Simmetrie di Lie e Lie-Bäcklund per equazioni differenziali

Ma cos'è poi che ci dà la sensazione di eleganza in una soluzione, in una dimostrazione? È l'armonia delle diverse parti, la loro simmetria, il loro felice equilibrio: in una parola, è tutto quello che introduce un ordine, quello che dà unità, che ci permette di vedere chiaramente e comprendere in un sol colpo l'insieme e i dettagli.

Henri Poincaré (1854 – 1912)

Decio Levi *Dipartimento di Matematica e Fisica, Università Roma Tre e INFN Sezione Roma Tre, Via della Vasca Navale 84, 00146, Roma*

Nella presente nota vengono presentati i metodi che si utilizzano per risolvere equazioni differenziali usando l'esistenza di trasformazioni di simmetria, spesso non ovvie, che lasciano un'equazione differenziale invariante. In particolare per un'equazione differenziale ordinaria l'esistenza di simmetrie permette di ridurre l'ordine, possibilmente integrarla ed, in ogni modo, ottenere soluzioni particolari. Nel caso di equazioni alle derivate si riduce il numero delle variabili indipendenti e si ottengono soluzioni particolari. Se l'equazione alle derivate parziali è non-lineare ed appartiene alla classe delle equazioni così dette integrabili, allora possiamo trovare classi di simmetrie dipendenti dalle derivate di ordine più elevato ed operatori differenziali che collegano le simmetrie tra di loro.

Introduzione

In un corso di introduzione alle equazioni differenziali [1] abbiamo imparato che equazioni differenziali separabili, cioè della forma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x), \quad y \equiv y(x) \tag{1}$$

sono facilmente risolubili per separazione di variabile, cioè calcolando gli integrali

$$\int_y \frac{dy}{f(y)} = \int_x dx g(x) + c \tag{2}$$

dove c è una costante di integrazione. In effetti, però, la ragione di fondo per cui questa equazione si riduce a due integrali e quindi si integra, è che (1) è invariante rispetto ad un gruppo di simmetria di Lie [2], cioè esiste una trasformazione dipendente da un parametro continuo α che trasforma ogni curva soluzione della (1) $y = \psi(x)$ in un'altra curva soluzione dipendente dal parametro α,

$$y = \tilde{\psi}(x, \alpha) \ . \qquad (3)$$

Due sottocasi particolarmente semplici sono

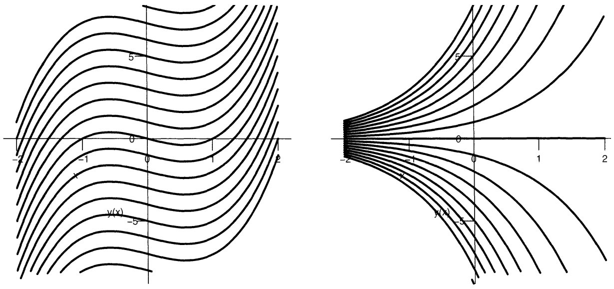

Figura 1: *A sinistra (1a) una famiglia di curve invarianti rispetto a una traslazione nella direzione y. A destra (1b) una famiglia di curve invarianti rispetto a una traslazione nella direzione x.*

quando $f(y) = 1$ o $g(x) = 1$. Nel primo caso la tangente alla curva soluzione (3), data dalla sua derivata, è indipendente da y ed è quindi data dalla Figura 1a, cioè la soluzione è invariante per traslazioni in y, $(x, y) \to (x, y + \alpha)$. Nel secondo caso la tangente alla curva soluzione (3) non dipende da x per cui la famiglia di curve soluzioni è data dalla Figura 1b.

Il caso in cui l'equazione differenziale è invariante rispetto a traslazioni della variabile indipendente o dipendente sono casi molto particolari anche se abbastanza comuni. Esistono però situazioni più complesse come per esempio quella data dall'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2 y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y}. \qquad (4)$$

Introducendo le coordinate polari

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \qquad (5)$$

possiamo riscrivere (4) come

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2) \qquad (6)$$

cioè un'equazione separabile e quindi facilmente integrabile dato che la soluzione $r = \phi(\theta, \gamma)$, dove γ è la costante di integrazione di (6), è invariante rispetto a una traslazione di θ. Le curve soluzione al variare di γ non sono così semplici come nel caso della Figura 1 e sono graficate nella Figura 2.

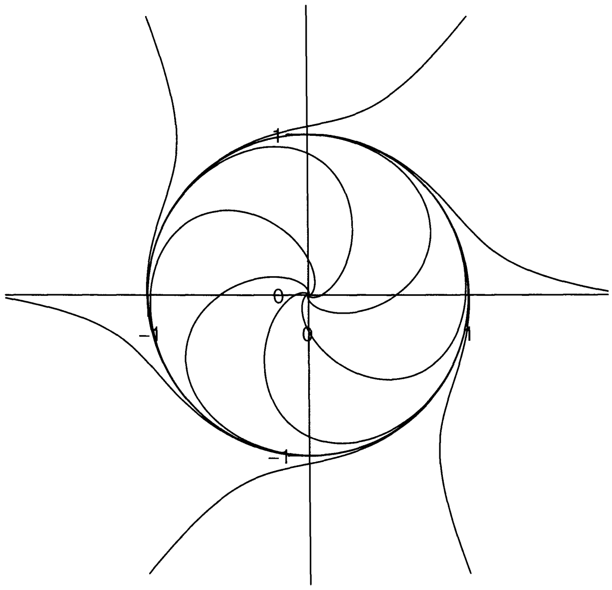

Figura 2: *Una famiglia di curve invarianti rispetto a una traslazione nella direzione θ.*

La teoria di Lie per le simmetrie delle equazioni differenziali dà una procedura per trovare quella trasformazione delle variabili che riducono l'equazione ad una equazione invariante rispetto a una traslazione. Quindi, se l'equazione è del primo ordine, siamo in grado di integrarla.

Simmetrie ed equazioni differenziali

In matematica, una simmetria è un'operazione che muove o trasforma un oggetto lasciandone inalterato l'aspetto. Le simmetrie di un oggetto formano un gruppo, detto **gruppo delle simmetrie**.

Le trasformazioni che lasciano invariata una figura geometrica vengono dette isometria e formano un gruppo, il gruppo di simmetria della figura geometrica. Le simmetrie si dividono in simmetrie *continue* e simmetrie *discrete* a seconda se il parametro della trasformazione é una variabile continua, per esempio l'angolo di rotazione della sfera, o un numero, multiplo di $\pi/3$ or di $\pi/4$ a seconda che consideri un triangolo o un quadrato.

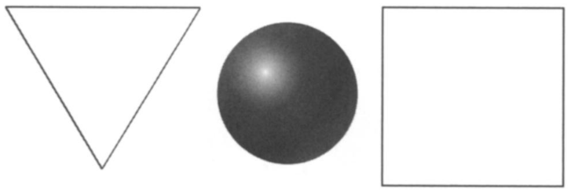

Figura 3: *Oggetti geometrici, triangolo, sfera e quadrato con simmetrie discrete e continue.*

Formalismo

Sophus Lie (1842 – 1899) ha introdotto la nozione di gruppo continuo di trasformazioni per unificare le varie tecniche in uso fino ad allora per integrare le equazioni differenziali ordinarie, quali i metodi introdotti da Riccati, Abel, Bernoulli, Eulero o Jacobi per integrare equazioni differenziali nonlineari del primo ordine o il metodo del fattore integrante. Nella sua elaborazione è stato motivato dai risultati di Evariste Galois (1811–1832) per risolvere le equazioni polinomiali algebriche in quella che ora viene comunemente chiamata la *teoria di Galois*. Galois trovò che la soluzione algebrica di un'equazione polinomiale é strettamente collegata alla struttura del gruppo delle permutazioni delle radici del polinomio, il così detto gruppo di Galois del polinomio. Galois mostrò che un'equazione può essere risolta algebricamente in termini di radicali se uno può trovare una serie finita di sottogruppi del gruppo di Galois, tali che il gruppo è risolubile. Come vedremo in seguito queste stesse idee sono state applicate da Lie nel caso del gruppo di simmetria delle equazioni differenziali con risultati analoghi [2–6].

Un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$, dove ϵ è un parametro continuo, è definito dai seguenti assiomi:

1. Proprietà di chiusura, i.e.: $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \delta) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\epsilon, \delta))$, dove la funzione $\phi(\epsilon, \delta)$ indica come si combinano i parametri tra di loro.

2. Proprietà associativa, i.e. : $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\alpha, \phi(\beta, \gamma))) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\phi(\alpha, \beta), \gamma))$ per ogni α, β e γ.

3. Esistenza dell'elemento neutro, indicato con e, spesso preso uguale a zero, i.e.: $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, e)$.

4. Esistenza dell'elemento inverso, i.e.: $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \gamma) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \phi(\delta, \gamma))$ con $\phi(\delta, \gamma) = e$. Formalmente indicheremo $\gamma = \delta^{-1}$.

5. Differenziabilità della funzione $\mathbf{F}$ nella sua dipendenza da $\mathbf{x}$ ed analiticità nel parametro gruppale ϵ.

6. Analiticità della funzione $\phi(\epsilon, \delta)$ rispetto ai suoi parametri ϵ e δ.

Per concretezza vediamo come una traslazione di una grandezza continua ϵ, $x \to \tilde{x} = x + \epsilon$, tale quindi che $F(x, \epsilon) = x + \epsilon$, soddisfi le proprietà, da 1 a 6, di un gruppo di Lie.

