La lezione mancata

Sfere e gruppi topologici

Francesco Esposito *Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento*

Si è spesso interessati a dotare oggetti matematici di strutture sempre più ricche che consentano una maggiore comprensione dell'oggetto stesso. Ovviamente tale operazione non è sempre possibile. Un risultato degli anni Quaranta del secolo scorso mostra, ad esempio, come le uniche sfere ad ammettere una struttura di gruppo topologico siano S^0, S^1 e S^3. In questo articolo si discuterà tale proposizione dandone una parziale, ma elementare, dimostrazione.

Introduzione

Alcune definizioni e risultati preliminari utili in seguito:

Definizione 1. Sia G uno spazio topologico su cui è definita un'operazione $\cdot$ per cui $(G, \cdot)$ è un gruppo. G è detto un **gruppo topologico** se il prodotto

$$G \times G \to G, \quad (g, g') \mapsto g \cdot g'$$

e l'inversione

$$G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

sono applicazioni continue.

Quello che si richiede, pertanto, è che le strutture di gruppo e di spazio topologico si *"raccordino"* in modo coerente.

Proposizione 2. *Se $(G, \cdot)$ è un gruppo topologico, per ogni $a \in G$ la moltiplicazione a sinistra (risp. a destra) definita da a*

$$L_a : G \to G, \quad g \mapsto a \cdot g$$
$$(\ \textit{risp. } R_a : G \to G, \quad g \mapsto g \cdot a\ )$$

è un omeomorfismo. Inoltre, l'applicazione che ad ogni elemento di G associa l'inverso è un omeomorfismo.

Dimostrazione. Sia $a \in G$. Notiamo che L_a è continua poiché G è un gruppo topologico e che l'inversa è data da $L_{a^{-1}}$, anch'essa continua. Pertanto L_a è un omeomorfismo. Analogamente, si dimostra che R_a è un omeomorfismo. Inoltre, l'inversa

$$G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

per definizione di gruppo topologico, è continua e coincide con la propria inversa; pertanto si ha la tesi. □

Definizione 3. Uno spazio topologico X si dice **omogeneo** se per ogni $x, y \in X$ esiste un omeomorfismo $f : X \to X$ tale che

$$f(x) = y.$$

La proprietà di omogeneità, quindi, indica che ogni porzione dello spazio topologico è *"indistinguibile"* da un'altra dal punto di vista topologico.

I gruppi topologici sono spazi omogenei: infatti, se $(G, \cdot)$ è un gruppo topologico e $g, g' \in G$, allora

$$f = L_{g^{-1}} \circ R_{g'}$$

è un omeomorfismo (segue dalla proposizione precedente, considerando la composizione di omeomerfismi) tale che

$$f(g) = g^{-1} \cdot g \cdot g' = g'.$$

Non è tuttavia vero il viceversa: si può dimostrare, ad esempio, che la retta reale $\mathbb{R}$ munita della topologia di Sorgefrey (che ha come base di aperti gli intervalli semichiusi $[a, b[$) è uno spazio topologico omogeneo che non ammette struttura di gruppo topologico.

Un altro esempio di spazio topologico omogeneo ma che, come vedremo, non ammette struttura di gruppo è la sfera S^2.

Struttura di gruppo topologico sulle sfere S^0, S^1, S^3

Ricordiamo la definizione di sfera $n-$dimensionale:

$$S^n = \{(x_1, \cdots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1\}$$

Ogni sfera $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ammette una struttura di spazio topologico, quella di sottospazio indotta da $\mathbb{R}^{n+1}$. Come vedremo, non è invece sempre possibile munire S^n della struttura algebrica di gruppo. Discutiamo ora i seguenti casi.

- $n = 0$.

Dalla definizione di sfera, segue che

$$S^0 = \{+1, -1\} = \mathbb{Z}/2.$$

- $n = 1$.

Notiamo che, nel caso della circonferenza nel piano, è possibile l'identificazione $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$. In tal senso,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}.$$

Possiamo pertanto considerare su S^1 la seguente operazione

$$\cdot \ : \ S^1 \times S^1 \to S^1$$

così definito: per ogni $z_1, z_2 \in S^1$

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2.$$

Ossia consideriamo il prodotto di numeri complessi unitari, che risulta ancora essere un complesso unitario poiché

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1.$$

Vale banalmente la proprietà associativa dell'operazione $\cdot$ in quanto essa vale in $\mathbb{C}$. Inoltre se $z \in S^1$, allora l'inverso di z si dimostra essere

$$z^{-1} = \bar{z},$$

mentre l'elemento neutro è, chiaramente, 1; pertanto $(S^1, \cdot)$ è un gruppo (abeliano).

- $n = 3$.

