivere situazioni e relazioni che non hanno effettivamente osservato o sperimentato.

I moderni sistemi cognitivi scientifici si sono evoluti da quelli prescientifici, posseduti dai Paleolitici, attraverso un lungo processo di tentativi ed errori.

Gli uomini hanno cercato di dare risposte alle perenni domande esistenziali attraverso la religione. Nel XIX secolo Edward B. Tylor (1832-1917), considerato uno dei padri dell'antropologia moderna, ha osservato che la religione iniziò come animismo e si sviluppò attraverso il politeismo fino al monoteismo. E infatti lo sviluppo dei nostri sistemi cognitivi mostra una crescente sofisticazione in tutti i settori, compresa la religione.

Ebbene, anche la conoscenza matematica, nel senso più ampio del termine, è sempre stata parte centrale dei sistemi cognitivi umani.

Troviamo il ruolo della geometria in un antico rituale vedico, chiamato *Agnicayana*, rituale che ha almeno 2500 anni. Nella religione vedica, il fuoco, chiamato *agni*, era adorato e c'era il culto di una pianta chiamata *soma*, probabilmente un allucinogeno. A questi due erano dedicati i maggiori rituali vedici: *Agni* e *Soma*. Abbiamo un'idea molto chiara di come fossero questi rituali, perché nel 1955 Frits Staal si rese conto del fatto che questa tradizione vedica era ancora viva nel Kerala, nel sud-ovest dell'India, e nel 1975 documenta *Agnicayana*, rituale complesso, frutto di un lungo sviluppo; ci vogliono dodici giorni di elaborati spettacoli accompagnati da recitazioni e la cerimonia deve essere eseguita scrupolosamente seguendo rigide regole. Agni è un dio e un divino messaggero, che riceve le offerte durante il rito. Il rituale è un modo per entrare in contatto con il divino [17].

Sulla questione della costruzione degli altari

La tradizione vedica, antica più di tremila anni, ci ha trasmesso conoscenze matematiche finalizzate all'edificazione di altari di diverse forme e dimensioni. Per comprendere la funzione dell'altare Seidenberg si riferisce all'antropologo Arthur M. Hocart (1883-1939), che nel 1927 nel suo libro "*Kingship*" [18] sostenne che l'idea base del sacrificio indiano fosse quella di rendere un oggetto uguale ad un altare e quindi, attraverso la ripetizione dell'azione rituale rendere tale anche un altro oggetto; in tal modo due cose diverse (distinte dall'altare) sono rese uguali tra loro.

È esemplare la precisione con cui gli indiani costruiscono gli altari, con il disegno di forme

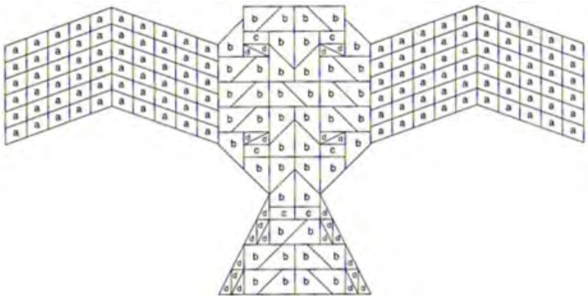

Figura 15: Altare a forma di falco.

perfette, l'estrema cura nel cercare e mantenere proporzioni esatte fra gli elementi delle figure. Per esempio, da una forma quadrata, ne costruiscono una esattamente doppia o esattamente tripla. Uno degli elementi centrali del rituale Agnicayana è la costruzione di un altare costituito da cinque strati di mattoni.

L'altare ha la forma di un uccello (falco) ed è costruito nel corso del rituale in un modo precisamente prescritto da mattoni che hanno forme prescritte. La prima classificazione degli altari di Agni si trova in un testo, ritenuto più antico degli *Śulvasūtra*, e che è uno dei corpi principali della ritualità vedica: Il *Taittirīya Samhitā*, dove sono enumerate le possibili forme degli altari; ad ogni desiderio corrispondeva una forma dell'altare: di airone, di cerchio, di quadrato, di semicerchio, di ruota di carro, di mangiatoia .

Secondo diverse fonti, il corpo dell'altare aveva dimensioni variabili: si poteva ingrandire, sia nel suo complesso sia nelle singole parti, con regole e criteri ispirati alla scienza geometrica e numerica. Si iniziava dall'altare più piccolo, la cui superficie aveva un'area di 7.50 *purusa* quadrati (il *purusa* era un'unità di lunghezza, corrispondente all'altezza di un uomo con le braccia alzate), e si operavano successivi incrementi di un *purusa* quadrato, fino a raggiungere il centounesimo altare, cioè l'altare di superficie uguale a 101.50 *purusa* quadrati (gli altari avevano quindi aree uguali a 7½, 8½, 9½, ...101½, ed erano in tutto 94).

Punto centrale della geometria degli altari è come ingrandire un quadrato, duplicarlo o triplicarlo, quadrare il cerchio e cerchiare il quadrato per rendere equivalenti gli altari. Ciò che più importa è che subito dopo questi esempi si passa, negli *Śulvasūtra* di *Āpastamba*, a definire la natura stessa dell'ingrandimento ([6], pp. 71-75).

Nella connessione tra un quadrato e il quadrato più grande ottenuto con la costruzione è consistita probabilmente, sostiene Zellini, la prima schematizzazione dell'idea matematica di variazione funzionale.