1. Proprietà di chiusura: poiché $x \to \tilde{x} = x + \epsilon$ avremo che $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \delta$ con δ un'altra grandezza continua. Mettendo insieme le due formule abbiamo che $\tilde{\tilde{x}} = x + \delta + \epsilon$ dove $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$ è una grandezza continua e quindi $\tilde{\tilde{x}}$ è un traslato di x tale come $\tilde{x}$, ossia la combinazione di due traslazioni è ancora una traslazione.

2. Proprietà associativa: poiché in questo caso $F(x, \epsilon) = x + \epsilon$ e $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$ abbiamo $F(x, \phi(\alpha, \phi(\beta, \gamma))) = x + \alpha + (\beta + \gamma) = F(x, \phi(\phi(\alpha, \beta), \gamma)) = x + (\alpha + \beta) + \gamma$.

3. Esistenza dell'elemento neutro: se richiediamo che valga $x = F(x, e)$ consegue che $e = 0$.

4. Esistenza dell'elemento inverso: poiché $\tilde{\tilde{x}} = x + \delta + \epsilon$, se $\tilde{\tilde{x}} = x$ allora $\delta + \epsilon = 0$ e quindi $x = \tilde{x} - \epsilon$.

5. $F(x, \epsilon) = x + \epsilon$ è chiaramente differenziabile nella sua dipendenza da x ed analitica nel parametro gruppale ϵ.

6. $\phi(\epsilon, \delta) = \epsilon + \delta$ è una funzione analitica nei suoi parametri ϵ e δ.

Poiché per la quinta proprietà $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$ è analitica in ϵ, esiste un suo sviluppo in serie di Taylor, ossia in potenze di ϵ e possiamo definire una trasformazione infinitesima

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \epsilon \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \epsilon} |_{\epsilon = 0} \right] + O(\epsilon^2)$$

in cui, il coefficiente del primo ordine in ϵ, coefficiente infinitesimo della trasformazione, è

$$\xi(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial\,\mathbf{F}}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}\right].$$

Sophus Lie dimostrò il seguente teorema fondamentale per lo sviluppo della teoria delle simmetrie di un'equazione differenziale:

Teorema 1. ***Primo Teorema di Lie*** *Esiste una parametrizzazione $\tau(\epsilon)$ tale che il gruppo delle trasformazioni di Lie* $\boldsymbol{F}$ *è equivalente alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo grado ai valori iniziali*

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{d\tau} = \xi(\tilde{\boldsymbol{x}}) \tag{7}$$

con $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ quando $\tau = 0$.

$\tau(\epsilon)$ è una ben definita funzione di ϵ data da:

$$\begin{aligned}\tau(\epsilon) &= \int_0^\epsilon \Gamma(\eta)d\eta,\\ \Gamma(\eta) &= \frac{\partial\phi(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\Big|_{(\alpha,\beta)=(\eta^{-1},\eta)}.\end{aligned}$$

Nel caso di una traslazione in due dimensioni

$$\tilde{x} = x+\epsilon, \qquad \tilde{y} = y, \tag{8}$$

abbiamo:

$$\xi(x,y) = (1,\ 0), \tag{9}$$
$$\frac{d\tilde{x}}{d\epsilon} = 1, \quad \frac{d\tilde{y}}{d\epsilon} = 0, \tag{10}$$

con la condizione al contorno

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y \text{ quando } \epsilon = 0. \tag{11}$$

Invarianza sotto un gruppo

Esiste un'altra formulazione del primo teorema di Lie ottenuta introducendo il generatore infinitesimo della trasformazione

$$\hat{X} = \xi(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{n} \xi_i(\,\mathbf{x})\partial_{x_i} \tag{12}$$

Teorema 2. *Il gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\epsilon)$ si può scrivere*

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = e^{\epsilon\hat{X}}\,\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\hat{X}^k\,\boldsymbol{x}. \tag{13}$$

L'espressione (13) *è detta* ***serie di Lie****.*

Nel caso di una rotazione nel piano

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1\cos(\epsilon) + x_2\sin(\epsilon), \qquad (14)\\ \tilde{x}_2 &= -x_1\sin(\epsilon) + x_2\cos(\epsilon),\end{aligned}$$

abbiamo

$$\xi(\,\mathbf{x}) = (x_2,\ -x_1).$$

La serie di Lie corrispondente è:

$$\begin{aligned}&(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2) = (e^{\epsilon\hat{X}}x_1,\ e^{\epsilon\hat{X}}x_2).\\ &\hat{X}x_1 = x_2, \qquad \hat{X}x_2 = -x_1,\\ &\hat{X}^2x_1 = -x_1, \quad \hat{X}^2x_2 = -x_2, \text{ etc. .}\end{aligned}$$

Funzioni invarianti

Una funzione $f(\mathbf{x})$ analitica di $\mathbf{x}$, cioè sviluppabile in serie di Taylor (o di potenze), convergente in un dominio, è detta una *funzione invariante* rispetto ad un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro, $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x},\epsilon)$ se e solo se in questo dominio

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\,\mathbf{x}). \tag{15}$$

Teorema 3. *La funzione analitica $f(\boldsymbol{x})$ è una funzione invariante rispetto ad un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\epsilon)$, di generatore infinitesimo $\hat{X}$* (12)*, se e solo se*

$$\hat{X}f(\,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{16}$$

Non diamo la dimostrazione, ma questa è facile da ottenere utilizzando la rappresentazione di $\tilde{\mathbf{x}}$ iunivoco data dalla serie di Lie (13). Se poi, invece dell'invarianza di una funzione, consideriamo l'invarianza di un'equazione $g(\mathbf{x}) = 0$, la condizione infinitesima d'invarianza (16) diviene

$$\hat{X}g(\mathbf{x}) = 0, \text{ quando } g(\mathbf{x}) = 0 \tag{17}$$

Questo risultato sarà quello che verrà esteso al caso di equazioni differenziali ed è alla base della teoria di Lie delle simmetrie per ogni tipo di equazione, cioè equazioni differenziali, funzionali, integrali, etc.

Trasformazione del gruppo in forma canonica

Per integrare un'equazione differenziale abbiamo riscritto l'equazione in coordinate tali che essa abbia una simmetria di traslazione. In questo modo l'equazione è poi integrabile per quadratura. Nell'Introduzione questo è stato fatto *ad occhio* ma nella teoria di Lie esiste una procedura gruppale ad hoc, che consiste nel riscrivere l'equazione in termini di coordinate canoniche.

Le coordinate canoniche per un sistema che ammette simmetrie di Lie sono quelle coordinate per le quali il gruppo di Lie è dato da una traslazione. Come lo possiamo ottenere? Lo otteniamo tramite un cambio di variabile, che dipende dai generatori del gruppo di simmetria originario.

Definiamo quindi un cambio di variabile biunivoco e differenziabile $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x})$. Il gruppo di trasformazione di Lie ad un parametro nelle nuove variabili diventa

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{y}} = e^{\epsilon \hat{Y}}\, \mathbf{y}, \qquad (18)\\ \text{dove} \quad & \hat{Y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\,\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i},\\ \text{con} \quad & \eta_i(\,\mathbf{y}) = \hat{X} y_i. \end{aligned}$$

Scegliamo le variabili $\mathbf{y}$ in modo tale che il gruppo di simmetria sia solo la traslazione della $n-$esima delle variabili, y_n. Cioè

$$\tilde{y}_i = y_i \text{ per } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \tilde{y}_n = y_n + \epsilon. \qquad (19)$$

Il problema non ovvio è dimostrare che tali variabili esistono, cioè che le equazioni (19) hanno una soluzione. In corrispondenza con (19) abbiamo che le $\eta_i(\,\mathbf{y})$ definite in (18) sono tali che

$$\begin{aligned} & \eta_i \;= 0 \qquad (20)\\ \text{per} \quad & i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ e } \eta_n \;= 1. \end{aligned}$$

Dallo studio della soluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine (19), con $\eta_i(\,\mathbf{y})$ dati dalle (20), troviamo che le coordinate canoniche sono definite come le $n-1$ soluzioni funzionalmente indipendenti y_i, con $i = 1, 2, \dots, n-1$, delle equazioni alle derivate parziali omogenee del primo ordine

$$\begin{aligned} \eta_i = \hat{X} y_i(\,\mathbf{x}) \;=\; 0 \quad \text{i.e.} \qquad (21)\\ \xi_1(\,\mathbf{x}) \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \xi_2(\,\mathbf{x}) \frac{\partial y_i}{\partial x_2}\\ + \ldots + \xi_n(\,\mathbf{x}) \frac{\partial y_i}{\partial x_n} = 0, \end{aligned}$$

mentre y_n è dato da una soluzione particolare dell'equazione del primo ordine alle derivate parziali non-omogenea

$$\begin{aligned} \eta_n = \hat{X} y_n(\,\mathbf{x}) \;=\; 1 \quad \text{i.e.} \qquad (22)\\ \xi_1(\,\mathbf{x}) \frac{\partial y_n}{\partial x_1} + \xi_2(\,\mathbf{x}) \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\\ + \ldots + \xi_n(\,\mathbf{x}) \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 1. \end{aligned}$$

Vediamo un esempio non banale per chiarirci le idee.
Consideriamo una trasformazione di gruppo $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \epsilon)$ data dal gruppo delle dilatazioni

$$\tilde{x}_1 = e^{\epsilon} x_1, \quad \tilde{x}_2 = e^{2\epsilon} x_2$$

a cui corrisponde il generatore infinitesimo $\hat{X} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Per cercare le coordinate canoniche dobbiamo risolvere le equazioni differenziali (21, 22):

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial y_1(x_1,\, x_2)}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial y_1(x_1,\, x_2)}{\partial x_2} \;&=\; 0, \qquad (23)\\ x_1 \frac{\partial y_2(x_1,\, x_2)}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial y_2(x_1,\, x_2)}{\partial x_2} \;&=\; 1. \qquad (24) \end{aligned}$$

È facile vedere per sostituzione diretta che $y_1 = g(2x_2/x_1)$, con g funzione arbitraria del suo argomento, è soluzione di (23) mentre una soluzione particolare di (24) è data scegliendo $y_2 = y_2(x_2)$. Otteniamo quindi $y_2 = \frac{1}{2} \log(x_2)$.

