Trascendenti di Painlevé e integrabilità

Davide Guzzetti *SISSA, Trieste, Italia*

In questo scritto verrà analizzato come sia possibile definire nuove funzioni speciali attraverso la soluzione di equazioni differenziali e sviluppare metodi per conoscerne le proprietà di interesse, quando le equazioni stesse godono della così detta proprietà di Painlevé. In particolare, introdurremo le sei equazioni di Painlevé. Ciò permette di stabilire una nozione di integrabilità che si differenzia da quella nota in meccanica classica (riduzione delle equazioni del moto a delle integrazioni), e che è molto importante per diversi modelli della fisica matematica contemporanea.

Introduzione

In fisica matematica classica e meccanica quantistica, le leggi oggetto di studio sono spesso espresse nella forma di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, cioè equazioni che coinvolgono le derivate prime e seconde di una funzione incognita. Queste equazioni sono state ben studiate nei secoli passati, e probabilmente ogni studente di fisica, ingegneria e matematica, che abbia affrontato problemi di meccanica, fenomeni ondulatori o di diffusione, elettromagnetismo e meccanica quantistica, ha incontrato le equazioni di Bessel, di Legendre, di Airy, di Weber, di Riemann-Gauss (equazione ipergeometrica), e così via. Nella seconda parte del secolo scorso e in quello presente, la fisica matematica ha conosciuto un forte sviluppo, specialmente motivato da problemi di meccanica statistica e teoria dei campi, in cui le leggi oggetto di studio risultano formulate in termini di equazioni non lineari. Queste ultime sono molto più difficili da studiare, ma sorprendentemente presentano delle proprietà che le rendono "risolubili", cioè "integrabili", in un modo analogo, anche se più complesso, al caso lineare. In questo contesto, un ruolo centrale è assunto dalle equazioni non lineari del secondo ordine note, sin dall'inizio del XX secolo , come *equazioni di Painlevé*.

Le equazioni differenziali lineari sono state fondamentali per le applicazioni, in quanto è stato possibile studiare e capire tutte le proprietà delle soluzioni. Più precisamente, le soluzioni, in generale, *non* sono funzioni quali i polinomi, le funzioni razionali (rapporto di polinomi), le funzioni algebriche, le funzioni elementari come l'esponenziale e^z e le funzioni trigonometriche, o le loro inverse, come il logaritmo. Sono funzioni più complesse, dette trascendenti. Tuttavia, è possibile conoscerne tutte le proprietà che ci servono: sappiamo come si comportano localmente, vicino a ogni valore della variabile indipendente; sappiamo come si comportano globalmente, cioè per tutti i valori della variabile indipendente; conosciamo le eventuali singolarità, e così via. In questo senso, le equazioni differenziali lineari sono *integrabili*: conosciamo tutte le proprietà delle loro soluzioni. Scopo di questa presentazione è mostrare che anche le equazioni di Painlevé, benché non lineari e più complesse da studiare, sono integrabili nello stesso senso: possiamo conoscere le proprietà locali e globali delle soluzioni. Di conseguenza, potremo dire *integrabili* tutti quei modelli, sistemi o problemi la cui soluzione è ottenuta in termini di equazioni di Painlevé. In verità, non esiste un unico tipo di integrabilità, e quindi un'unica definizione di "sistema integrabile"; quella specificata dalle equazioni di Painlevé è un tipo. Ve ne sono altri, come l'integrabilità dei sistemi dinamici classici. Torneremo su ciò alla fine di questo scritto.

Un po' di storia

Consideriamo un'equazione differenziale lineare

$$y^{(n)} + c_1(z)y^{(n-1)} + c_2(z)y^{(n-2)} + \cdots \\ \cdots + c_{n-1}(z)y' + c_n(z)y = 0,$$

con coefficienti $c_1(z)$, ..., $c_n(z)$ nella variabile indipendente z appartenente al campo complesso $\mathbb{C}$. $y = y(z)$ è la funzione l'incognita. Usiamo la notazione

$$y' := \frac{dy}{dz}, \quad y'' := \frac{d^2y}{dz^2}, \quad y^{(k)} := \frac{d^ky}{dz^k}.$$

Le soluzioni $y(z)$ hanno un ruolo centrale nella fisica matematica classica, specialmente nel caso $n = 2$. Le soluzioni delle equazioni più semplici sono *funzioni elementari*, come l'esponenziale $y(z) = e^{\lambda z}$, che risolve equazioni con c_1, ..., c_n costanti. Le soluzioni delle equazioni del secondo ordine ($n = 2$), più complesse, menzionate nell'introduzione, furono chiamate *funzioni speciali* o *trascendenti*, e tra esse troviamo la funzione ipergeometrica, le funzioni di Legendre, quelle di Bessel, di Whittaker, di Mathieu, la funzione parabolica del cilindro, e così via (per la verità, nella classe delle funzioni speciali, ce ne sono anche di quelle definite da integrali e serie: per esempio, la funzione Gamma $\Gamma(z)$ e la zeta di Riemann $\zeta(z)$). Dunque, le equazioni differenziali lineari permettono di *definire* delle funzioni, che sono le soluzioni:

Eq. diff. lineari secondo ordine $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ funzioni speciali/trascendenti.

Che cosa accade invece se usiamo equazioni non lineari? Possiamo definire funzioni usando equazioni non lineari? Fu questa la domanda che i matematici si posero alla fine del XIX secolo. Per capirne il senso, occorre dire qualcosa di più sulle soluzioni di equazioni lineari.

Se i coefficienti $c_1(z)$, ..., $c_n(z)$ sono funzioni analitiche della variabile complessa z (cioè regolari differenziabili infinite volte), allora anche le soluzioni $y(z)$ sono analitiche su $\mathbb{C}$ (questo è un teorema). Per esempio $y' - y = 0$ ha soluzione generale $y = ce^z$, con c costante, che è analitica su tutto il piano complesso. Consideriamo invece il caso in cui i coefficienti sono analitici sul piano complesso a meno di un numero finito di singolarità isolate, cioè a meno di punti

$$z = a_1, a_2, ..., a_N.$$

In tali punti può accadere che il limite per $z \to a_j$ di qualche coefficiente è infinito, per esempio

$$c_1(z) = \frac{1}{z - a_j},$$

e $z = a_j$ si chiama *polo*; oppure il limite non esiste, per esempio

$$c_3(z) = e^{\frac{1}{z-a_j}},$$

e $z = a_j$ si chiama *singolarità essenziale*. Allora, ogni $z = a_j$ risulta essere una singolarità anche per la soluzione generale (intendiamo per *generale* una soluzione dipendente da costanti di integrazione in numero uguale all'ordine dell'equazione). Cioè, $z = a_j$ è un polo o una singolarità essenziale della soluzione generale, oppure un *punto di diramazione*. Diciamo che $z = a_j$ è un punto di diramazione se, percorrendo un cammino costituito da una piccola circonferenza con centro in $z = a_j$, così che il valore di $y(z)$ varia lungo il cammino, quando si torna al punto di partenza si ottiene un valore diverso dall'iniziale. Per esempio, la soluzione generale di $y' - \frac{1}{2(z-a)}y = 0$ è

$$y(z) = c\sqrt{z - a},$$

ove c è una costante di integrazione. Se percorriamo una circonferenza intorno a $z = a$ come nella Figura 1 tornando al punto di partenza, la soluzione cambia segno $y(z) \mapsto -y(z)$. Essa assume quindi i due valori $y(z)$ e $-y(z)$ lungo il cammino. Quindi, $z = a$ è un punto di diramazione.

