Raffaele Vitolo*

LA FORMA DELL'UNIVERSO

La Relatività Generale di Einstein è la teoria dell'interazione che domina la struttura dell'Universo su scale cosmologiche: la gravità. Difatti la gravità e l'elettromagnetismo sono le uniche forze aventi raggio d'azione infinito. Tuttavia l'elettromagnetismo possiede cariche di due tipi che sono complessivamente presenti in parti uguali tra loro, quindi bilanciate. La gravità, invece, ha un solo tipo di carica (la massa), ed i suoi effetti si concentrano generando alcuni dei fenomeni più energetici dell'Universo, come le esplosioni delle *supernovae.* Queste idee sono ben diffuse anche al di là della ristretta cerchia degli specialisti.

Qualcosa di meno noto al pubblico è sotto quali forme la Relatività Generale sia enunciata. In accordo con le fondamentali intuizioni di Galileo sul 'linguaggio della natura', la teoria della Relatività Generale è l'esempio principe di modello geometrico per una teoria fisica. Più precisamente, la Relatività Generale è una teoria assiomatico-deduttiva espressa nel linguaggio matematico della Geometria Differenziale. Con 'teoria assiomatico-deduttiva' si intende una teoria di tipo matematico che, a partire da assiomi ispirati dall'analisi della realtà fisica, permette di ricavare una completa descrizione della dinamica dell'Universo governata principalmente dall'interazione gravitazionale, ma che tiene conto anche dell'interazione elettromagnetica. La Geometria Differenziale è la moderna scienza degli enti geometrici denominati *varietà,* la cui nascita si fa risalire a Riemann,

* *Dipartimento di Matematica, Università di Lecce.*

nella seconda metà del 1800. Per capire la natura dello spazio-tempo di Einstein è necessario spiegare più in dettaglio cosa siano le varietà (cfr. W. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, NY 1975 per maggiori dettagli).

Si consideri lo spazio euclideo S. Porre un sistema di riferimento S significa dare una corrispondenza biunivoca tra i punti di S e l'insieme R^3 delle terne di numeri reali (x1, x2, x3). Quest'idea, dovuta a Cartesio, permette di quantificare lo spazio, e quindi di operare sullo spazio con gli strumenti dell'Algebra e dell'Analisi Infinitesimale. Generalmente, i matematici indicano con R^n l'insieme delle n-uple di numeri reali (x1, x2, ..., xn). Allora è naturale introdurre generalizzazioni dello spazio euclideo S a spazi in cui siano necessarie più di 3 coordinate per rappresentarne i punti. Uno dei pionieri nello studio di questi spazi fu Grassmann, circa nella metà del 1800. La generalizzazione successiva, dovuta a Riemann, fu l'introduzione del concetto di varietà, ovvero di quello che anche molti specialisti impropriamente chiamano 'spazio curvo', o '*continuum* spazio-temporale'.

Per capire cosa sia una varietà è utile iniziare da un esempio. Si consideri una superficie sferica. Regioni sufficientemente piccole e regolari (si pensi ad una calotta sferica) di questa sono in corrispondenza biunivoca con regioni di R^2, ovvero due coordinate sono necessarie e sufficienti per descriverne i punti. Tuttavia la superficie sferica non è in corrispondenza biunivoca con R^2. Per rendersi conto di questo basti osservare che la sfera ha estensione finita, mentre R^2 non ha estensione finita. A questo concetto, così come al concetto di 'sufficientemente piccola regione di spazio', può essere dato un significato matematico rigoroso, ma relativamente distante da quello che suggerisce l'intuizione. La scienza che si occupa di questo tipo di problemi è detta Topologia, ed è una conquista relativamente recente della Geometria (è nata nel secolo scorso), proprio a causa della sua relativa distanza dall'intuizione immediata dei concetti di 'vicino' e 'lontano', di 'limitato' ed 'illimitato' in Geometria. Ebbene, una varietà di dimensione n è un insieme tale che ogni suo punto appartiene ad una regione di spazio sufficientemente piccola che è in corrispondenza biunivoca con R^n. Pertanto una varietà di dimensione n è un ente geometrico che consiste di tante regioni di R^n incollate a formare una figura geometrica complessa. In ognuna delle dette regioni è possibile introdurre coordinate *locali* mediante la data corrispondenza biunivoca con R^n. Ovviamente l'intuizione spaziale aiuta la visualizzazione di oggetti in R^3 ma non permette di visualizzare oggetti in spazi di dimensione elevata, quindi è generalmente impossibile l'intuizione spaziale della 'forma' di una varietà. Tuttavia, essendo formata da regioni di R^n, una varietà permette di sviluppare su di essa il calcolo infinitesimale già noto in R^n, ossia è possibile introdurre la definizione di derivata in una varietà.