Algebra di Lie: proprietà dei generatori infinitesimi di un gruppo di trasformazioni di Lie ad r parametri

Nella costruzione dei generatori di simmetrie puntuali di Lie spesso ci si trova di fronte al caso in cui si ha più di un parametro. Lo studio delle proprietà dei generatori infinitesimi di un gruppo di trasformazioni di Lie ad r parametri inizia con il seguente teorema di Lie:

Secondo Teorema Fondamentale di Lie: *Il commutatore di due qualunque generatori infinitesi-*

mi di un gruppo ad r–parametri di trasformazioni di Lie, $[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]$, definito come $\hat{X}_\alpha \hat{X}_\beta - \hat{X}_\beta \hat{X}_\alpha$, è un generatore infinitesimo appartenente al gruppo:

$$[\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta}\hat{X}_\gamma, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = 1, 2, \ldots, r.$$

I coefficienti $C^\gamma_{\alpha\beta}$ sono costanti e sono detti ***le costanti di struttura del gruppo****.*

Dati tre generatori infinitesimi $\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta, \hat{X}_\gamma$, vale **l'identità di Jacobi**:

$$[\hat{X}_\alpha, [\hat{X}_\beta, \hat{X}_\gamma]] + [\hat{X}_\beta, [\hat{X}_\gamma, \hat{X}_\alpha]] + [\hat{X}_\gamma, [\hat{X}_\alpha, \hat{X}_\beta]] = 0.$$

Possiamo quindi enunciare il terzo teorema fondamentale di Lie:

Terzo Teorema Fondamentale di Lie *Le costanti di struttura definite dalle relazioni di commutazione dei generatori soddisfano le relazioni:*

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = -C^\gamma_{\beta\alpha},$$
$$\sum_{\rho=1}^{r} [C^\rho_{\alpha\beta}C^\delta_{\rho\gamma} + C^\rho_{\beta\gamma}C^\delta_{\rho\alpha} + C^\rho_{\gamma\alpha}C^\delta_{\rho\beta}] = 0.$$

La prima relazione è dovuta alle proprietà di antisimmetria del commutatore mentre la seconda deriva dall'identità di Jacobi.

I generatori infinitesimi di un gruppo di trasformazioni di Lie ad r–parametri $\hat{X}_\alpha$ formano una nuova struttura che viene denominata **algebra di Lie**, definita dalle sue costanti di struttura. **Esempio 1**: Gruppo dei moti rigidi in due dimensioni dato da rotazioni e traslazioni.

$$\tilde{x} = x\cos(\epsilon_1) - y\sin(\epsilon_1) + \epsilon_2,$$
$$\tilde{y} = x\sin(\epsilon_1) + y\cos(\epsilon_1) + \epsilon_3,$$

i cui generatori infinitesimi sono

$$\hat{X}_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \; \hat{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \; \hat{X}_3 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le costanti di stuttura sono descritte dalla tabella:

$[.,.]$	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$
$\hat{X}_1$	0	$-\hat{X}_3$	$\hat{X}_2$
$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	0	0
$\hat{X}_3$	$-\hat{X}_2$	0	0

Delle varie algebre di Lie conosciute noi saremo particolarmente interessati al caso delle *algebre risolubili*, essenziali per la riduzione delle equazioni differenziali.

Data un'algebra $\mathcal{L}$, una sottoalgebra $\mathcal{I} \subset \mathcal{L}$ è detta *ideale* o *sottoalgebra normale* di $\mathcal{L}$ se $[\hat{X}, \hat{Y}] \in \mathcal{I}$ per tutti gli $\hat{X} \in \mathcal{I}$, $\hat{Y} \in \mathcal{L}$. Un algebra di Lie $\mathcal{L}^{(q)}$ è quindi un' *algebra di Lie risolubile* di dimensione q se esiste una catena di sottoalgebre tali che $\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset \cdots \subset \mathcal{L}^{(q-1)} \subset \mathcal{L}^{(q)}$, dove $\mathcal{L}^{(k)}$ è un'algebra di Lie di dimensione k e $\mathcal{L}^{(k-1)}$ è un ideale di $\mathcal{L}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, q$. I generatori infinitesimi di un'algebra di Lie risolubile $\mathcal{L}^{(q)}$, $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_q$, possono sempre essere ordinati in modo tale che soddisfino le seguenti relazioni di commutazione:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{k=1}^{j-1} C^k_{ij}\hat{X}_k,$$
$$1 \leq i < j, \quad j = 2, 3, \ldots, q,$$

cioè $\hat{X}_1$ appartiene a $\mathcal{L}^{(1)}$, $(\hat{X}_1, \hat{X}_2)$ appartengono a $\mathcal{L}^{(2)}$, etc. .

Esempio 2:

$$\begin{aligned} j = 2: \quad & [\hat{X}_1, \hat{X}_2] &= C^1_{12}\hat{X}_1, \\ j = 3: \quad & [\hat{X}_1, \hat{X}_3] &= C^1_{13}\hat{X}_1 + C^2_{13}\hat{X}_2, \\ & [\hat{X}_2, \hat{X}_3] &= C^1_{23}\hat{X}_1 + C^2_{23}\hat{X}_2. \end{aligned}$$

Si dimostra facilmente che un'algebra di Lie di dimensione 2 è sempre risolubile. Anche una **algebra Abeliana** di dimensione r, data da r generatori infinitesimi commutanti (cioè in cui il commutatore di tutti gli elementi è uguale a zero) è risolubile. Un'algebra di Lie di dimensione 3 non è necessariamente risolubile. Per esempio

$$\hat{X}_1 = -\frac{\partial}{\partial x}, \; \hat{X}_2 = x\frac{\partial}{\partial x}, \; \hat{X}_3 = -x^2\frac{\partial}{\partial x},$$

non è risolubile. L'algebra di Lie di dimensione 3 considerata nell' **Esempio 1**, data dai moti rigidi in due dimensioni, è risolubile: $\mathcal{L}^{(1)} \subset \mathcal{L}^{(2)} \subset \mathcal{L}^{(3)} = \mathcal{L}$, where $\mathcal{L} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$, $\mathcal{L}^{(2)} = (\hat{X}_2, \hat{X}_3)$ è un'algebra Abeliana. Possiamo quindi scegliere $\mathcal{L}^{(1)} = \hat{X}_2$ o $\mathcal{L}^{(1)} = \hat{X}_3$.

Applicazione alle equazioni differenziali

Le simmetrie di un'equazione differenziali sono quelle trasformazioni che lasciano invariato lo spazio delle soluzioni dell'equazione, cioè trasformano una soluzione in un'altra soluzione, o lasciano invariata l'equazione in forma. In formule matematiche, un'equazione differenziale ordinaria (ODE) di ordine n

$$y_n = \mathcal{F}\Big(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}\Big), \qquad (25)$$
$$y = y(x),\ y_j = \frac{d^j y}{dx^j},$$
$$j = 1, \ldots, n-1$$

è una relazione funzionale che collega la variabile x, la funzione $y(x)$ e le sue derivate fino all'ordine n. Se si definiscono le derivate di $y(x)$, y_j con $j = 1, \ldots, n$ come nuove variabili allora posso considerare l'equazione (25) come la funzione $g\Big(x, y, y_1, \cdots, y_n\Big) = 0$ e la condizione che l'equazione rimane invariata in forma è data dalla condizione di invarianza (17). Data una trasformazione puntuale di generatore infinitesimo

$$\hat{X} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y \qquad (26)$$

si dimostra che esiste ed è unica la sua estensione o prolungamento alle derivate di y rispetto a x data da

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}\hat{X} &= \hat{X} + \eta^1(x,y,y_1)\partial_{y_1} + \ldots \\ &+ \eta^n(x,y,y_1,\ldots,y_n)\partial_{y_n}, \end{aligned} \qquad (27)$$

dove

$$\begin{aligned} &\eta^{(j)}(x,y,y_1,\ldots,y_j) = \\ &D\eta^{(j-1)}(x,y,y_1,\ldots,y_{j-1}) \\ &\quad -y_j D\xi, \end{aligned} \qquad (28)$$

con $j = 1, 2, \ldots, n$, $\eta^{(0)} = \eta(x,y)$ e l'operatore D, definito da

$$D = \partial_x + y_1\partial_y + y_2\partial_{y_1} + \ldots + y_{n+1}\partial_{y_n} + \ldots, \quad (29)$$

è tale che applicato ad una funzione $F(x,y,y_1,\ldots,y_n)$ ne da la sua derivata totale rispetto a x, cioè

$$DF = F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1} + \ldots + y_{n+1}F_{y_n}. \quad (30)$$

Val la pena osservare che:

- $\eta^{(j)}$ è lineare in y_j per $j \geq 2$.
- $\eta^{(j)}$ è polinomiale in y_1, y_2, $\ldots$, y_j con coefficienti lineari e omogenei in $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ e le loro derivate fino all'ordine j.