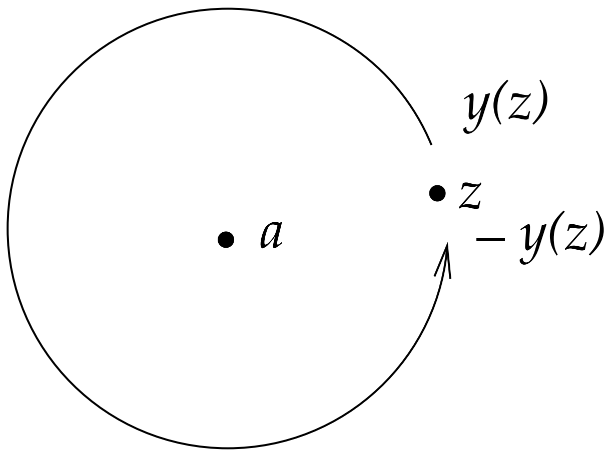

Figura 1: *$y(z) = c\sqrt{z-a}$ cambia segno se, partendo da z, si ritorna in z lungo un cammino che racchiude a. Ciò corrisponde ai due possibili segni della radice quadrata di $z - a$.*

Le equazioni lineari hanno la proprietà importante che la soluzione generale non può avere altre singolarità all'infuori di quelle dei coefficienti $c_1(z)$, ..., $c_n(z)$. Si noti che le soluzioni non sono funzioni ben definite su $\mathbb{C}$ meno i punti $z = a_1, a_2, ..., a_N$, perché possono assumere più valori, a causa delle diramazioni. Sono però funzioni ben definite su uno spazio più grande. Tale spazio di chiama *ricoprimento universale* di $\mathbb{C}$ privato dei punti singolari $a_1, a_2, ..., a_N$. Per esempio $\sqrt{z-a}$ definisce la funzione $(z-a)^{1/2}$ sul ricoprimento universale di $\mathbb{C} - \{a\}$. Siccome i punti singolari di $c_1(z)$, ..., $c_n(z)$ sono *fissi*, cioè sono determinati una volta per tutte dall'equazione, lo spazio di ricoprimento è a sua volta ben definito una volta per tutte. Questa è una proprietà di *integrabilità* delle equazioni lineari, in quanto stabilisce l'esistenza di una soluzione generale su uno spazio di ricoprimento ben definito, la quale soluzione si può adattare a tutti i valori possibili delle costanti di integrazione.

Che cosa accade invece se usiamo equazioni non lineari? La proprietà sopra descritta non vale più. Per esempio, prendiamo l'equazione non lineare $yy' = 1/2$. La soluzione generale è $y(z) = \sqrt{z-a}$, dove a è la costante di integrazione. Il punto di diramazione $z = a$, che non appare nei coefficienti dell'equazione, dipende dalla soluzione, cioè dalla costante di integrazione a. Un altro esempio è $y'' + (y')^2 = 0$, che ha soluzione generale

$$y(z) = \log_e(z-a) + c.$$

Qui, a e c sono le costanti di integrazione. La soluzione, partendo da un punto z dove vale $y(z)$ e percorrendo il cammino circolare intorno ad a per k volte, fino a tornare in z, assume il valore finale $y(z) + 2\pi ik$ (qui, $i = \sqrt{-1}$). La funzione $\log_e(z-a)$ è ben definita (come funzione, appunto, che assegna a un valore di z un valore di $\log_e(z-a)$) se z è pensato come un punto del ricoprimento universale di $\mathbb{C} - \{a\}$. Si noti bene, però, che questo spazio di ricoprimento dipende da a, cioè dalla costante di integrazione; non è fissato dall'equazione una volta per tutte le soluzioni.

In conclusione, non possiamo in generale definire funzioni speciali usando equazioni non lineari, perché non c'è uno spazio di ricoprimento unico e fisso su cui la soluzione generale è definita. In altre parole, le soluzioni possono avere dei punti di diramazione "mobili", che cambiano variando le costanti di integrazione. La cosa è ancor più sconsolante perché queste singolarità mobili, non apparendo nell'equazione, non sono prevedibili con semplicità.

Possiamo però cercare equazioni non lineari che mantengano la proprietà di quelle lineari, nel senso che eventuali punti di diramazione della soluzione generale siano determinati esclusivamente dall'equazione. Che tali equazioni esistano, è chiaro dal seguente esempio:

$$y' + \frac{1}{z}y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(z) = \frac{1}{\log_e(z/a)}, \quad a \neq 0.$$

La soluzione generale $y(z)$ ha un polo in $z = a$ (i.e. $\lim_{z\to a} y(z) = \infty$), che è dipende dalla costante di integrazione a. Il punto di diramazione $z = 0$ dipende invece solo dall'equazione.

Alla fine del XIX secolo, i matematici cercarono di classificare le equazioni non lineari tali che gli eventuali punti di diramazione della soluzione generale dipendano solo dall'equazione, e non dalle costanti di integrazione; come nell'esempio poco sopra. Oggi, questa è detta *proprietà di Painlevé*. Si tratta di una proprietà di "integrabilità", come già discusso sopra.