Anche nel caso di $S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ è possibile un'utile identificazione dello spazio ambiente.

Consideriamo $\{1, i, j, k\}$ base canonica di $\mathbb{R}^4$ e definiamo un operazione bilineare $\cdot$ avente 1 come elemento neutro e tale che sulla base valga

$$\begin{aligned} ij &= k = -ji, \\ jk &= i = -kj, \\ ki &= j = -ik, \\ i^2 = j^2 &= k^2 = -1. \end{aligned}$$

Con la somma componente per componente e l'operazione di prodotto ora definita, $\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ risulta essere un corpo, noto come il corpo dei **quaternioni**.

Tale struttura fu introdotta nel 1843 da Sir William Hamilton, nel tentativo di estendere al caso tridimensionale la forte connessione che vi è, nel caso bidimensionale, tra numeri complessi e geometria nel piano (connessione di cui abbiamo fatto uso nella discussione del precedente caso $n = 1$).

Se $q \in \mathbb{H}$ allora esistono unici $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}$ tali che

$$q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k;$$

definiamo il **coniugato** $\bar{q}$ di q come il quaternione

$$\bar{q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene che se $p, q \in \mathbb{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}, \quad \overline{pq} = \bar{q}\bar{p}, \quad \bar{\bar{q}} = q, \quad \overline{\alpha} = \alpha.$$

Inoltre, si definisce **norma** di q il numero reale non negativo

$$N(q) = q\overline{q} = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2.$$

È possibile definire l'**inverso** di un quaternione q come il quaternione

$$q^{-1} = \frac{1}{N(q)}\overline{q}.$$

Possiamo ora discutere il caso della sfera $3-$dimensionale. Si ha che

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} : N(q) = 1\}.$$

Consideriamo su S^3 la restrizione del prodotto $\cdot$ definito su $\mathbb{H}$: questo è possibile poiché, se $p, q \in S^3$, allora

$$N(pq) = pq\overline{pq} = pq\bar{q}\bar{p} = p\overline{p} = 1.$$

Pertanto $pq \in S^3$.

Inoltre, se $q \in S^3$, si verifica subito che

$$N(q^{-1}) = \frac{\overline{q}}{N(q)}\overline{\frac{\overline{q}}{N(q)}} = \overline{q}q = N(q) = 1.$$

E pertanto anche l'inverso di ogni elemento di S^3 appartiene ad S^3. Quindi $(S^3, \cdot)$ risulta essere un gruppo. Si noti che, a differenza dei due casi precedenti, questo gruppo non è abeliano: infatti, $i, j, k \in S^3$ ma

$$ij = k \neq -k = ji.$$

- $n = 7$.

In completa analogia al caso precedente, anche su $\mathbb{R}^8$ può essere definita un'applicazione bilineare che dia allo spazio un'operazione interna. Se infatti $\{1, e_1, \cdots, e_7\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^8$, si può definire un'applicazione bilineare $\cdot$ avente 1 come unità e tale che

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

$\mathbb{O} = (\mathbb{R}^8, +, \cdot)$ ha una struttura di Algebra, detta **Algebra degli Ottonioni**. Le nozioni di coniugato, norma e inverso sono del tutto analoghe al caso dei quaternioni. Pertanto, anche nel caso di S^7, si può scrivere:

$$S^7 = \{o \in \mathbb{O} : N(o) = 1\}.$$

Tuttavia, l'applicazione bilineare sopra introdotta non definisce un prodotto associativo su S^7. Infatti, ad esempio,

$$(e_1e_2)e_3 = e_4e_3 = -e_1$$

mentre

$$e_1(e_2e_3) = e_1e_5 = e_6.$$

Questo, ovviamente, non dimostra che su S^7 non si possano definire strutture di gruppo. Tuttavia indica che, data un'algebra di dimensione n, costruendone un'altra di dimensione doppia $2n$ (secondo quella che è nota in generale come *costruzione di Cayley-Dickson*), si riesce a dotare di struttura di gruppo solo le sfere di cui abbiamo discusso.

Osservazione 4. Si noti che i prodotti definiti sulle sfere S^0, S^1, S^3 risultano essere continui. Infatti, nel caso $0-$dimensionale, la topologia considerata su $S^0 \times S^0$ è quella discreta ed il prodotto è sicuramente continuo. Nel caso $1-$dimensionale, si è considerata la restrizione su S^1 del prodotto tra numeri complessi, il quale risulta essere continuo. Infatti, considerando $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il prodotto tra i numeri complessi $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ è dato dal numero complesso $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$. Se indichiamo con

$$p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

il prodotto tra numeri complessi, e π_1, π_2 le proiezioni (continue) su prima e seconda componente nell'identificazione $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si ottiene che

$$p(z_1, z_2) = \big(\pi_1(z_1)\pi_1(z_2) - \pi_2(z_1)\pi_2(z_2), \\ \pi_1(z_1)\pi_2(z_2) + \pi_1(z_2)\pi_2(z_1)\big).$$

Così, poiché una funzione a valori nel prodotto di due spazi è continua se e solo se le sue componenti sono continue e poiché somme e prodotti di funzioni reali continue sono continue, si ottiene la tesi.