Vediamo ora un esempio di costruzione dei coefficienti infinitesimi del prolungamento nel caso di un gruppo di rotazioni nello spazio x, y. Data la trasformazione

$$\tilde{x} = x\cos(\epsilon) + y\sin(\epsilon),$$
$$\tilde{y} = -x\sin(\epsilon) + y\cos(\epsilon),$$

i coefficienti infinitesimi con le loro derivate prime sono

$$(\xi, \eta) = (y,\ -x),$$
$$\xi_y = -\eta_x = 1,\ \xi_x = \eta_y = 0.$$

Quindi, dalle formule (27, 28, 29) otteniamo

$$\eta^{(1)} = -[1 + y_1^2],\ \eta^{(2)} = -3y_1y_2,$$
$$\eta^{(3)} = -[3y_2^2 + 4y_1y_3],$$
$$\eta^{(j)} = D\eta^{(j-1)} - y_jy_1 \quad \text{per } j \geq 4.$$

Riduzione di ordine di un'ODE tramite le simmetrie

Per mostrare cosa possiamo fare con le simmetrie nel caso di ODE consideriamo una serie di esempi in parte di origine applicativa che mostrano la teoria in fieri.

Esempio dell'equazione di Blasius

L'equazione fondamentale per la descrizione del moto di un fluido non perfetto é data dall'equazione di Navier-Stokes.

$$\overbrace{\underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{Variation}} + \underbrace{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}}_{\text{Convection}}}^{\text{Inertia (per volume)}} \overbrace{-\underbrace{\nu\nabla^2\mathbf{u}}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{-\nabla w}_{\text{Internal source}}}^{\text{Divergence of stress}} + \underbrace{\mathbf{g}}_{\text{External source}}.$$

Usando argomenti di simmetria di scala, Ludwig Prandtl, ingegnere aereonautico tedesco, (1875 – 1953) interessato ai problemi del moto degli aereoplani, ha mostrato come circa metà dei termini dell'equazione di Navier-Sokes sono trascurabili per il moto vicino a un'ala, eccetto che in una regione piccola vicino ai bordi. Prandtl quindi, in questa approssimazione, può scrivere un'equazione ridotta, conosciuta come l'equazione dello strato limite.

Paul Richard Heinrich Blasius (studente di Prandtl) nel 1908 propone una soluzione di similarità per l'equazione dello strato limite quando il moto dell'aria sull'ala è costante, il che corrisponde al caso in cui lo strato limite sopra l'ala piatta è orientato parallelo al flusso dell'aria [7].

In questo caso le equazioni e le condizioni al contorno sono invarianti rispetto alla trasformazione

$$x \to c^2 x,\ y \to cy,\ u \to u,\ v \to \frac{v}{c}, \tag{31}$$

con c una costante positiva ed u e v rispettivamente le velocità nella direzione x e y sopra l'ala. L'equazione che Blasius ottiene imponendo questa invarianza all'equazione dello strato limite di Prandtl è

$$g(z,f) = f_{zzz} + \frac{1}{2} f f_{zz} = 0, \tag{32}$$

dove $z = \frac{x}{y^2}$ è la variabile di simmetria relativa alla trasformazione (31) ed f è la velocità. Il criterio di esistenza di simmetrie è

$$\hat{X} g\Big|_{g=0} = \Big[\xi(z,f)\partial_z + \eta(z,f)\partial_f\Big] g\Big|_{g=0} = 0, \tag{33}$$

diviene:

$$\eta^{(3)} + \frac{1}{2} f_{zz}\eta + \frac{1}{2} f \eta^{(2)} = 0 \tag{34}$$

quando (32) è soddisfatta. Le formule per $\eta^{(2)}$ e $\eta^{(3)}$ sono:

$$\begin{aligned} &\eta^{(2)} = \eta_{zz} + (2\eta_{zf} - \xi_{zz}) f_z \\ &+(\eta_{ff} - 2\xi_{zf})(f_z)^2 \\ &-\xi_{ff}(f_z)^3 + (\eta_f - 2\xi_z) f_{zz} - 3\xi_f f_z f_{zz}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\eta^{(3)} = \eta_{zzz} + (3\eta_{zzf} - \xi_{zzz}) f_z \\ &+3(\eta_{zff} - 2\xi_{zzf})(f_z)^2 \\ &+(\eta_{fff} - 3\xi_{zff})(f_z)^3 \\ &-\xi_{fff}(f_z)^4 + 3(\eta_{zf} - \xi_{zz}) f_{zz} \\ &+3(\eta_{ff} - 3\xi_{zf}) f_z f_{zz} - 6\xi_{ff}(f_z)^2 f_{zz} \\ &-3\xi_f (f_{zz})^2 + (\eta_f - 3\xi_z) f_{zzz} - 4\xi_f f_z f_{zzz}. \end{aligned}$$

In termini di queste formula la condizione di invarianza (34) diviene:

$$\begin{aligned} &[\eta_{zzz} + \frac{1}{2} f \eta_{zz}] \\ &+[3\eta_{zzf} - \xi_{zzz} + u\eta_{zf} - \frac{1}{2} f \xi_{zz}] f_z \\ &+[3\eta_{zff} - 3\xi_{zzf} + \frac{1}{2} f \eta_{ff} - f\xi_{zf}](f_z)^2 \\ &-[\eta_{fff} - 3\xi_{zff} - \frac{1}{2} f \xi_{ff}](f_z)^3 - \xi_{fff}(f_z)^4 \\ &+[3\eta_{zf} - 3\xi_{zz} + \frac{1}{2} f \xi_z + \frac{1}{2}\eta] f_{zz} \\ &+[3\eta_{ff} - 9\xi_{zf} + \frac{1}{2} f \xi_f] f_z f_{zz} \\ &-6\xi_{ff}(f_z)^2 f_{zz} - 3\xi_f (f_{zz})^2 = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Poiché $\xi(z,f)$ e $\eta(z,f)$ non dipendono da f_{z^j} per $j \geq 1$, allora i coefficienti di $(f_z)^0$, f_z, $(f_z)^2$, $(f_z)^3$, $(f_z)^4$, f_{zz}, $f_z f_{zz}$, $(f_z)^2 f_{zz}$ e $(f_{zz})^2$ in (35) devono essere uguali a zero e danno un sistema sovradeterminato di 9 equazioni lineari alle derivate parziali da risolvere per $\xi(z,f)$ e $\eta(z,f)$. Risolvendo questo sistema sovradeterminato di equazioni otteniamo che l'equazione di Blasius ammette un gruppo trasformazioni di Lie a due parametri, una translazione ($\tilde{z} = z + \beta,\ \tilde{f} = f$) e una dilatazione ($\tilde{z} = \frac{z}{\alpha},\ \tilde{f} = \alpha f$). I generatori infinitesimi

$$\hat{X}_1 = \partial_z, \quad \hat{X}_2 = z\partial_z - f\partial_f,$$

soddisfano alla seguente algebra riducibile

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_1. \tag{36}$$

Considerimo ora la riduzione dell'equazione di Blasius usando, per esempio, l'invarianza rispetto alla traslazione, il primo generatore dell'algebra di Lie risolubile data da $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$.

Il prolungamento di $\hat{X}_1$ è uguale a se stesso, dato che le derivate del coefficiente infinitesimo sono tutte zero. Quindi possiamo scrivere gli invarianti di $\hat{X}_1$ come funzioni della forma $y_1 = v_0(z,f)$, $v_1(z,f,f_z)$, $v_2(z,f,f_z,f_{zz})$, $v_3(z,f,f_z,f_{zz},f_{zzz})$. Risolvendo le equazioni

$$\hat{X}_1^{(k)} v_k = 0, \quad k = 0,1,2,3,$$

i v_k sono ottenuti come costanti di integrazione delle equazioni caratteristiche

$$\frac{dz}{\xi(z,f)} = \frac{df}{\eta(z,f)} = \frac{df_z}{\eta^{(1)}(z,f,f_z)} = \ldots =$$

$$= \frac{df_{z^k}}{\eta^{(k)}(z,f,f_z,\dots,f_{z^k})}$$

Quindi i primi due invarianti indipendenti sono determinati risolvendo le equazioni (con abuso di notazione)

$$\frac{dx}{1} = -\frac{df}{0} = \frac{df_z}{0}, \quad \text{i.e.} \quad y_1 = f,\, v_1 = f_z.$$

Poiché y_1 e v_1 sono invarianti del primo prolungamento di $\hat{X}_1$, $\frac{dv_1}{dy_1} = \frac{\frac{dv_1}{dz}}{\frac{dy_1}{dz}} = \frac{f_{zz}}{f_z}$ sarà invariante del secondo prolungamento di $\hat{X}_1$ e per conseguenza di tutti i prolungamenti superiori. Un insieme di invarianti così costruito viene detto *invariante differenziale*.