Per quanto riguarda le equazioni del primo ordine, il problema è risolto dal teorema di L. Fuchs, Poincaré e Painlevé, stabilendo che le uniche equazioni che soddisfano la proprietà di Painlevé sono quella di Riccati

$$y' = c_1(z)y^2 + c_2(z)y + c_3(z),$$

ove $c_1(z)$, $c_2(z)$ e $c_3(z)$ sono funzioni meromorfe di z, cioè analitiche su $\mathbb{C}$ meno poli isolati $a_1, ..., a_N$; e l'equazione

$$(y')^2 = 4y^3 - c_2 y - c_3,$$

con c_2, c_3 costanti. Quest'ultima ha soluzione

$$y(z) = \wp(z - a; c_2, c_3),$$

con a costante di integrazione. Essa definisce la funzione speciale di Weierstrass $\wp(z; c_2, c_3)$, che è il prototipo di funzione bi-periodica (detta *ellittica*) sul piano complesso (i periodi dipendono da c_2 e c_3). Essa è una funzione speciale, nuova rispetto a quelle che si ottengono da equazioni lineari. L'equazione di Riccati, invece, si trasforma in un'equazione lineare per una funzione $u(z)$, con il cambio di variabile $y = -c_1(z)^{-1}u^{-1}u'$, e quindi non introduce nuove funzioni speciali rispetto al quelle lineari. Sono state classificate anche equazioni in cui appare la potenza $(u')^m$, ma le soluzioni non definiscono nuove funzioni speciali. Si veda [16].

Per quanto riguarda le equazioni del secondo ordine, limitatamente al caso

$$y'' = R(z, y, y'),$$

con R funzione razionale di y e y' (rapporto di polinomi) e meromorfa di z, la classificazione fu completata da Painlevé [23] [24] [25] e dal suo studente Gambier [11] tra il 1900 e il 1910. A meno di trasformazioni di Möbius $y \mapsto (\varphi_1(z)y + \varphi_2(z))/(\varphi_3(z)y + \varphi_4(z))$, si ottengono poco più di 50 equazioni, delle forma

$$y'' = L(z, y)(y')^2 + M(z, y)y' + N(z, y),$$

dove L, M, N sono funzioni razionali. Tutte, tranne sei, si possono ridurre mediante operazioni classiche ad equazioni lineari, oppure ad equazioni integrabili per quadrature, ovvero alle sei equazioni rimanenti. Queste ultime si chiamano *equazioni di Painlevé*, indicate con PI, PII, PIII, PIV, PV e PVI. La forma esplicita di L, M, N è come segue.

Per PI:

$$L = M = 0, \quad N = 6y^2 + z.$$

Per PII:

$$L = M = 0, \quad N = 2y^3 + zy + \alpha.$$

Per PIII:

$$L = \frac{1}{y}, \quad M = -\frac{1}{z},$$
$$N = \frac{\alpha y^2 + \beta}{z} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}.$$

Per PIV:

$$L = \frac{1}{2y}, \quad M = 0,$$
$$N = \frac{3y^3}{2} + 4zy^2 + 2(z^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}.$$

Per PV:

$$L = \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}, \quad M = -\frac{1}{z},$$
$$N = \frac{(y-1)^2}{z^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{z} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}.$$

Per PVI:

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-z}\right),$$
$$M = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{y-z}\right),$$

$$N = \frac{y(y-1)(y-z)}{z^2(z-1)^2} \cdot$$
$$\cdot \left(\alpha + \beta\frac{z}{y^2} + \gamma\frac{z-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(y-z)^2}\right),$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}.$$

Per tutte le equazioni PI,...,PVI, le funzioni L, M, N hanno dei poli in almeno uno dei punti

$$z = 0, 1, \infty$$

(qui estendiamo il piano complesso al punto $z = \infty$; indichiamo il piano esteso con il simbolo $\overline{\mathbb{C}}$). Queste sono le singolarità fisse che, per la proprietà di Painlevé, costituiscono gli unici possibili punti di diramazione della soluzione generale. Sono dette *punti critici*. In particolare, le soluzioni di PI, PII, PIV non hanno punti di diramazione, ma solo singolarità essenziali in $z = \infty$. Le soluzioni di PIII e PV hanno punti di diramazione in $z = 0, \infty$, ma se si cambia variabile $z = e^{\xi}$, le diramazioni vengono rimosse. PVI ha punti di diramazione in $z = 0, 1, \infty$, che non si possono rimuovere. Se una soluzione ha altre singolarità dipendenti dalle costanti di integrazione, queste potranno essere solamente poli "mobili".

Tra le circa 50 equazioni classificate, solo per le sei di Painlevé non si seppe trovare una riduzione ad equazioni già note. Dunque, solo queste sono candidate a definire nuove funzioni speciali. Effettivamente, alla fine degli anni 80 del XX secolo, Umemura [27] ha dimostrato che la soluzione generale di queste equazioni non è una funzione classica. Per funzione classica si intende una ottenuta da funzioni razionali mediante l'iterazione finita di certe operazioni classiche (il prendere le radici di polinomi i cui coefficienti sono funzioni razionali, producendo le funzioni algebriche, l'integrazione e la differenziazione di funzioni razionali e algebriche, la soluzione di equazioni differenziali lineari con coefficienti razionali, l'inversione di integrali). La soluzione generale di un'equazione differenziale lineare è quindi una funzione classica. Le soluzioni di equazioni di Painlevé definiscono invece una nuova classe di funzioni speciali, dette *trascendenti di Painlevé*.

Importanza delle equazioni di Painlevé

Ci si rese conto dell'importanza delle equazioni di Painlevé in fisica matematica quando apparve un lavoro di McCoy, Tracy, Wu e Barouch su Physical Review B nel 1976 [21]. Gli autori mostrarono che una funzione di correlazione nel modello di Ising, in un certo regime critico, si poteva ottenere come soluzione di una equazione PIII.

Da allora, le equazioni di Painlevé sono diventate uno strumento centrale in diversi campi della fisica matematica e della matematica pura, con applicazioni nello studio di equazioni delle onde non lineari "integrabili", quali l'equazione KdV, nella teoria delle matrici aleatorie (random matrices), nello studio dei polinomi ortogonali, in teoria dei numeri (distribuzione degli zeri della funzione zeta di Riemann), in geometria differenziale ed algebrica (per esempio le varietà di Frobenius), in problemi di combinatoria, in teorie dei campi quantistiche e topologiche e in relatività generale. Per una collezione di lezioni che coprono diversi aspetti si veda [5]. Tutti questi esempi possono pensarsi come sistemi non lineari dei quali si può studiare la soluzione globale, cioè sistemi "integrabili". Questa proprietà di integrabilità è speso legata al fatto che le soluzioni sono ottenute riducendosi a equazioni di Painlevé, le quali sono esse stesse integrabili, nel senso precedentemente discusso, cioè godono delle proprietá di Painlevé; per cui ha senso studiare le proprità globali dei trascendenti su un ricoprimento universale. Questo studio è praticamente fattibile col metodo che andremo ad illustrare nel seguito.

