
Stringhe, Brane e (Super)Gravità

Augusto Sagnotti

Scuola Normale Superiore e INFN, Piazza dei Cavalieri 7, 56126 Pisa

Gli anni '50 e '60 furono caratterizzati da un'imponente proliferazione di risonanze adroniche, particelle molto instabili che oggi associamo a composti di "quarks", e fu presto evidente che esse interagiscono fortemente, come i protoni e i neutroni dei nuclei atomici. La Teoria Quantistica dei Campi, nata negli anni '30 dall'esigenza di combinare Relatività Speciale e Meccanica Quantistica, aveva collezionato importanti successi dalla fine degli anni '40, riuscendo a spiegare sottili effetti dell'Elettromagnetismo nella Fisica Atomica. Questi successi avevano richiesto nuovi importanti sviluppi della Fisica Teorica, ma sarebbero stati impossibili se le Interazioni Elettromagnetiche tra elettroni, positroni e fotoni non fossero relativamente poco intense. Una parte della comunità scientifica si dedicò quindi negli anni '60 a costruire modelli che, al netto di alcuni stringenti criteri di consistenza, fossero in grado di descrivere *a priori* la distribuzione angolare delle particelle prodotte in urti tra risonanze adroniche. Nel 1968 Gabriele Veneziano propose una peculiare ampiezza di questo tipo, associata ad un urto elastico tra due

particelle, basata sulla funzione Γ di Eulero,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_V &= \frac{\Gamma(-1 - \alpha' s)\Gamma(-1 - \alpha' t)}{\Gamma(-2 - \alpha'(s+t))} \\ &= \int_0^1 dx x^{-2-\alpha's}(1-x)^{-2-\alpha't}. \quad (1) \end{aligned}$$

Questa espressione gode di alcune proprietà notevoli su cui torneremo, ma possiede anzitutto un'inusuale simmetria sotto lo scambio delle due "variabili di Mandelstam" s e t , che pure hanno ruoli ben diversi. Esse caratterizzano infatti, nel riferimento del centro di massa, l'energia totale e l'angolo di diffusione, ovvero l'angolo tra la direzione comune di impatto delle due particelle coinvolte nell'urto e quella lungo la quale esse emergono dall'interazione. Questa ampiezza fu presto collegata ad una classe di oggetti estesi (stringhe aperte) la cui struttura anticipava i tubi di flusso oggi associati al confinamento dei quarks, ma sottili effetti quantistici richiedono anche la presenza di particelle e interazioni riconducibili all'Elettromagnetismo e alla Relatività Generale. La "Teoria delle Stringhe" che genera eq. (1) è quindi una profonda generalizzazione della teoria di Einstein, nata sorprendentemente in un altro contesto. La sua consistenza richiede che l'Universo in-

cluda alcune dimensioni microscopiche, apparentemente inaccessibili ai nostri strumenti più sofisticati, in un quadro di straordinaria unità strutturale che trascende lo stesso concetto di spazio-tempo. Questo emerge chiaramente in presenza della supersimmetria, una peculiare simmetria tra bosoni e fermioni che introduce profonde semplificazioni nella dinamica, estendendo anche la Relatività Generale alla Supergravità. Appare oggi imperativo esplorare più a fondo i principi alla base di questi scenari.

Introduzione

Se chiedeste ad un esperto di illustrarvi le idee alla base dell'Elettromagnetismo, la sua risposta coinvolgerebbe cariche elettriche, linee di flusso, potenziali e onde. Si tratta di concetti sottili, ma per buona parte intuitivi, che possono trasmettere un'idea di questi fenomeni complessi anche ad un pubblico relativamente vasto. La risposta ad una domanda simile sulla Relatività Generale porterebbe il vostro interlocutore ad illustrarvi il principio di equivalenza, la caduta dei gravi e suggestive deformazioni della geometria dello spazio tempo che guidano i corpi celesti nelle loro orbite. Di contro, per la Teoria delle Stringhe questa richiesta può solo produrre alcuni esempi in grado di evidenziare straordinarie proprietà che emergono in casi speciali relativamente semplici, perché le sue basi restano elusive. Nel seguito cercherò di dare un'idea di queste difficoltà e del quadro affascinante che emerge comunque da queste considerazioni.

Campi, Quanti e Particelle

La nostra attuale comprensione delle Interazioni Fondamentali è fortemente ancorata al concetto di particella. Si tratta di un'associazione che risale almeno agli albori della Fisica, permea il concetto di punto materiale della Meccanica Newtoniana e, indirettamente, i modelli di corde, membrane, corpi rigidi e fluidi. Lo stesso concetto permea, seppure in modo più sottile, l'Elettromagnetismo classico, le cui equazioni ondulatorie possono essere associate, formalmente, a limiti continui di oscillatori accoppiati.

Il concetto si è però evoluto in modo profondo quando la Relatività Speciale è stata combinata con la Meccanica Quantistica, negli anni '30 del secolo scorso, in quella che oggi viene detta Teoria Quantistica dei Campi. In questa nuova veste, le diverse specie di onde-particelle riemergono come "quanti" di oscillatori corrispondenti ai campi, e combinano due attributi familiari, la massa e la quantità di moto, con lo spin, una sorta di "momento angolare intrinseco" che ne caratterizza le "polarizzazioni". A questi attributi si aggiungono una o più cariche q_i , che generalizzano la carica elettrica e determinano le loro interazioni, come avviene per la "costante di struttura fine"¹

$$\alpha_e = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}, \quad (2)$$

che coinvolge la carica e dell'elettrone e ha un ruolo centrale nell'Elettrodinamica Quantistica.

Le simmetrie *continue globali* della Teoria dei Campi, operazioni identiche in tutti i punti dello spazio-tempo, si traducono nella conservazione di cariche corrispondenti. Ad esempio, la conservazione dell'energia emerge in sistemi invarianti sotto traslazioni nel tempo. Simmetrie *locali o di gauge* operano in modo diverso in punti diversi, e determinano le interazioni di particelle cariche attraverso accoppiamenti minimali

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c} A_\mu \quad (3)$$

i cui potenziali generalizzano quelli dell'Elettromagnetismo. Anche il comportamento sotto operazioni discrete come la parità P o l'inversione temporale T è essenziale per dar conto delle Interazioni Fondamentali.

Una sintesi di questo corpo di conoscenze, nota come "Modello Standard delle Interazioni Elettrodeboli e Forti", è emersa tra gli anni '60 e la metà degli anni '70 del secolo scorso. Si tratta appunto di una sintesi dei dati sperimentali basata sul concetto di simmetria locale o di gauge, e sulla presenza di "vuoti", stati di minima energia che la rispettano solo in parte. Questo fenomeno, noto come "rottura spontanea" e ispirato da profon-

¹ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, dove h è la costante di Planck. Nella Fisica delle Interazioni Fondamentali è conveniente ricordare che $\hbar c \simeq \frac{1}{5} \text{ GeV} \times \text{fm}$, dove 1 GeV è l'energia di riposo di un protone e $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$ è la sua dimensione.

di risultati alla base del Ferromagnetismo, è stato portato all'attenzione del grande pubblico dalla scoperta del bosone di Higgs al CERN nel 2012. La simmetria di gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ del Modello Standard² genera complesse interazioni tra i fotoni delle Interazioni Elettromagnetiche, i bosoni intermedi W_{\pm} e Z_0 delle Interazioni Deboli e i gluoni delle Interazioni Forti, e ruota tra loro quark e leptoni, le particelle di materia che oggi riteniamo elementari, e le corrispondenti anti-particelle, ma non fornisce alcuna indicazione sulle loro masse. Inoltre, le Interazioni Deboli violano le simmetrie discrete P e T .

Anche la Gravità, l'unica interazione a cui tutta la materia risponde, può essere associata ad una simmetria di gauge, legata in questo caso a trasformazioni di Lorentz indipendenti nei vari punti dello spazio-tempo. È però estremamente debole alle energie esplorate, pari al più ad alcune migliaia di GeV, e quindi è stata spesso ignorata in questi sviluppi. Tuttavia, se si tenta di combinare Meccanica Quantistica e Relatività Generale, il comportamento che ne risulta è altamente singolare. Nel seguito cercherò dare un'idea di questo "problema ultravioletto" della Gravità. In genere, gli effetti combinati della Gravità e della Meccanica Quantistica non possono essere ignorati in presenza di buchi neri o nell'Universo Primordiale.

È bene sottolineare la profonda distinzione tra le particelle di spin intero o *bosoni* (come i fotoni) e quelle di spin semi-intero o *fermioni* (come i quarks e i leptoni, ovvero gli elettroni e i neutrini). Quelle nella seconda classe sono soggette al principio di Pauli, che impedisce a due o più di loro di trovarsi nello stesso stato, e manifestano inevitabilmente una natura granulare. Osserviamo infatti campi elettromagnetici classici senza renderci conto che sono flussi di fotoni, ma non osserviamo manifestazioni simili per gli elettro-

²Questo gruppo di gauge è legato a concetti relativamente familiari. $SU(N)$ è il gruppo delle matrici unitarie $N \times N$ con determinante uguale ad uno, e nel caso speciale $N = 2$ è anche il ricoprimento doppio del gruppo $SO(3)$ delle rotazioni in tre dimensioni. Questa corrispondenza spiega perché gli spinori acquistano un segno dopo una rotazione di 2π intorno ad un asse, che non è appunto completa in $SU(2)$. In tutti questi casi "non abeliani" il risultato di due operazioni dipende in generale dall'ordine. Infine, $U(1)$ è il gruppo "abeliano" delle rotazioni intorno ad un asse, in cui l'effetto di due rotazioni non dipende dal loro ordine.

ni, e la struttura degli atomi riflette fedelmente i dettami del principio di Pauli. Lo spin è quindi una caratteristica molto importante delle particelle, e si parla in generale di particelle di spin 0, o scalari, come appunto il bosone di Higgs, di spin 1/2 o spinoriali, come i quarks e i leptoni, e di spin 1 o vettoriali come i fotoni, i bosoni intermedi e i gluoni. Allo stesso modo, la Meccanica Quantistica associa alla Gravità particelle di spin 2 o tensoriali, che ci aspettiamo siano alla base delle onde gravitazionali scoperte recentemente. È inoltre possibile, e in un certo senso naturale, concepire un ruolo per particelle elementari di spin maggiore di due, che sarebbero controparti elementari dei composti comuni tra le risonanze adroniche.

La presenza di uno o più tipi di carica può conferire a particelle di uguale massa e spin ruoli ben diversi nelle interazioni (fig. 1). La descrizione risultante è particolarmente efficace quando le loro cariche, o le corrispondenti "costanti di struttura fine", sono piccole, mentre nel limite opposto i quanti possono non manifestarsi direttamente. È il caso dei "quarks", che appaiono liberi all'interno dei protoni ma si manifestano solo indirettamente nei loro composti neutri rispetto alla "carica di colore" (detti anche mesoni se bosonici e barioni se fermionici). Questa carica risente infatti di sottili effetti quantistici, e di conseguenza le interazioni tra "quarks" sono molto flebili a distanze inferiori alla dimensione tipica di un protone, pari a circa 10^{-13} cm, ma diventano rapidamente molto intense a distanze maggiori.

Veniamo ora al problema ultravioletto. Secondo la Relatività Generale la "funzione di struttura fine"

$$\alpha_G(E) = \frac{G E^2}{\hbar c^5}, \quad (4)$$

suggerita da eq. (2) e dal confronto tra legge di Coulomb e legge di Newton, caratterizza qualitativamente l'intensità delle interazioni gravitazionali tra "quanti". Queste sono molto flebili alle energie attualmente esplorate, ma sarebbero molto intense ad energie prossime alla *scala di Planck*, definita dalla relazione

$$\frac{G E_{Pl}^2}{\hbar c^5} = 1. \quad (5)$$

In queste relazioni G denota la costante di gravi-

tazione universale, il cui valore implica che E_{Pl} corrisponde a circa 10^{19} GeV , una scala di energia incredibilmente elevata. Questa indicazione è foriera di difficoltà tecniche, perché la “somma sui cammini” della Meccanica Quantistica coinvolge energie arbitrariamente elevate, e solleva inoltre profondi interrogativi sulla natura dello spazio-tempo a piccolissime distanze. Ad esempio la lunghezza di Compton per una particella di massa m ,

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{m c}, \quad (6)$$

caratterizza l’indeterminazione tipica del suo moto, ma se m è confrontabile con $M_{Pl} = \frac{E_{Pl}}{c^2}$ diventa anche dell’ordine di

$$r_S = \frac{2 G m}{c^2}, \quad (7)$$

il raggio di Schwarzschild per un corrispondente buco nero.