La relazione tra le varietà e la Relatività Generale è semplice: per la Relatività Generale lo spazio-tempo è costituito da una varietà M di dimensione 4. Ricordando che questo significa che ogni punto può essere descritto tramite 4 coordinate, si ha che non tutte queste coordinate possono essere coordinate dello spazio fisico. Usualmente (ma non sempre!) una di queste è il tempo. Si osservi che la velocità della luce *c* ha dimensioni di una lunghezza diviso un tempo, quindi la moltiplicazione di *c* per il tempo dà una grandezza spaziale. Pertanto, il tempo può essere assimilato ad una grandezza spaziale usando la velocità della luce come fattore di conversione (che, per assioma, si assume costante) (cfr. R. Resnick, *Introduzione alla relatività ristretta*, ed. Ambrosiana, Milano 1979). Dunque, l'universo è rappresentato nel modello assiomatico-deduttivo da una varietà di dimensione 4. Questo è l'assioma di base della Relatività Generale. Si noti che la Relatività Speciale fu formulata usando come varietà uno spazio M, detto spazio-tempo di Minkowski, che ammette una corrispondenza biunivoca con lo spazio R^4, e pertanto è anche (impropriamente) detto spazio-tempo *piatto*. Ovviamente essa può essere vista come un caso particolare della Relatività Generale.

Le precedenti considerazioni non permettono di stabilire la dinamica degli oggetti dotati di massa presenti nell'Universo. La dinamica è data dalla distribuzione delle masse nel modo che segue. In M è possibile introdurre un modo di misurare le distanze tra coppie di punti, detto metrica (cfr. W. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, *Gravitation*, ed. Freeman, S. Francisco 1973). La metrica si esprime, in una regione di M ove siano state introdotte coordinate, mediante una tabella di 16 funzioni delle 4 coordinate, indicate con g(ij), dove i e j sono indici che variano tra 1 e 4. E' possibile usare coordinate locali tali che g(ij) è non nullo solo per i=j. In una tale regione di spazio il quadrato della distanza tra il punto (x1, x2, x3, x4) ed il punto (x1', x2', x3', x4') è data dall'espressione g(11)(x1'-x1)^2+ g(22)(x2'-x2)^2+ g(33)(x3'-x3)^2+ g(44)(x4'-x4)^2. Si può, dunque, pensare che la precedente sia una generalizzazione del quadrato della distanza tra due punti del piano (p1, p2) e (q1, q2), che il teorema di Pitagora dà come (q1-p1)^2+(q2-p2)^2; e si possono interpretare i coefficienti g(ij) come dei fattori di 'dilatazione' che inducono una variazione non omogenea nell'unità di misura delle distanze. Ma bisogna tenere presente che questa 'distanza' è qualcosa di lontano dalla nostra intuizione, e misura un intervallo spazio-temporale, non un intervallo spaziale ordinario. Lo si può capire con il seguente esempio. Si possono scegliere le coordinate in modo che x1, x2, x3 siano coordinate spaziali, ed x4 una coordinata temporale. Pertanto è possibile che, per portarsi da un punto all'altro sia necessario muoversi più velocemente della luce (ad esempio, se x1 è molto distante da x1' ma i tempi x4 ed x4' sono molto ravvicinati). Il quadrato della distanza spaziale g(11)(x1'-x1)^2+ g(22)(x2'-x2)^2+ g(33)(x3'-x3)^2 deve essere, dunque, minore del quadrato della distanza temporale c^2 g(44)(x4'-x4)^2. Questo pone importanti restrizioni sulla metrica, che si analizzeranno in seguito.