Esprimendo f_z, f_{zz}, f_{zzz} in termini degli invarianti differenziali abbiamo, $f_z = v_1$; $f_{zz} = v_1\frac{dv_1}{dy_1}$; $f_{zzz} = v_1\Big[(\frac{dv_1}{dy_1})^2 + v_1\frac{d^2v_1}{dy_1^2}\Big]$ e quindi l'equazione di Blasius si riduce alla seguente ODE

$$v_1\Big[\Big(\frac{dv_1}{dy_1}\Big)^2 + v_1\frac{d^2v_1}{dy_1^2}\Big] = \frac{1}{2}y_1\frac{dv_1}{dy_1}. \tag{37}$$

Data una soluzione di (37), cioè una funzione

$$v_1 = V(y_1;c_1,c_2) = V(f;c_1,c_2),$$

con c_1 e c_2 costanti d'integrazione la soluzione dell'equazione di Blasius è data dall'equazione $f_z = V(f;c_1,c_2)$. Essa eredita la simmetria di traslazione, per cui puó essere integrata e otteniamo la soluzione implicita

$$z = c_3 + \int^f \frac{dg}{V(g;c_1,c_2)}.$$

Possiamo poi usare il generatore infinitesimo $\hat{X}_2$ e quindi costruire i nuovi invarianti $\hat{X}_2^{(1)}y_2(y_1,v_1) = 0$ e $\mathrm{pr}\hat{X}_2 v_2(y_1,v_1,\frac{dv_1}{dy_1}) = 0$. Otteniamo quindi:

$$y_2 = \frac{v_1}{(y_1)^2} \;\text{ e }\; v_2 = \frac{1}{y_1}\frac{dv_1}{dy_1}\;.$$

In termini delle nuove variabili di simmetria l'equazione di Blasius diviene l'ODE del primo ordine:

$$\frac{dv_2}{dy_2} = \frac{v_2}{2y_2}\left[\frac{1+2(v_2+y_2)}{2y_2-v_2}\right]. \tag{38}$$

L'equazione (38) non ha più simmetrie per cui non siamo più in grado di ridurla ad un'equazione algebrica e quindi integrarla completamente. Data una famiglia di soluzioni ad un parametro della equazione (38) siamo però in grado di costruire la soluzione generale passando alle rispettive variabili canoniche e integrando. La soluzione, però, come nel caso della (37) sarà scritta in forma implicita.

Consideriamo, come nuovo esempio, la seguente equazione, costruita in modo tale da avere un gruppo di simmetria di dimensione elevata,

$$\Big[1+\dot{u}^2\Big]\dddot{u} - 3\dot{u}\ddot{u}^2 = 0. \tag{39}$$

Questa ha un'algebra delle simmetrie di ordine 6 i cui generatori sono:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_1 &= \partial_z\;, \qquad (40)\\
\hat{X}_2 &= \partial_u\;,\\
\hat{X}_3 &= z\partial_z + u\partial_u\;,\\
\hat{X}_4 &= u\partial_z - z\partial_u\;,\\
\hat{X}_5 &= \frac{1}{2}\Big(z^2-u^2\Big)\partial_z + zu\partial_u\;,\\
\hat{X}_6 &= \frac{1}{2}\Big(z^2-u^2\Big)\partial_z - zu\partial_u\;.
\end{aligned}$$

Una sua sottoalgebra risolubile è data da $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ e $\hat{X}_3$ che soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$\Big[\hat{X}_1,\hat{X}_2\Big] = 0,\; \Big[\hat{X}_1,\hat{X}_3\Big] = \hat{X}_1,\; \Big[\hat{X}_2,\hat{X}_3\Big] = \hat{X}_2.$$

Riducendo rispetto a questa algebra risolubile l'equazione (39), utilizzando la stessa notazione come nel caso della equazione di Blasius, l'equazione (39) diviene l'equazione algebrica

$$v_3(y_3) = \frac{3y_3}{1+y_3^2} + \frac{1}{y_3} \tag{41}$$

da cui ricaviamo, per integrazione delle equazioni nelle rispettive coordinate canoniche,

$$u(z) = \pm\sqrt{a-(z-b)^2} + c,$$

con a, b e c costanti di integrazione.

Simmetrie di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE's)

Una PDE è un'equazione differenziale in cui le variabili indipendenti non appartengono più ad una retta ma ad un piano o ad uno spazio e sono coinvolte derivate in ogni possibile direzione. Nel seguito ci limitiamo a considerare il caso in cui abbiamo una sola variabile dipendente e due coordinate indipendenti, che variano in un piano, ad esempio $u(x,y)$ dove con u indichiamo la variabile dipendente e con x e y le due variabili indipendenti.
Una PDE di ordine k è quindi una relazione funzionale che coinvolge le variabili indipendenti, la variabile dipendente e le sua derivate in entrambe le direzioni indipendenti fino all'ordine k, per complessive $\frac{(k+2)(k+1)}{2}+2$ variabili

$$\mathcal{F}(x,y,u,u_x,u_y,\ldots,u_{kx},u_{(k-1)xy},u_{ky})=0. \quad (42)$$

La condizione che (42) abbia una simmetria di generatore puntuale

$$\hat{X}=\xi(x,y,u)\partial_x+\eta(x,y,u)\partial_y+\phi(x,y,u)\partial_u \quad (43)$$

è che la relazione funzionale tra le $\frac{(k+2)(k+1)}{2}+2$ variabili sia invariante, cioè

$$\mathrm{pr}\hat{X}\mathcal{F}\Big|_{\mathcal{F}=0}=0. \quad (44)$$

Quindi, che si stia trattando di ODE's o di PDE's, la condizione di invarianza è sempre la stessa, la condizione (17). Però la presenza di simmetrie ha delle conseguenze diverse. Nel caso di una ODE, come abbiamo visto, la presenza di un'algebra riducibile di dimensione ℓ ci permette di ridurre ℓ–volte l'equazione originaria e, se ℓ è uguale o maggiore all'ordine dell'equazione possiamo ridurre l'ODE a un'equazione algebrica ed integrarla. Nel caso di una PDE la presenza di una simmetria mi permette di ridurre il numero delle variabili indipendenti. Infatti consideriamo per esempio l'equazione (42) con simmetria (43). A partire da questa simmetria, (43), posso costruire al massimo due invarianti, di cui uno v giocherà il ruolo di variabile dipendente e l'altro z di variabile indipendente. Dato che (42) ammette (43) come sua simmetria, allora sicuramente la (42) si riduce ad un'equazione differenziale per v rispetto a z, ossia una ODE di ordine k. La soluzione della ODE dipende da k costanti di integrazioni e quindi l'esistenza della simmetria genera, una volta che la ODE sia integrabile, una classe di soluzioni della PDE (42) dipendente da k costanti. Questa non è minimamente correlata con la soluzione generale della PDE (42), che dipenderà da k funzioni arbitrarie di una variabile, determinate dalle condizioni iniziali o al contorno.
Consideriamo ora un esempio:

Esempio 3: Equazione invariante rispetto al Gruppo delle traslazioni in una variabile indipendente.

Consideriamo la classe di equazioni alle derivate parziali $u_{xx}=f(u_{xy},u_{yy},u_x,u_y,u,x)$ che non ha la dipendenza esplicita dalla variabile indipendente y. È immediato mostrare che questa PDE ammette il gruppo di simmetria di Lie ad un parametro $(\tilde{x}=x, \quad \tilde{y}=y+\epsilon, \quad \tilde{u}=u)$ di generatore infinitesimo $\hat{X}=\frac{\partial}{\partial y}$. Una soluzione $u=\Theta(x,y)$ definirà una soluzione invariante del gruppo se e solo se

$$\hat{X}(u-\Theta(x,y))|_{u=\Theta(x,y)}=-\frac{\partial\Theta}{\partial y}=0.$$

Sotto l'azione del gruppo una soluzione non invariante $u=\Theta(x,y)$ della PDE è trasformata in *una famiglia ad un parametro di soluzioni*

$$u=\Theta(x,y;\epsilon)=\Theta(x,y+\epsilon).$$

Quindi, come abbiamo già notato, l'esistenza di un gruppo di simmetria di Lie ad un parametro estende una soluzione a una famiglia di soluzioni dipendente da un parametro. Nel caso di una ODE di ordine N, quando la soluzione generale dipende da N costanti arbitrarie, questo è sufficiente a ridurre l'equazione a una ODE di ordine $N-1$. Nel caso di una PDE ??????, quando la soluzione generale dipende da una funzione arbitraria, il gruppo di simmetrie di Lie ad un parametro non è sufficiente ad integrare l'equazione, ma ci dà solo una classe di soluzioni esplicite.

Soluzioni Invarianti

Sia data un'equazione alle derivate parziali $\mathcal{F}(\mathbf{x},u,\underset{(1)}{u},\ldots,\underset{(k)}{u})=0$ di ordine k, dove col simbolo $\underset{(k)}{u}$ intendiamo l'insieme delle derivate di ordine k nelle varie variabili indipendenti $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ coinvolte nell'equazione. Essa ammette un gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro di generatore infinitesimo

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial u},$$

dove almeno uno dei coefficienti ξ_i è diverso da zero. Vale il seguente teorema:

Teorema 4. *$u = \Theta(\mathbf{x})$ è una soluzione invariante se e solo se il suo grafico è una superficie invariante di $\hat{X}$, i.e. $\hat{X}(u - \Theta(\mathbf{x})) = 0$ (metodo della forma invariante).*

Quindi per trovare una soluzione invariante risolviamo l'equazione caratteristica $\hat{X}(u - \Theta(\mathbf{x})) = 0$, i.e.

$$\frac{dx_1}{\xi_1(\mathbf{x}, u)} = \frac{dx_2}{\xi_2(\mathbf{x}, u)} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n(\mathbf{x}, u)} = \frac{du}{\eta_1(\mathbf{x}, u)}.$$

Se $y_1(\mathbf{x}, u), y_2(\mathbf{x}, u), \ldots, y_{n-1}(\mathbf{x}, u), v(\mathbf{x}, u)$ sono n costanti d'integrazione funzionalmente indipendenti, ottenute dall'integrazione delle equazioni caratteristiche tali che $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$, allora la superficie invariante è data implicitamente dalla forma invariante:

$$v(\mathbf{x}, u) = \Theta(y_1(\mathbf{x}, u), y_2(\mathbf{x}, u), \ldots, y_{n-1}(\mathbf{x}, u)),$$

dove la funzione Θ è una funzione arbitraria dei suoi argomenti. $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sono usualmente dette *variabili di simmetria*.