Integrazione delle equazioni di Painlevé

Occorre ancora ricordare una importante proprietà delle soluzioni di equazioni differenziali lineari. Come già detto, se i coefficienti $c_1(z)$, ..., $c_n(z)$ sono funzioni meromorfe, cioè funzioni con dei poli isolati in punti a_1, a_2, ..., a_N e ∞ del piano complesso $\overline{\mathbb{C}}$ esteso all'infinito, allora la soluzione generale $y(z)$ sarà una funzione analitica sul ricoprimento universale di $\overline{\mathbb{C}} - \{a_1, ..., a_N, \infty\}$. Di essa sappiamo esplicitamente scrivere il comportamento locale vicino ad ogni singolarità $z = a_j$, per ogni $j = 1, 2, ..., N$, come funzione dipendente da n costanti di integrazione, che indicheremo con

$$\mathbf{I}_j = (I_{j,1}, ..., I_{j,n}),$$

ove ogni $I_{j,k}$ è una costante in $\mathbb{C}$. Indicheremo la funzione che dà il comportamento locale con $F_j(z; \mathbf{I}_j)$, cioè

$$y(z) = F_j(z; \mathbf{I}_j).$$

La $F_j(z; \mathbf{I}_j)$ si sa rappresentare come combinazione di serie, potenze complesse di z ed esponenziali di z. Questa rappresentazione vale, di solito, solo per z vicino ad a_j. Per esempio, per l'equazione ipergeometrica di Gauss

$$y'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{z-1}\right)y' + \\ + \left(\frac{\alpha\beta}{z-1} - \frac{\alpha\beta}{z}\right)y = 0, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C},$$

abbiamo, vicino al polo $z = 0$, la rappresentazione

$$y(z) = F(z; \mathbf{I}_0) := I_{0,1}\,\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma;z) + \\ + I_{0,2}\,z^{1-\gamma}\mathcal{F}(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z),$$

con le serie

$$\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma;z) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma)_n}z^n, \\ (\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).$$

Nell'esempio qui sopra, la rappresentazione locale vale per z vicino a 0, precisamente per $|z| < 1$. Se $|z| \geq 1$, le serie divergono.

Supposte note le rappresentazioni locali $F_1(z;\mathbf{I}_1)$, $F_2(z;\mathbf{I}_2)$, ..., $F_N(z;\mathbf{I}_N)$, per conoscere il comportamento globale della soluzione ci serve saper ottenere le costanti $\mathbf{I}_k$ in funzione delle $\mathbf{I}_j$, per ogni $1 \leq j \neq k \leq N$. Per le equazioni lineari, si dimostra che esiste una relazione lineare $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}_j C_{kj}$, dove C_{kj} è una matrice costante. Nel caso $n = 2$, si è stati in grado di calcolare esplicitamente C_{kj} (tutti questi valori sono tabulati nei manuali di funzioni speciali), grazie all'esistenza di rappresentazioni integrali $y(z) = \int_\gamma \varphi(z,t)dt$ lungo opportuni cammini γ, che possono valutarsi vicino a diversi punti singolari a_j e a_k. Per esempio, nel caso dell'equazione di Gauss ci sono diverse rappresentazioni integrali, una di queste essendo $\mathcal{F}(\alpha,\beta,\gamma;z) =$

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}dt.$$

Il problema di trovare la relazione tra le costanti di integrazione è noto come *problema di connessione*. Le C_{jk} sono dette matrici di connessione.

Come nel caso lineare, risolvere una equazione di Painlevé significherà innazitutto ottenere per una soluzione delle rappresentazioni locali esplicite, dette *comportamenti critici*, del tipo $y(z) = F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ vicino al punto critico $x = 0$, $y(z) = F_1(z, I_{1,1}, I_{1,2})$ vicino a $x = 1$ (se l'equazione di Painlevé in questione lo ammette), e $y(z) = F_\infty(z, I_{\infty,1}, I_{\infty,2})$ vicino a ∞. Queste rappresentazioni si possono ottenere con varii metodi asintotici, più o meno sofisticati. Per esempio, nel caso di PVI, si hanno espressioni del tipo (si veda [18])

$$F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2}) = I_{0,1}z^{I_{0,2}}\Big(1+o(1)\Big) \\ \text{per } z \to 0,$$

$$F_1(z, I_{1,1}, I_{1,2}) = 1 + I_{1,1}(1-z)^{I_{1,2}}\Big(1+o(1)\Big) \\ \text{per } z \to 1,$$

$$F_\infty(z, I_{\infty,1}, I_{\infty,2}) = I_{\infty,1}z^{I_{\infty,2}}\Big(1+o(1)\Big) \\ \text{per } z \to \infty.$$

Qui, $o(1)$ indica termini che tendono a zero. Come altro esempio, si mostra (vedasi [1], [15]) che PII, con $\alpha = 0$, ha una famiglia di soluzioni $y_k(z)$, $k \in \mathbb{C}$, tali che

$$y_k(z) = \frac{k}{2\sqrt{\pi}}z^{-1/4}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}\Big(1+o(1)\Big) \\ \text{per } z \to +\infty,$$

Le stesse si comportano come segue per $z \to -\infty$ e $|k| < 1$

$$y_k(z) = C|z|^{-1/4}\sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} - \frac{3}{4}C^2\log_e|z| + \phi\right) \\ + \text{termini che tendono a zero più di } z^{-1/4},$$

ove C e ϕ sono costanti, che devono dipendere da k. Inoltre

$$y_k(z) = \text{sign}(k)\sqrt{\frac{|z|}{2}}, \qquad \text{per } |k| = 1.$$

In figura 2 è rappresentato il caso $k = 1$. Se $|k| > 1$, si hanno poli sull'asse reale negativo (si veda la figura 3). Il comportamento per $z \to \infty$ in $\mathbb{C}$ è più complicato (si ricordi che $z = \infty$ è una singolarità essenziale), ed è stato studiato soprattutto da A. Kapaev (per una rassegna, si veda [7]).