Abbiamo già sottolineato come i “quanti” siano i veri protagonisti della dinamica solo in presenza di piccoli valori delle corrispondenti costanti di struttura fine. In alcuni casi, dualità elettro-magnetiche generalizzate possono però fornire informazioni quantitative su interazioni di gauge in regime di forte accoppiamento. Questi sviluppi sono stati ispirati dalla relazione di quantizzazione di Dirac

$$q_m = \frac{n \hbar c}{2 q_e} \quad (8)$$

dove n è un intero, che collega cariche q_e della descrizione originale a cariche q_m della descrizione duale, e implica direttamente il legame

$$\alpha_m = \frac{n^2}{4} \frac{1}{\alpha_e} \quad (9)$$

tra le corrispondenti “costanti di struttura fine”. Se uno dei regimi “duali” è fortemente interagente, l’altro può essere studiato in modo più agevole, in termini di diversi gradi di libertà, un po’ come abbiamo visto per quarks e barioni, ma la regione intermedia in cui i valori di α_e e α_m sono confrontabili resta inaccessibile con queste tecniche. Vedremo in seguito il ruolo centrale di alcune dualità generalizzate nella nostra attuale comprensione della Teoria delle Stringhe.

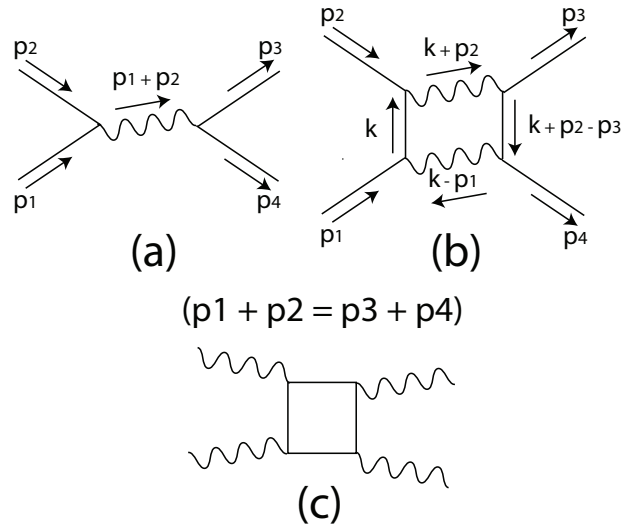


Figura 1: In Elettrodinamica Quantistica le distribuzioni angolari in processi d’urto sono determinate da serie di potenze in α_e associate a “diagrammi di Feynman” con numeri crescenti di vertici. Ogni vertice contribuisce un fattore $\sqrt{\alpha_e}$, e i p_i che vi confluiscono si sommano come le correnti in un circuito.

(a): primo contributo ad un processo d’urto tra due elettroni (linee continue), con due vertici e scambio di un fotone (linea ondulata);

(b): correzione di ordine superiore allo stesso processo, con quattro vertici e scambio di due fotoni, che contiene un’integrale sui k nel circuito chiuso (“loop”);

(c): anche i fotoni, seppure scarichi, interagiscono, perché coppie elettrone-positrone possono formarsi intorno ad essi.

I contributi dei “loop” riflettono fluttuazioni introdotte dalla Meccanica Quantistica, che nel Modello Standard inducono ridefinizioni di cariche e masse (“rinormalizzazioni”). In Relatività Generale i contributi in eq. (11) diventano troppo intensi ad altissime energie perché questo sia possibile.

Stringhe e Particelle

La formula di Veneziano in eq. (1) descrive il contributo “ad albero”, corrispondente quindi a diagrammi di Feynman con un solo stato intermedio, all’ampiezza di diffusione elastica per due particelle scalari identiche. Nel loro centro di massa queste emergono dalla regione di interazione con la stessa energia iniziale ma in direzioni genericamente diverse, e le singolarità delle funzioni Γ di Eulero riflettono la presenza nella teoria di infinite particelle con masse e spin crescenti. Tutte queste particelle corrispondono agli infiniti modi di vibrazione di una corda re-

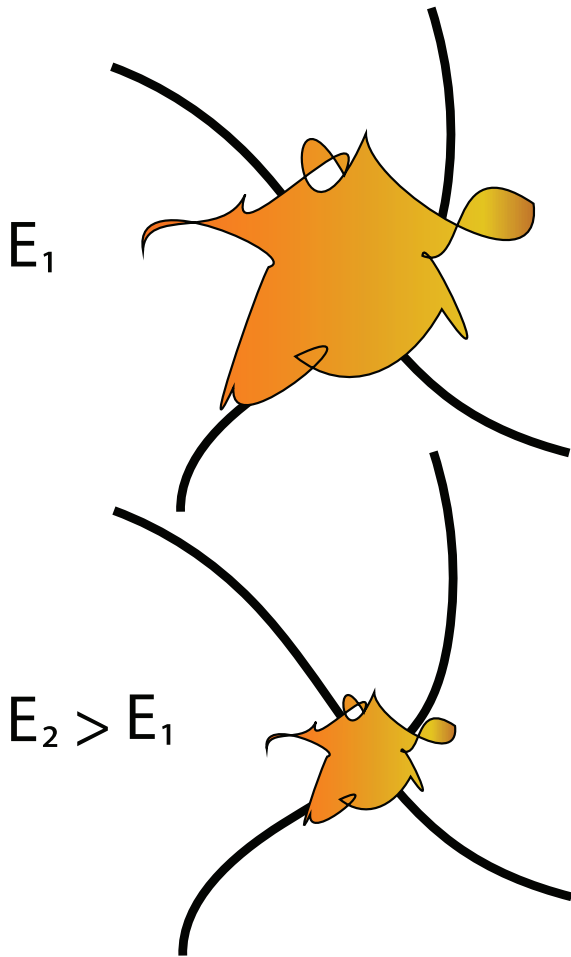


Figura 2: . Le interazioni tra stringhe coinvolgono i punti di contatto, che il principio di indeterminazione estende, in questa rappresentazione pittorica, alle figure dai contorni irregolari. Le loro dimensioni caratteristiche $\Delta x \sim \frac{\hbar c}{E}$ decrescono con l'energia in gioco. Solo una piccola frazione $\left(\frac{\Delta x}{\ell_s}\right)^2$ della coppia di stringhe interviene quindi in modo effettivo in urti ad altissime energie.

lativistica, sulla cui lunghezza caratteristica ℓ_s sono distribuite le loro funzioni d'onda. Questo ha un effetto drammatico: il semplice argomento ispirato dal principio di indeterminazione in fig. 2 suggerisce già che, ad altissime energie, le interazioni gravitazionali risultanti siano non meno soffici di quelle elettromagnetiche!

È bene meditare su questo fenomeno, confrontandolo con quanto avviene nelle Interazioni Deboli, dove a basse energie, per $|p|^2 \ll m^2$, lo scambio di un bosone intermedio W_{\pm} o Z_0 di massa m si riduce alla costante G_F proposta

inizialmente da Fermi:

$$A \sim \frac{g^2}{p^2 + (m c)^2} \rightarrow \left(\frac{g}{m c}\right)^2 \equiv G_F. \quad (10)$$

Una controparte del contributo precedente in Relatività Generale sarebbe qualitativamente della forma

$$A \sim \left(\frac{p c}{E_{Pl}}\right)^2 \frac{1}{p^2} \sim \left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^2 \frac{1}{p^2}, \quad (11)$$

perché il gravitone ha massa nulla e l'intensità delle interazioni gravitazionali che accompagnano la sua propagazione cresce quadraticamente con l'energia. Ad altissime energie, l'argomento di fig. 2 indica che gli effetti dell'estensione delle stringhe e del principio di indeterminazione di Heisenberg modificano però il fattore in eq. (11), e

$$\left(\frac{E}{E_{Pl}}\right)^2 \times \left(\frac{\Delta x}{\ell_s}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{\hbar c}{E_{Pl} \ell_s}\right)^2, \quad (12)$$

producendo una costante g^2 effettiva, e quindi un comportamento che ricorda quello dell'esempio precedente.

In queste espressioni

$$\ell_s \sim \hbar c \sqrt{\alpha'} \quad (13)$$

è la scala di lunghezza caratteristica della stringa, mentre il parametro α' , che era già comparso in eq. (1), è detto "pendenza di Regge". Questo parametro è legato alle masse delle infinite particelle della teoria,

$$m_N^2 = \frac{N-1}{\alpha' c^4}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (14)$$

che sono deducibili da eq. (1) e riflettono le frequenze caratteristiche della stringa, e trae origine da una relazione che coinvolge i loro spin S . Eq. (1) implica infatti che masse e spin si organizzano in un'infinità di "traiettorie di Regge" parallele, in cui

$$\alpha' m^2 c^4 = S + costante. \quad (15)$$

Negli anni '60 le risonanze adroniche che iniziavano a comparire, e che oggi associamo a composti di quarks altamente instabili, mostravano già una distribuzione di questo tipo e avevano fornito una motivazione chiave per eq. (1).

Queste importanti caratteristiche della Teoria delle Stringhe riflettono alcune proprietà ben note della funzione Γ di Eulero, sulle quali vorrei ora indugiare brevemente. $\Gamma(z)$ è definita per $Re(z) > 0$ dall'integrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}, \quad (16)$$

e soddisfa sull'intero piano complesso la relazione ricorsiva

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (17)$$

I risultati precedenti associano alla funzione $\Gamma(z)$ infiniti "poli" per valori interi negativi o nulli dell'argomento. In dettaglio, se $z \rightarrow -N$

$$\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^N}{N!} \frac{1}{z+N}, \quad (18)$$

e l'ampiezza \mathcal{A}_V ha quindi infiniti poli in s , nell'intorno dei quali

$$\mathcal{A}_V \sim \frac{P_N(\alpha' t)}{s - \frac{N-1}{\alpha'}}. \quad (19)$$

Eq. (17) implica inoltre che il residuo del polo corrispondente ad N è un polinomio di grado N in t^3 .

Il minimo valore $N = 0$ dell'intero in eq. (14) corrisponde ad un *tachione*, una particella di massa immaginaria la cui diffusione è descritta da eq. (1): la sua presenza segnala un'instabilità del vuoto di questa "stringa bosonica". Il valore successivo corrisponde a particelle di massa nulla, in grado quindi di propagare effetti a grande distanza (che in questo caso si comportano come fotoni, o più precisamente come campi di gauge non abeliani, quelli alla base delle interazioni Elettrodeboli e Forti), mentre i valori successivi si traducono in un'infinità di particelle massive, anche di spin arbitrariamente elevato.

Eqs. (1) e (15) hanno una conseguenza molto importante, nello spirito di fig. 2: i contributi di queste infinite particelle producono per le ampiezze di diffusione ad angolo fissato, che esplorano distanze sempre più piccole al crescere dell'energia, un decremento addirittura esponenziale, proporzionale a $e^{-\alpha' s}$. Le stringhe rendono

³Le stesse considerazioni valgono, naturalmente, se si scambiano s e t , a causa della simmetria di \mathcal{A}_V .

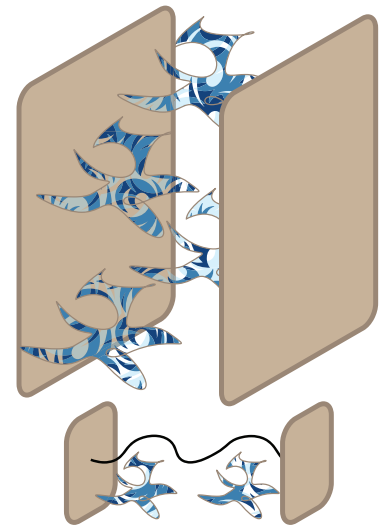


Figura 3: Le fluttuazioni quantistiche riducono la densità di energia nella regione tra due lastre parallele di materiale conduttore, provocando una lieve attrazione tra loro. Fluttuazioni simili nello spazio occupato dalle stringhe introducono in $D = 26$ (o in $D = 10$ per le stringhe fermioniche) tachioni e particelle con effetti a lungo raggio nello spazio-tempo.

quindi le interazioni molto soffici ad altissime energie, ben più di quanto è suggerito da fig. 1! Nel limite opposto di basse energie, il comportamento resta invece quello dettato dalla Teoria dei Campi, e in particolare, per la Gravità, dalla Relatività Generale. Vedremo a breve qualche indicazione su come, in realtà, il problema ultravioletto della Gravità venga eliminato in modo ancora più netto. Questo è un risultato straordinario, ma il prezzo da pagare è molto alto: la teoria contiene infinite particelle massive di spin arbitrariamente elevato, la cui dinamica resta a tutt'oggi avvolta nel mistero.