L'equazione differenziale ridotta è ottenuta sostituendo la forma invariante nella PDE. L'equazione differenziale ottenuta sarà una PDE per la funzione Θ nelle variabili $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, i.e. una PDE in $n-1$ variabili. *Quindi l'esistenza di una simmetria puntuale di Lie nel caso di PDEs di ordine n riduce le equazioni a PDEs di ordine $n-1$.*

Esempio 4: Simmetrie dell'equazione del calore.

Un'equazione importante in fisica è quella che descrive la propagazione del calore in un mezzo:

$$u_{x_1 x_1} = u_{x_2}. \tag{45}$$

Dal *Criterio di Invarianza Infinitesimale* (**??**) otteniamo l'equazione determinante

$$\eta^{(2)}_{x_1 x_1} - \eta^{(1)}_{x_2}|_{u_{x_1 x_1} = u_{x_2}} = 0,$$

che è un'equazione per le funzioni $\eta(x_1, x_2, u)$ e $\xi_i(x_1, x_2, u)$ ma che dipende polinomialmente anche dalle derivate di u rispetto a x_1 e x_2. Dai coefficienti delle derivate più alte ricaviamo immediatamente che $\xi_i(x, u) = \xi_i(x)$ e $\eta(x, u) = \eta_0(x) + u\,\eta_1(x)$. La restante equazione è

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \eta_0}{\partial x_2}\right] + \left[\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}\right] u \\
&+ \left[2\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right] u_{x_1} \\
&+ \left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right] u_{x_2} \\
&-2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{x_1 x_2} = 0
\end{aligned}$$

Annullando i coefficienti delle derivate di u rispetto a x_1 e x_2 otteniamo:

$$\begin{aligned}
\xi_1(x) &= \alpha_1 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_2, \qquad (46)\\
\xi_2(x) &= \alpha_2 + 2\alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_2^2, \\
\eta_1(x) &= -\alpha_4\left(\frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2\right) - \frac{1}{2}\alpha_5 x_1 + \alpha_6.
\end{aligned}$$

Inoltre la funzione $\eta_0(x)$ è una soluzione dell'equazione del calore (45). Notiamo che, poiché l'equazione del calore è un'equazione lineare, questa simmetria è una funzione dipendente dalle variabili indipendenti, cioè è una simmetria infinito dimensionale che rappresenta la legge di sovrapposizione lineare delle soluzioni.

I coefficienti delle 6 costanti di integrazione α_j in (46) mi danno sei differenti generatori infinitesimi che formano un'algebra di Lie di dimensione 6, le cui relazioni di commutazione sono:

$[.\,,.]$	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_3$	$\hat{X}_4$	$\hat{X}_5$	$\hat{X}_6$
$\hat{X}_1$	0	0	$\hat{X}_1$	$\hat{X}_5$	$-\frac{1}{2}\hat{X}_6$	0
$\hat{X}_2$	0	0	$2\hat{X}_2$	$\hat{X}_3 - \frac{1}{2}\hat{X}_6$	$\hat{X}_1$	0
$\hat{X}_3$	$-\hat{X}_1$	$-2\hat{X}_2$	0	$2\hat{X}_4$	$\hat{X}_5$	0
$\hat{X}_4$	$-\hat{X}_5$	$-\hat{X}_3 + \frac{1}{2}\hat{X}_6$	$-2\hat{X}_4$	0	0	0
$\hat{X}_5$	$\frac{1}{2}\hat{X}_6$	$-\hat{X}_1$	$-\hat{X}_5$	0	0	0
$\hat{X}_6$	0	0	0	0	0	0

Come esempio ricostruiamo ora, usando il primo Teorema di Lie, il gruppo di trasformazioni e le soluzioni invarianti associate al generatore infinitesimo $\hat{X}_4$. Per far ciò dobbiamo risolvere il seguente sistema di ODEs:

$$\frac{d\tilde{x}_1}{d\epsilon} = \tilde{x}_1\tilde{x}_2; \quad \frac{d\tilde{x}_2}{d\epsilon} = (\tilde{x}_2)^2; \tag{47}$$
$$\frac{d\tilde{u}}{d\epsilon} = -\left[\frac{1}{4}(\tilde{x}_1)^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}_2\right]\tilde{u}$$

con le seguenti condizioni iniziali $\tilde{u} = u$, $\tilde{x}_1 = x_1$ e $\tilde{x}_2 = x_2$ per $\epsilon = 0$. Integrando (47) otteniamo la seguente trasformazione di Lie ad un parametro:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= F_1(\mathbf{x}, u; \epsilon) = \frac{x_1}{1 - \epsilon x_2}; \qquad (48)\\ \tilde{x}_2 &= F_2(\mathbf{x}, u; \epsilon) = \frac{x_2}{1 - \epsilon x_2};\\ \tilde{u} &= G(\mathbf{x}, u; \epsilon)\\ &= \sqrt{1 - \epsilon x_2} \exp\left[-\frac{\epsilon x_1^2}{4(1 - \epsilon x_2)}\right] u. \end{aligned}$$

Per ottenere la soluzione invariante rispetto al gruppo di Lie ad un parametro (48), di generatore infinitesimo $\hat{X}_4$, usiamo il metodo della forma invariante definito dal Teorema 4. La condizione di invarianza è:

$$x_1 x_2 u_{x_1} + x_2^2 u_{x_2} = -(\frac{1}{4}(x_1)^2 + \frac{1}{2} x_2) u$$

e le corrispondenti equazioni caratteristiche sono:

$$\frac{dx_1}{x_1 x_2} = \frac{dx_2}{x_2^2} = \frac{du}{-(\frac{1}{4}(x_1)^2 + \frac{1}{2} x_2) u}$$

La loro soluzione ci dà i due invarianti di $\hat{X}_4$,

$$y = \frac{x_1}{x_2}, \quad v = \sqrt{x_2} e^{\frac{(x_1)^2}{4x_2}} u \qquad (49)$$

e quindi la superficie invariante è data da $v = \phi(y)$, dove ϕ è una funzione arbitraria del suo argomento. Da questa ricaviamo

$$u = \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{(x_1)^2}{4x_2}} \phi(y).$$

Introducendo la formula per u nella PDE otteniamo una ODE nelle variabili di simmetria, i.e.

$$\phi''(y) = 0. \qquad (50)$$

Risolvendo (50) otteniamo una soluzione particolare della equazione del calore, invariante rispetto ad $\hat{X}_4$, i.e.

$$u = \Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} e^{-\frac{(x_1)^2}{4x_2}} \left[C_1 + C_2 \frac{x_1}{x_2}\right],$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie d'integrazione.

Forma evolutiva dei generatori infinitesimi e trasformazioni non puntuali.

Dato un generatore infinitesimo di una simmetria puntuali di Lie

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}, u) \partial_{x_i} + \eta(\mathbf{x}, u) \partial_u, \qquad (51)$$

l'operatore infinitesimo

$$\hat{Z} = \left(\eta(\mathbf{x}, u) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i}\right) \partial_u \qquad (52)$$

è detto la sua forma evolutiva. Si dimostra facilmente che il gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro associato a (52) è uguale a quello ottenuto a partire da (51). Quindi i due generatori, anche se differenti in forma (dato che il coefficiente infinitesimo di (52) dipende linearmente dalle derivate prime di u) sono equivalenti dal punto di vista della trasformazione che generano.

La forma evolutiva del generatore infinitesimo di una trasformazione puntuale di Lie è il punto naturale per **estendere le trasformazioni**. Tale estensione è stata proposta ed attuata da Emma Noether [8,9].

Generalizziamo il coefficiente infinitesimo di una simmetria puntuale di Lie nella forma evolutiva **introducendo nel coefficiente infinitesimo le derivate di u fino all'ordine ℓ**:

$$\hat{X} = \eta(\mathbf{x}, u, u_1, \ldots, u_\ell) \frac{\partial}{\partial u}. \qquad (53)$$

Poiché in (53) il coefficiente di ∂_{x_i} è zero, le variabili indipendenti sono invarianti e nella trasformazione di simmetria si avrà solo una variazione della variabile dipendente dove, se u è una soluzione dell'equazione differenziale, tale sarà anche la trasformata $\tilde{u}$.

A partire dal primo teorema di Lie il gruppo di trasformazioni ad un parametro associato alla trasformazione infinitesima (53) dovrebbe essere ottenuto integrando l'equazione differenziale d'evoluzione alle derivate parziali

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \epsilon} = \eta(\mathbf{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_\ell).$$

Questa è una **PDE di ordine ℓ, possibilmente anche nonlineare,** che, anche se del primo ordine in ϵ, **difficilmente sarà risolubile a partire da un generico dato iniziale**.