Rimane da vedere il caso $3-$dimensionale. Con una dimostrazione del tutto analoga a quella vista per i numeri complessi, considerando

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

e $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ proiezioni (continue) su ognuna delle componenti, si ottiene che il prodotto tra quaternioni è continuo e di conseguenza lo è anche il prodotto definito su S^3, restrizione del prodotto in $\mathbb{H}$.

Una dimostrazione parziale

La dimostrazione data da H. Samelson [3] nel 1940 del fatto che le uniche sfere ad ammettere struttura di gruppo topologico sono S^0, S^1 ed S^3, non è elementare ed utilizza la teoria dei gruppi di Lie. La definizione di gruppo di Lie è simile a quella di gruppo topologico e prevede l'utilizzo di una varietà differenziabile al posto di uno spazio topologico, richiedendo inoltre che la moltiplicazione e l'inversione siano applicazioni differenziabili (al posto della continuità). In particolare, ogni gruppo di Lie è un gruppo topologico.

La dimostrazione che si propone in questo lavoro, apparsa in [2], è certamente più semplice, seppur parziale. Infatti si dimostrerà la tesi unicamente per le sfere di dimensione pari S^{2n} con $n \geq 0$.

Premettiamo alcune definizioni e risultati preliminari.

Definizione 5. Sia G un gruppo ed X uno spazio topologico. Si dice che G agisce su X se esiste un omomorfismo

$$\varphi : G \to \mathrm{Hom}(X)$$

dove $\mathrm{Hom}(X)$ è il gruppo degli omeomorfismi di X. Tale omomorfismo è detto **azione del gruppo G su X** e per ogni elemento g del gruppo indichiamo $\varphi(g) = \varphi_g$.

Inoltre, se per ogni $g \in G \setminus \{e\}$ risulta che φ_g non ammette punti fissi, l'azione è detta **libera**.

Si noti che ogni gruppo topologico G agisce liberamente su se stesso. Infatti se consideriamo la seguente applicazione

$$\varphi : G \to \mathrm{Hom}(G), \quad g \mapsto L_g \ ,$$

risulta che φ è un omomorfismo ed inoltre, se $g \in G$, per ogni $x \in G$ si ha

$$\varphi_g(x) = x \iff gx = x \iff g = e$$

e pertanto l'azione risulta essere libera.

La dimostrazione che si propone si incentra su questa osservazione e fa uso di alcuni risultati della topologia algebrica: è noto che il gruppo di omologia $n-$dimensionale della sfera risulta essere isomorfo al gruppo degli interi relativi,

$$H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}.$$

Per ogni intero n, l'omologia consente di associare ad uno spazio topologico X un gruppo $H_n(X)$, detto *gruppo di omologia $n-$dimensionale*. Inoltre, se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua tra spazi topologici, per ogni intero n, risulta definito un omomorfismo di gruppi

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y).$$

Tali omomorfismi indotti soffisfano le seguenti proprietà

$$(Id_X)_* = Id_{H_n(X)} \quad \text{e} \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*.$$

Si ha inoltre che i gruppi di omologia sono invarianti topologici.

In maniera più informale, si potre dire che i gruppi di omologia "*contano i buchi dello spazio topologico in una data dimensione*": se consideriamo, ad esempio, S^2, allora $H_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$ (poiché la sfera è vuota all'interno). Questo ragionamento (che non rappresenta certamente una prova formale dell'asserzione fatta) è valido in generale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sia ora $f : S^n \to S^n$ un'applicazione continua. Per quanto detto, f induce un endomorfismo

$$f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n).$$

Poiché $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, si ha che $H_n(S^n)$ risulta essere ciclico e quindi, per ogni $\alpha \in H_n(S^n)$, esiste $d \in \mathbb{Z}$ tale che

$$f_*(\alpha) = d\alpha.$$

Tale intero d dipende unicamente da f ed è detto **grado** di f

$$\deg(f) = d.$$

L'applicazione che ad una funzione continua da S^n in sé associa il grado della funzione soddisfa le seguenti proprietà

1) $\deg(I_{S^n}) = 1$;