Una corda vibrante classica è un sistema relativamente semplice, e dovrebbe sorprendere che lo spettro di eq. (14), che è determinato dalle sue frequenze caratteristiche, parta da valori negativi. Questo è un effetto della Meccanica Quantistica, la cui origine è collegata ad un fenomeno sorprendente e ben studiato in altri contesti, l'effetto Casimir (fig. 3). In Elettromagnetismo le fluttuazioni del vuoto generano una forza di attrazione tra due lastre metalliche parallele, riducendo la densità di energia presente nella regione intermedia, e qui lo stesso effetto riduce l'energia del vuoto nella regione interna alla stringa generando tachioni e particelle di massa

nulla. L'esistenza di queste ultime, necessaria per la consistenza della teoria, richiede una regolazione precisa dell'effetto Casimir, che si traduce in una scelta ben definita della dimensione totale dello spazio tempo. Fu molto sorprendente quando, all'inizio degli anni '70, si capì che il modello di Veneziano cercava di descrivere risonanze adroniche in *26 dimensioni!*

Prima di proseguire vorrei mettere nuovamente l'accento sulla riduzione di intensità delle interazioni gravitazionali. La ricetta fornita dalla Teoria delle Stringhe risolve l'annoso "problema ultravioletto" della Relatività Generale, ma è bene tener presente che non è l'unica opzione. Un'alternativa sarebbe lasciare il contributo delle interazioni come in eq. (11), associando al gravitone il propagatore modificato

$$\frac{1}{p^2 \left[1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right]} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + (mc)^2}. \quad (20)$$

Questa scelta apparentemente bizzarra, proposta inizialmente da Kellog Stelle, si riduce al propagatore in eq. (11) per $|p|^2 \ll m^2$ ma compensa ad altissime energie il fattore p^2 presente nelle interazioni, producendo nuovamente per la Gravità un comportamento più soffice, come in eq. (10). Eq. (20) richiama alla mente il vecchio metodo di "Pauli-Villars" usato a volte per regolarizzare l'ultravioletto in Teoria dei Campi, ed è alla base delle estensioni alto-derivative della Gravità.

Il prezzo, in un certo senso ancora più elevato di quello richiesto dalla Teoria delle Stringhe, è la presenza di un "ghost" massivo, una particella con termine cinetico di segno sbagliato, evidenziata dall'ultima espressione in eq. (20). Più energia viene associata ad un oggetto putativo di questo genere e più si riduce l'energia del sistema!

Limitando l'attenzione ad energie inferiori alla scala mc^2 alla quale il "ghost" può essere prodotto questo problema non si presenta, ed è anche possibile considerare una successione di espressioni del tipo

$$\frac{1}{p^2 \left[1 + \left(\frac{p}{mck} \right)^2 \right]^{k^2}} \rightarrow \frac{1}{p^2} e^{-\frac{p^2}{M^2}}, \quad (21)$$

dove k è un intero, che non alterano i primi due

contributi, quelli che dominano nella regione di interesse, in cui $\frac{|p^2|}{m^2} \ll 1$, ma introducono ghost di massa sempre più elevata. Peraltro, nel limite $k \rightarrow \infty$ emerge una gaussiana accanto al propagatore $\frac{1}{p^2}$ originale, in linea con alcune indicazioni della Teoria delle Stringhe che abbiamo menzionato. Alcune ricerche in corso potranno chiarire meglio la rilevanza di questo tipo di tentativi.

Stringhe Aperte e Chiuse

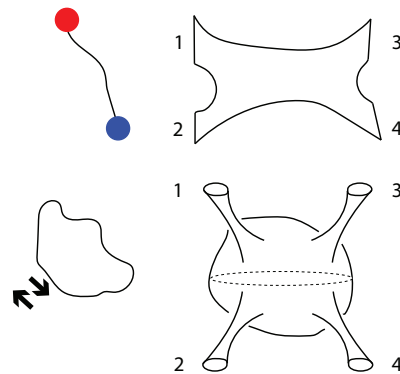


Figura 4: Stringhe aperte (con due cariche indicate simbolicamente alle estremità) e stringhe chiuse (con due frecce che ricordano la presenza di onde progressive e regressive indipendenti), e i diagrammi che corrispondono ad eqs. (1) e (22). Nel primo caso l'integrazione sull'intervallo $[0, 1]$ include le due regioni limite $1 \rightarrow 2$ e $1 \rightarrow 3$, mentre nel secondo caso l'integrazione sul piano complesso include le tre regioni limite, $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$ e $1 \rightarrow 4$.

Poco dopo l'introduzione della formula di Veneziano, Joel Shapiro e Miguel-Angel Virasoro proposero una funzione simile ma più complicata,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{SV} &= \frac{\Gamma\left(-1 - \frac{\alpha' s}{4}\right) \Gamma\left(-1 - \frac{\alpha' t}{4}\right) \Gamma\left(-1 - \frac{\alpha' u}{4}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\alpha' s}{4}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\alpha' t}{4}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\alpha' u}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z|^{-4 - \frac{\alpha' s}{2}} |1 - z|^{-4 - \frac{\alpha' t}{2}}, \quad (22) \end{aligned}$$

nella quale l'integrazione è sull'intero piano complesso e le tre variabili di Mandelstam, s , t e u , legate dalla relazione

$$s + t + u = -\frac{16}{\alpha'} \quad (23)$$

entrano in modo simmetrico. Questa simmetria totale venne presto collegata a stringhe chiuse, e *poiché una stringa aperta può chiudersi, la presenza delle prime implica, nella teoria, l'esistenza delle seconde*. I “diagrammi di Feynman” in fig. 4 possono giustificare la simmetria in (s, t) dell'ampiezza di Veneziano e la simmetria totale in (s, t, u) dell'ampiezza di Shapiro e Virasoro: gli scambi identificano configurazioni limite di una stessa regione nella somma sui “cammini”, e queste proprietà riflettono le integrazioni presenti in eqs. (1) e (22).

In eq. (1) la variabile x è integrata su un segmento dell'asse reale, e questo mantiene l'ordinamento delle quattro linee esterne in fig. 2. Le due regioni limite $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow 1$ esibiscono i propagatori $1 - 2$ e $1 - 3$, con poli in s e t , che in Teoria dei Campi avrebbero origine da diagrammi distinti. Come abbiamo visto, le proprietà della funzione Γ di Eulero implicano che, se $s \simeq \frac{N-1}{\alpha'}$, l'ampiezza di eq. (1) è ben approssimata da eq. (19), un'espressione con due caratteristiche sulle quali vale la pena di soffermarsi nuovamente.

La prima di queste caratteristiche è che il denominatore, il polo di cui dicevo e in cui s caratterizza l'energia, ricorda quello che compare in eq. (10). Questo identifica lo scambio di una particella con la massa che compare in eq. (14). La seconda caratteristica è legata al numeratore di eq. (19), un polinomio di grado N nella variabile t , che come abbiamo detto caratterizza l'angolo di diffusione. Questa seconda proprietà riflette lo spin delle particelle scambiate, e indica che il suo massimo valore è N per il polo corrispondente a m_N . In conclusione, l'ampiezza di Veneziano coinvolge infinite particelle di spin arbitrariamente elevato, le cui masse sono definite in eq. (14).

La variabile z che entra nella definizione dell'ampiezza di eq. (22) è invece integrata sull'intero piano complesso, e le regioni limite intorno ai punti 0 e 1 e quella intorno a punto all'infinito esibiscono i propagatori $1 - 2$, $1 - 3$ e $1 - 4$, con poli in s , t e u , che qui emergono da una singola espressione. Le infinite singolarità delle funzioni Γ segnalano nuovamente la presenza di infinite particelle di masse crescenti, identificate nuovamente da un'intero N , con spin arbitrariamente elevati, che questa volta raggiungono il valore

massimo $2N$.

La differenza tra stringhe aperte e chiuse ha un effetto ben noto dal caso elementare di una corda vibrante classica, la presenza nelle prime di un'infinità di onde *stazionarie* e, nelle seconde, di una *doppia* infinità di modi *indipendenti*, associati ad onde *progressive* e *regressive*. Nella Teoria delle Stringhe, la scelta arbitraria di un'origine sulla stringa chiusa richiede inoltre che le due famiglie di modi siano eccitate in modo corrispondente per dare luogo a particelle.

Queste considerazioni hanno una conseguenza che ho già menzionato, e sulla quale vorrei soffermarmi: le eccitazioni a lungo raggio delle stringhe aperte sono associate a vettori, come le coordinate X^μ della stringa, e descrivono potenziali di gauge per vari tipi di carica. Di conseguenza, le eccitazioni a lungo raggio delle stringhe chiuse sono associate ad una coppia di coordinate $X^\mu X^\nu$, e uno dei contributi corrisponde ad una matrice simmetrica, proprio come la metrica $g_{\mu\nu}$ della Relatività Generale. Queste considerazioni qualitative possono dare un'idea di uno dei risultati più straordinari della teoria: *la Gravità è inevitabile in Teoria delle Stringhe, ed è richiesta per consistenza dall'Elettromagnetismo e delle interazioni di gauge*.

Stringhe Fermioniche

Nella sezione precedente abbiamo indicato come tachioni ed eccitazioni a lungo raggio in Teoria delle Stringhe siano riconducibili all'effetto Casimir, e quindi alle fluttuazioni di vuoto quantistiche all'interno dei suoi costituenti, le stringhe aperte e chiuse. Il segno dei contributi all'energia del vuoto è opposto per bosoni e fermioni, e quindi la presenza di modi di stringa fermionici può avere effetti rilevanti. ?? questa la novità introdotta nel 1970 da André Neveu e John Schwarz, e da Pierre Ramond, nel cosiddetto modello NSR. Una perfetta cancellazione produrrebbe uno spettro privo di tachioni, ma in stringhe aperte questo avviene solo con un'opportuna scelta di condizioni al contorno, nel cosiddetto “settore di Ramond” (R). Le particelle risultanti sono fermioni nello spazio tempo, sempre con funzioni d'onda distribuite sulla stringa. Esiste però una scelta alternativa, in cui queste condizioni sono diverse, il cosiddetto “settore di Neveu-Schwarz”

(NS). In questo caso la simmetria tra le due classi di modi viene rotta parzialmente, e le particelle risultanti sono invece bosoni. Considerazioni simili valgono per i modi sinistri e destri di stringhe chiuse, che hanno quindi quattro classi di settori, ovvero NS-NS, NS-R, R-NS e R-R. Questi modelli vivono in *10 dimensioni* e sembrano potenzialmente in grado di dar conto delle particelle presenti in Natura, ma nel settore NS permane un modo tachionico, e quindi il vuoto resta instabile. Come vedremo a breve, questa costruzione è incompleta, e va corredata con un cruciale contributo di Ferdinando Gliozzi, Joel Scherk e David Olive, noto in letteratura come *proiezione GSO*.

Supersimmetria e Supergravità

La proprietà emersa nel modello NSR, ovvero la possibilità di una corrispondenza diretta tra modi bosonici e fermionici, venne trasferita in modo concreto alla Teoria dei Campi da Julius Wess e Bruno Zumino nel 1973. Il risultato è la supersimmetria, che è una controparte, per la Teoria dei Campi, di quello che l'Analisi Complessa rappresenta per la Matematica, alla quale ha già contribuito idee profonde e molto importanti. Si tratta di una simmetria continua, presente in una sottoclasse di modelli, che consente di *ruotare gli uni negli altri campi bosonici e fermionici*. Inoltre, combinando due operazioni di questo tipo si genera una traslazione, una simmetria profondamente legata alla Relatività Generale.