Il secondo problema, il vero problema, sarà passare da proprietà locali a proprietà globali, cioè il problema di connessione. Dobbiamo

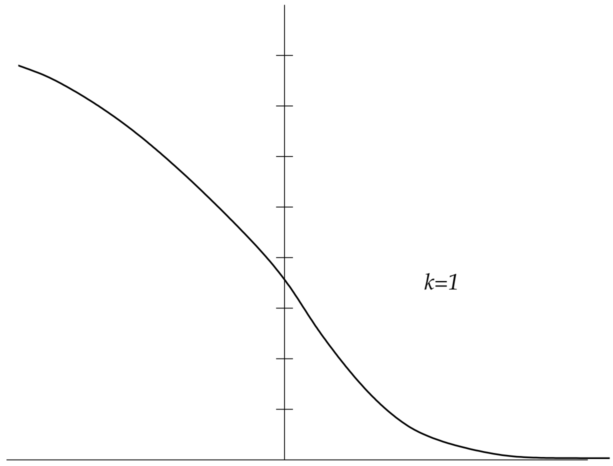

Figura 2: *La soluzione $y_{k=1}(z)$ di PII$_{\alpha=0}$, per z sull'asse reale.*

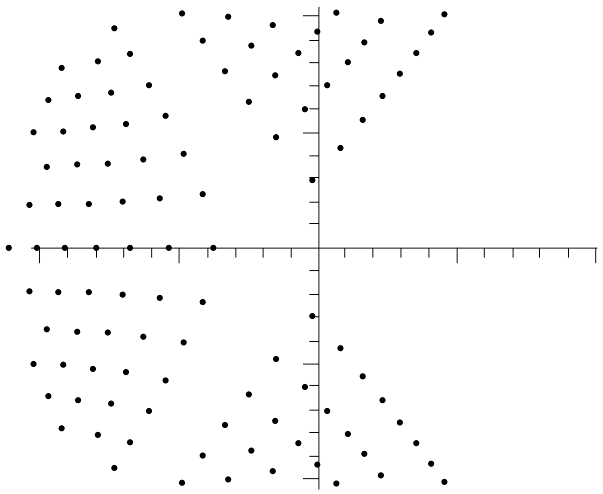

Figura 3: *I poli di $y_{k=1.01}(z)$ nel piano complesso $\mathbb{C}$ della variabile z. Ringrazio M. Bertola per avermi fornito questa figura, che appare in [4], dove è possibile trovare le figure relative ad altri valori di k.*

trovare le relazioni

$$\begin{cases} I_{0,1} = f_1(I_{1,1}, I_{1,2}) \\ I_{0,2} = f_2(I_{1,1}, I_{1,2}) \end{cases}, \quad \begin{cases} I_{0,1} = g_1(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}) \\ I_{0,2} = g_2(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}) \end{cases}$$

che connettano le costanti di integrazione, espresse esplicitamente mediante funzioni elementari o classiche $f_1(\cdots)$, $f_2(\cdots)$, $g_1(\cdots)$, $g_2(\cdots)$. Nel particolare esempio dato per le soluzioni $y_k(z)$ di PII$_{\alpha=0}$, vorremmo anche avere la relazione tra C, ϕ e k. A causa della non linearità delle equazioni di Painlevé, il problema di connessione è stato per lungo tempo ritenuto irrisolubile. Mancano infatti rappresentazioni integrali dei trascendenti di Painlevé.

Così come le equazioni di Painlevé sono nate all'inizio del '900 ma hanno trovato applicazioni diversi decenni dopo, anche le premesse alla risoluzione del problema di connessione risalgono al XIX secolo e all'inizio del '900. Possiamo farle risalire a Riemann, che si pose il seguente problema. Indichiamo ora con λ (e non z) la variabile in $\overline{\mathbb{C}} - \{z_1, ..., z_N, \infty\}$, dove $z_1, ..., z_N$ sono punti assegnati. Riemann voleva costruire una funzione matriciale di dimensione $n \times n$, che qui denotiamo con $\Psi = \Psi(\lambda)$, con la proprietà che se si percorre un cammino che, come in figura 4, gira intorno a z_j, partendo da un certo λ e tornando in λ stesso, allora

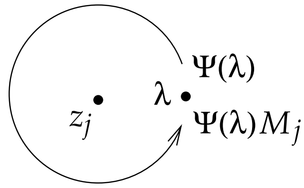

Figura 4: *La trasformazione di monodromia $\Psi(\lambda) \mapsto \Psi(\lambda)M_j$ lungo un cammino intorno a z_j; il cammino che circonda altri punti z_k per $k \neq j$.*

$$\Psi(\lambda) \text{ si trasforma in } \Psi(\lambda)M_j$$

i.e. Ψ moltiplicata a sinistra da una matrice M_j, ove M_j è una matrice costante, detta *matrice di monodromia*. Ne consegue che se M_j non è la matrice identità, allora la Ψ ha un punto di diramazione in $\lambda = z_j$. Per inciso, si noti che in questo caso $\Psi(\lambda)$ è ben definita come funzione sul ricoprimento universale di $\overline{\mathbb{C}} - \{z_1, ..., z_N, \infty\}$. Ci possono essere diversi tipi di punti di diramazione: il tipo algebrico o logaritmico, cioè $(\lambda - z_j)^L$, ove L è una matrice $n \times n$, così che il valore assoluto $|(\lambda - z_j)^L|$ cresce al più come una potenza di $(z - z_j)$ per $z \to z_j$; ed il tipo non incluso nel precedente, per esempio $(\lambda - z_j)^L \exp\{(z - z_j)^{-1}\}$, oppure $\exp\{(z - z_j)^{-1/2}\}$. Riemann si interessò al tipo algebrico o logaritmico. In questo caso, se la matrice Ψ ha qualche altra proprietà di invertibilità vicina a ogni z_j, si mostra che essa soddisfa un sistema differenziale lineare di dimensione $n \times n$, detto *fuchsiano*

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = \left(\frac{A_1}{\lambda - z_1} + \frac{A_2}{\lambda - z_2} + \cdots + \frac{A_N}{\lambda - z_N} \right) \Psi. \tag{1}$$

Riemann quindi si pose il problema, date M_1, ..., M_N, di stabilire se esiste $\Psi(\lambda)$ con tali matrici di monodromia e, inoltre, tale da soddisfare un sistema differenziale lineare fuchsiano come sopra. Ammesso che tale Ψ esista (in genere esiste, tranne alcune eccezioni: si veda [2]), essa dipenderà anche da $\mathbf{z} := (z_1, ..., z_N)$. Bisogna allora capire come dipendono

$$\Psi = \Psi(\lambda, \mathbf{z})$$

e le matrici

$$A_1 = A_1(\mathbf{z}), \; ...., \; A_N = A_N(\mathbf{z})$$

dai parametri $\mathbf{z}$, essendo le matrici di monodromia M_1, ..., M_N costanti indipendenti da $\mathbf{z}$. Il problema fu ripreso da R. Fuchs, R. Garnier e L. Schlesinger all'inizio del '900. Schlesinger mostrò in [26] che la condizione che le M_1, ..., M_N restino fisse, mentre $\mathbf{z}$ varia, equivale al fatto che le matrici $A_j(\mathbf{z})$ soddisfino un sistema di equazioni differenziali non lineare (le *equazioni di Schlesinger*)

$$\frac{\partial A_j}{\partial z_k} = \frac{A_j A_k - A_k A_j}{z_j - z_k} \quad j \neq k,$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial z_k} = -\sum_{j \neq k} \frac{A_k A_j - A_j A_k}{z_k - z_j}.$$

Fuchs [8] [9] e Garnier [12] mostrarono anche che le condizioni che opportune equazioni scalari $\frac{d\psi}{d\lambda^2} = p(\lambda, z)\psi$ dipendenti da un parametro z abbiano monodromia indipendente dal parametro z conducevano ad equazioni di Painlevé.