Alternativamente potremmo trovare la trasformazione di gruppo utilizzando il secondo Teorema di Lie, cioè costruendo la serie di Lie (13). Esponenziando il generatore infinitesimo si ottiene il gruppo di trasformazioni di Lie ad un parametro

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}, \quad \tilde{u} = u + \epsilon\eta + O(\epsilon^2).$$

Per ottenere il coefficiente di ϵ^2, dobbiamo prolungare $\hat{X}$ per poter agire sulle derivate $u_1, u_2, \ldots, u_\ell$ della funzione u, che appaiono in η. Considerando termini più elevati dello sviluppo in ϵ dobbiamo prolungare ancora oltre. Così per preservare la condizione di contatto e scrivere la completa trasformazione dobbiamo prolungare fino all'ordine infinito, cioè considerare l'operatore

$$\hat{X}^{(\infty)} = \sum_{j=0}^{\infty} D^j \eta \frac{\partial}{\partial u_j}. \tag{54}$$

Applicando (54) su $u_0 = u$, otteniamo

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x},\ \tilde{u} = u + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon^j}{j!} (\hat{X}^{(\infty)})^{j-1} \eta.$$

Se abbiamo $\eta = \eta(\mathbf{x}, u, u_1)$ con $\frac{d^2\eta}{du_1^2} \neq 0$, allora diciamo che la trasformazione di Lie ad un parametro è una **trasformazione di contatto**. Le trasformazioni di contatto formano un gruppo esattamente come le trasformazioni di Lie puntuali. Trasformazioni di contatto esistono solo per equazioni scalari, per le quali il numero delle variabili dipendenti è $m = 1$ e quindi non per sistemi. Nel caso di sistemi, le trasformazioni di contatto si riducono a trasformazioni puntuali.

A. V. Bäcklund ha dimostrato [10,11] che gruppi di trasformazioni che contengono derivate di ordine superiore al primo sono infinito dimensionali. Le equazioni che ammettono simmetrie con derivate superiori al primo sono molto particolari e in generale vengono dette *esattamente integrabili* [12], dato che sono linearizzabili tramite trasformazioni nonlineari o hanno un'infinità di quantità conservate non banali.

Passiamo ora, quindi, a studiare queste trasformazioni.

Simmetrie generalizzate o di Lie–Bäcklund e sistemi integrabili

Come abbiamo visto, una simmetria generalizzata è definita da un generatore infinitesimo in forma evolutiva dipendente da derivate della variabile dipendente di ordine maggiore al primo.

Possiamo chiederci quando un'equazione differenziale

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, u, \underset{(1)}{u}, \ldots, \underset{(k)}{u}) = 0 \tag{55}$$

ammetta una simmetria generalizzata. Naturalmente la condizione di invarianza è la stessa, precisamente

$$\mathrm{pr}\hat{X}\mathcal{F}(\mathbf{x}, u, \underset{(1)}{u}, \ldots, \underset{(k)}{u})\Big|_{\{\mathcal{F}(\mathbf{x}, u, \underset{(1)}{u}, \ldots, \underset{(k)}{u})\}=0} = 0, \tag{56}$$

dove con un piccolo cambiamento notazionale, abbiamo indicato con la parentesi graffa attorno alla funzione $\mathcal{F}$ l'equazione con tutte le sue derivate fino all'ordine $k + \ell$, presenti nel prolungamento di (53). Una volta scelte le variabili indipendenti in (53), l'equazione determinante (56) diventa un sistema sovradeterminato di equazioni nelle variabili indipendenti la cui soluzione fornisce la simmetria generalizzata.

Esempio 5: Simmetrie fino al terzo ordine per l'equazione di Burgers.

L'equazione di Burgers [13], il cui nome si deve al fisico olandese J. M. Burgers (1895-1981), è un'equazione differenziale alle derivate parziali fondamentale per la meccanica dei fluidi, e utile anche in numerose aree della matematica applicata, quali la modellazione della gasdinamica e del flusso del traffico. È data da

$$\begin{aligned} &u_{2x} - uu_x - u_t = 0 \\ &u = u(x,t),\ u_{2x} = u_{xx}. \end{aligned} \tag{57}$$

Cerchiamo una simmetria generalizzata di generatore infinitesimo

$$\hat{X} = \eta(x, t, u, u_x, u_{2x}, u_{3x})\partial_u. \tag{58}$$

L'equazione determinante diviene

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}\hat{X}(u_{2x} - uu_x - u_t) = \\ &D_x^2\eta - uD_x\eta - u_x\eta - D_t\eta = 0, \end{aligned} \tag{59}$$

sotto le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
&u_{2x} - uu_x - u_t = 0,\\
&u_{3x} - uu_{2x} - u_x^2 - u_{xt} = 0,\\
&u_{4x} - uu_{3x} - 3u_xu_{2x} - u_{2xt} = 0\\
&u_{5x} - uu_{4x} - 4u_xu_{3x} - 3u_{2x}^2 - u_{3xt} = 0.
\end{aligned}$$

Dopo aver eliminato i termini con le derivate di u rispetto a t, xt, $2xt$ e $3xt$ dall'equazione determinante (59), otteniamo per $\eta(x, t, u, u_x, u_{2x}, u_{3x})$ un'equazione differenziale polinomiale in u_{4x} e derivate inferiori di u. Annullando i coefficienti dei termini indipendenti, si ottiene un sistema sovradeterminato di equazioni per η che lo determinano

$$\begin{aligned}
\eta = &\alpha(t)u_{3x}\\
&+\Big[-\frac{3}{2}\alpha u + \frac{1}{2}\dot{\alpha}x + \beta(t)\Big]u_{2x}\\
&+\Big[\frac{3}{4}\alpha u^2 - (\beta + \frac{1}{2}\dot{\alpha}x)u +\\
&\frac{1}{8}\ddot{\alpha}x^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}x + \gamma(t)\Big]u_x\\
&-\frac{3}{2}\alpha u_x^2 - \frac{1}{4}\dot{\alpha}u^2 + (\frac{1}{4}\ddot{\alpha}x + \dot{\beta})u + \frac{3}{4}\ddot{\alpha}\\
&-\frac{1}{8}\dddot{\alpha}x^2 - \frac{1}{2}\ddot{\beta}x - \dot{\gamma},
\end{aligned} \tag{60}$$

dove con un punto indichiamo la derivata rispetto a t, mentre le funzioni $\alpha(t)$, $\beta(t)$ e $\gamma(t)$ sono date da

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0,\\
\beta(t) &= q_2t^2 + q_1t + q_0,\\
\gamma(t) &= 3p_3t^2 + r_1t + r_0,
\end{aligned} \tag{61}$$

con p_1, p_2, p_3, q_0, q_1, q_2, r_0 ed r_1 costanti.

I generatori infinitesimi corrispondenti a r_0, r_1, q_0, q_1 e q_2 diversi da zero corrispondono, dopo la sostituzione di $u_{2x} = u_t + uu_x$, alle 5 simmetrie puntuali della equazione di Burgers scritte in forma evolutiva. Delle altre tre simmetrie, simmetrie generalizzate, corrispondenti a p_0, p_1 e p_2, scriviamo per semplicità solo la prima,

$$\hat{X}_7 = \big[4u_{3x} - 6uu_{2x} - 6u_x^2 + 3u^2u_x\big]\partial_u. \tag{62}$$

Anche in corrispondenza delle simmetrie generalizzate possiamo trovare le soluzioni invarianti $u = \theta(x, t)$, tali che siano annullate dal generatore infinitesimo della simmetria generalizzata. Dato che il generatore della simmetria generalizzata è scritto in forma evolutiva, la condizione di invarianza della soluzione è data semplicemente da $\eta = 0$, che, in generale, è un'equazione nonlineare. Nel caso di $\hat{X}_7$ l'equazione è

$$4u_{3x} - 6uu_{2x} - 6u_x^2 + 3u^2u_x = 0. \tag{63}$$

L'equazione (63) può essere integrata una volta e quindi, moltiplicando l'equazione ottenuta per u_x può essere integrata una seconda volta. L'equazione differenziale del secondo ordine nonlineare con due costanti d'integrazione che si è ottenuto è un'equazione differenziale ellittica, la cui soluzione si può esprimere in termini della funzione $\mathcal{P}(x)$ di Weierstrass [14].

Operatori di ricorrenza

Non tutte le equazioni ammettono simmetrie generalizzate e la ricerca di simmetrie generalizzate a partire dalla condizione di invarianza è complicata dal fatto che non sappiamo a priori da quali derivate di u dipenda η. Però sappiamo che in generale se un'equazione ammette una simmetria generalizzata usualmente ne ammette una sequenza, i cui successivi elementi dipendono da derivate sempre più alte di u. Questa successione è caratterizzata da un operatore di ricorrenza, che trasforma una simmetria nella successiva. La condizione di esistenza di un operatore di ricorrenza delle simmetrie può essere verificata per ogni equazione che ammetta una successione di simmetrie generalizzate.

Operatori di ricorrenza per equazioni lineari

Iniziamo ad analizzare il problema della costruzione di operatori di ricorrenza per equazioni differenziali lineari nella variabile dipendente u, cioè equazioni esprimibili come

$$\mathcal{L}u = 0 \tag{64}$$

con $\mathcal{L}$ un operatore differenziale lineare. Se (64) ammette una simmetria generalizzata non banale (53) di ordine ℓ (cioè diversa dalle simmetrie delle equazioni lineari: dilatazione in u e formula di sovrapposizione lineare), allora

$$\mathcal{L}\eta = 0 \text{ quando } \mathcal{L}u = 0, \tag{65}$$

per la definizione di simmetria evolutiva. Se esiste un operatore differenziale $\hat{R}$ indipendente da u tale che $\eta = \hat{R}u$ allora anche $\eta = \hat{R}^s u$ è una soluzione dell'equazione (64) e una sua simmetria. $\hat{R}$ viene detto *operatore di ricorrenza* corrispondente ad una simmetria generalizzata non banale.