Esistono quindi due classi di modelli con supersimmetria. La prima comprende teorie con campi di spin 0, 1/2 e 1, con tipi corrispondenti di particelle bosoniche e fermioniche, le cui interazioni sono ristrette in modo opportuno. In questo caso la supersimmetria è una simmetria *globale*, che si riflette nella conservazione di uno o più tipi di carica. Esiste anche una seconda opzione più profonda, nella quale la supersimmetria *locale* determina la natura delle interazioni, in parte o del tutto. In questi casi si parla di Supergravità, e in particolare, quando le determina del tutto perché tutti i campi possono essere "ruotati" nella metrica $g_{\mu\nu}$, si parla di Supergravità "pure".

Il termine Supergravità identifica una classe di estensioni della Relatività Generale che esistono

al più in undici dimensioni e coinvolgono uno o più campi di spin 3/2, detti "gravitini". Il primo esempio fu introdotto da Sergio Ferrara, Daniel Freedman e Peter van Nieuwenhuizen nel 1976, combinando in modo opportuno, in quattro dimensioni, la Relatività Generale con un campo di spin 3/2. Questa teoria garantisce, sorprendentemente, interazioni consistenti tra la Gravità e un "gravitino", un peculiare spinor-vettore studiato da Bill Rarita e Julian Schwinger nel 1941. Le possibili supersimmetrie locali sono al più otto in quattro dimensioni, e l'unica teoria massimale $N = 8$, costruita da Eugene Cremmer e Bernard Julia nel 1978, è un modello di complessità senza precedenti che combina la Relatività Generale con 8 gravitini, 28 vettori, 56 fermioni e 70 scalari.

In dieci dimensioni (in cui ogni spinore ha sedici componenti, quattro volte quelle di uno spinore in quattro dimensioni), esistono tre tipi di teorie, dette I, IIA e IIB, con una o due supersimmetrie locali, e infine esiste una sola Supergravità in undici dimensioni, costruita da Cremmer, Julia e Scherk nel 1978. Esistono anche combinazioni delle Supergravità in quattro dimensioni con i modelli globali di cui sopra: le varietà complesse che determinano la dinamica dei loro campi scalari hanno stimolato interazioni sorprendenti con la Matematica degli ultimi decenni. I limiti superiori sulle dimensioni o sul numero di supersimmetrie riflettono sottigliezze sui campi di spin elevato, sulle quali torneremo a breve.

I modelli di Supergravità "puri", nei quali le supersimmetrie collegano la metrica $g_{\mu\nu}$ a tutti gli altri campi, hanno mostrato dagli inizi un comportamento ultravioletto meno singolare della Relatività Generale. Esplorare a fondo questi fenomeni presenta enormi difficoltà tecniche, e ha anche stimolato lo sviluppo, da parte di Zvi Bern, Lance Dixon e altri, di nuovi metodi che vengono utilizzati con profitto nella Fisica ai grandi acceleratori.

Il caso della Supergravità massimale potrebbe riservare ancora delle sorprese, a causa di sottigliezze introdotte da dualità elettromagnetiche generalizzate, e alcuni ritengono che la teoria $N = 8$ potrebbe essere del tutto priva di divergenze ultraviolette. Questo risultato verrebbe considerato un miracolo senza precedenti, ma il contenuto di campi e le interazioni della teoria $N = 8$ non appaiono collegabili in modo natu-

rale alle Interazioni Fondamentali, a dispetto di alcuni ingegnosi tentativi. È invece noto che nei casi (non “puri”), in cui le supersimmetrie non collegano la metrica a tutti gli altri campi, la Supergravità ha un problema ultravioletto come la Relatività Generale. Questa classe più ricca di teorie, come vedremo a breve, è comunque importante perché fornisce accurate descrizioni a basse energie della Teoria delle Stringhe, e ne ha rivelato aspetti reconditi e sorprendenti.

La Supergravità ammette inoltre l'introduzione di una o più “costanti di struttura fine”. Queste rendono auto-interagenti i suoi vettori, come avviene del Modello Standard, ma queste teorie, dette “gauged” in letteratura, hanno la caratteristica sorprendente di includere costanti cosmologiche negative, o più in generale potenziali per i loro campi scalari che ammettono vuoti di anti de Sitter o *AdS*. Il primo esempio complicato di questo tipo è la Supergravità $N = 8$ costruita da Bernard de Wit e Hermann Nicolai nel 1982. Gli spazi *AdS* sono superfici con curvatura negativa, ben diverse dallo spazio di Minkowski, e per molti anni i modelli “gauged” sono stati privi di collegamenti con la Teoria delle Stringhe. Come vedremo, la situazione è cambiata nettamente negli ultimi venti anni, con lo sviluppo della corrispondenza *AdS/CFT*.

Stringhe e Supersimmetria

Il sistema che risulta dalla stringa NSR vive in dieci dimensioni, ma è in generale incompleto e inconsistente senza la *proiezione GSO*. Questa nacque dall'esigenza di garantire agli stati, che emergono in parte da coordinate fermioniche, un comportamento nello spazio-tempo consistente con il principio di Pauli, e in modelli contenenti solo stringhe chiuse si traduce oggi nella richiesta di “invarianza modulare”. Per illustrare questo concetto mi limiterò a considerare l'ampiezza di vuoto a “un loop”, nella quale una stringa chiusa descrive nel suo moto (o, più precisamente, nella sua continuazione Euclidea) un *toro*, ovvero la superficie di una ciambella. Ebbene, la natura di questo diagramma indica chiaramente che non esiste una definizione univoca della direzione di percorrenza! Ne esistono in realtà infinite, e richiedere che gli spettri siano compatibili con questa condizione è un vincolo molto stringente,

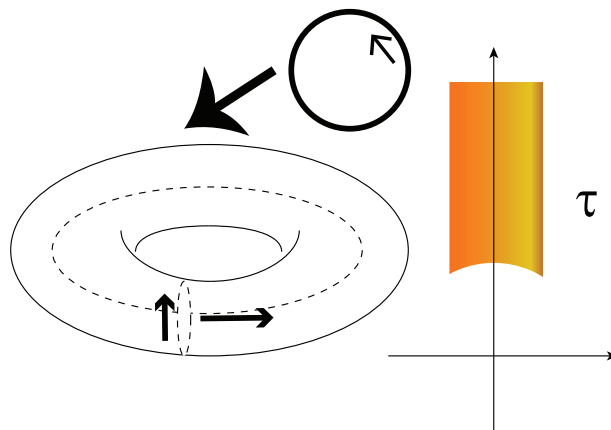


Figura 5: Passando dalla Teoria dei Campi alla Teoria delle Stringhe i diagrammi ad un “loop”, ovvero quelli contenenti un solo circuito chiuso, diventano superfici bidimensionali. Con solo stringhe chiuse esiste solo un diagramma di questo tipo, che corrisponde ad un “toro”, ovvero una ciambella in due dimensioni. L’invarianza modulare riflette l’ambiguità nella definizione del “tempo di percorrenza” sul toro. Due delle infinite scelte possibili sono evidenziate dai profili tratteggiati nell’immagine a sinistra. Nella “somma sui cammini” questa ambiguità elimina del tutto la regione ultravioletta, ovvero i punti sull’asse orizzontale nell’immagine di destra. Allo stesso tempo, il vincolo che lega modi sinistri e destri estende i punti sull’asse verticale dei tempi alla striscia in figura. Come in Teoria dei Campi, questi diagrammi calcolano anche la prima correzione all’energia del vuoto introdotta dalla Meccanica Quantistica.

noto come “invarianza modulare”, che lascia un numero limitato di possibilità per le “Superstringhe”, ovvero le stringhe con supersimmetria in dieci dimensioni. Allo stesso tempo la regione di integrazione, che a priori conterrebbe cammini caratterizzati da tutti i possibili valori del tempo di percorrenza, misurato sull’asse immaginario, viene ristretta come nel diagramma in fig. 5. Questo elimina manifestamente il problema ultravioletto della Relatività Generale, rimuovendo dai possibili cammini quelli che coinvolgono tempi di percorrenza inferiori a quello determinato dalla scala di stringa, $\hbar \sqrt{\alpha'}$!

Le costruzioni di “orientifold” includono anche stringhe aperte, e l’ampiezza di vuoto coinvolge, allo stesso ordine, altri tre diagrammi oltre all’ampiezza associata al toro che abbiamo discusso. I nuovi contributi corrispondono a tre superfici ben diverse, la *bottiglia di Klein*, l’*anello*

e la *striscia di Möbius*. In tutti i casi, una particolare scelta del “tempo di percorrenza” evidenzia la propagazione di stringhe chiuse. Questo introduce vincoli stringenti, dai quali è possibile dedurre, con un’analisi attenta dei diagrammi, le proprietà principali di questa classe di modelli della Teoria delle Stringhe. Allo stesso tempo, i valori numerici delle varie ampiezze di figs. 5 o 6 determinano la densità di energia introdotta nel vuoto dalle eccitazioni delle stringhe. Questo risultato è la controparte di quanto avviene in Teoria dei Campi per diagrammi corrispondenti, come quello mostrato in fig. 5.

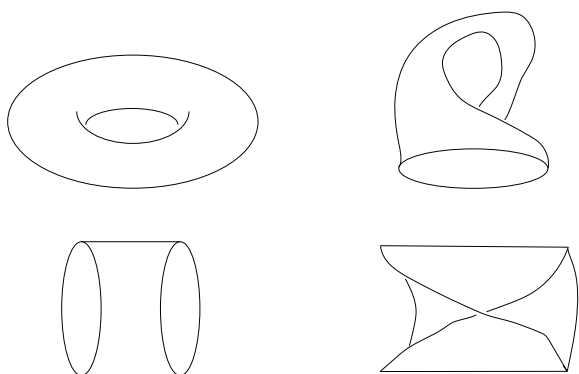


Figura 6: Nella costruzione di orientifold, le ampiezze di vuoto ad un loop includono, oltre al toro, tre altre superfici di diversa natura, la bottiglia di Klein (in alto a destra), l’anello (in basso a sinistra) e la striscia di Möbius (in basso a destra). In questi casi le scelte della direzione “tempo” non sono equivalenti, ma ne esiste una che esibisce, in tutti gli ultimi tre contributi, la propagazione “ad albero” di stringhe chiuse.

Un sottoinsieme delle possibili proiezioni GSO identifica le Superstringhe di tipo IIA e IIB in dieci dimensioni, due teorie che si riducono a basse energie alle Supergravità IIA e IIB, e i cui spettri supersimmetrici apparvero già all’inizio degli anni ‘80 consistenti, in quanto privi di “anomalie”, violazioni delle simmetrie classiche che possono essere introdotte dalla Meccanica Quantistica. Queste teorie sembravano tuttavia poco interessanti, perché tra le loro interazioni a lungo raggio era impossibile identificare vettori simili a quelli delle Interazioni Fondamentali che osserviamo alle energie attualmente accessibili.

Nel 1984 Michael Green e Schwarz mostrarono, con grande sorpresa della comunità scientifica, che un’altra teoria, detta di tipo I e collegata a basse energie alla corrispondente Supergravità, contenente stringhe aperte e chiuse, era an-

ch’essa priva di inconsistenze. In questo caso il gruppo $SO(32)$, che ha origine da cariche alle estremità delle prime, è associato a vettori simili a quelli delle Interazioni Elettrodeboli e Forti. Era quindi possibile, per la prima volta, collegare in modo significativo alcune indicazioni della Teoria delle Stringhe alla Fisica delle Particelle Elementari. Una restrizione sul gruppo di simmetria delle interazioni, evidenziata nel 1982 da Neil Marcus e chi scrive, stimolò rapidamente la costruzione, da parte di David Gross, Jeff Harvey, Emil Martinec e Ryan Rohm, di un’altra coppia di modelli, detti “eterotici” HE e HO, con gruppi di gauge $E_8 \times E_8$ e $SO(32)$, in cui cariche simili a quelle delle Interazioni Elettrodeboli e Forti sono distribuite lungo stringhe chiuse. Questo introduce, per così dire, multipoli di ordine superiore, e pone minori restrizioni sulla natura dei gruppi di gauge. La teoria HO appare indistinguibile, a basse energie, dalla teoria di tipo I, mentre la HE ?? diversa e sembrò inizialmente collegata in modo più naturale alle Interazioni Fondamentali.