La relazione tra la distribuzione delle masse e la metrica è la seguente. I corpi dotati di massa hanno influenza sui moti di altri corpi dotati di massa (e viceversa). In assenza di altri corpi, il moto di una particella avviene in linea retta, secondo la prima legge di Newton. D'altra parte in Relatività Generale si postula che il moto di una particella avvenga in modo da rendere (almeno localmente) minima la distanza percorsa, secondo il principio di Hamilton (o principio di minima azione, valido anche in molte altre teorie fisiche). Pertanto, si vede che il moto delle particelle è determinato dalla metrica. Ma a sua volta come si può determinare la metrica? Prese due particelle vicine, e lanciatele nello spazio a velocità uguali in direzione, verso, ed intensità, se nello spazio non ci sono masse (e trascurando l'interazione tra le particelle), le particelle si muoveranno su traiettorie parallele, altrimenti le traiettorie divergeranno, o convergeranno. La misura di questa deviazione si dice *curvatura,* ed è funzione della metrica (in particolare, dipende in maniera essenziale dalle derivate seconde dei coefficienti g(ij) rispetto alle coordinate). Si giunge così all'equazione che determina la metrica, l'equazione di Einstein: le metriche ammissibili sullo spazio-tempo sono tutte e sole quelle tali che una 'parte' della loro curvatura, detta tensore di Einstein, sia uguale ad una quantità, detta tensore energia-impulso, che è determinata dalla distribuzione delle masse nello spazio.

E' stata così riassunta la struttura della Relatività Generale come teoria assiomatico-deduttiva. Ora ci si concentrerà su un aspetto di questa teoria che spesso è trascurato nei libri di testo, ma che può dare adito ad interessanti conseguenze dal punto di vista filosofico. Mentre si è visto che le quantità fisicamente rilevanti (i coefficienti della metrica) possono essere determinati con una equazione sui suoi coefficienti, e che queste quantità determinano la dinamica delle particelle, non c'è nessuna equazione che permetta di ricavare la struttura dello spazio-tempo M come insieme dotato di una *topologia* (cfr. V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano 1968). Una topologia è una struttura di sottoinsiemi assegnati in M che permette, a livello locale, di stabilire quali siano i cosiddetti 'intorni' di ogni punto, ed a livello globale di determinare la *forma* di M, a meno di deformazioni continue di M. L'esempio classico è quello della sfera: essa è un esempio di insieme *compatto* (grosso modo perché è limitato, ma non solo per questo) e *connesso* (perché è un insieme che consta di 'una sola parte'). Un esempio di insieme non compatto è il piano euclideo, perché ha estensione infinita, ed un esempio di insieme non connesso è l'insieme dei numeri naturali all'interno dell'insieme dei numeri reali, perché è costituito da infiniti punti 'disgiunti' (o 'non aderenti'). Le precedenti definizioni hanno una ben nota formalizzazione matematica, che ammette una descrizione intuitiva che è quella esposta.

Ogni varietà possiede una topologia, ma in uno spazio-tempo M la topologia non è determinata direttamente dalle equazioni di Einstein.

Per illustrare la precedente affermazione, è necessario ricordare che l'equazione di Einstein non coinvolge direttamente la topologia. Tuttavia, si può dimostrare che se esiste una soluzione delle equazioni di Einstein in un dato spazio-tempo, allora lo spazio-tempo deve avere caratteristica di Eulero-Poincaré nulla. Questo numero è di natura topologica: per un insieme non compatto è zero, ma per un insieme compatto può essere diverso da zero. In particolare, questo numero per i poliedri vale 2 ed è uguale alla somma del numero dei vertici e del numero delle facce diminuito del numero degli spigoli. Questo dimostra come, indirettamente, la topologia sia condizionata dalle equazioni di Einstein: M non può avere caratteristica di Eulero-Poincaré diversa da zero. Il precedente è un esempio di quello che in gergo prende il nome di *ostruzione topologica*. Ci sono altri esempi di ostruzione topologica in Relatività Generale. Ma, una volta rimosse anche queste possibilità, rimangono ampi margini di incertezza sulla conoscibilità della topologia dell'Universo. Si noti che la topologia dell'Universo può avere grandissima influenza sulle nostre stesse vite: ci sono esempi di spazio-tempo compatto (Gödel) dove alcune traiettorie di particelle sono chiuse, quindi permettono di ritornare indietro nel tempo. Questo non sembra essere vero nel nostro Universo, ma allo stato attuale delle conoscenze non si può del tutto escludere. Un altro interessante risultato con influenze topologiche è costituito dal teorema di Hawking. Nella sostanza il teorema dice che se si considera un Universo in espansione dove sia presente una funzione che caratterizza lo scorrere del tempo in una direzione privilegiata (nel nostro Universo questa grandezza è rappresentata dall'entropia: essa aumenta con il passare del tempo), allora le traiettorie di tutte le particelle dell'Universo non possono essere estese indefinitamente all'indietro nel tempo. Questo implica l'esistenza di un evento del tipo del Big Bang.