Riprendendo questi approcci, nel 1981, M. Jimbo, T. Miwa e K. Ueno sistematicamente svilupparono in [19] la teoria delle *deformazioni isomonodrome*, come segue. Consideriamo un sistema differenziale lineare $n \times n$

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z_1, ..., z_m)\Psi,$$

in cui la matrice A, di dimensione $n \times n$, dipende da λ in modo razionale, con dei poli in punti $\lambda = z_1, ..., z_N, \infty$. Inoltre, dipende analiticamente da altri parametri, inclusi i poli stessi, parametri che indicheremo con $z_1, ..., z_m$, $m \geq N$. Una soluzione matriciale $\Psi(\lambda, \mathbf{z})$ (con determinante non nullo) è ben definita se si considera λ sul ricoprimento universale di $\overline{\mathbb{C}} - \{z_1, ..., z_N, \infty\}$. Anche in questo caso generale, lungo un cammino che gira intorno ad z_j in $\overline{\mathbb{C}} - \{z_1, ..., z_N, \infty\}$, la Ψ si trasforma in ΨM_j, ove M_j è una matrice di monodromia. Jimbo, Miwa e Ueno hanno ottenuto la condizione necessaria e sufficiente affinché la deformazione sia *isomonodroma*, cioè affinché le matrici di monodormia siano indipendenti dai *parametri di deformazione* $z_1, ..., z_m$ (volendo essere rigorosi, dovremmo studiare in dettaglio la struttura di Ψ, così da determinare un insieme di dati matriciali che servono per costruire M_1, ..., M_N, detti dati di monodromia; sono essi che devono rimanere indipendenti da $z_1, ..., z_m$). Tale condizione è che $A(\lambda, z_1, ..., z_m)$ soddisfi un sistema non lineare di equazioni differenziali

$$\frac{\partial A}{\partial z_j} - \frac{\partial \Omega_j}{\partial \lambda} = \Omega_j A - A\Omega_j, \qquad j = 1, 2, ..., m. \tag{2}$$

dove le $\Omega_j(\lambda, z_1, ..., z_m)$ sono matrici $n \times n$ che dipendono razionalmente dagli elementi di matrice di A, sicché il sistema non-lineare è un sistema su A. Per esempio, se A è come in (1), allora $\Omega_j = -A_j/(z - z_j)$ e il sistema diventa le equazioni di Schlesinger.[1]

Jimbo e Miwa in [20] hanno fornito una lista di sei sistemi 2×2 ($n = 2$), per una opportuna scelta di $A(\lambda, z)$ (qui abbiamo solo $z_1 = z$), tali che le (2) si riducono alle sei equazioni di Painlevé. Per esempio, si ottiene PI se

$$A(\lambda, z) = A_2\lambda^2 + A_1(z)\lambda + A_0(z),$$

con opportuna scelta di A_0, A_1, A_2. Se

$$A(\lambda, z) = \frac{A_1(z)}{\lambda} + \frac{A_2(z)}{\lambda - z} + \frac{A_3(z)}{\lambda - 1}$$

si ottiene PVI. Si mostra che gli elementi della matrice $A(\lambda, z)$ sono funzioni di z sia esplicitamente, sia attraverso una dipendenza razionale da y, dy/dz e $\int y$, ove y è soluzione dell'equazione di Painlevé in questione. Quindi, possiamo scrivere

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z, y(z))\Psi. \tag{3}$$

[1] Si noti che (2) è la condizione di compatibilità, e quindi integrabilità (questa volta, secondo Frobenius), della così detta *coppia di Lax*

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z_1, ..., z_m)\Psi,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Psi}{\partial z_j}\, dz_j = \sum_{j=1}^{m} \Omega_j(\lambda, z_1, ..., z_m)\Psi\, dz_j.$$

La teoria delle deformazioni isomonodrome ha permesso di risolvere il problema di connessione per le equazioni di Painlevé, con il *metodo delle deformazioni isomonodrome*. Consideriamo $y(z) = F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ vicino al punto critico $z = 0$. Il termine dominante di $F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ per $z \to 0$ è una funzione elementare o classica di $(z, I_{0,1}, I_{0,2})$. Sostituiamo $F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2})$ in (3) e prendiamo il limite per $z \to 0$ del sistema

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, z, F_0(z, I_{0,1}, I_{0,2}))\Psi, \qquad (4)$$

(a volte, servono opportuni riscalamenti di Ψ e λ, ma omettiamo questo dettaglio tecnico). Si ottiene un sistema limite più semplice, indipendente da z

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda, I_{0,1}, I_{0,2})\Psi.$$

Di questo sistema più semplice si riescono a calcolare le matrici di monodormia, che collettivamente indichiamo con $\mathbf{M}$. Infatti, si mostra che il sistema più semplice è risolto classicamente, cioè si riduce a una equazione differenziale del secondo ordine risolubile con funzioni speciali classiche. In questo modo, possiamo calcolare la formula esplicita

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(I_{0,1}, I_{0,2}),$$

che esprime la monodromia come funzione elementare o trascendente classica di $(I_{0,1}, I_{0,2})$. Invertiamo poi le formule (si dimostra che ciò è possibile), ottenendo

$$I_{0,1} = I_{0,1}(\mathbf{M}), \quad I_{0,2} = I_{0,2}(\mathbf{M}).$$

Ora, il punto cruciale è che il sistema (3) è isomonodromo! Dunque, la monodromia non dipende da z, così che quando $z \to 0$ le matrici di monodromia non cambiano. Ne consegue che il risultato $\mathbf{M}(I_{0,1}, I_{0,2})$ ottenuto è la monodromia di (4) e (3), associata a $y(z)$.