In queste teorie supersimmetriche il contributo dell’ampiezza di toro che abbiamo illustrato in fig. 5 (e, per la tipo I, anche la somma di quelle in fig. 6) all’energia del vuoto è nullo, e quindi le loro eccitazioni non perturbano i vuoti supersimmetrici in dieci dimensioni che entrano nella loro definizione.

Supergravità, Stringhe e Dualità

Negli anni ‘80 la ricerca si concentrò rapidamente su tentativi di connettere la Teoria delle Stringhe al nostro Universo, che apparentemente ha solo quattro dimensioni spazio-temporali. L’idea alla base di questi tentativi era una variante moderna di una proposta formulata inizialmente da Theodor Kaluza intorno al 1920, e perfezionata in modo indipendente da Oskar Klein, che posso cercare di illustrare brevemente come segue. Se l’Universo contenesse un’ulteriore direzione spaziale, il tensore metrico conterrebbe, oltre alle usuali componenti in quattro dimensioni $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), anche $g_{\mu 4}$ e g_{44} , un vettore e uno scalare dal punto di vista delle quattro dimensioni, come illustrato in fig. 8. Einstein fu affascinato per anni da questa corrispondenza, perché essa può unificare, in linea di principio, la Gravità con l’Elettromagnetismo. Ebbene, le

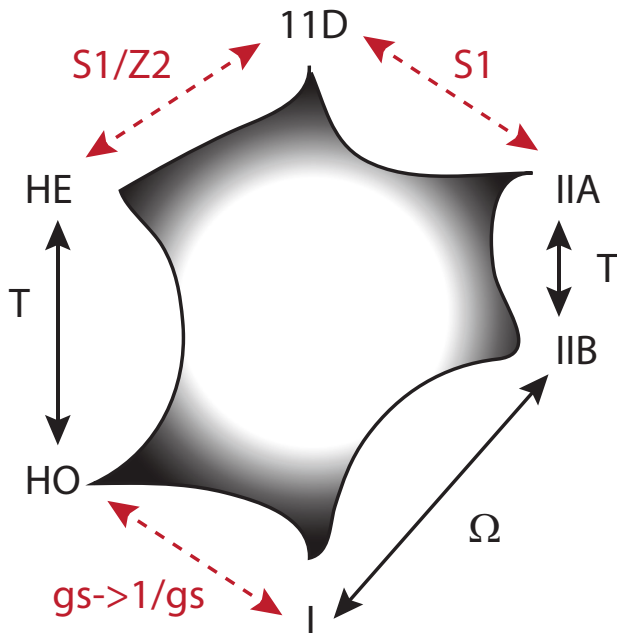


Figura 7: Dualità in $D = 10, 11$. Il simbolo T indica relazioni di T -dualità, Ω la costruzione di orientifold, $g_s \rightarrow \frac{1}{g_s}$ la relazione tra stringhe HO e I discussa nel testo, e infine S^1 e S^1/Z_2 indicano i due legami alla Kaluza-Klein con la Supergravità in undici dimensioni, che coinvolgono una circonferenza e un intervallo. Le doppie frecce nere riflettono relazioni dimostrate pienamente in Teoria delle Stringhe, mentre le altre riflettono relazioni non perturbative ispirate dalla Supergravità. Tutto questo coinvolge le regioni lungo il bordo, e in modo particolare quelle nei pressi dei vertici, dove le costanti g sono piccole per le stringhe corrispondenti, o le energie sono basse per il vertice $11D$. La regione interna resta avvolta nel mistero.

simmetrie continue dello spazio interno, piccolo e per costruzione a noi inaccessibile, si traducono per magia nella presenza di interazioni di gauge a lungo raggio in quattro dimensioni, ma le Teorie HE , HO e I hanno già molti, troppi contributi di questo tipo rispetto al Modello Standard. Ha quasi dell'incredibile che le loro soluzioni alla Kaluza-Klein corrispondano a spazi di Calabi-Yau, varietà interne generalmente prive di simmetrie continue, che preservano al più una frazione dei campi vettoriali presenti in dieci dimensioni! Inoltre, anche se il meccanismo di Kaluza-Klein elimina genericamente violazioni di P o T , la cancellazione delle anomalie alla Green-Schwarz può recuperarle, consentendo di descrivere in quattro dimensioni le Interazioni Elettrodeboli. Tutto questo è affascinante, ma lascia un profondo in-

$$A_M = \begin{bmatrix} A_\mu \\ A_4 \end{bmatrix}$$

$$g_{MN} = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 4} \\ g_{4\nu} & g_{44} \end{bmatrix}$$

Figura 8: Il meccanismo di Kaluza-Klein può unificare dei campi con altri di spin inferiore. Ad esempio vettori e scalari, perché la componente interna A_4 di un vettore A_M si comporta come uno scalare nelle dimensioni macroscopiche. O la metrica con vettori e scalari, perché le componenti $g_{\mu 4}$ ($= g_{4\mu}$) e g_{44} della matrice simmetrica g_{MN} si comportano come un vettore e uno scalare.

terrogativo: chi chiede alla teoria di scegliere un Universo come il nostro, e in particolare perché? quattro dimensioni? Queste domande non hanno oggi risposta, essenzialmente perché in Relatività Generale non esiste un criterio in grado di favorire una scelta particolare. Forse il nostro Universo è un accidente, come le orbite dei corpi celesti, ma si tratta di una questione aperta che merita chiaramente di essere studiata a fondo.

Negli anni '80 esistevano quindi diverse opzioni di partenza, ovvero le teorie IIA , IIB , I , HO e HE (o le ultime tre, se limitiamo l'attenzione a casi in cui sia possibile intravedere le Interazioni Elettrodeboli e Forti), troppe per poter ritenere di aver identificato uno scenario fondamentale. Il passo successivo è stato compiuto tra la fine degli anni '80 e la metà degli anni '90, e ha evidenziato la sostanziale equivalenza delle cinque teorie I , IIA , IIB , HE e HO , a dispetto delle evidenti differenze tra i tipi di stringhe sulle quali si basano. Come abbiamo visto, queste sono chiuse e aperte, e con cariche agli estremi, nella tipo I , solo chiuse nelle IIA e IIB , e infine chiuse con cariche distribuite nelle HE e HO . Eppure, oggi abbiamo ragione di ritenere questi modelli sottilmente equivalenti. Si

tratta di un risultato straordinario, che avrebbe chiuso il cerchio se non avesse portato la ricerca ben oltre, suggerendo nuovi e più profondi interrogativi.

La prima proprietà sorprendente che ha un ruolo centrale in queste considerazioni era emersa già alla fine degli anni '70. Si tratta della T -dualità, ed è possibile dare un'idea relativamente concreta del suo significato considerando l'estensione al caso di stringhe chiuse di un fenomeno relativamente ben noto. In Meccanica Quantistica una particella libera di massa m che si muove con impulso assegnato in una direzione ha una funzione d'onda

$$\psi(x, t) = C e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}, \quad (24)$$

con

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (25)$$

dove p un arbitrario numero reale. Se invece la particella si muove su una circonferenza di raggio R , la richiesta naturale che la funzione d'onda sia periodica di periodo $2\pi R$ porta ad una condizione di quantizzazione per p ,

$$p = \frac{\hbar k}{R}, \quad (26)$$

dove k è un numero intero.

Questo semplice risultato introduce un minimo valore per l'energia di particelle in moto lungo la circonferenza, che si traduce in lunghezze d'onda di de Broglie inferiori al raggio R e spiega l'invisibilità di ulteriori dimensioni sufficientemente piccole: generare particelle di questo tipo potrebbe ben richiedere energie molto superiori a quelle che riusciamo a produrre, a tal fine, nei più grandi acceleratori!

Per una stringa chiusa c'è un'aggiunta importante, perché entra in gioco un altro fenomeno, e la coordinata lungo la circonferenza include il contributo

$$X = 2\ell_s^2 \frac{k}{R} \tau + 2l R \sigma, \quad (27)$$

dove $0 \leq \sigma \leq \pi$ identifica i punti della stringa e k e l sono due numeri interi. Il secondo di questi interi, l , distingue configurazioni topologicamente inequivalenti in cui la stringa chiusa si avvolge un numero arbitrario di volte intorno alla circonferenza.

È anche possibile separare i modi sinistri e destri, riscrivendo questa espressione nella forma

$$X = \ell_s^2 \left(\frac{k}{R} + \frac{lR}{\ell_s^2} \right) (\tau + \sigma) + \ell_s^2 \left(\frac{k}{R} - \frac{lR}{\ell_s^2} \right) (\tau - \sigma). \quad (28)$$

La ridefinizione

$$R \rightarrow \frac{\ell_s^2}{R} \quad (29)$$

e lo scambio dei due interi k e l identificano lo stato originale (k, l) della stringa chiusa su una circonferenza di raggio R con un diverso stato (l, k) di una stringa chiusa su una circonferenza di raggio "duale"

$$R_T = \frac{\ell_s^2}{R}, \quad (30)$$

le cui manifestazioni sono però equivalenti. Il contributo di eq. (27) resta infatti invariato se le operazioni vengono combinate con un'ulteriore trasformazione di parità sulle sole onde progressive, che inverte il segno dei contributi dipendenti dalla combinazione $\tau - \sigma$.

Questo risultato ha una valenza notevole, perché indica che circonferenze piccole o grandi rispetto alla scala tipica ℓ_s sono in qualche modo indistinguibili, al netto di qualche diversa identificazione. Più precisamente, è possibile dimostrare che la parità sui modi destri scambia tra loro i modelli IIA e IIB e i modelli HE e HO. In questo modo resterebbero tre teorie supersimmetriche indipendenti, ma i modelli IIB e I sono collegati da un'operazione più complessa, detta oggi costruzione di "orientifold" e proposta inizialmente da chi scrive. Al netto di queste sottigliezze, a questo punto i modelli indipendenti sono in realtà solo due.

Come abbiamo visto, esistono solo tre forme della Supergravità in dieci dimensioni, la tipo IIA e la tipo IIB, associate alle stringhe corrispondenti, e la tipo I, che è associata sia alla stringa di tipo I che alle stringhe HE e HO. Edward Witten ha corredato gli argomenti precedenti con questo fatto, giungendo a proporre la sostanziale equivalenza delle teorie I e HO. Si tratta di un'equivalenza molto sottile, invisibile negli spettri delle stringhe

ghe, perché richiede una sorta di dualità elettromagnetica nello spirito di eq. (8) e la conseguente inversione della costante di accoppiamento, in modo tale che

$$g_I \equiv e^{\langle \phi_I \rangle} = \frac{1}{g_{HO}} \equiv e^{-\langle \phi_{HO} \rangle}. \quad (31)$$

Se ad esempio g_I è piccola, è semplice riconoscere le stringhe aperte e chiuse della tipo I, mentre quelle chiuse e cariche della HO emergono come agglomerati di energia, complesse configurazioni solitoniche, e viceversa. Torneremo a breve su questo aspetto molto importante.

Nel descrivere questo risultato abbiamo aggiunto un nuovo dato sul quale vale la pena di soffermarsi. Come abbiamo visto, le fluttuazioni di vuoto che accompagnano la Meccanica Quantistica generano un effetto Casimir sulle stringhe, con conseguenze cruciali sulla natura delle particelle associate. Ma c'è di più: la Meccanica Quantistica opera, per così dire, a due livelli nella Teoria delle Stringhe. Le sue interazioni possono essere infatti ordinate, come in Teoria dei Campi, in una serie di termini pesati da potenze di $e^{\langle \phi \rangle}$: il valore di vuoto $\langle \phi \rangle$ del dilatone, un campo scalare in grado di trasmettere effetti a lungo raggio, regola l'intensità relativa di questi contributi.