Un tema centrale degli *Śulvasūtra* e dei passi dello *Śatapatha Brāhmana* che trattano di misure di altari, è l'invarianza nel mutamento. Rimane invariata la forma degli altari soggetti a successivi ingrandimenti e in altri casi c'è l'invarianza dell'area di figure che cambiano forma.

Come si può vedere, la geometria va oltre le semplici regole pratiche. Infatti argomenti emergenti dalla geometria degli altari riguardano la costruzione di figure geometriche, la valutazione dell'area di figure, il teorema di Pitagora, il calcolo della diagonale di un quadrato, la somma e la differenza di due quadrati, la trasformazione di figure geometriche, il rapporto π. Ecco, per esempio, cosa troviamo in uno dei libri in cui sono raccolte le norme per la costruzione degli altari [19]:

> "Per sommare due differenti quadrati, togli dal più grande una porzione rettangolare con un lato del più piccolo. La diagonale di questa parte sarà il lato della somma."

Inoltre, le procedure rituali, le routine sociali e l'organizzazione dello spazio e del tempo sono all'origine degli algoritmi.

Conclusione.

Il carattere rituale della matematica vedica e l'origine rituale della matematica suscitano uno sguardo allargato verso nuovi approfondimenti sulla matematica come linguaggio per esprimere la perfezione. La costruzione geometrica degli altari è vista come simbolo di perfezione e di tramite tra l'uomo e Dio [19]. In particolare, nella liturgia cristiana: gesto del mistero dentro il presente [20], mistero di presenza, opera dell'arte [21]. E testimoni di queste idee sono stati i matematici in tutta la storia della Matematica, dalla cultura vedica passando per Pitagora fino ai nostri giorni [22].

[1] A. Seidenberg: *The Ritual Origin of Geometry,* Archive for History of Exact Sciences, vol. 1, Springer (Berlino). 1960-62 p. 488.

[2] A. Seidenberg: *The Ritual Origin of Counting,* Archive for History of Exact Sciences, vol. 2, Springer (Berlino). 1960-62 p. 488.

[3] B.L. Van der Waerden: *Science Awakening,* P. Noordhoff, Groningen (1954).

[4] L. Raglan: *How came civilization,* Meuthen, Londra (1939).

[5] L. Raglan: *The origin of religion,* Watts, Londra (1949).

[6] P. Zellini: *Gnomon,* Adelphi, Milano (1999).

[7] S. Weil, A. Weil: *L'arte della matematica,* Adelphi, Milano (2018).

[8] E. F. Krause: *Taxicab Geometry, An Adventure in Non-Euclidean Geometry,* Dover, Mineola, NY (USA) (1975).

[9] R. Euler, J. Sadek: *The πs Go Full Circle,* Math. Magazine, 72 (1999) 59.

[10] H. Freundental: *La matematica nella scienza e nella vita,* Il saggiatore, Milano (1967).

[11] G. De Cecco, G. Palmieri: *Length of a curve in generalized metric spaces,* Geometry Seminars 2001-2004, Dip. Mat. Univ. Bologna (2004) 35.

[12] G. De Cecco, G. Palmieri: *Asymptotically equal generalized distances: induced topologies and p-energy of a curve,* Beiträge zur Algebra und Geometrie, 42 (2001) 325.

[13] C. L. Adler, J. Taton: *π is the Minimum Value for Pi,* College Math. J., 31 (2000) 102.

[14] J. B. Keller, R. Yakil: *π_p the Value of π in ℓ_p,* The Am. Math. Monthly, 116 (2009) 931.

[15] C. Boyer: *Storia della Matematica,* Mondadori, Milano (1980).

[16] M. Giaquinta: *Aspetti della Matematica prima del Calcolo.* https://homepage.sns.it/giaquinta/uno-Aspetti.pdf

[17] T. Koetsier, L. Bergmans: *Mathematics and Divine: a Historical Study,* Elsevier, Amsterdam (2005).

[18] A. M. Hocart: *Kingship,* Oxford Univ. Press, Oxford UK (1927).

[19] E. Rogora: *Matematica e insegnamento interdisciplinare*, Seminario, Roma 25 Gennaio 2022. https://www.liceomatematico.it/wp-content/uploads/2022/02/Rogora2022Testo.pdf

[20] R. Gabriel: *Creare un altare: il gesto del mistero dentro il presente Avvenire*, 31 luglio 2019. https://www.avvenire.it/agora/pagine/altare-chiesa-arte-e-sacro-raul-gabriel-seconda-parte

[21] AA.VV.: *L'Altare (a cura di Goffredo Boselli),* Qiqajon, Comunità di Bose (2005).

[22] M. L. Rosato: *Matematici e Divino nel XX secolo: La prospettiva di Ennio De Giorgi* tesi di Dottorato di ricerca in "Storia della Scienza", Università di Bari, 2005.

Giuseppe De Cecco: è stato professore ordinario di Geometria nell'Università del Salento, dove ha insegnato per circa quaranta anni. Ha tenuto numerosi corsi di tipo diverso, privilegiando sempre l'aspetto interdisciplinare, anzi transdisciplinare. Le sue ricerche sono in Geometria differenziale, Topologia algebrica ed Analisi globale, in particolare sulle varietà riemanniane con singolarità.

Maria Letizia Rosato: è docente di matematica nelle Scuole Superiori. Laureata in Matematica presso l'Università di Lecce, ha conseguito il Dottorato di Ricerca in Storia della Scienza presso l'Università di Bari, occupandosi dell'approccio nei confronti del divino di alcuni matematici del Novecento, in particolare di Ennio De Giorgi.