Esempio 6 Consideriamo l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo per un oscillatore armonico:

$$\mathcal{L}u = \Big[-\frac{1}{2}D_{2x} + \frac{1}{2}x^2 - iD_t\Big]u = 0. \qquad (66)$$

Le sue simmetrie puntuali sono

$$\begin{aligned}\hat{X}_1 &= e^{it}[xu + u_x]\partial_u,\\ \hat{X}_2 &= e^{-it}[xu - u_x]\partial_u,\\ \hat{X}_3 &= u\partial_u.\end{aligned}$$

A partire da queste, possiamo introdurre gli operatori di ricorrenza

$$\begin{aligned}\hat{R}_1 &= e^{it}[x + D_x], \qquad (67)\\ \hat{R}_2 &= e^{-it}[x - D_x],\\ \hat{R}_3 &= 1.\end{aligned}$$

Ogni combinazione di $\hat{R}_1$ ed $\hat{R}_2$ applicata ad u genera una simmetria. Per esempio il prodotto di $\hat{R}_1$ ed $\hat{R}_2$ produce il generatore di simmetria generalizzata

$$\hat{R}_1\hat{R}_2 u\partial_u = [u + x^2u - u_{2x}]\partial_u,$$

un generatore di simmetria non puntuale, dato che contiene il termine u_{2x}.

Operatori di ricorrenza per equazioni nonlineari

Passiamo ora a considerare il caso di equazioni nonlineari.

Teorema 5. *Data un'equazione differenziale alle derivate parziali nonlineare*

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, u, \underset{(1)}{u}, \ldots, \underset{(k)}{u}) = 0, \qquad (68)$$

che ammette una simmetria generalizzata non banale

$$\hat{X}_1 = \eta_1\partial_u, \qquad (69)$$

essa ammette in generale infinite simmetrie generalizzate non banali

$$\hat{X}_i = \eta_i\partial_u,\ i = 2, 3, \ldots \qquad (70)$$

dove $\eta_{i+1} = \hat{R}(u)\eta_i$ in termini di un operatore differenziale di ricorrenza $\hat{R}(u)$.

A partire dalla condizione di invarianza per l'esistenza di una simmetria per l'equazione (68), tale operatore di ricorrenza è realizzato come un operatore di ricorrenza per l'equazione linearizzata di (68), cioè

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u]v = \Big[\frac{\partial\mathcal{F}(u)}{\partial u} + \frac{\partial\mathcal{F}(u)}{\partial u_{x_i}}D_{x_i} + \ldots \qquad (71)\\ + \frac{\partial\mathcal{F}(u)}{\partial u_{x_1x_2\cdots x_k}}D_{x_1}D_{x_2}\cdots D_{x_k}\Big]v.\end{aligned}$$

Per ogni dato u soluzione di (68), (71) è una PDE per v. Ovviamente il coefficiente infinitesimo η di una simmetria generalizzata o puntuale di Lie di (68) è una altra soluzione. Se esiste un operatore differenziale $\hat{R}[u]$ dipendente da u e dalle sue derivate tale che $\hat{X} = \Big[\hat{R}[u]v\Big]\partial_v$ sia il generatore infinitesimo di una simmetria di (71), allora questo è un operatore di ricorrenza per le simmetrie di (68). $\hat{X}_s = \Big[(\hat{R}[u])^s\eta\Big]\partial_u,\ s = 1, 2, \cdots$ è una sequenza numerabile di simmetrie generalizzate. L'operatore $\hat{R}[u]$ è definito da:

$$\mathcal{L}[u]\hat{R}[u]v = 0, \qquad (72)$$

quando (71) e (68) sono soddisfatte.

Per esemplificare la costruzione di un operatore di ricorrenza, consideriamo l'equazione di Burgers scritta in termini della variabile

$$w_x = u, \qquad (73)$$

cioè quella che viene detta l'equazione di Burgers potenziale:

$$w_{2x} - \frac{1}{2}w_x^2 - w_t = 0 \qquad (74)$$

La sua equazione linearizzata è

$$\mathcal{L}[w]v = v_{2x} - w_xv_x - v_t = 0. \qquad (75)$$

Assumiamo che l'operatore di ricorrenza sia della forma

$$\hat{R}[w] = a[x, t, w] + b[x, t, w]D_x. \qquad (76)$$

Introducendo (75), (76) in (72) otteniamo un sistema sovradeterminato di equazioni per le funzioni a e b la cui soluzione è:

$$\begin{aligned} a[x,t,w] &= -\frac{1}{2}\alpha(t)w_x + \frac{1}{2}\dot{\alpha}x + \beta(t), \quad (77)\\ b[x,t,w] &= \alpha(t), \end{aligned}$$

con $\alpha(t) = c_0 + c_1 t$ e $\beta(t) = c_2$ con c_0, c_1 e c_2 costanti di integrazione.

Avendo 3 costanti di integrazione possiamo scrivere 3 operatori di ricorrenza indipendenti:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1[w] &= \frac{1}{2}w_x - D_x, \qquad (78)\\ \hat{R}_2[w] &= \frac{1}{2}(tw_x - x) - tD_x,\\ \hat{R}_3[w] &= 1. \end{aligned}$$

Dato che l'equazione integrale di Burgers (74) è invariante per traslazione, w_x è un coefficiente infinitesimo di una simmetria puntuale di Lie. Usando gli operatori di ricorrenza $\hat{R}_1[w]$ ed $\hat{R}_2[w]$ e loro combinazioni e prodotti possiamo ottenere un'infinità numerabile di simmetrie. Tra queste

$$\hat{R}_1[w]w_x = -w_{2x} + \frac{1}{2}w_x^2 = -w_t,$$

simmetria di traslazione in t,

$$\begin{aligned} \hat{R}_3[w]w_x &= -tw_{2x} + \frac{1}{2}(tw_x - x)w_x\\ &= -(tw_t + \frac{1}{2}xw_x) \end{aligned}$$

simmetria di dilatazione in x e t e, per esempio, anche

$$\begin{aligned} \left[\hat{R}_1[w]\right]^3 w_x = & - w_{2x,t} + w_x w_{x,t}\\ & - \frac{1}{4}[w_x^2 - 2w_{2x}]w_t, \end{aligned}$$

una simmetria generalizzata non banale.

Nel caso che una PDE ammetta operatori di ricorrenza e quindi un'infinità di simmetrie, diciamo che l'equazione è *integrabile*.

Invece dell'equazione di Burgers integrale (74) per la variabile w possiamo considerare l'equazione di Burgers (57) per la variabile u. Le due variabili sono legate dall'equazione (73) che coinvolge un operatore di derivazione D_x. Possiamo quindi trasformare gli operatori di ricorrenza dell'equazione di Burgers potenziale in operatori di ricorrenza per l'equazione di Burgers. Otteniamo in tal modo operatori che dipendono da D_x^{-1}, dove abbiamo usato la relazione formale $D_x^{-1}D_x = 1$. Per esempio in corrispondenza di $\hat{R}_2[w]$ otteniamo

$$\hat{\mathcal{R}}_2[u] = -D_x + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u_x D_x^{-1}.$$

Gli operatori di ricorrenza integro–differenziali appaiono nel caso di molte PDEs nonlineari integrabili [12] .

[1] J. Stewart: *Calculus: Concepts and Contexts.* Brooks/Cole, Pacific Grove CA (2001).

[2] G. W. Bluman and S. Kumei: *Symmetries and Differential Equations.* Springer & Verlag, New York (1996).

[3] B. J. Cantwell: *Introduction to symmetry analysis.* Cambridge University Press, Cambridge (2002).

[4] P. E. Hydon: *Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide.* Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[5] P. J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer & Verlag, New York (1993).

[6] H. Stephani: *Differential Equations, their Solution using Symmetries.* Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[7] C. Pozrikidis: *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics.* Oxford University Press, Oxford (1998).

[8] Y. Kosmann-chwarzbach: *The Noether Theorems. Invariance and conservation laws in the twentieth century.* Springer & Verlag, New York (2011).

[9] D. E. Neuenschwander: *Emmy Noether wonderful theorem.* The John Hopkins University Press, Baltimore (2011).

[10] R. L. Anderson and N. H. Ibragimov: *Lie–Bäcklund Transformations in Applications.* SIAM, Philadelphia (1987).

[11] N. H. Ibragimov: *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics.* „ D. Reidel Academic Publishing (Dordrecht).1984

[12] B. G. Konopelchenko: *Nonlinear Integrable Equations. Recursion Operators, Group-Theoretical and Hamiltonian Structures of Soliton Equations.* Springer & Verlag, New York (1987).

[13] G. B. Whitham: *Linear and nonlinear waves.* Wiley-Interscience, New York (1974).

[14] E. T. Whittaker, G. N. Watson: *A course of modern analysis.* Cambridge University Press, Cambridge (1952).

Decio Levi: Professore in pensione dall'Universitá Roma Tre, Ricercatore associato alla Sezione INFN di Roma Tre e Membro associato del CRM Université de Montréal, PQ, Canada
e-mail: levi@roma3.infn.it