Gli effetti a lungo raggio del dilatone accompagnano quelli della Gravità e delle Interazioni Elettrodeboli, e quindi la Teoria delle Stringhe si presenta, più precisamente, come un'estensione della Gravità che li include accanto ad altri ancora di cui parleremo a breve. Se ϕ acquistasse una massa, i suoi effetti diventerebbero a corto raggio e quindi invisibili, e allo stesso tempo la costante g avrebbe un valore definito, contribuendo a determinare varie "costanti di struttura fine". Oggi non siamo in grado di trarre conclusioni su questo punto, ma possiamo esplorare la teoria in serie di potenze di $e^{\langle \phi \rangle}$, corredando questi risultati espliciti con profonde considerazioni ispirate dalla Supergravità. Le cinque Superstringhe rivelano pertanto, in modo più o meno diretto, la loro sostanziale equivalenza, in ossequio al fatto che le Supergravità corrispondenti ai modelli HO e I sono diverse presentazioni di una stessa teoria.

Il programma di unificazione raggiunge in questo modo il suo punto più alto, una teoria unica che è potenzialmente in grado di descrive-

re le Interazioni Fondamentali alle energie oggi accessibili, al netto naturalmente del problema annoso delle ulteriori sei dimensioni. Questo problema limita però fortemente la predittività degli scenari risultanti, perché i valori delle costanti di accoppiamento che osserviamo, tra cui la costante di struttura fine di eq. (2), dipendono anche dalla forma delle ulteriori dimensioni, la quale a sua volta non appare determinata da alcun principio.

Se le cose terminassero qui, potremmo comunque essere soddisfatti, ma c'è dell'altro, e ha dei contorni sconvolgenti. L'osservazione chiave, nuovamente suggerita dalla Supergravità e nuovamente dovuta a Witten, è che nel meccanismo di Kaluza-Klein la dimensione del raggio si riflette nel valore di vuoto $\langle \phi \rangle$ del dilatone, e quindi nella costante di accoppiamento.

Era noto dagli anni '70 che la Supergravità IIA si può ottenere con il meccanismo di Kaluza-Klein dall'unica Supergravità in 11 dimensioni. Era anche noto dagli anni '80 che la Supergravità IIA descrive a basse energie il comportamento della stringa IIA. Il passo mancante era tenere in debito conto la relazione

$$R_{11} \sim e^{\frac{2}{3} \langle \phi \rangle} = (g_{IIA})^{\frac{2}{3}}, \quad (32)$$

che collega grandi valori della costante di accoppiamento della stringa IIA, un regime in cui la sua descrizione in termini di stringhe chiuse diventa poco affidabile, a grandi valori del raggio di un'altra dimensione. In altri termini, esiste un altro legame, in un regime di accoppiamento forte, tra la stringa IIA (e quindi anche tutte le altre) e una teoria in undici dimensioni, della quale conosciamo solo il limite di bassa energia, che è descritto dalla Supergravità di Cremmer, Julia e Scherk. Un altro legame, evidenziato poco dopo, unisce in modo simile la teoria HO con la stessa teoria misteriosa in undici dimensioni, definita in questo caso utilizzando un segmento piuttosto che una circonferenza. In conclusione, tutte le teorie supersimmetriche in dieci dimensioni sono tra loro equivalenti, ma sono anche equivalenti ad una teoria in undici dimensioni, in un quadro incredibilmente ricco che trascende il concetto stesso di spazio tempo.

La teoria in undici dimensioni contiene però un campo che non ha nulla a che fare, a livello

fondamentale, con il concetto di stringa da cui siamo partiti. ?? possibile dare alcune indicazioni su questo fatto, partendo dal caso dell'Elettromagnetismo, che coinvolge un potenziale vettore A_μ e le cui sorgenti sono cariche in moto. Tutte le manifestazioni della Teoria delle Stringhe coinvolgono forze a lungo raggio mediate, come abbiamo visto, da fluttuazioni del tensore metrico e dal dilatone, ma anche da *potenziali antisimmetrici*, o due-forme, $B_{\mu\nu}$. Le sorgenti "elettriche" di questi potenziali sono le stringhe stesse, mentre in undici dimensioni è presente un potenziale antisimmetrico $A_{\mu\nu\rho}$, una tre-forma. Considerazioni simili lo assocerebbero a membrane bidimensionali, se le corrispondenti teorie non fossero singolari a causa di auto-interazioni troppo intense. *A questo quadro straordinario, suggestivo e misteriosamente incompleto viene oggi associato il nome di M-teoria.*

Su queste alte vette, la Teoria delle Stringhe paga in un certo senso il fio del suo certificato di nascita non convenzionale, basato su proprietà sorprendenti di ampiezze piuttosto che su principi primi. In combinazione con la Supergravità, l'idea di stringa ha condotto la ricerca fino a questo punto, rivelando però chiaramente i suoi limiti. Come più volte in passato, la Fisica richiede ulteriori sforzi nel momento in cui sembra di intravedere un traguardo. La situazione richiama alla mente gli anni '60, quando i modelli teorici non tenevano ancora in conto il ruolo dei "quarks", perché qui la M-teoria trascende il concetto di stringa. *Chi sono i "quarks" responsabili di questo scenario? Questo resta forse il più affascinante mistero dei nostri giorni.*

Altri misteri della Teoria delle Stringhe, probabilmente non disgiunti dal precedente, sono legati al ruolo prominente ed elusivo, nel determinarne le straordinarie proprietà, dei campi di spin elevato che costituiscono la grande maggioranza delle sue eccitazioni massive. Dagli anni '60 si è raccolta un'evidenza crescente sul fatto che interazioni a lungo raggio possono solo essere trasmesse da campi scalari, da sistemi simili all'Elettromagnetismo o dalla Gravità. Questi tre casi di complessità crescente coinvolgono uno scalare ϕ , il potenziale vettore A_μ e il tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Perché quindi non considerare anche un tensore *simmetrico* $C_{\mu\nu\rho}$, una generalizzazione a tre indici del tensore metrico? Ebbene, la ragione è che for-

ze a lungo raggio trasmesse da particelle di questo tipo con massa nulla generano inconsistenze nello spazio di Minkowski. Un argomento molto suggestivo in questo senso fu proposto da Steven Weinberg già nei primi anni '60. D'altra parte, la Teoria delle Stringhe è piena di eccitazioni massive di questo tipo, che trasmettono, evidentemente in modo consistente, forze a corto raggio e hanno un ruolo cruciale nel rendere soffice la Gravità ad altissime energie, diluendone gli effetti come abbiamo visto in fig. 2.

In Teoria dei Campi siamo abituati ormai a pensare alle masse in termini di simmetrie nascoste da vuoti non simmetrici, come nel Modello Standard. Queste simmetrie "rotte" si recuperano inevitabilmente quando, ad energie molto elevate, le masse hanno effetti trascurabili, e di nuovo la Teoria delle Stringhe funziona come meglio non potrebbe. In questo limite, che Daniele Amati, Marcello Ciafaloni e Veneziano esplorarono per primi negli anni '80, le interazioni di spin elevato sono indistinguibili da forze a lungo raggio, ma l'estensione delle stringhe diventa rilevante e le possibili inconsistenze svaniscono per magia. Insomma, la Teoria delle Stringhe utilizza una zuppa con tutti i possibili ingredienti, evitando in modo molto sapiente e accurato ogni possibile incompatibilità tra loro. Non capiamo a fondo i suoi principi primi, ma ogni volta che proviamo a metterla in difficoltà si dimostra migliore delle nostre più floride aspettative!

Stringhe, Brane e Supergravità

Come è possibile che si sia giunti a credere nell'equivalenza di modelli di stringhe in dieci dimensioni tanto diversi tra loro? Abbiamo già menzionato un dato centrale, l'equivalenza di alcune descrizioni di bassa energia che riflette l'esistenza in $D = 10$ di solo tre forme della Supergravità. Lo studio di questi legami ha manifestato però altri aspetti, legati al precedente, sui quali possiamo soffermarci brevemente. Questi coinvolgono un'idea emersa da tempo in Teoria dei Campi, in cui le particelle, come abbiamo visto, sono comunemente associate a quanti di oscillatori armonici. Ad esempio, i fotoni sono quanti del campo elettromagnetico e gli elettroni sono quanti del campo di Dirac. In alcuni casi esistono però configurazioni classiche di campi

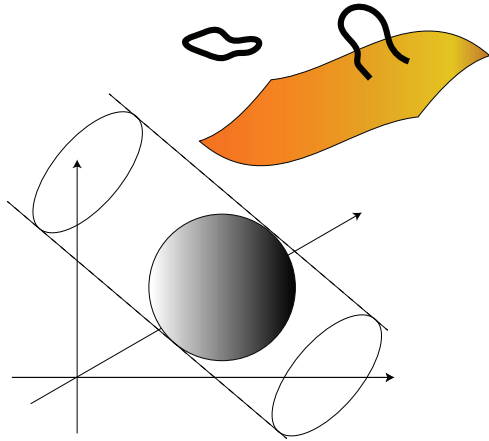


Figura 9: Un solitone è una configurazione la cui energia è localizzata nell'intorno di un punto, e ricalca quindi l'idea classica di una particella. Anche in presenza di ulteriori dimensioni, un solitone resta una soluzione esatta indipendente dalle loro coordinate. Con una dimensione ulteriore descrive un tubo di lunghezza infinita, che ricalca l'immagine classica di una stringa, con due dimensioni ulteriori una superficie (2-brana), e così via. Andando avanti si ottengono p -brane, e su una loro sottoclasse, le D_p -brane, terminano gli estremi delle stringhe aperte. Esiste quindi un'alternativa alla teoria di Kaluza-Klein: il nostro Universo potrebbe essere una collezione di D_3 -brane sulle quali sono confinate le linee di forza del Modello Standard. La gravità sarebbe naturalmente debole in questi scenari, perché le sue linee di forza si disperderebbero fuori dalle D_3 -brane.

bosonici, concentrazioni di energia in regioni di estensione spaziale $\mathcal{O}\left(\frac{\hbar c}{\Lambda}\right)$, dove Λ indica una scala di energia tipica della teoria, la cui energia di riposo $E \sim \frac{\Lambda}{g^2}$ è inversamente proporzionale ad una costante di accoppiamento.

La caratteristica cruciale di questi "solitoni" è che si tratta di conglomerati di energia stabili per ragioni topologiche. I modelli in cui esistono solitoni contengono settori ben distinti tra loro, come avveniva per le stringhe avvolte diversi numeri di volte intorno ad una circonferenza che abbiamo discusso in connessione con la T-dualità. Distruggere un solitone, disperdendo la sua energia, avrebbe un costo enorme o addirittura infinito, e questi oggetti, quando esistono, descrivono ulteriori particelle in modi che richiamano alla mente immagini della Fisica elementare. Appare difficile confrontarli con i quanti di cui sopra nei casi convenzionali in cui $g \ll 1$, ma nel limite opposto di accoppiamento forte le cose sono mol-

to diverse: i solitoni diventano leggeri e la loro lunghezza di Compton $\mathcal{O}\left(\frac{\hbar c}{E}\right)$ cresce ben oltre la scala determinata da Λ . In questo modo essi divengono molto simili ai quanti!

Tra la fine degli anni '80 e la metà degli anni '90 anche nella Teoria delle Stringhe sono state identificate alcune famiglie di solitoni, da Michael Duff, Paul Townsend e altri. Si tratta di oggetti estesi con p dimensioni spaziali, carichi "elettricamente" rispetto a potenziali antisimmetrici $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$, che vengono chiamati genericamente p -brane. In questo modo le stringhe sono solo l'ingrediente più semplice, e dominano la dinamica quando per un certo tipo di stringa $g_s \simeq 0$. Nel limite opposto di accoppiamento forte le cose cambiano radicalmente, e alcuni solitoni diventano manifestazioni delle stringhe di un'altra teoria.

Joe Polchinski ha identificato le D_p -brane, un'importante sottoclasse di questi oggetti presenti nella Teoria delle Stringhe sui quali terminano gli estremi di stringhe aperte. Questo ha anche aggiunto una base geometrica alle costruzioni di orientifold che erano state sviluppate con Massimo Bianchi, Gianfranco Pradisi e Yassen Stanev, e in parte con Davide Fioravanti e Carlo Angelantonj. I modelli di orientifold includono, nel loro vuoto, alcuni tipi di D_p -brane e altri oggetti simili ma non dinamici, gli O_p -piani, che compensano la loro carica rispetto a corrispondenti potenziali $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$. Le D_p -brane hanno un ruolo centrale in suggestivi scenari in cui l'Universo visibile è confinato all'interno di una di esse (fig. 9). La relativa debolezza della Gravità riflette, in questo ambito, la dispersione delle sue linee di forza nelle regioni circostanti.