La *medesima* soluzione y ha una rappresentazione vicino ad un altro punto critico, per esempio $z = \infty$, della forma $y(z) = F_\infty(z, I_{\infty,1}, I_{\infty,2})$. Ripetiamo la stessa procedura a otteniamo

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}).$$

Per la proprietà di isomonodromia, quella ottenuta è la monodromia del sistema (3) associata alla medesima $y(z)$. Dunque, il problema di connessione è risolto, avendo ottenuto

$$I_{0,1} = I_{0,1}\Big(\mathbf{M}(I_{\infty,1}, I_{\infty,2})\Big),$$

$$I_{0,2} = I_{0,2}\Big(\mathbf{M}(I_{\infty,1}, I_{\infty,2})\Big).$$

Queste sono proprio le formule di connessione cercate

$$\begin{cases} I_{0,1} = g_1(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}), \\ I_{0,2} = g_2(I_{\infty,1}, I_{\infty,2}). \end{cases}$$

La costruzione seguita fa uso di sistemi differenziali lineari risolti da funzioni classiche, la cui monodromia dipende in modo classico dai coefficienti del sistema. Segue che g_1 e g_2 sono funzioni classiche. Abbiamo così un risultato notevole: benché un trascendente di Painlevé sia una funzione nuova e altamente trascendente, le formule di connessione sono esplicitamente scritte usando funzioni classiche. Per esempio, nel caso delle soluzioni $y_k(z)$ per $\mathrm{PII}_{\alpha=0}$, si trova $C^2 = -\pi^{-1}\log_e(1-k^2)$, e una espressione un po' più complicata $\phi = \phi(k)$.

Le vere costanti di integrazioni delle equazioni di Painlevé sono i dati di monodromia del sistema lineare (3) associato. Si tratta di vere e proprie "costanti del moto", quando le equazioni di Painlevé vengano scritte come sistemi dinamici hamiltoniani. A questo proposito, ricordiamo che le equazioni di Painlevé possono sempre essere scritte come sistemi hamiltoniani dipendenti dal tempo. Per esempio, PI è un sistema hamiltoniano per

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2} - 2q^3 - tq,$$

così che

$$\dot{q} = p, \ \dot{p} = 6q^2 + t \quad \Longrightarrow \quad \ddot{q} = 6q^2 + t$$

L'ultima equazione è proprio PI, con $z = t$ e $y(z) = q(t)$. Questo fatto ci permette un'ultima considerazione sui tipi di integrabilità. Un sistema hamiltoniano classico con variabili canoniche $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ è integrabile secondo Liouville se ammette n costanti del moto indipendenti ed in involuzione. Le hamiltoniane $H(q, p, t)$ dipendenti da t delle equazioni di Painlevé non sono integrabili secondo Liouville. Tuttavia, le equazioni del moto sono integrabili nel senso di

Painlevé discusso in questo articolo.[2]

Il metodo di deformazione isomonodorma è stato notevolmente affinato. Oggi, con il metodo di *non-linear steepest descent* (si veda il lavoro originale di Deift e Zhou [6], dopo del quale vi è stata una proliferazioni di lavori e applicazioni; per una rassegna delle applicazioni alle equazioni di Painlevé si veda [7]) è possibile partire dal dato $\mathbf{M}$ e costruire il sistema (3) nel regime asintotico $z \to c \in \{0, 1, \infty\}$. In questo modo, si ottiene costruttivamente il comportamento critico $y(z) = F_c(z, I_{c,1}, I_{c,2})$ senza bisogno di ricavarlo preliminarmente o ipotizzarlo con un *ansatz*. Contemporaneamente, si ottengono le formule esplicite $I_{c,j} = I_{c,j}(\mathbf{M})$, $j = 1, 2$.

Per concludere questa discussione, va ricordato che le funzioni di Painlevé non sono forse l'oggetto più naturale da studiare nell'approccio isomonodromo. Infatti, possono essere generate derivando rispetto a z il logaritmo di una funzione introdotta in [19], chiamata funzione $\tau(z)$. Malgrange e Miwa hanno dimostrato che quest'ultima ha prolungamento analitico sul ricoprimento universale di $\overline{\mathbb{C}}$ meno i punti critici fissi delle equazioni di Painlevé. Il prolungamento ha zeri isolati "mobili", cioè che dipendono dalle costanti di integrazione. Essi corrispondono ai poli mobili dei trascendenti di Painlevé. Dunque, la formulazione delle equazioni di Painlevé, quali condizioni di isomonodromia, permette di dimostrare in chiave moderna, usando la funzione τ, la proprietà di Painlevé.

Conclusione

Le equazioni di Painlevé, introdotte all'inizio del '900 nella classificazione delle equazioni non lineari, in grado di definire funzioni speciali su un ricoprimento universale, sono diventate il cardine della fisica matematica contemporanea, alla base della teoria dei sistemi integrabili. La loro integrabilità, cioè la possibilità di ottenere il comportamento globale delle soluzioni su uno spazio di ricoprimento universale fissato dall'equazione, è garantita dalla proprietà di Painlevé, e si realizza concretamente mediante il metodo di deformazione isomonodroma. Questo metodo sostituisce il metodo delle rappresentazioni integrali per le equazioni lineari.

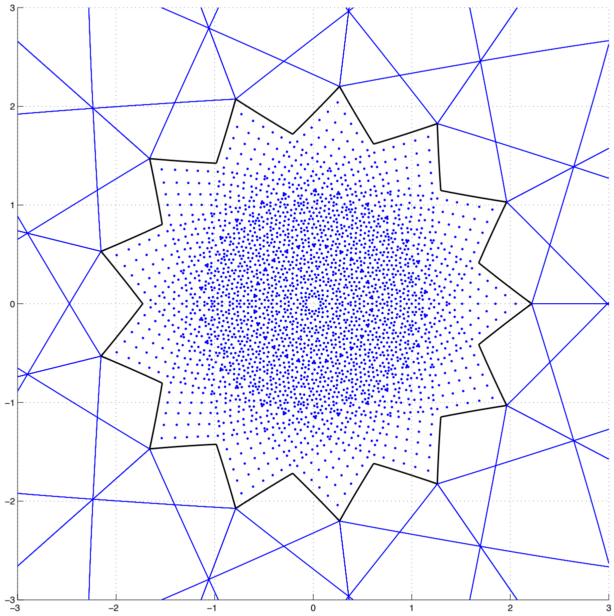

Figura 5: *Poli (all'interno della regione delimitata da linee nere) di una delle soluzioni razionali di una gerarchia di equazioni integrabili, che generalizza PII. Ringrazio M. Bertola per la figura, che si può trovare in [3]. Le linee blu non hanno solo funzioni estetiche, avendo un significato tecnico per l'analisi delle soluzioni, per il quale si rimanda a [3].*

Alla fine del XX secolo e nei primi anni del XXI, i problemi di connessione sono stati sostanzialmente risolti. Grossi contributi sono stati dati da Andrei Kapaev (per una dettagliata discussione dei riferimenti bibliografici e di tutti i metodi sopra esposti, particolarmente per PI, PII, ..., PV, si veda il testo [7]; per dettagli relativi a PVI, si veda [14]). Recentemente, è stata ottenuta una rappresentazione della funzione τ come serie i cui coefficienti sono tutti calcolabili in forma chiusa, essendo essi i blocchi conformi in teoria conforme dei campi (tra i varii articoli, si può vedere [10]).