Sarà ora analizzato il problema della ricerca della forma dell'Universo, ossia della sua struttura topologica (cfr. M. Reboucas, *A brief introduction to cosmic topology*, http://arXiv.org/abs/astro-ph/0504365). Si pensa che l'Universo possegga una metrica del tipo di Robertson-Walker su scala cosmica (cfr. W. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, *Gravitation*, op. cit.). Questo significa, grosso modo, che l'Universo sia spazialmente finito ed in espansione, con distribuzioni di massa concentrate in piccoli volumi di spazio (pianeti, stelle, galassie su diverse scale). Una delle possibili deviazioni topologiche dalla classica immagine dello spazio-tempo come continuo è l'esistenza di un 'buco' nello spazio-tempo, ossia di una regione in cui lo spazio-tempo non esiste. Il modo di rilevare uno di questi buchi è il seguente. Si consideri un piano privato di un punto. Si consideri una circonferenza con centro in questo punto. Allora non è possibile restringere con continuità la circonferenza al punto. Pertanto, dati due punti in posizioni diametralmente opposte rispetto al buco, essi si possono congiungere con due traiettorie, ciascuna delle quali minimizza la distanza tra i due punti. Per analogia, data una sorgente di luce puntiforme dalla parte opposta del 'buco', è possibile che essa si manifesti all'osservatore mediante due immagini distinte, ognuna ottenuta mediante raggi di luce aventi percorsi differenti intorno al 'buco'. Quindi la ricerca di immagini multiple di un singolo oggetto è lo strumento principe per la ricerca della topologia dell'Universo. Purtroppo sorgono alcuni problemi pratici:

1. Due immagini dello stesso oggetto possono essere state generate in tempi diversi, perché il percorso della luce dall'oggetto all'osservatore può essere di lunghezze spazio-temporali diverse. Pertanto può essere difficile riconoscere che le immagini provengono dallo stesso oggetto.
2. Le immagini possono essere viste da angoli diversi, il che rende difficile l'identificazione.
3. Il mezzo interstellare può oscurare parte di un'immagine e lasciar passare un'altra immagine.

I metodi usati attualmente per la ricerca di 'buchi' nell'Universo sono di tipo statistico. In sostanza, preso un catalogo di oggetti luminosi (stelle, galassie, ecc.) si considerano tutte le coppie di oggetti, e si calcola la differenza tra alcuni parametri fondamentali (posizione nell'Universo, spettro della radiazione elettromagnetica emessa dagli oggetti, ecc.). Gli oggetti con le differenze minori sono candidati ad essere rappresentazioni della stessa sorgente generate dal passaggio della luce per due percorsi diversi. Tuttavia, da un lato non si è ancora trovata evidenza sperimentale di 'buchi' nello spazio-tempo, e dall'altro non si riesce neppure a determinare un metodo per capire quale possa essere la forma di un 'buco'. Come esempio, è stato dimostrato che ci sono delle difficoltà a determinare se un 'buco' sia della forma di R^3 privato di un punto o R^3 privato di una retta, quindi se il 'buco' sia indefinitamente esteso oppure limitato.

Per completare questa descrizione, è necessario menzionare i cosiddetti buchi neri, e la loro relazione con i problemi topologici di cui si è parlato sopra. Questi sono dei corpi così massicci che la luce non riesce a sfuggire alla loro attrazione gravitazionale. Ora, il modello di buco nero usato in Relatività Generale possiede una singolarità centrale: al centro del buco nero alcuni dei coefficienti della metrica diventano infiniti perché la loro espressione contiene un denominatore che si annulla nel centro. Pertanto, a rigore, il centro del buco nero deve essere rimosso dallo spazio-tempo. Questo significa solamente che non si è in grado di descrivere il centro del buco nero all'interno del modello. Fenomeni di questo tipo succedono tutte le volte in cui la concentrazione di energia e le piccole distanze rendono differente la fisica vicino al punto considerato. Come esempio si consideri la forza di Coulomb di attrazione di due cariche di segno opposto: essa è proporzionale a 1/r^2, ove r è la distanza tra le cariche. Chiaramente quando la distanza tra le cariche tende a 0 la forza diventa infinita secondo questa legge, ma le osservazioni fisiche ci dicono che a distanza ravvicinata altre forze prendono il sopravvento, come la forza nucleare debole o la forza nucleare forte, con il risultato che la forza di Coulomb passa in secondo piano e la situazione si evolve in modo completamente diverso da come è predetto mediante la sola forza di Coulomb. Analogamente vicino al centro del buco nero prendono il sopravvento forze di cui, probabilmente, ora non si conosce neppure l'esistenza, per cui non si può dire se il centro del buco nero sia un 'buco' topologico oppure no.