La corrispondenza *AdS/CFT*

Lo stesso lavoro di Gliozzi, Scherk e Olive che aveva evidenziato la proiezione GSO, e un lavoro immediatamente successivo di Lars Brink, Scherk e Schwarz, portarono negli anni '70 alla scoperta di una generalizzazione della teoria di Maxwell nota come $N = 4$ super Yang-Mills, la cui invarianza conforme resiste alle sottigliezze della quantizzazione. L'invarianza conforme è un'estensione (finita per ogni $D > 2$, ma infinita in due dimensioni) della simmetria di Poincaré. Essa emerge in teorie che non coinvolgono pa-

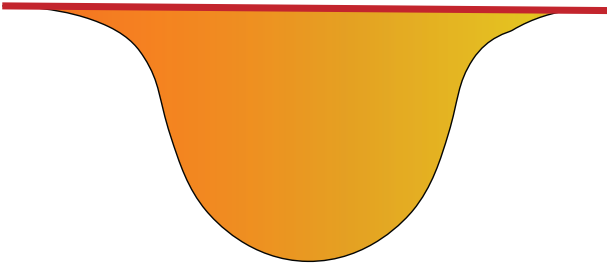


Figura 10: *Un'immagine intuitiva che coglie alcuni aspetti dello spazio AdS: una tazza profonda che si allarga indefinitamente nei pressi del bordo, che approssima una regione piana. Una teoria invariante conforme confinata sul bordo si comporta come nello spazio di Minkowski ordinario, in quanto è insensibile al fattore di amplificazione.*

rametri dimensionali come le masse, e contiene trasformazioni che riscaldano coordinate e volumi. La Meccanica Quantistica introduce però, in generale, un parametro implicito di questo tipo, una scala di energia alla quale i contributi vengono "tagliati" per gestire le sue divergenze ultraviolette mediante la tecnica della "rinormalizzazione". La $N=4$ Yang–Mills è un rarissimo caso in cui questa operazione non è necessaria nella Teoria dei Campi, e resta invariante conforme anche tenendo conto delle fluttuazioni quantistiche.

A questo punto interviene una considerazione curiosa, notata da tempo, ovvero l'equivalenza formale tra il gruppo conforme in quattro dimensioni e il gruppo di isometrie di uno spazio anti de Sitter, o AdS , in cinque dimensioni. Questo spazio omogeneo e di curvatura negativa, di cui fig. 10 tenta di fornire un'immagine intuitiva, ricorda una tazza di profondità infinita, il cui bordo, a sua volta infinitamente grande, è indistinguibile, per una teoria invariante conforme, da un convenzionale spazio di Minkowski.

Qui si inserisce un'osservazione fondamentale dovuta a Juan Maldacena: la teoria $N=4$ Yang–Mills potrebbe ben vivere su un bordo di questo tipo senza averne sentore, piuttosto che sullo spazio di Minkowski, e questa opzione la collegherebbe in modo naturale a quanto vive nella regione interna. La sua controparte, in presenza della supersimmetria, è la stringa IIB definita ?? la Kaluza–Klein sul prodotto diretto di AdS_5 e di una sfera S^5 , e il suggerimento molto sorprendente di Maldacena è stato che queste teorie apparentemente molto diverse fossero in realtà

equivalenti! Si tratta di una congettura, perché la Teoria delle Stringhe non è esattamente risolubile in $AdS_5 \times S^5$, e si tratta inoltre di una relazione tra due teorie in opposti regimi di accoppiamento (debole per una, forte per l'altra, come per eq. (31)), ma questa proposta ha superato indenne verifiche di crescente sofisticazione. Come abbiamo visto, l'equivalenza tra teorie della Gravità in dimensioni diverse aveva già fatto la sua comparsa nella M-teoria, ma la corrispondenza AdS/CFT collega tra loro una teoria di gauge e una stringa, ad essa duale, che vivono in ambienti differenti. La teoria di gauge è confinata sul bordo della superficie AdS_5 , mentre la stringa, che contiene la Gravità, vive nelle sue regioni interne.

L'esplorazione del regime di forte accoppiamento per gruppi di gauge $SU(N)$ con N elevato si traduce di fatto, sorprendentemente, nello studio di piccole oscillazioni intorno a vuoti AdS per teorie di Supergravità "gauged", nelle quali come abbiamo già avuto occasione di dire il vuoto è uno spazio AdS . Questa corrispondenza AdS/CFT associa quindi un'interpretazione fisica molto suggestiva a questi modelli di Supergravità, che erano in qualche modo curiosità matematiche prima del suo avvento ma oggi ne costituiscono l'ossatura tecnica.

La corrispondenza AdS/CFT ha suscitato un enorme interesse, perché consente di esplorare la Teoria dei Campi in regime non perturbativo e, ancor più, perché il legame tra la $N = 4$ super Yang–Mills e la Supergravità è una realizzazione concreta di idee, emerse nella teoria dei buchi neri, che associano alla gravitazione un numero di gradi di libertà inferiore a quelli presenti in altri ambiti. Questo numero cresce ad esempio con l'area delle superficie che racchiude l'orizzonte di un buco nero, piuttosto che come il suo volume, e qualcosa di simile avviene nella corrispondenza AdS/CFT , se i gradi di libertà di una teoria di gauge equivalente alla gravità sono confinati al bordo di uno spazio AdS . Si tratta di un risultato straordinario, ma fare di tutto questo una base quantitativa per descrivere la commistione tra Gravità e Meccanica Quantistica appare a mio parere prematuro. La corrispondenza richiede infatti, in generale, spazi che approssimano asintoticamente AdS , che è lungi dal caso generale di interesse.

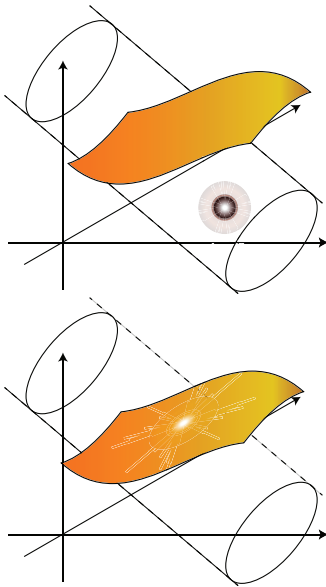


Figura 11: Nella Teoria delle Stringhe lo scenario di Kaluza–Klein è arricchito dalla presenza delle brane. Esistono in tal modo due nuove opzioni per l’origine della rottura della supersimmetria, che può anche essere indotta solo nell’Universo in cui sono immerse le brane o solo sulle brane stesse. Si parla in questi casi, rispettivamente, di “brane supersymmetry” e “brane supersymmetry breaking”.

Rottura della Supersimmetria ?

Abbiamo evidenziato come le indicazioni della Teoria delle Stringhe siano oggi direttamente accessibili solo in contesti particolarmente semplici, legati essenzialmente ad ampiezze di diffusione nello spazio di Minkowski. Al netto di queste limitazioni tecniche, è stato possibile dedurre, in modo indiretto, alcune informazioni sul suo comportamento in circostanze più complesse, legate a spazi di Calabi–Yau o alla corrispondenza *AdS/CFT*, contesti intrisi di aspetti tecnici che sono stati sottoposti a indagini accurate negli anni. Questo ha consentito addirittura di esplorare l’origine microscopica dei risultati di Bekenstein e Hawking che associano un’entropia all’area dell’orizzonte dei buchi neri. Come è stato possibile avere accesso a regimi di questo tipo? Sempre grazie alla supersimmetria, che rende molto rigide alcune proprietà dei sistemi, al punto da consentirne l’analisi, in modo significativo, anche in situazioni idealizzate dove la costante di gravitazione viene ridotta al punto da eliminarne gli effetti. Ad esempio, i conteggi microscopici

di entropia effettuati in questo modo funzionano sorprendentemente, come mostrato da Andrew Strominger e Cumrun Vafa, anche se manca un’identificazione chiara dei corrispondenti gradi di libertà. In generale, la supersimmetria semplifica la dinamica e stabilizza i vuoti, associando un senso ben definito a costruzioni che restano limitate, al momento, allo studio delle piccole oscillazioni intorno ad essi.

È bene sottolineare nuovamente che a questi successi parziali, seppure molto significativi, si accompagna una vera e propria perdita di predittività. Riusciamo a costruire soluzioni della Teoria delle Stringhe che corrispondono a casi limite di soluzioni della Supergravità e ne riflettono gli aspetti essenziali, ma le cui caratteristiche dipendono da un certo numero di parametri continui, a valori in regioni del piano complesso. Variando questi parametri variano le predizioni di bassa energia, e purtroppo la loro arbitrarietà rende impossibile giungere a predizioni quantitative, allo stato attuale delle nostre conoscenze. ?? possibile legare caratteristiche del Modello Standard a proprietà topologiche di spazi di Calabi–Yau, e quindi, selezionandoli opportunamente, riprodurle in buona parte. Forse dobbiamo convivere con questa molteplicità di opzioni per una teoria che abbiamo ragione di ritenere unica, come dobbiamo convivere con le varietà delle orbite Kepleriane dei pianeti. Ma quali sono le regolarità che prendono il posto, in questi scenari, delle leggi di Keplero? Prima di giungere a conclusioni definite, appare comunque inevitabile aggiungere l’ingrediente mancante, la rottura della supersimmetria.

La rottura della supersimmetria ha in generale un drammatico effetto di destabilizzazione, e introduce tipicamente eccitazioni tachioniche simili a quelle presenti nel modello bosonico originale. Ashoke Sen ha mostrato, ad esempio, che la D_{25} -brana della stringa bosonica, che ospita il tachione della stringa aperta, decade nel vuoto con le sue eccitazioni. Il tachione della stringa chiusa ha una dinamica più complicata, con effetti ancora più drammatici, e in generale la rottura di supersimmetria comporta profonde difficoltà. Il motivo è intuibile da quanto abbiamo visto: la supersimmetria garantisce che i contributi opposti all’energia di vuoto sulle stringhe di bosoni e fermioni si cancellino esattamente.

Quando viene violata, anche nei casi in cui è possibile eliminare i modi tachionici che ne risultano, emerge un potenziale che deforma il vuoto, e con esso instabilità più sottili, come vedremo a breve. D'altra parte il confronto con le Interazioni Fondamentali non può prescindere da questi fenomeni, perché ad esempio non esistono coppie di particelle Bose–Fermi fondamentali con uguali attributi. Anzi, solo nel 2012 gli esperimenti al CERN hanno aggiunto il bosone di Higgs ad una materia esclusivamente fermionica di leptoni e quarks.

Esiste un metodo per costruire soluzioni della Teoria delle Stringhe con rottura di supersimmetria che possono essere prive di tachioni, sfruttando un'osservazione di Scherk e Schwarz che può essere illustrata partendo dal meccanismo di Kaluza–Klein e dalla circonferenza che abbiamo già considerato. Abbiamo detto infatti che le funzioni d'onda delle particelle devono essere naturalmente periodiche, ma questa condizione è in realtà troppo restrittiva. Il motivo è che i campi fermionici compaiono sempre in coppie nei principi di azione, e quindi i loro contributi restano periodici anche associando funzioni d'onda anti-periodiche alle singole particelle di questo tipo. In questo modo, partendo da uno spettro supersimmetrico in $D + 1$ dimensioni, gli impulsi interni

$$p_{Bose} = \frac{\hbar k}{R}, \quad p_{Fermi} = \frac{\hbar (k + \frac{1}{2})}{R}, \quad (33)$$

dove k è un numero intero, generano differenze tra le masse in D dimensioni dell'ordine di $\frac{1}{R}$, rompendo la supersimmetria. Un'operazione di questo tipo può essere effettuata consistentemente, e in modo relativamente agevole, su interi spettri di eccitazioni della Teoria delle Stringhe.

In presenza di D-brane si può fare anche meglio, come illustrato in fig. 11: se l'impulso in questione è ortogonale ad una brana, le sue eccitazioni restano supersimmetriche, e la rottura viene solo indotta radiativamente, in modo più soffuso, dall'Universo circostante ("brane supersymmetry"), in modi che richiamano alla mente il meccanismo "see-saw" per le masse dei neutrini del Modello Standard. Inoltre, con metodi diversi e più sottili è anche possibile invertire i ruoli, confinando inizialmente la rottura ad una brana ("brane supersymmetry breaking").