Va anche ricordato che le equazioni di Painlevé ammettono generalizzazioni di ordine superiore, organizzate in gerarchie di equazioni integrabili. Anch'esse appaiono nelle applicazioni ricordate in questo scritto. Un linea di ricerca attuale consiste nello studio di un'altra proprietà globale delle equazioni di Painlevé e delle gerarchie,

[2] È curioso osservare che sistemi integrabili secondo Liouville possono non esserlo secondo Painlevé. Per esempio, data l'hamiltoniana integrabile secondo Liouville $H(q, p) = p^2/2 + q^k$, con $k \geq 4$ intero, le soluzioni $q(t)$ delle equazioni del moto, che si ottengono integrando $\dot{q}^2/2 + q^k = E$ costante, non hanno la proprietà di Painlevé (t va vista come variabile complessa).

cioè la distribuzione dei poli (figura 3) e degli zeri mobili di soluzioni (questo studio fu iniziato agli inizi del secolo XX, da P. Boutroux) e delle loro simmetrie (si veda la figura 5). Vanno poi ricordati gli studi per il calcolo numerico di varie proprietà dei trascendenti, in piena esplorazione.

I trascendenti di Painlevé possono ora considerarsi funzioni speciali "note". La comunità internazionale ha lanciato il così detto *Painlevé Project*, per raccogliere e tabulare tutte le proprietà dei trascendenti, in tavole e manuali, così come è stato fatto per le funzioni trascendenti classiche. Si tratta di un progetto ambizioso. Il progetto è stata iniziato in un capitolo di NIST Digital Library of Mathematical Functions (http://dlmf.nist.gov). Per l'equazione PII e PIII, varii risultati sono raccolti in [7], e per PVI nelle tavole di [13]. Il lavoro più grande è da farsi.

Concludiamo, a riassumere la filosofia seguita nella costruzione di nuove funzioni speciali, citando Charles Briot et Jean-Claude Bouquet (1859): *Les cas où l'on peut intégrer une équation différentielle sont extrêmement rares, et doivent être regardés comme des exceptions; mais on peut considérer une équation différentielle comme définissant une fonction, et se proposer d'étudier les propriétés de cette fonction sur l'équation différentielle elle-même.*

[1] M. J. Ablowitz, H. Segur: "Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation", *Stud. Appl. Math.* **57** (1977) 13-44.

[2] D.V.Anosov - A.A.Bolibruch: *The Riemann-Hilbert Problem. Aspects of Mathematics E22.* Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig (1994).

[3] F. Balogh, M. Bertola, T. Bothner: "Hankel Determinant Approach to Generalized Vorob'ev-Yablonski Polynomials and Their Roots", *Constr. Approx.* **44** (2016) 417-453.

[4] M. Bertola: "On the location of poles for the Ablowitz? Segur family of solutions to the second Painlevé equation", *Nonlinearity* **25** (2012) 1179–1185.

[5] R. Conte (editor): *The Painlevé property. One century later.* CRM series in Mathematical Physics, Springer, Berlino (1999).

[6] P. A. Deift, X Zhou: "A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation", *Ann. of Math.* **137** (1993) 295-368..

[7] A. Fokas, A. Its, A. Kapaev, V. Novokshenov: *Painlevé Transcendents: The Riemann-Hilbert Approach.* AMS, New York (2006).

[8] R. Fuchs: "Sur quelques équationes différentielles dont l'intégrale générale est uniforme.", *C. R. Acad. Sc. Paris* **145** (1905) 555-558.

[9] R. Fuchs: "Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singuläre Stellen.", *Math. Ann.* **63** (1907) 301-321.

[10] Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, O: "How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and IIIs", *J. Phys. A* **46** (2013) 335203, 29 pp.

[11] B. Gambier: "Sur les équationes différentielles du seconde ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes.", *Tesi (1909); Acta Math.* **33** (1910) 1-55.

[12] R. Garnier: "Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes", *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **29** (1912) 1-126.

[13] D. Guzzetti: "Tabulation of Painlevé 6 Transcendents", *Nonlinearity* **25** (2012) 3235-3276.

[14] D. Guzzetti: "A review of the sixth Painlevé equation.", *Constr. Approx.* **41** (2015) 495-527.

[15] S. P. Hastings, J. B. McLeod: "A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation", *Arch. Ration. Mech. Anal.* **73** (1980) 31-51.

[16] E. L. Ince: *Ordinary differential equations.* Dover, New York (1956).

[17] K.Iwasaki, H.Kimura, S.Shimomura, M.Yoshida: *From Gauss to Painlevé.* Aspects of Mathematics, 16, Springer (Berlino). 1991

[18] M.Jimbo: "Monodromy Problem and the Boundary Condition for Some Painlevé Trascendents", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **18** (1982) 1137-1161.

[19] M.Jimbo, T.Miwa, K.Ueno: "Monodromy Preserving Deformations of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients (I)", *Physica* **D2** (1981) 306.

[20] M.Jimbo, T.Miwa: "Monodromy Preserving Deformations of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients (II)", *Physica* **D2** (1981) 407-448.

[21] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch: "Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: Exact theory in the scaling region", *Phys. Rev. B* **13** (1976) 316-374.

[22] NIST Digital Library of Mathematical Functions http://dlmf.nist.gov

[23] P. Painlevé: "Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme.", *Bull. Soc. Math. France* **28** (1900) 201-261.

[24] P. Painlevé: "Sur les équations différentielles du seconde ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme.", *Acta Math.* **25** (1902) 1-85.

[25] P. Painlevé: "Sur les équationes différentielles du seconde ordre à points critiques fixes.", *C. R. Acad. Sc. Paris* **143** (1906) 1111-1117.

[26] L. Schesinger: "Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten", *J. Reine Angew. Math.* **141** (1912) 96 -145.

[27] H.Umemura: " On the Irreducibility of the First Differential Equation of Painlevé", *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honour of Masayoshi Nagata.Tokyo: Kinokuniya* (1987) 771-789.

Davide Guzzetti: È Professore Associato presso la SISSA, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati di Trieste, nel gruppo di sistemi integrabili dell'Area di Matematica. Ha lavorato al RIMS (Kyoto University) e KIAS (Seoul) e poi in SISSA, occupandosi di analisi asintotica, equazioni di Painlevé, deformazioni isomonodrome e teoria analitica di varietà di Frobenius. Si è occupato anche di sistemi dinamici quantistici, in collaborazione con il "Center for Nonlinear and Complex Systems", Dipartimento di Fisica e Matematica, Università degli Studi dell'Insubria.