2) se $f, g : S^n \to S^n$ sono due applicazioni continue, allora

$$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g);$$

inoltre f e g sono omotope (ossia esiste un'applicazione continua $H : [0,1] \times S^n \to S^n$, t.c.

$$H(0,x) = f(x),\ H(1,x) = g(x)$$

per ogni $x \in S^n$) se e solo se

$$\deg(f) = \deg(g);$$

3) se f è la simmetria rispetto ad un iperpiano passante per il centro della sfera, allora

$$\deg(f) = -1;$$

4) l'applicazione

$$I^- : S^n \to S^n, \quad x \mapsto -x$$

(che ad ogni punto associa l'antipodale) ha grado

$$\deg(I^-) = (-1)^{n+1};$$

5) se $f : S^n \to S^n$ non ha punti fissi, allora

$$\deg(f) = (-1)^{n+1}.$$

Pertanto, se $f : S^n \to S^n$ è un'applicazione che non ha punti fissi, poiché

$$\deg(f) = (-1)^{n+1} = \deg(I^-),$$

essa risulta essere omotopa all'applicazione che associa ad ogni punto l'antipodale. Non vale tuttavia il viceversa, poiché se n è dispari

$$\deg(I^-) = 1 = \deg(I_{S^n})$$

mentre se n è pari

$$\deg(I^-) = -1 = \deg(f)$$

dove f è la simmetria rispetto ad un iperpiano passante per il centro della sfera; in ognuno dei due casi, le applicazioni hanno punti fissi (se n è dispari tutti i punti sono fissi, mentre se n è pari i punti dell'equatore individuato dall'iperpiano sono lasciati fissi).

Possiamo ora provare il seguente

Teorema 6. *$\mathbb{Z}/2$ è l'unico gruppo non banale, a meno di isomorfismi, ad agire liberamente su S^n, per n pari.*

Dimostrazione. Sia n pari e sia

$$\varphi : G \to \mathrm{Hom}(S^n)$$

una qualsiasi azione libera del gruppo G su S^n. Poiché per ogni $g \in G$, $\varphi_g \in \mathrm{Hom}(S^n)$, possiamo calcolarne il grado $\deg(\varphi_g)$. Osserviamo che, poiché φ è un omomorfismo e l'operazione in $\mathrm{Hom}(S^n)$ è quella di composizione, si ha, sfruttando le proprietà del grado,

$$\begin{aligned}\deg(\varphi_g)\deg(\varphi_{g^{-1}}) &= \deg(\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}) = \\ &= \deg(\varphi_e) = \deg(I_{S^n}) = 1.\end{aligned}$$

e quindi, poiché per definizione il grado è un intero,

$$\deg(\varphi_g) = \deg(\varphi_{g^{-1}}) = \pm 1.$$

Possiamo pertanto considerare la seguente applicazione

$$d : G \to \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2, \quad g \mapsto d(g) = \deg(\varphi_g).$$

Tale applicazione è ben definita per la precedente osservazione ed inoltre, se $g, h \in G$

$$\begin{aligned}d(hg) &= \deg(\varphi_{hg}) = \deg(\varphi_h \circ \varphi_g) = \\ &= \deg(\varphi_h)\deg(\varphi_g) = d(h)d(g),\end{aligned}$$

e pertanto d è un omomorfismo. Poiché l'azione è libera si ha che per ogni $g \in G \setminus \{e\}$, φ_g non ammette punti fissi, mentre $\varphi_e = I_{S^n}$ banalmente lascia tutti i punti fissi: pertanto, per le proprietà del grado, $d(g) = -1$ e $d(e) = 1$ dimostrando così che d è suriettiva ed ha nucleo banale. Pertanto, d è un isomorfismo e

$$G \simeq \mathbb{Z}/2.$$

□

Corollario 7. *Se $n > 0$, allora S^{2n} non è un gruppo topologico.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che ogni gruppo topologico agisce liberamente su se stesso. Se S^{2n} fosse un gruppo topologico, per il precedente Teorema,

$$S^{2n} \simeq \mathbb{Z}/2$$

e quindi $n = 0$. $\square$

In altre parole, tra le sfere S^n di dimensione pari, solo S^0 ammette una strutura di gruppo topologico.

[1] **Manetti, Marco**, *Topologia*, 2a edizione, Springer, (2008);

[2] **Megıa, Ignacio Santa-Marıa**, *Which spheres admit a topological group structure*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fıs. Quım. Nat. Zaragoza (2), 62, 75-79, (2007);

[3] **Samelson, Hans**, *Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten*, Commentarii Mathematici Helvetici, 13, 144-155, (1940).

Francesco Esposito: Si è laureato in Matematica presso il Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" dell'Università del Salento discutendo una tesi di Geometria Riemanniana. Attualmente è un dottorando del Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università del Salento.