Emilian Dudas e Jihad Mourad hanno collegato queste costruzioni al modello di Volkov–Akulov, un'elegante manifestazione della rottura della supersimmetria che era emersa ancora prima del lavoro di Wess e Zumino.

Abbiamo quindi una soluzione del problema? Non proprio, perché in ogni caso gli effetti della rottura si riverberano sul vuoto, che viene curvato in modo più o meno violento dalla separazione tra bosoni e fermioni, e la nostra comprensione attuale della Teoria delle Stringhe non ci consente di seguirne direttamente l'evoluzione. La Supergravità coglie pienamente gli effetti di bassa energia e apre anche scenari molto interessanti, non direttamente accessibili nella Teoria delle Stringhe, in cui il vuoto non viene curvato anche in presenza di supersimmetria rotta ("no-scale models"). Nei vuoti che la teoria raggiunge possono però comparire, in modo sorprendente, instabilità tachioniche, e anche quando questo non si verifica effetti non perturbativi che ricordano la formazione di bolle di vapore in un liquido possono distruggere l'intero spazio-tempo risultante.

Sorge quindi un primo problema: in assenza di supersimmetrie esatte, cosa possiamo concludere sulla stabilità di questi scenari? Inoltre, come possiamo capire se in questo modo preserviamo comunque il comportamento ultravioletto garantito dalla Teoria delle Stringhe, o in altri termini se la Teoria delle Stringhe ammette effettivamente queste deformazioni dei vuoti? In generale, come trasferire alla Teoria delle Stringhe, in modo controllabile, l'intuizione costruita a basse energie con la Supergravità sulla rottura della supersimmetria? Al momento vuoti AdS ottenuti combinando con precisione contributi contrastanti, dove flussi elettromagnetici o costanti cosmologiche compensano l'attrazione gravitazionale, sembrano generalmente instabili in assenza di supersimmetria. Vuoti meno simmetrici, o modelli cosmologici, hanno una genesi più naturale e si comportano meglio. Si incontrano quindi molte difficoltà, ma ci sono buone ragioni per mantenere più di una punta di ottimismo. Peraltro, le instabilità richiamano alla mente un problema ben noto della teoria Newtoniana o dell'Elettrostatica, dove configurazioni statiche stabili di masse o cariche sono impossibili. Il nostro Universo gestisce egregiamente

questa difficoltà, formando a livello macroscopico sistemi planetari che sono dinamicamente stabili nel caso della Gravità e, a livello microscopico, strutture neutre (atomi e molecole) che sono anch'esse dinamicamente stabili, in modo più sottile, grazie alla Meccanica Quantistica. Peraltro, è difficile non pensare che queste profonde difficoltà riflettano, almeno in parte, la nostra limitata comprensione dei principi primi della Teoria delle Stringhe.

La rottura della supersimmetria genera nella Teoria delle Stringhe un potenziale esponenziale per il dilatone, o π ? in generale per una combinazione di campi scalari. Ebbene, proprio l'elevata pendenza di questo potenziale costringe questo campo, sorprendentemente, ad emergere dalla singolarità iniziale dell'Universo risalendone la china. Lo scalare accumula in questo modo l'energia potenziale da spendere nella discesa successiva, in dinamiche che suggeriscono uno scenario per la genesi dell'inflazione. Questa è una brevissima fase accelerata che viene associata ai primi istanti dell'Universo, perché spiega naturalmente la sua piattezza e l'origine dei suoi agglomerati di materia. La decelerazione può anche tradursi nell'apparente riduzione di potenza, a grandi scale angolari, del Fondo Cosmico a Microonde (CMB) che permea l'Universo.

Filoni molto interessanti della ricerca cercano di chiarire questi aspetti, e iniziano a comparire congetture molto interessanti su condizioni di consistenza che la Gravità, che pure diventa intensa, come abbiamo visto, solo ad energie incredibilmente elevate prossime alla scala di Planck, introdurrebbe già in regioni attualmente esplorate. Altri argomenti, di origine simile, favoriscono dinamiche cosmologiche di campi scalari, come quelle che abbiamo descritto, piuttosto che l'emergenza di vuoti con costante cosmologica positiva. Ci auguriamo che i prossimi anni possano dirci qualcosa di più chiaro e concreto su tutto questo.

Conclusioni

La natura di questa discussione, come il lettore non avrà mancato di notare, riflette fedelmente quanto era stato anticipato nell'Introduzione. Abbiamo descritto una serie di esempi, alcuni dei quali molto suggestivi, e indicazioni su com-

portamenti a piccole distanze che collimano con l'assenza delle usuali singolarità ultraviolette nella Teoria delle Stringhe. Abbiamo anche visto che, in combinazione con la Supergravità, i nostri strumenti di indagine diventano ben più sofisticati e ci conducono ben oltre. Si giunge in questo modo, in un quadro che ha dell'incredibile, a percepire la totale equivalenza di modelli apparentemente molto diversi definiti in dieci e undici dimensioni, mentre con la corrispondenza *AdS/CFT* emergono strumenti tecnici nuovi e inattesi. Come alla fine del XIX Secolo, la Fisica sembra aver colto i principi primi della Natura, e oggi ad un livello di sofisticazione che lascia attoniti. Ma la cautela è d'obbligo, come abbiamo evidenziato a proposito di fig. 7.

Ci troviamo di fronte ad una teoria che appare unica, ma in dimensioni dello spazio tempo, dieci o undici, che non corrispondono alla nostra esperienza. Lo stesso numero di dimensioni del nostro Universo sembra un accidente, e la teoria, che pure può dar conto delle quattro dimensioni macroscopiche in scenari ?? la Kaluza-Klein, è relativamente sotto controllo solo in presenza della supersimmetria, che sembra invece del tutto aliena dalle Interazioni Fondamentali note. Inoltre, in presenza della supersimmetria il sistema non appare predittivo. Come il raggio R della circonferenza in cinque dimensioni utilizzata per illustrare la T -dualità appare del tutto arbitrario, così avviene per alcune proprietà degli spazi di Calabi-Yau che determinano le varie "costanti di struttura fine nelle restanti quattro dimensioni macroscopiche.

Un'altra manifestazione imbarazzante delle nostre limitazioni è legata alla simmetria di gauge che sembra alla base della Teoria delle Stringhe. Chiedersi quale essa sia è una domanda ben lecita, perché questi sistemi contengono la Gravità, per la quale le trasformazioni di Lorentz locali o i diffeomorfismi hanno un ruolo limpidissimo e centrale. Nella Teoria delle Stringhe la simmetria di gauge che sembra emergere è l'invarianza conforme in due dimensioni. Si tratta di una simmetria infinita, legata a trasformazioni analitiche $z \rightarrow f(z)$, ed è chiaramente una proprietà del principio di azione di una stringa. Ogni ridefinizione analitica della coordinata z sul piano complesso, quella che entra in eq. (22) (o, ristretta sull'asse reale, in eq. (1)) preserva

localmente gli angoli, e la continuazione analitica di queste operazioni dall'Euclideo si traduce in infinite trasformazioni localmente conformi, che sono simmetrie di teorie di campo in due dimensioni prive al loro interno di masse o altre costanti dimensionali. La dinamica di una stringa è di questo tipo, ma questa simmetria implica le equazioni del moto delle sue eccitazioni, che come abbiamo visto sono alla base della descrizione della Gravità. Questo fatto contrasta in modo netto con quanto avviene in sistemi di cui capiamo più a fondo i principi, come appunto le teorie di gauge e la Relatività Generale. In altri termini, abbiamo un'ulteriore evidenza del fatto che non conosciamo i veri gradi di libertà in gioco, ma solo diverse loro manifestazioni locali. La situazione richiama alla mente un potenziale Newtoniano del quale riusciamo a registrare estremi e corrispondenti frequenze delle piccole oscillazioni, ma la cui natura globale ci sfugge del tutto.

Abbiamo collezionato molte evidenze circostanziali su proprietà sorprendenti e inusuali della Teoria delle Stringhe. Il quadro risultante, suggestivo e incompleto, fa pensare, in un certo senso, ad una controparte assai sofisticata della teoria di Bohr-Sommerfeld. Comprendere meglio i principi primi all'origine della costruzione, e anche altre questioni legate ai buchi neri e all'Universo primordiale, potrebbe anche richiedere dei salti logici importanti. Ci auguriamo di vederne presto qualche segno concreto.

Nella breve lista di referenze, diverse delle quali sono relativamente accessibili, il lettore può approfondire lo studio degli argomenti descritti in questo articolo.

Vorrei ringraziare anzitutto P. Ciafaloni per avermi invitato a scrivere un articolo sulla Teoria delle Stringhe per Ithaca. Sono anche molto grato a C. Angelantonj, A. de Bonaffos, A. Candido, A. Ferrara, S. Ferrara, M. Gerbino, P. Pelliconi, G. Pradisi e S. Raucci. Con i loro commenti, le loro critiche e i loro consigli mi hanno aiutato a rendere la presentazione più coerente e, spero, in grado di trasmettere almeno un'idea di questi sviluppi ad un pubblico relativamente eterogeneo.



- [1] M.B. GREEN, J.H. SCHWARZ E E. WITTEN: *Superstring Theory*, 2 vols. Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [2] S. WEINBERG: *The Quantum Theory of Fields*, 3 vols.. University Press, Cambridge (1995, 1996, 2000).
- [3] J. POLCHINSKI: *String Theory*, 2 vols. Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [4] V. MUKHANOV: *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [5] B. ZWIEBACH: *A first course in string theory*. Cambridge University Press, Cambridge (2009).
- [6] N. VITTORIO: *Cosmology*. CRC Press, London (2018).
- [7] M. J. DUFF: "M Theory (The Theory formerly known as strings)", *Int. J. Mod. Phys. A***11** (1996) 5623.
- [8] O. AHARONY, S. S. GUBSER, J. M. MALDACENA, H. OOGURI E Y. OZ: "Large N field theories, string theory and gravity", *Phys. Rept.* **323** (2000) 183.
- [9] C. ANGELANTONJ AND A. SAGNOTTI: "Open Strings", *Phys. Rept.* **371** (2002) 1.
- [10] A. SAGNOTTI: *Teoria delle Stringhe*. Enciclopedia della Scienza e della Tecnica Treccani, 643 (2004).
- [11] G. 'T HOOFT, ED: "A Theory of Everything?", *Nature* **433** (2005) 257.
- [12] J. MALDACENA: "The Gauge/Gravity Duality", *arXiv* **1106:6073** (2011) .
- [13] Z. BERN, L. DIXON E D. A. KOSOWER: "Loops, Trees and the Search for New Physics", *Scientific American* **306N5** (2012) 20.
- [14] S. FERRARA E A. SAGNOTTI: "The Many Lives of Supergravity", *CERN Courier* **57** (2017) 1.
- [15] S. FERRARA E A. SAGNOTTI: "Supergravity at 40: Reflections and Perspectives", *Riv. Nuovo Cimento* **40** (2017) 279.
- [16] K.S STELLE: "Abdus Salam and Quadratic Curvature Gravity: Classical Solutions", *Int. J. Mod. Phys. A***32** (2017) 1741012.
- [17] M. GABERDIEL E M. VASILIEV, EDs.: "Higher-Spin theory and Holography", *J. Phys.* **A46 (special issue)** (2013) 214001.
- [18] N. BOULANGER E A. CAMPOLEONI, EDs.: "Higher-Spin Gauge Theories", *Universe (special issue)* (2018) .

Augusto Sagnotti: svolge ricerche sulla (Super)gravità e la Teoria delle Stringhe, con enfasi sulle loro indicazioni per la Cosmologia e le Interazioni Fondamentali. Ha ottenuto il Ph.D. in Fisica Teorica al Caltech nel 1983, ed è stato quindi Research Fellow al Caltech e Miller Research Fellow a U.C. Berkeley, Ricercatore, Professore Associato e Professore Ordinario all'Università di Roma "Tor Vergata". Dal 2005 è Professore

Ordinario alla Scuola Normale Superiore. È stato Andrejewski Lecturer alla Humboldt Universität di Berlino nel 1999 e ha ricevuto il Premio SIGRAV nel 1994, il Premio Margherita Hack nel 2014 e il Premio von Humboldt nel 2018.